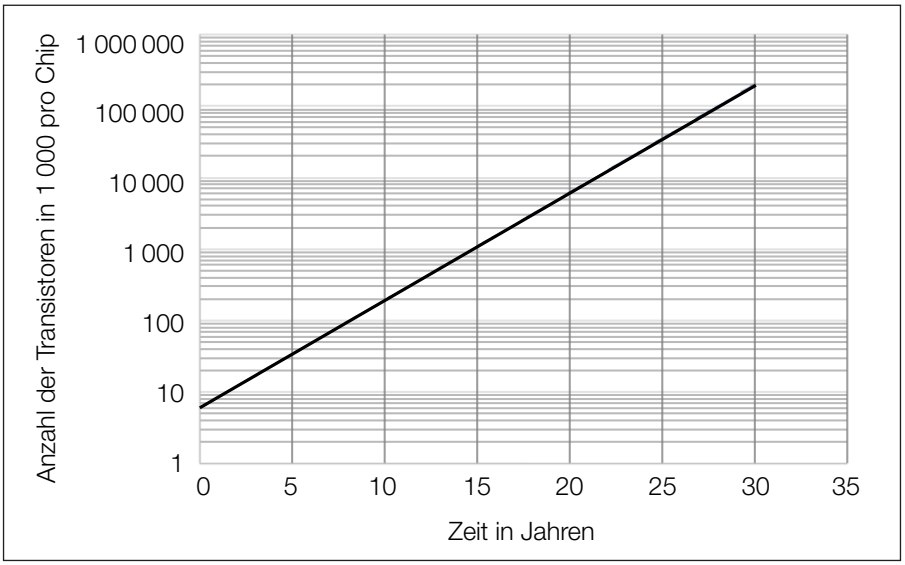
BMBWF
BUNDESMINISTERIUM
FÜR BILDUNG, WISSENSCHAFT
UND FORSCHUNG
www.bmbwf.gv.at

Computer

Aufgabennummer: B_370

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Das Moore'sche Gesetz beschreibt die Zunahme der Anzahl an Transistoren pro Chip in Abhängigkeit von der Zeit t in Jahren (siehe nachstehende Grafik). Für das Jahr 1974 wird die Zeit $t = 0$ Jahre festgelegt.



– Lesen Sie aus der obigen Grafik ab, nach wie vielen Jahren die Anzahl der Transistoren pro Chip erstmals 3 000 000 erreicht hat.

Für die Gleichung der in der Grafik veranschaulichten Funktion gilt:

$y(t) = y_0 \cdot e^{\lambda \cdot t}$

t … Zeit in Jahren
$y(t)$ … Anzahl der Transistoren in 1 000 Stück pro Chip

– Ermitteln Sie die Parameter y_0 und λ mithilfe der Grafik.

b) – Zeigen Sie, dass auf einer logarithmisch skalierten Achse der Abstand zwischen 10 und 20 größer dargestellt wird als der Abstand zwischen 80 und 90.
– Weisen Sie nach, dass eine Funktion mit der Gleichung $y = a \cdot b^x$ in einem Koordinatensystem mit logarithmischer Skalierung der y-Achse als Gerade dargestellt wird.

c) Ein Unternehmen produziert Bauteile für Computer. Die Gesamtkosten pro Tag für x produzierte ME können durch eine Polynomfunktion 3. Grades beschrieben werden.

$K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$

x … pro Tag produzierte Bauteile in ME
$K(x)$ … Gesamtkosten pro Tag bei x produzierten ME in Euro

Folgende Wertepaare sind bekannt:

x in ME	0	40	60
$K(x)$ in GE	12 000	27 520	30 720

Weiters ist bekannt, dass die Grenzkosten $K'(x)$ bei einer Produktion von 50 ME 157 GE/ME betragen.

– Stellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten a, b, c und d auf.
– Berechnen Sie die Koeffizienten a, b, c und d.
– Berechnen Sie die Stelle des Minimums der Grenzkostenfunktion.
– Interpretieren Sie die Bedeutung dieser Stelle im gegebenen Sachzusammenhang.

d) Die Lebensdauer einer Sorte Akkus ist annähernd normalverteilt. Eine Stichprobe vom Umfang $n = 80$ weist eine mittlere Lebensdauer von $\bar{x} = 1\,000$ Ladezyklen mit einer Standardabweichung von $s = 50$ Ladezyklen auf.

– Ermitteln Sie das Konfidenzintervall für den Erwartungswert μ der Grundgesamtheit mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 1$ %.
– Kreuzen Sie die richtige Behauptung an. *[1 aus 5]*

Die Breite des $(1-\alpha)$-Konfidenzintervalls ist vom Stichprobenumfang n unabhängig.	☐
Das $(1-\alpha)$-Konfidenzintervall für μ wird schmäler, wenn $\bar{x}$ kleiner wird.	☐
Das $(1-\alpha)$-Konfidenzintervall für μ wird breiter, wenn α verkleinert wird.	☐
Die Breite des $(1-\alpha)$-Konfidenzintervalls für μ ist von s unabhängig.	☐
Wenn σ bekannt ist, ist das $(1-\alpha)$-Konfidenzintervall für μ breiter als bei unbekanntem σ.	☐

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Nach etwa 18 Jahren ist die Anzahl an Transistoren pro Chip auf 3 000 000 angewachsen. Das entspricht dem Jahr 1992.

Ablesen von 2 Funktionswerten, z. B. $y(0) = 6$, $y(30) = 200\,000$
$y_0 = 6$
$200\,000 = 6 \cdot e^{30 \cdot \lambda}$
$\ln\left(\frac{200\,000}{6}\right) = 30 \cdot \lambda$
$\lambda = 0{,}347\ldots$
$y(t) = 6 \cdot e^{0{,}347\ldots \cdot t}$

b) Da $\lg(20) - \lg(10) = 0{,}301\ldots$ ist und $\lg(90) - \lg(80) = 0{,}051\ldots$ ist, ist der Abstand auf der logarithmisch skalierten Achse zwischen 10 und 20 größer als zwischen 80 und 90.

$y = a \cdot b^x$
$\lg(y) = \lg(a) + x \cdot \lg(b)$
Diese Form entspricht einer Geraden, wenn die y-Achse logarithmisch skaliert ist.

c) $K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$
$K'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x + c$

I: $K(0) = 12\,000 \Rightarrow 12\,000 = d$
II: $K(40) = 27\,520 \Rightarrow 40^3 \cdot a + 40^2 \cdot b + 40 \cdot c + d = 27\,520$
III: $K(60) = 30\,720 \Rightarrow 60^3 \cdot a + 60^2 \cdot b + 60 \cdot c + d = 30\,720$
IV: $K'(50) = 157 \Rightarrow 3 \cdot 50^2 \cdot a + 2 \cdot 50 \cdot b + c = 157$

$K(x) = 0{,}03 \cdot x^3 - 6{,}8 \cdot x^2 + 612 \cdot x + 12\,000$

Berechnung der Minimumstelle:
$K'(x) = 0{,}09 \cdot x^2 - 13{,}6 \cdot x + 612$
$K''(x) = 0{,}18 \cdot x - 13{,}6$
$0{,}18 \cdot x - 13{,}6 = 0$
$x = 75{,}555\ldots$

Bei rund 75,56 produzierten ME ist der Kostenanstieg bei einer zusätzlich produzierten ME am geringsten.

d) Zweiseitigen 99-%-Vertrauensbereich mithilfe der t-Verteilung bestimmen:

$1\,000 \pm t_{f;1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{50}{\sqrt{80}}$

$n = 80 \Rightarrow f = 79$

$t_{79;0,995} = 2{,}639...$

Daraus ergibt sich folgender Vertrauensbereich für μ:
[985,24; 1014,76] (Intervallgrenzen gerundet)

Das $(1-\alpha)$-Konfidenzintervall für μ wird breiter, wenn α verkleinert wird.	☒

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 4 Analysis
d) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) —
c) —
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) —
c) A Modellieren und Transferieren, C Interpretieren und Dokumentieren
d) C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:

a) schwer
b) schwer
c) mittel
d) mittel

Punkteanzahl:

a) 3
b) 2
c) 4
d) 2

Thema: Sonstiges

Quelle: www.computerbild.de/artikel/cb-Ratgeber-Kurse-Wissen-Prozessor-CPU-2999823.html

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

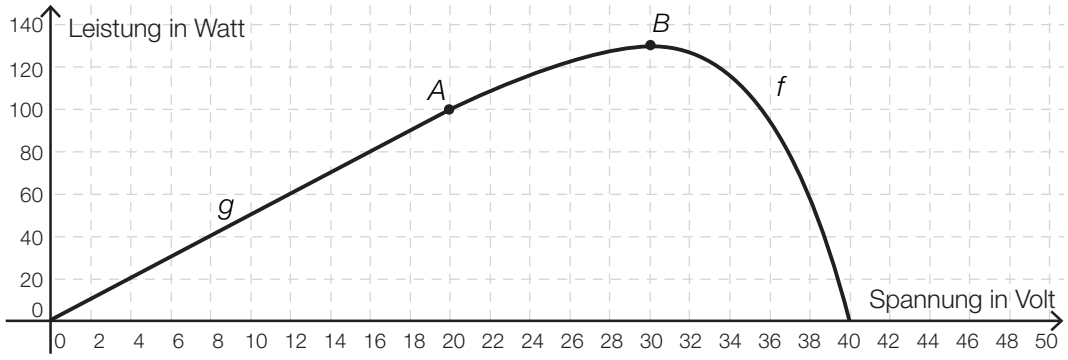
Solarzelle

Aufgabennummer: B_262

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Eine Solarzelle wandelt kurzwellige Strahlungsenergie, wie zum Beispiel Sonnenlicht, direkt in elektrische Energie um.

a) In der nachstehenden Grafik ist die Leistungskurve einer Solarzelle dargestellt:



Der Verlauf der Leistungskurve wird im Intervall [0; 20] durch eine lineare Funktion g und im Intervall [20; 40] durch eine Polynomfunktion f vom Grad 4 beschrieben. Im Punkt A gehen die beiden Funktionsgraphen knickfrei ineinander über (das bedeutet, dass die Funktionen an der Stelle den gleichen Funktionswert und die gleiche Steigung haben). Im Punkt B hat die Funktion f einen Hochpunkt. Die maximale Leistung der Solarzelle beträgt 130 Watt.

$f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$

x ... Spannung in Volt mit $20 \leq x \leq 40$
$f(x)$ ... Leistung bei der Spannung x in Watt

– Stellen Sie ein Gleichungssystem auf, mit dem die Koeffizienten a, b, c, d und e berechnet werden können.

b) Wenn keine elektrische Energie erzeugt wird, entladen sich die eingebauten Kondensatoren. Der zeitabhängige Spannungsverlauf kann dabei durch eine Exponentialfunktion beschrieben werden.

Die Spannung wurde zu zwei unterschiedlichen Zeitpunkten gemessen. Für $t = 0$ ms beträgt die Spannung 10 Volt und für $t = 20$ ms beträgt die Spannung 5 Volt.

– Stellen Sie eine Gleichung derjenigen Funktion u auf, die die Entladung des Kondensators beschreibt.

Der Entladevorgang kann auch durch eine Differenzialgleichung beschrieben werden.

– Kreuzen Sie diejenige Differenzialgleichung an, die den Entladevorgang richtig beschreibt. *[1 aus 5]*

t ... Zeit in ms
$u(t)$ ... Spannung zur Zeit t in Volt
$k > 0$ … Proportionalitätsfaktor

$\frac{du(t)}{dt} = k \cdot u(t)$	☐
$\frac{du(t)}{dt} = -k$	☐
$\frac{du(t)}{dt} = -k \cdot u(t)$	☐
$\frac{du(t)}{dt} = k \cdot t$	☐
$\frac{du(t)}{dt} = -k \cdot t$	☐

c) Der Energieertrag von Photovoltaikanlagen eines bestimmten Typs ist annähernd normalverteilt mit einer Standardabweichung von $\sigma = 6$ Kilowattstunden (kWh).

Für 10 zufällig ausgewählte Anlagen dieses Typs wurden folgende Energieerträge in kWh gemessen:

195	198	210	204	196	202	210	199	192	201

– Berechnen Sie das arithmetische Mittel $\overline{x}$ der Messwerte.
– Ermitteln Sie das zweiseitige 95-%-Konfidenzintervall für den Erwartungswert μ des Energieertrags.
– Beschreiben Sie, wie sich die Breite des Konfidenzintervalls ändert, wenn die Irrtumswahrscheinlichkeit α kleiner wird.

d) Ein anderer Hersteller produziert Solarzellen, deren Arbeitsspannung annähernd normalverteilt ist mit dem Erwartungswert $\mu = 0{,}65$ Volt und der Standardabweichung $\sigma = 0{,}15$ Volt.

– Berechnen Sie, wie viel Prozent dieser Solarzellen mit einer Spannung von mehr als 0,8 Volt arbeiten.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Aufstellen des Gleichungssystems:

I: $f(20) = 100 \Rightarrow 160\,000 \cdot a + 8\,000 \cdot b + 400 \cdot c + 20 \cdot d + e = 100$

II: $f'(20) = 5 \Rightarrow 32\,000 \cdot a + 1\,200 \cdot b + 40 \cdot c + d = 5$

III: $f(30) = 130 \Rightarrow 810\,000 \cdot a + 27\,000 \cdot b + 900 \cdot c + 30 \cdot d + e = 130$

IV: $f'(30) = 0 \Rightarrow 108\,000 \cdot a + 2\,700 \cdot b + 60 \cdot c + d = 0$

V: $f(40) = 0 \Rightarrow 2\,560\,000 \cdot a + 64\,000 \cdot b + 1\,600 \cdot c + 40 \cdot d + e = 0$

b) t ... Zeit in ms

$u(t)$ ... Spannung zur Zeit t in Volt

$u(t) = u_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$

$u_0 = 10$

$5 = 10 \cdot e^{-20 \cdot \lambda} \Rightarrow \lambda = 0{,}03465...$

$u(t) = 10 \cdot e^{-0{,}03465... \cdot t}$

[...]	
[...]	
$\frac{du(t)}{dt} = -k \cdot u(t)$	☒
[...]	
[...]	

c) $\overline{x} = 200{,}7$ kWh

Zweiseitiges 95-%-Konfidenzintervall mithilfe der Normalverteilung bestimmen:

$200{,}7 \pm z_{0{,}975} \cdot \frac{6}{\sqrt{10}}$

$z_{0{,}975} = 1{,}959...$

Daraus ergibt sich folgendes Konfidenzintervall μ in kWh:
[196,98; 204,42] (Intervallgrenzen gerundet)

Wird die Irrtumswahrscheinlichkeit kleiner, so wird das Konfidenzintervall breiter.

d) $P(X > 0{,}8) = 0{,}15865\ldots$
Rund 15,87 % der Solarzellen arbeiten mit einer Spannung von mehr als 0,8 Volt.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A1: für das Aufstellen der Gleichungen I, III und V (u)
1 × A2: für das Aufstellen der Gleichung II (u)
1 × A3: für das Aufstellen der Gleichung IV (u)

b) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung (u)
1 × C: für das richtige Ankreuzen (u)

c) 1 × B1: für die richtige Berechnung des Mittelwertes (u)
1 × B2: für das richtige Ermitteln des Konfidenzintervalls (a)
1 × C: für die richtige Beschreibung (u)

d) 1 × B: für die richtige Berechnung des Prozentsatzes (u)

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 5 Stochastik
d) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 4 Analysis
c) —
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) A Modellieren und Transferieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) C Interpretieren und Dokumentieren
d) —

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel
d) leicht

Punkteanzahl:

a) 3
b) 2
c) 3
d) 1

Thema: Physik

Quellen: Teile dieser Aufgabe sind im Zuge des ITW-Seminars Graz 2014 entstanden.

Attersee*

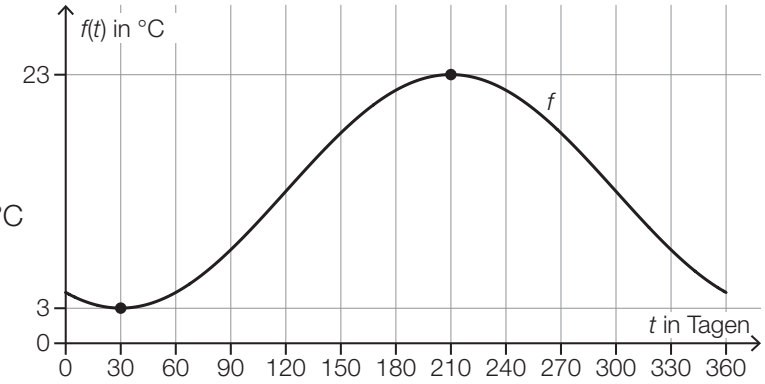
Aufgabennummer: B_524

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Der zeitliche Verlauf der Temperatur des Attersees kann modellhaft durch die Funktion f beschrieben werden (siehe nachstehende Abbildung).

$$f(t) = a \cdot \sin\left(b \cdot t - \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) + c$$
mit $0 \le t \le 360$

t ... Zeit in Tagen
$f(t)$ ... Temperatur zur Zeit t in °C
a, b, c ... Parameter



1) Ermitteln Sie mithilfe der obigen Abbildung den Parameter b.

2) Ordnen Sie den beiden Größen jeweils den zutreffenden Zahlenwert aus A bis D zu.

Amplitude von f	
linearer Mittelwert (Integralmittelwert) von f im Intervall [30; 210]	

A	10
B	12
C	13
D	23

Zur Zeit $t = 120$ betrug die tatsächlich gemessene Temperatur 12 °C.

3) Geben Sie den Betrag des absoluten Fehlers an, der entsteht, wenn man statt der tatsächlich gemessenen Temperatur den Funktionswert an der Stelle $t = 120$ verwendet.

* ehemalige Klausuraufgabe

Zur Überprüfung der Qualität der Modellfunktion f werden 1 000 Messwerte y_i der Temperatur zu verschiedenen Zeiten t_i erhoben.

Für jeden dieser Messpunkte $(t_i | y_i)$ wird die Differenz des Messwerts y_i zum Funktionswert $f(t_i)$ ermittelt. Diese Differenzen werden jeweils quadriert und danach aufsummiert. Die so erhaltene Summe wird mit s bezeichnet.

4) Vervollständigen Sie die nachstehende Formel zur Berechnung von s.

$$s = \sum_{i=1}^{1\,000} \square$$

b) Der pH-Wert von Wasser wird mithilfe der Konzentration c der Wasserstoffionen berechnet.

Auf der nachstehenden logarithmischen Skala ist die Konzentration c_1 einer Wasserprobe aus dem Attersee eingetragen.



1) Lesen Sie den Wert von c_1 ab.

c_1 = _____ mol/L

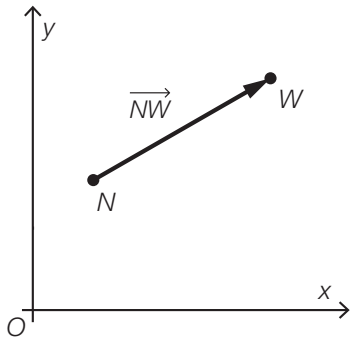
Für den Zusammenhang zwischen der Konzentration c und dem pH-Wert gilt: $\text{pH} = -\lg(c)$.

Eine andere Wasserprobe wird untersucht. Das Messgerät zeigt dabei einen pH-Wert von 8,0 an. Aufgrund der Messungenauigkeit muss der tatsächliche pH-Wert der Wasserprobe zwischen 7,9 und 8,1 liegen. Die Konzentration, die einem pH-Wert von 8,0 entspricht, wird mit c_2 bezeichnet.

2) Berechnen Sie, um wie viel Prozent die Konzentration der Wasserprobe höchstens unter bzw. über der Konzentration c_2 liegt.

c) Die beiden Orte Nußdorf und Weyregg liegen auf einander gegenüberliegenden Ufern des Attersees.

Die Schiffsanlegestellen Nußdorf (*N*) und Weyregg (*W*) sind im nachstehenden Koordinatensystem dargestellt.



Die Entfernung zwischen den Punkten *N* und *W* beträgt 3,5 km.
Die Gerade durch die Punkte *N* und *W* hat den Richtungsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1) Ermitteln Sie den Vektor $\overrightarrow{NW}$.

Möglicher Lösungsweg

a1) $\frac{T}{2} = 180 \quad \Rightarrow \quad b = \frac{2 \cdot \pi}{360} = \frac{\pi}{180}$

a2)

Amplitude von f	A
linearer Mittelwert (Integralmittelwert) von f im Intervall [30; 210]	C

A	10
B	12
C	13
D	23

a3) $|f(120) - 12| = 13 - 12 = 1$

Der Betrag des absoluten Fehlers beträgt 1 °C.

a4) $s = \sum_{i=1}^{1.000} (y_i - f(t_i))^2 \quad oder \quad \sum_{i=1}^{1.000} (f(t_i) - y_i)^2$

b1) $c_1 = 2 \cdot 10^{-8}$ mol/L

b2) $\frac{10^{-8,1} - 10^{-8}}{10^{-8}} = -0{,}205...$

$\frac{10^{-7,9} - 10^{-8}}{10^{-8}} = 0{,}258...$

Die Konzentration c_2 wird höchstens um rund 21 % unter- bzw. um rund 26 % überschritten.

c1) $\overrightarrow{NW} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot 3{,}5 = \begin{pmatrix} 2{,}8 \\ 2{,}1 \end{pmatrix}$ (Längen in km)

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln des Parameters b.
a2) Ein Punkt für das richtige Zuordnen.
a3) Ein Punkt für das Angeben des richtigen Wertes.
a4) Ein Punkt für das richtige Vervollständigen der Formel.
b1) Ein Punkt für das Ablesen des richtigen Wertes von c_1.
b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der beiden Prozentsätze.
c1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln des Vektors $\overrightarrow{NW}$.

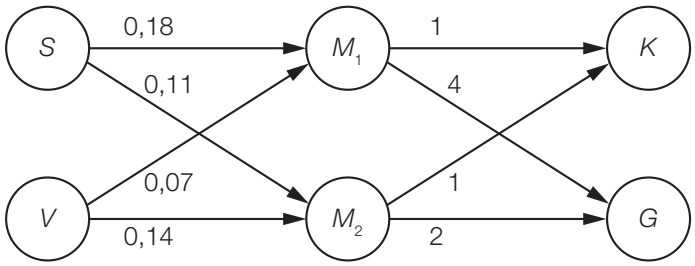
Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Puddingmischungen*

Aufgabennummer: B_529

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Aus reinen Puddingsorten werden verschiedene Mischsorten produziert. Diese werden in verschiedenen Packungen verkauft. Der nachstehende Gozinto-Graph bildet diesen Produktionsprozess ab.



S ... reiner Schokoladepudding (in Litern)
V ... reiner Vanillepudding (in Litern)

M_1 ... Mischsorte 1: Schokoladepudding mit Vanille-Sprenkeln (in Bechern)
M_2 ... Mischsorte 2: Vanillepudding mit Schoko-Sprenkeln (in Bechern)

K ... Kleinpackungen (in Stück)
G ... Großpackungen (in Stück)

a) 1) Ermitteln Sie den Prozentsatz an Schokoladepudding in einem Becher M_1.

2) Übertragen Sie den Gozinto-Graphen in 2 Matrizen, die den Mengenbedarf an reinen Puddingsorten für die Mischsorten bzw. den Mengenbedarf an Mischsorten für die Packungen beschreiben.

Ein Supermarkt bestellt 300 Klein- und 200 Großpackungen.

3) Ermitteln Sie die dafür jeweils benötigte Menge an Schokolade- und Vanillepudding in Litern.

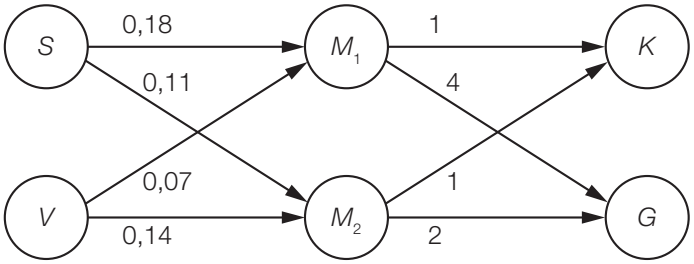
* ehemalige Klausuraufgabe

b) Der Produktionsablauf wird verändert. Die quadratische Matrix $\boldsymbol{A}$ beschreibt die Produktionsverflechtungen zwischen den reinen Puddingsorten, den Mischsorten und den Packungen (in der Reihenfolge S, V, M_1, M_2, K, G).

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}18 & 0{,}11 & 0 & \mathbf{0{,}50} \\ 0 & 0 & 0{,}07 & 0{,}14 & 0 & \mathbf{0{,}25} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Neu dabei sind: $a_{16} = 0{,}50$ und $a_{26} = 0{,}25$.

1) Zeichnen Sie diese beiden neuen Verflechtungen im nachstehenden Gozinto-Graphen ein.



Der Vektor $\vec{\boldsymbol{x}}$ soll die benötigten Mengen an reinen Puddingsorten, Mischsorten und Packungen (in der Reihenfolge S, V, M_1, M_2, K, G) beschreiben.

2) Ermitteln Sie diesen Vektor $\vec{\boldsymbol{x}}$ für eine Nachfrage von 300 Klein- und 200 Großpackungen.

Für eine andere Nachfrage ergibt sich anstelle von $\vec{\boldsymbol{x}}$ der Vektor $\vec{\boldsymbol{x}}_1 = \begin{pmatrix} 461 \\ 264 \\ 1\,300 \\ \mathbf{700} \\ 100 \\ 300 \end{pmatrix}$.

3) Interpretieren Sie den Eintrag 700 dieses Vektors im gegebenen Sachzusammenhang.

4) Beschreiben Sie, wie sich eine zusätzliche direkte Nachfrage nach reinem Schokoladepudding im Ausmaß von 100 Litern auf den Vektor $\vec{\boldsymbol{x}}_1$ auswirkt.

c) Der Produktionsprozess wird auf andere Puddingsorten erweitert.
Aus a reinen Puddingsorten werden b verschiedene Mischsorten produziert, die wiederum in c verschiedenen Packungsgrößen abgepackt werden. Die quadratische Matrix $\boldsymbol{B}$ beschreibt die Produktionsverflechtungen zwischen den reinen Puddingsorten, den Mischsorten und den Packungen.

1) Ordnen Sie den beiden Eigenschaften von $\boldsymbol{B}$ jeweils die zutreffende Berechnung aus A bis D zu.

Anzahl der Matrixelemente von $\boldsymbol{B}$	
Anzahl der Zeilen von $\boldsymbol{B}$	

A	$a \cdot b \cdot c$
B	$a + b + c$
C	$(a + b + c) \cdot 2$
D	$(a + b + c)^2$

Möglicher Lösungsweg

a1) $\frac{0{,}18}{0{,}18 + 0{,}07} = 0{,}72$

In einem Becher M_1 sind 72 % Schokoladepudding enthalten.

a2) Matrix für den Mengenbedarf an reinen Puddingsorten für die Mischsorten:

$\begin{pmatrix} 0{,}18 & 0{,}11 \\ 0{,}07 & 0{,}14 \end{pmatrix}$

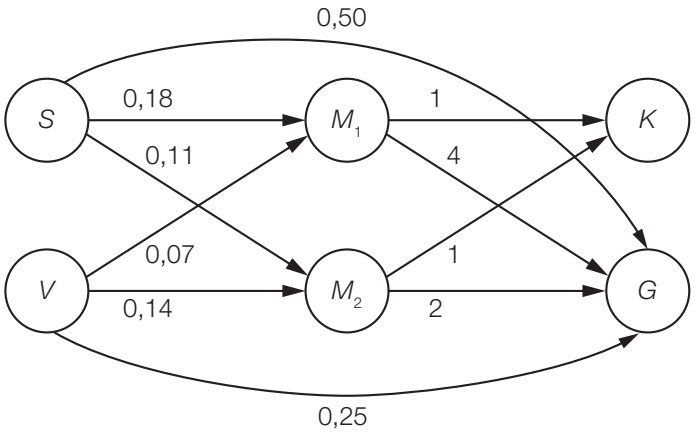
Matrix für den Mengenbedarf an Mischsorten für die Packungen:

$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

a3) $\begin{pmatrix} 0{,}18 & 0{,}11 \\ 0{,}07 & 0{,}14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 275 \\ 175 \end{pmatrix}$

Für diese Bestellung werden 275 L Schokoladepudding und 175 L Vanillepudding benötigt.

b1)



b2) $\vec{x} = (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 300 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 375 \\ 225 \\ 1\,100 \\ 700 \\ 300 \\ 200 \end{pmatrix}$

b3) Für diese Nachfrage werden 700 Becher M_2 benötigt.

b4) Zum 1. Eintrag des Vektors $\vec{x}_1$ wird 100 addiert.

c1)

Anzahl der Matrixelemente von $\boldsymbol{B}$	D
Anzahl der Zeilen von $\boldsymbol{B}$	B

A	$a \cdot b \cdot c$
B	$a + b + c$
C	$(a + b + c) \cdot 2$
D	$(a + b + c)^2$

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln des Prozentsatzes.
a2) Ein Punkt für das richtige Übertragen des Gozinto-Graphen in 2 Matrizen.
a3) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der jeweils benötigten Menge in Litern.
b1) Ein Punkt für das richtige Einzeichnen der beiden neuen Verflechtungen.
b2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln des Vektors $\vec{\boldsymbol{x}}$.
b3) Ein Punkt für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang.
b4) Ein Punkt für das richtige Beschreiben.
c1) Ein Punkt für das richtige Zuordnen.

Zinsentwicklung*

Aufgabennummer: B_528

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Die Zinssätze für Kredite und Spareinlagen unterliegen zeitabhängigen Schwankungen.

a) Der Zinssatz für einen Kredit bei einer Bank ist unter anderem auch davon abhängig, welchen Verwendungszweck dieser hat.
Konsumkredite dienen der Finanzierung von Konsumgütern oder Dienstleistungen.
Immobilienkredite dienen der Wohnbaufinanzierung.

In der nachstehenden Tabelle ist die Entwicklung der Zinssätze für beide Verwendungszwecke im Zeitraum von 2000 bis 2004 in Österreich dargestellt.

Jahr	2000	2001	2002	2003	2004
Zinssatz für Konsumkredite in % p. a.	6,63	6,69	6,06	5,42	5,18
Zinssatz für Immobilienkredite in % p. a.	5,87	5,93	5,35	4,41	3,90

Datenquelle: https://www.oenb.at/Statistik/Standardisierte-Tabellen/zinssaetze-und-wechselkurse/Zinssaetze-der-Kreditinstitute.html [04.08.2021].

1) Stellen Sie eine Gleichung der Regressionsgeraden für den Zusammenhang zwischen dem Zinssatz für Konsumkredite x und dem Zinssatz für Immobilienkredite y im angegebenen Zeitraum auf.
2) Beurteilen Sie mithilfe des Korrelationskoeffizienten, ob die Regressionsgerade ein geeignetes Modell darstellt, um diesen Zusammenhang zu beschreiben.

Der Zinssatz im Jahr 2005 betrug für Konsumkredite 4,89 % p. a. und für Immobilienkredite 3,58 % p. a.

3) Berechnen Sie die Differenz zwischen dem tatsächlichen Zinssatz für Immobilienkredite im Jahr 2005 und dem mithilfe der Regressionsgeraden ermittelten entsprechenden Zinssatz.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Bei Abschluss eines Kreditvertrags kann festgelegt werden, ob der Zinssatz während der gesamten Laufzeit konstant bleibt oder ob sich der Zinssatz entsprechend der aktuellen Marktlage immer wieder verändert.
In der nachstehenden Tabelle ist ein Ausschnitt aus einem Tilgungsplan dargestellt.

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0				€ 50.000,00
1	€ 2.100,00	€ 4.900,00	€ 7.000,00	€ 45.100,00
2	€ 1.894,20	€ 5.105,80	€ 7.000,00	€ 39.994,20
3	€ 1.399,80		€ 7.000,00	

1) Überprüfen Sie nachweislich, ob sich der Zinssatz innerhalb der dargestellten 3 Jahre verändert hat.

2) Tragen Sie in der obigen Tabelle die beiden fehlenden Beträge im Jahr 3 ein.

c) Ein Geldbetrag B wird 2 Jahre lang mit dem Jahreszinssatz i_0 verzinst, danach weitere 3 Jahre mit einem geänderten Jahreszinssatz i_1.

1) Stellen Sie eine Formel für den Endwert E am Ende dieser 5 Jahre auf. Verwenden Sie dabei B, i_0 und i_1.

$E =$ _____

2) Berechnen Sie für $i_0 = 3\ \%$ und $i_1 = 1\ \%$ denjenigen gleichbleibenden Jahreszinssatz i, bei dem der Betrag B innerhalb von 5 Jahren auf den gleichen Endwert E anwächst.

Möglicher Lösungsweg

a1) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$y = 1{,}3031 \cdot x - 2{,}7216$ *(Koeffizienten gerundet)*
x ... Zinssatz für Konsumkredite in % p. a.
y ... Zinssatz für Immobilienkredite in % p. a.

a2) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$r = 0{,}9909...$

Der Korrelationskoeffizient liegt sehr nahe bei 1, daher besteht ein starker positiver linearer Zusammenhang zwischen dem Zinssatz für Konsumkredite und dem Zinssatz für Immobilienkredite.

a3) Mit $x = 4{,}89$ erhält man:
$1{,}3031... \cdot 4{,}89 - 2{,}7216... = 3{,}65...$
tatsächlicher Zinssatz: 3,58
Differenz der Zinssätze: $3{,}65... - 3{,}58 = 0{,}07...$
Auch –0,07... ist als richtig zu werten.

b1) Zinssatz im Jahr 1: $\frac{2\,100}{50\,000} = 0{,}042$
Zinssatz im Jahr 2: $\frac{1\,894{,}2}{45\,100} = 0{,}042$
Zinssatz im Jahr 3: $\frac{1\,399{,}8}{39\,994{,}2} = 0{,}035...$
Der Zinssatz hat sich im Jahr 3 verändert.

b2)

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0				€ 50.000,00
1	€ 2.100,00	€ 4.900,00	€ 7.000,00	€ 45.100,00
2	€ 1.894,20	€ 5.105,80	€ 7.000,00	€ 39.994,20
3	€ 1.399,80	**€ 5.600,20**	€ 7.000,00	**€ 34.394,00**

c1) $E = B \cdot (1 + i_0)^2 \cdot (1 + i_1)^3$

c2) $B \cdot 1{,}03^2 \cdot 1{,}01^3 = B \cdot (1 + i)^5$
$i = 0{,}01795... = 1{,}795...$ %

Eine Berechnung von i *mithilfe eines arithmetischen Mittels ist als falsch zu werten.*

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung der Regressionsgeraden.
a2) Ein Punkt für das richtige Beurteilen mithilfe des Korrelationskoeffizienten.
a3) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Differenz.
b1) Ein Punkt für das richtige nachweisliche Überprüfen.
b2) Ein Punkt für das Eintragen der beiden richtigen Beträge.
c1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel.
c2) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Jahreszinssatzes *i*.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

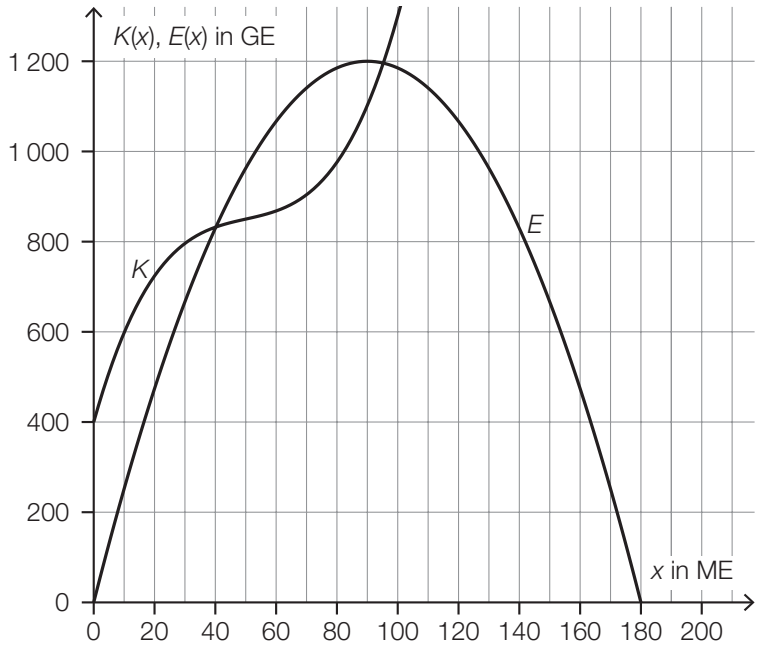
Scheiben für PKWs*

Aufgabennummer: B_527

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein Betrieb stellt Frontscheiben und Heckscheiben für PKWs her.

a) In der nachstehenden Abbildung sind der Graph der Kostenfunktion K und der Graph der quadratischen Erlösfunktion E für Frontscheiben eines bestimmten Typs dargestellt.



1) Stellen Sie eine Gleichung der quadratischen Erlösfunktion E auf.

2) Stellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Preisfunktion der Nachfrage auf.

3) Lesen Sie aus der obigen Abbildung die Gewinnzone ab.

[_____ ; _____]

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Die variablen Kosten bei der Produktion von Heckscheiben eines bestimmten Typs können durch die Funktion K_v beschrieben werden.

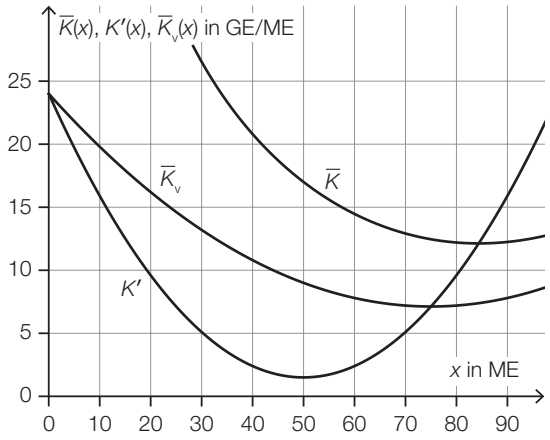
$K_v(x) = 0{,}0029 \cdot x^3 - 0{,}45 \cdot x^2 + 24 \cdot x$

x ... produzierte Menge in ME
$K_v(x)$ ... variable Kosten bei der produzierten Menge x in GE

Die Fixkosten betragen 450 GE.

1) Berechnen Sie die langfristige Preisuntergrenze.

In der nebenstehenden Abbildung sind der Graph der Durchschnittskostenfunktion $\overline{K}$, der Graph der Grenzkostenfunktion K' und der Graph der variablen Durchschnittskostenfunktion $\overline{K}_v$ dargestellt.



2) Kreuzen Sie diejenige Größe an, die <u>nicht</u> aus der obigen Abbildung abgelesen werden kann. *[1 aus 5]*

Kostenkehre	☐
Fixkosten	☐
Betriebsminimum	☐
Betriebsoptimum	☐
kurzfristige Preisuntergrenze	☐

Die Preisfunktion der Nachfrage p_N für Heckscheiben dieses Typs ist gegeben durch:

$p_N(x) = -0{,}16 \cdot x + 30$

x ... nachgefragte Menge in ME
$p_N(x)$ ... Preis bei der nachgefragten Menge x in GE/ME

3) Geben Sie den Höchstpreis an.

4) Berechnen Sie den Cournot'schen Preis.

Möglicher Lösungsweg

a1) $E(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x$

$E(180) = 0$
$E(90) = 1\,200$

oder:

$a \cdot 180^2 + b \cdot 180 = 0$
$a \cdot 90^2 + b \cdot 90 = 1\,200$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$a = -\frac{4}{27} = -0{,}148...$

$b = \frac{80}{3} = 26{,}6...$

$E(x) = -\frac{4}{27} \cdot x^2 + \frac{80}{3} \cdot x$

a2) $p_N(x) = -\frac{4}{27} \cdot x + \frac{80}{3}$

a3) [40; 95]
Toleranzbereich für die obere Gewinngrenze: [93; 97]

b1) $\overline{K}(x) = 0{,}0029 \cdot x^2 - 0{,}45 \cdot x + 24 + \frac{450}{x}$
$\overline{K}'(x) = 0$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$x = 87{,}678...$
$\overline{K}(87{,}678...) = 11{,}970...$

Die langfristige Preisuntergrenze beträgt rund 11,97 GE/ME.

b2)

Fixkosten	☒

b3) Höchstpreis: 30 GE/ME

b4) $G(x) = p_N(x) \cdot x - K(x) = -0{,}0029 \cdot x^3 + 0{,}29 \cdot x^2 + 6 \cdot x - 450$
$G'(x) = -0{,}0087 \cdot x^2 + 0{,}58 \cdot x + 6$

$G'(x) = 0$ *oder* $-0{,}0087 \cdot x^2 + 0{,}58 \cdot x + 6 = 0$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$(x_1 = -9{,}102...)$, $x_2 = 75{,}768...$
$p_N(75{,}768...) = 17{,}876...$

Der Cournot'sche Preis beträgt rund 17,88 GE/ME.

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung der Erlösfunktion E.
a2) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung der Preisfunktion der Nachfrage p_N.
a3) Ein Punkt für das Ablesen der richtigen Gewinnzone.
b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der langfristigen Preisuntergrenze.
b2) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.
b3) Ein Punkt für das Angeben des richtigen Höchstpreises.
b4) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Cournot'schen Preises.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Waldführungen*

Aufgabennummer: B_526

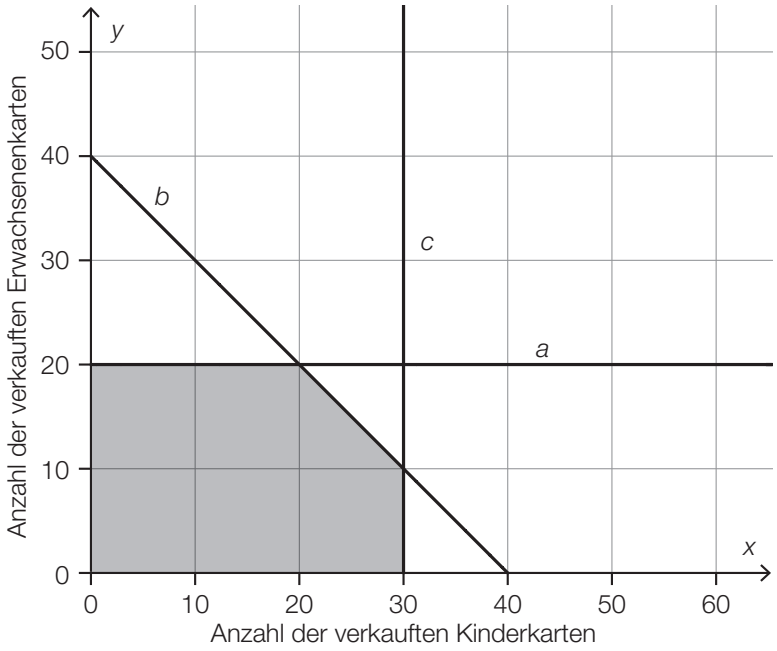
Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Ein Naturschutzzentrum bietet verschiedene Waldführungen an.

a) Bei einer Tagestour nehmen Kinder und Erwachsene teil. Insgesamt können bei einer Tour maximal 30 Personen teilnehmen.
Aus Sicherheitsgründen müssen dabei mindestens so viele Erwachsene wie Kinder teilnehmen.

1) Erstellen Sie ein Ungleichungssystem, das die Bedingungen für die Teilnahme von x Kindern und y Erwachsenen beschreibt.

b) Für eine Familientour werden die möglichen Verkaufszahlen von Erwachsenenkarten und Kinderkarten untersucht. In der nachstehenden Abbildung ist der Lösungsbereich für die Anzahl der verkauften Kinderkarten und Erwachsenenkarten dargestellt.



* ehemalige Klausuraufgabe

1) Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass eine richtige Aussage entsteht.

Der Lösungsbereich liegt _____①_____, da _____②_____ für die Familientour verkauft werden können.

①	
unterhalb der Geraden *a*	☐
unterhalb der Geraden *b*	☐
links von der Geraden *c*	☐

②	
höchstens 30 Kinderkarten	☐
höchstens 20 Kinderkarten	☐
mindestens 40 Karten	☐

Die Zielfunktion Z beschreibt den Erlös in Euro bei einer Familientour:

$Z(x, y) = 4 \cdot x + 6 \cdot y$

x ... Anzahl der verkauften Kinderkarten
y ... Anzahl der verkauften Erwachsenenkarten

Dieser Erlös soll maximiert werden.

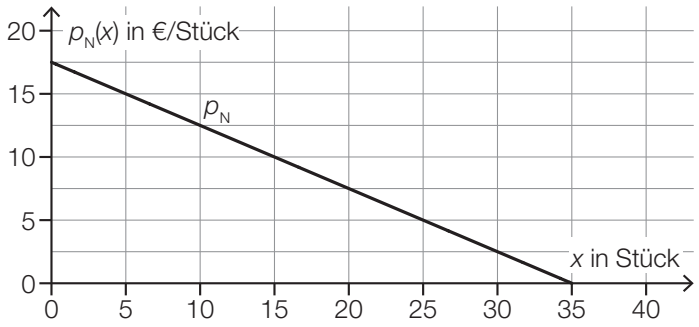
2) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung diejenige Gerade ein, auf der der optimale Wert der Zielfunktion im Lösungsbereich angenommen wird.

3) Lesen Sie aus der obigen Abbildung die optimalen Verkaufszahlen ab.

4) Ermitteln Sie den maximalen Erlös.

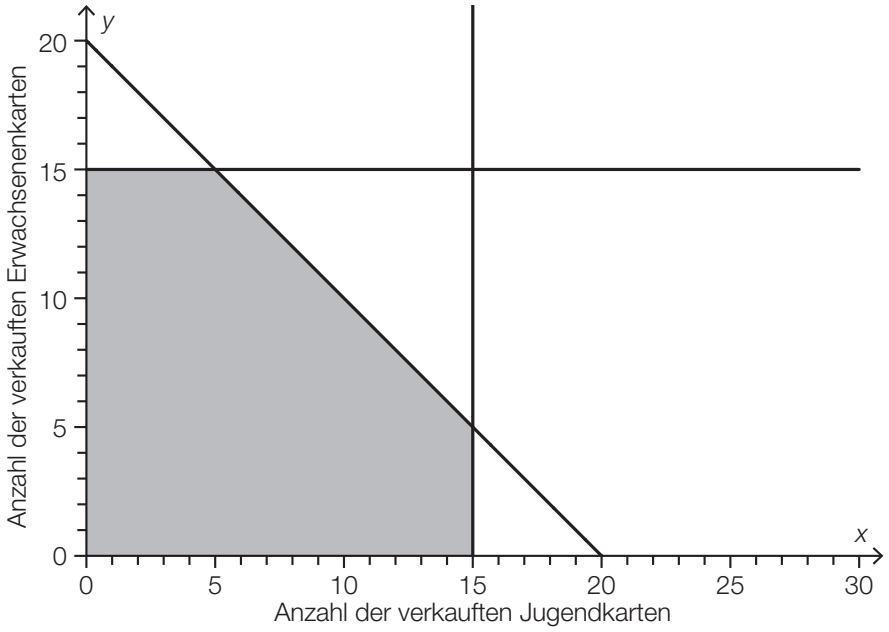
c) In den Sommerferien werden Abenteuertouren angeboten. Für diese Touren werden die möglichen Verkaufszahlen von Jugendkarten und Erwachsenenkarten untersucht.

Die tägliche Nachfrage nach Jugendkarten ist vom Preis der Karten abhängig. Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen der zugehörigen Preisfunktion der Nachfrage p_N für die Jugendkarten.



1) Lesen Sie aus der obigen Abbildung diejenige Nachfrage nach Jugendkarten ab, bei der der Preis 12,50 €/Stück beträgt.

In der nachstehenden Abbildung ist der Lösungsbereich für die Anzahl der verkauften Jugendkarten und Erwachsenenkarten bei Abenteuertouren dargestellt.



2) Überprüfen Sie nachweislich, ob die oben ermittelte Nachfrage nach Jugendkarten an einem Tag erfüllt werden kann, an dem 13 Erwachsenenkarten verkauft werden.

Möglicher Lösungsweg

a1) I: $x + y \leq 30$

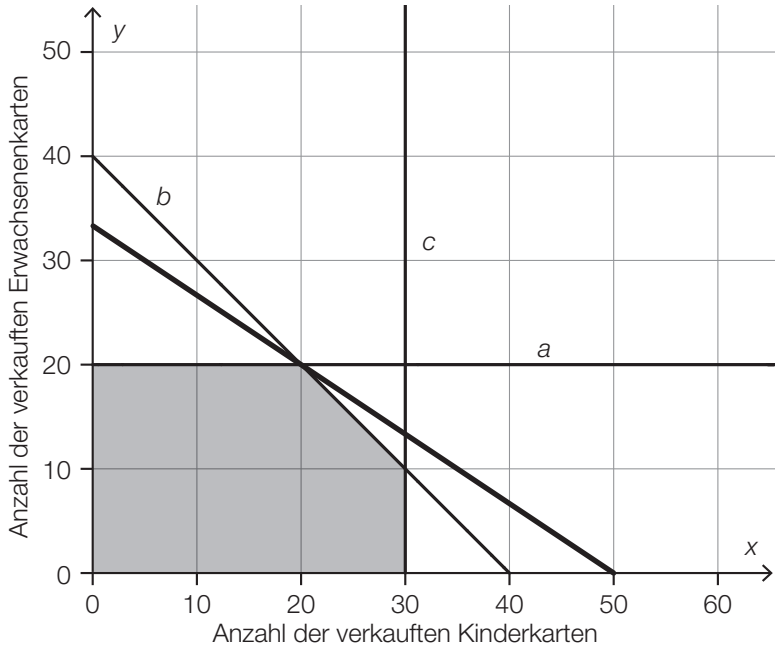
II: $x \leq y$

b1)

①	
links von der Geraden c	☒

②	
höchstens 30 Kinderkarten	☒

b2)



b3) optimale Verkaufszahlen:
20 Kinderkarten
20 Erwachsenenkarten

b4) $Z(20, 20) = 4 \cdot 20 + 6 \cdot 20 = 200$

Der maximale Erlös beträgt € 200.

c1) Bei einem Preis von 12,50 €/Stück beträgt die Nachfrage nach Jugendkarten 10 Stück.

c2) Bei einem Verkauf von 13 Erwachsenenkarten ist ein Verkauf von 10 Jugendkarten nicht möglich, da der Punkt (10|13) nicht im Lösungsbereich liegt.

oder:

Beim einem Verkauf von 13 Erwachsenenkarten können nur mehr 7 Jugendkarten verkauft werden.

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Ungleichung I (Einschränkung bezüglich Personenanzahl).
Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Ungleichung II (Einschränkung bezüglich des Verhältnisses der Anzahl der Kinder zur Anzahl der Erwachsenen).
b1) Ein Punkt für das Ankreuzen der beiden richtigen Satzteile.
b2) Ein Punkt für das richtige Einzeichnen derjenigen Geraden, auf der der optimale Wert der Zielfunktion *Z* im Lösungsbereich angenommen wird.
b3) Ein Punkt für das Ablesen der richtigen optimalen Verkaufszahlen.
b4) Ein Punkt für das richtige Ermitteln des maximalen Erlöses.
c1) Ein Punkt für das Ablesen der richtigen Nachfrage.
c2) Ein Punkt für das richtige nachweisliche Überprüfen.

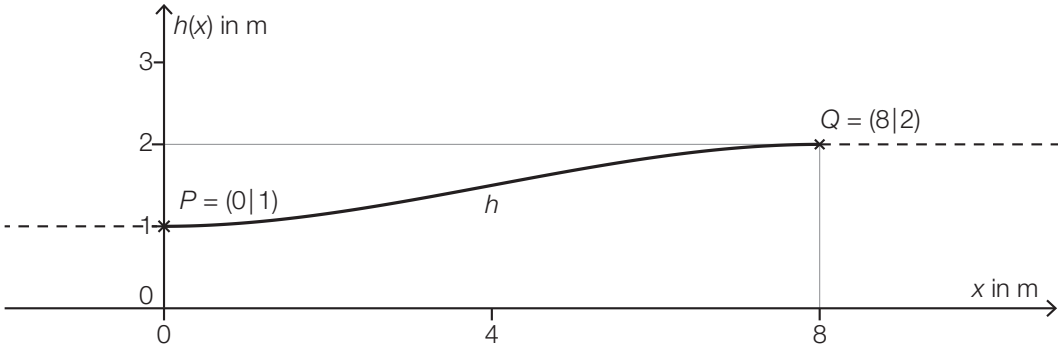
Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Förderband*

Aufgabennummer: B_525

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein neues Förderband wird geplant (siehe unten stehende Abbildung). Es soll bis zum Punkt P horizontal verlaufen, dann einen Höhenunterschied von 1 m überwinden und ab dem Punkt Q wieder horizontal verlaufen. Im Intervall $0 \le x \le 8$ soll der Verlauf des Förderbands mithilfe einer Funktion h beschrieben werden.



Für die Modellierung der Funktion h werden verschiedene Varianten überlegt. Der Graph der Funktion h soll durch die Punkte P und Q verlaufen und dort jeweils eine waagrechte Tangente haben.

a) Im Modell A wird der Verlauf des Förderbands im Intervall $0 \le x \le 8$ durch die Polynomfunktion 3. Grades h mit $h(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ beschrieben.

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten von h.

2) Berechnen Sie diese Koeffizienten.

b) Im Modell B wird der Verlauf des Förderbands im Intervall $0 \le x \le 8$ durch die Funktion h mit $h(x) = a \cdot \cos\left(\frac{\pi}{8} \cdot x\right) + d$ beschrieben.

1) Geben Sie mithilfe der obigen Abbildung die Parameter a und d an.

$a =$ _____

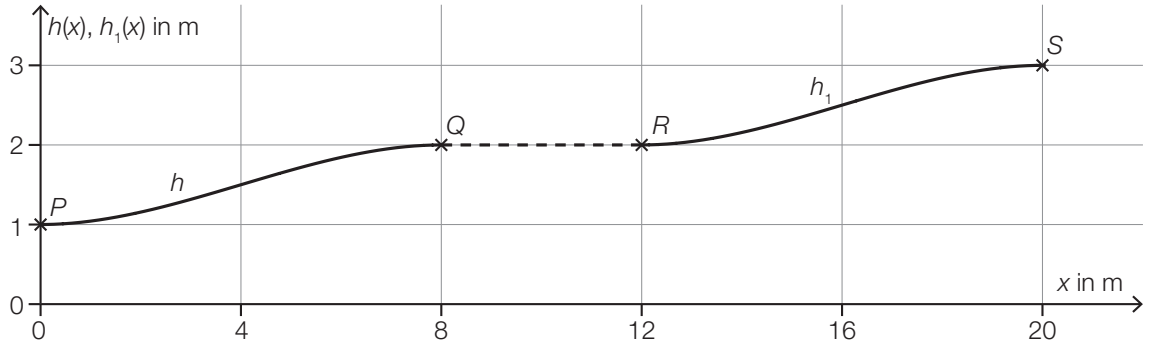
$d =$ _____

* ehemalige Klausuraufgabe

Das Förderband soll an keiner Stelle eine Steigung von mehr als 20 % haben.

2) Überprüfen Sie nachweislich, ob diese Vorgabe im Modell *B* eingehalten wird.

c) Nach dem Punkt *Q* verläuft das Förderband 4 m horizontal bis zum Punkt *R*. Vom Punkt *R* bis zum Punkt *S* wird der Verlauf des Förderbands durch die Funktion h_1 beschrieben. (Siehe nachstehende Abbildung.)



Der Graph der Funktion h_1 entsteht durch Verschiebung des Graphen der Funktion *h*.

1) Kreuzen Sie die richtige Funktionsgleichung von h_1 an. *[1 aus 5]*

$h_1(x) = h(x - 12) - 1$	☐
$h_1(x) = h(x - 4) - 1$	☐
$h_1(x) = h(x + 4) + 1$	☐
$h_1(x) = h(x + 12) + 1$	☐
$h_1(x) = h(x - 12) + 1$	☐

2) Stellen Sie eine Formel zur Berechnung der Länge *L* des Förderbands vom Punkt *P* bis zum Punkt *S* auf.

$L =$ _____

Möglicher Lösungsweg

a1) $h'(x) = 3 \cdot\ a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x + c$

I: $h(0) = 1$
II: $h(8) = 2$
III: $h'(0) = 0$
IV: $h'(8) = 0$

oder:

I: $d = 1$
II: $512 \cdot a + 64 \cdot b + 8 \cdot c + d = 2$
III: $c = 0$
IV: $192 \cdot a + 16 \cdot b + c = 0$

a2) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$a = -\frac{1}{256} = -0{,}00390...$

$b = \frac{3}{64} = 0{,}0468...$

$c = 0$

$d = 1$

b1) $a = -0{,}5$

$d = 1{,}5$

b2) $h(x) = -0{,}5 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{8} \cdot x\right) + 1{,}5$

$h'(x) = \frac{\pi}{16} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{8} \cdot x\right) \leq \frac{\pi}{16} < 0{,}2$

oder:

Die größte Steigung liegt an der Wendestelle bei $x = 4$.

$h'(4) = \frac{\pi}{16} < 0{,}2$

Die Vorgabe wird also eingehalten.

c1)

$h_1(x) = h(x - 12) + 1$	☒

c2) $L = 4 + 2 \cdot \int_0^8 \sqrt{1 + (h'(x))^2}\,dx$

oder:

$L = 4 + \int_0^8 \sqrt{1 + (h'(x))^2}\,dx + \int_{12}^{20} \sqrt{1 + (h_1'(x))^2}\,dx$

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der beiden Gleichungen mithilfe der Koordinaten der Punkte.
Ein Punkt für das richtige Aufstellen der beiden Gleichungen mithilfe der 1. Ableitungen.

a2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Koeffizienten.

b1) Ein Punkt für das Angeben des richtigen Parameters *a*.
Ein Punkt für das Angeben des richtigen Parameters *d*.

b2) Ein Punkt für das richtige nachweisliche Überprüfen.

c1) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

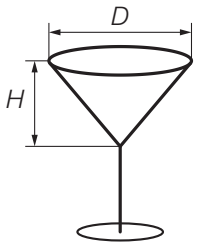
c2) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel.

Martinigläser*

Aufgabennummer: B_523

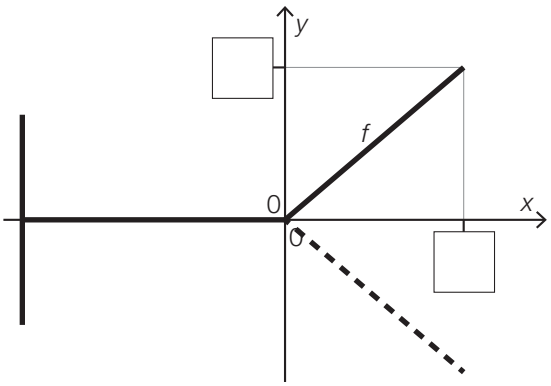
Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) In der nebenstehenden Abbildung ist ein Martiniglas dargestellt. Der obere Teil des Martiniglases kann modellhaft als Drehkegel mit dem Durchmesser D und der Höhe H betrachtet werden.



In der unten stehenden nicht maßstabgetreuen Abbildung ist ein Modell dieses Martiniglases dargestellt. Der Drehkegel entsteht durch Rotation des Graphen der linearen Funktion f um die x-Achse.

1) Tragen Sie unter Verwendung von H und D die fehlenden Ausdrücke in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.



2) Stellen Sie mithilfe von H und D eine Gleichung der Funktion f auf.

$f(x) =$ _____

* ehemalige Klausuraufgabe

V_x ist das Volumen des Drehkegels, der bei Rotation des Graphen der Funktion f um die x-Achse entsteht.

3) Stellen Sie eine Formel zur Berechnung von V_x auf.

$V_x =$ _____

Der obere Teil eines bestimmten Martiniglases wird durch Rotation des Graphen der Funktion g im Intervall [0; 75] um die x-Achse modelliert.

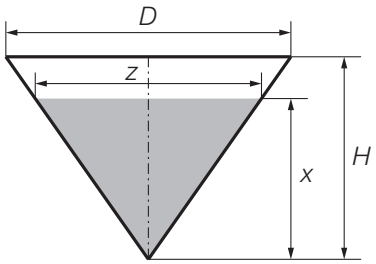
$g(x) = \frac{13}{17} \cdot x$

x, $g(x)$ … Koordinaten in mm

Dieses Martiniglas wird mit einer Flüssigkeitsmenge von 2 dl befüllt.

4) Berechnen Sie die zugehörige Füllhöhe (gemessen von der Spitze des Drehkegels).

b) In der nachstehenden Abbildung ist der obere Teil eines teilweise befüllten Martiniglases dargestellt. Dabei handelt es sich um einen Drehkegel mit dem Durchmesser D und der Höhe H.



1) Stellen Sie eine Formel zur Berechnung von z auf. Verwenden Sie dabei H, D und x.

$z =$ _____

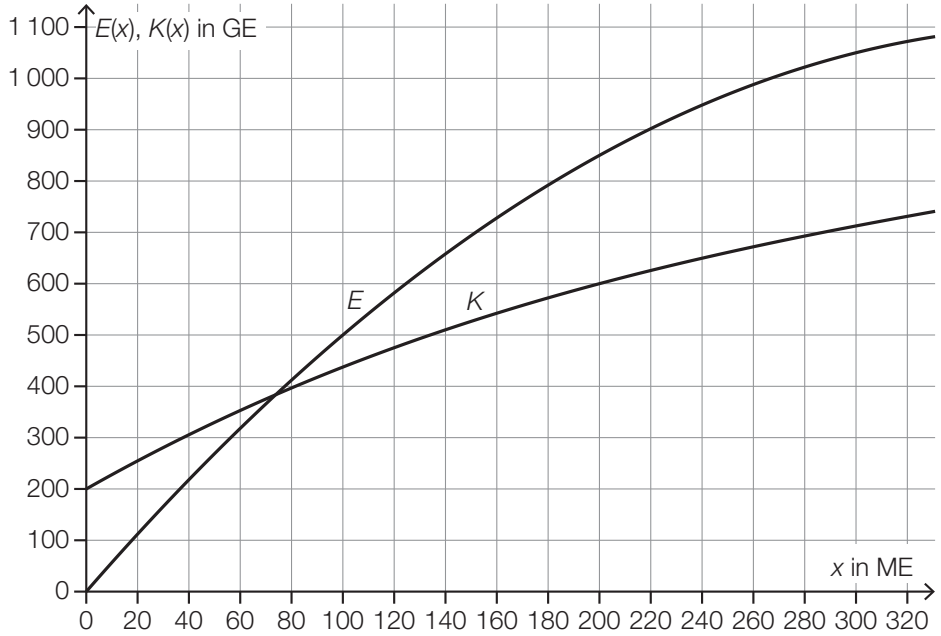
Dieses Martiniglas ist bis zur Höhe x befüllt. Das Füllvolumen entspricht dabei dem halben Volumen des Drehkegels mit dem Durchmesser D und der Höhe H.

2) Zeigen Sie allgemein, dass die Höhe x rund 80 % der Höhe H beträgt.

c) Beim Verkauf von Martinigläsern geht man von einem linearen Zusammenhang zwischen dem Preis in GE/ME und der Verkaufsmenge in ME aus.
Bei einem Preis von 5,00 GE/ME können 100 ME verkauft werden. Sinkt der Preis um 1,50 GE/ME, können um 200 ME mehr verkauft werden.

1) Stellen Sie eine Gleichung der zugehörigen linearen Preisfunktion der Nachfrage p_N auf.

In der nachstehenden Abbildung sind der Graph der Erlösfunktion E und der Graph der Kostenfunktion K dargestellt.



2) Lesen Sie diejenige Verkaufsmenge ab, bei der der Gewinn 250 GE beträgt.

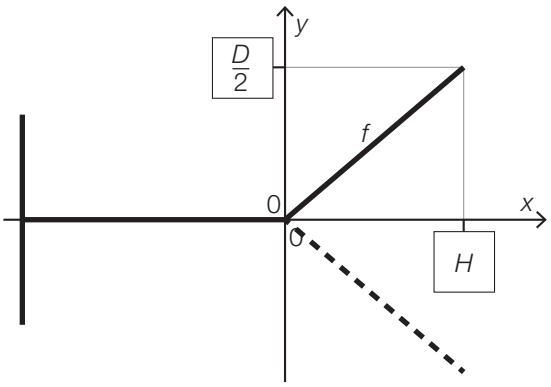
_____ ME

3) Kreuzen Sie die <u>nicht</u> zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]*

Der Erlös bei einer Verkaufsmenge von 100 ME beträgt 500 GE.	☐
Die Fixkosten betragen 200 GE.	☐
Die Kostenfunktion K ist streng monoton steigend.	☐
Für die untere Gewinngrenze x_u gilt: $E'(x_u) = K'(x_u)$.	☐
Für die zugehörige Stückkostenfunktion $\overline{K}$ gilt: $\overline{K}(200) = 3$.	☐

Möglicher Lösungsweg

a1)



a2) $f(x) = \frac{D}{2 \cdot H} \cdot x$

a3) $V_x = \pi \cdot \int_0^H \left(\frac{D}{2 \cdot H}\right)^2 \cdot x^2 \, dx$ *oder* $V_x = \pi \cdot \int_0^H (f(x))^2 \, dx$ *oder* $V_x = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{D}{2}\right)^2 \cdot H$

a4) $2 \text{ dl} = 200\,000 \text{ mm}^3$
$200\,000 = \pi \cdot \int_0^b (g(x))^2 \, dx$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$b = 68{,}8\ldots$

Die Füllhöhe beträgt rund 69 mm.

b1) $z = \frac{D \cdot x}{H}$

b2) Für das Volumen V_1 des Drehkegels mit dem Durchmesser D und der Höhe H gilt:
$V_1 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{D}{2}\right)^2 \cdot H = \frac{1}{12} \cdot \pi \cdot D^2 \cdot H$

Für das Volumen V_2 des Drehkegels mit dem Durchmesser z und der Höhe x gilt:
$V_2 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{z}{2}\right)^2 \cdot x = \frac{1}{12} \cdot \pi \cdot \left(\frac{D \cdot x}{H}\right)^2 \cdot x$

$\frac{V_1}{2} = V_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{24} \cdot \pi \cdot D^2 \cdot H = \frac{1}{12} \cdot \pi \cdot \left(\frac{D \cdot x}{H}\right)^2 \cdot x \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \cdot H \approx 0{,}8 \cdot H$

c1) $p_N(x) = a \cdot x + b$
$p_N(100) = 5$
$p_N(300) = 3{,}5$

oder:

$a \cdot 100 + b = 5$
$a \cdot 300 + b = 3{,}5$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$p_N(x) = -0{,}0075 \cdot x + 5{,}75$

c2) 200 ME
Toleranzbereich: [190; 210]

c3)

Für die untere Gewinngrenze x_u gilt: $E'(x_u) = K'(x_u)$.	☒

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das Eintragen der richtigen Ausdrücke.
a2) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung der Funktion *f*.
a3) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel.
a4) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Füllhöhe.
b1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel.
b2) Ein Punkt für das richtige Zeigen.
c1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung der Funktion p_N.
c2) Ein Punkt für das Ablesen der richtigen Verkaufsmenge.
c3) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

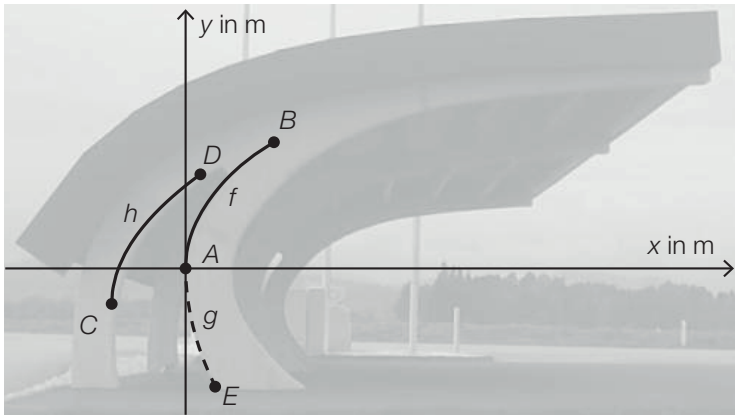
Carport*

Aufgabennummer: B_522

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein Carport soll durch verschiedene Modelle beschrieben werden.

a) Im Modell *A* wird ein Teil des Carports durch die Graphen der Funktionen *f*, *g* und *h* beschrieben (siehe nachstehende Abbildung).



Bildquelle: BMBWF

Der Graph der Funktion *f* mit $f(x) = a \cdot \sqrt{x}$ beschreibt zwischen den Punkten $A = (0|0)$ und *B* den Verlauf einer Begrenzungslinie.

Der Graph der Funktion *h* ergibt sich durch Verschiebung des Graphen der Funktion *f* um 1 m nach links und um 0,5 m nach unten.

1) Tragen Sie die fehlenden Zahlen und Rechenzeichen in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.

$h(x) = a \cdot \sqrt{x \square \square} \square \square$

Der Graph der Funktion *g* mit $g(x) = b \cdot \sqrt{x}$ beschreibt zwischen den Punkten $A = (0|0)$ und $E = (0{,}4|-1{,}62)$ den Verlauf einer weiteren Begrenzungslinie.

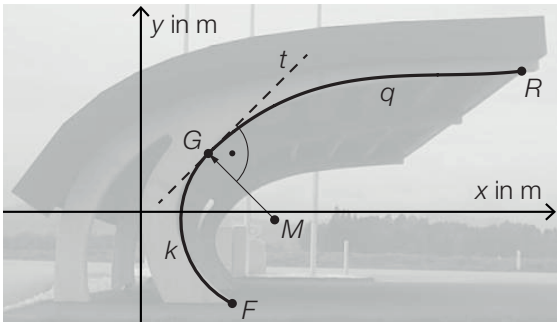
2) Ermitteln Sie den Parameter *b*.

* ehemalige Klausuraufgabe

3) Kreuzen Sie die zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]*

$h'(0{,}1) > f'(0{,}1)$	☐
$f'(0{,}1) - g'(0{,}1) = 0$	☐
$f'(0) = 1$	☐
$f'(0{,}1) = h'(-0{,}9)$	☐
$g'(0{,}4) < g'(0{,}1)$	☐

b) Im Modell *B* wird ein Teil des Carports durch den Kreisbogen *k* und den Graphen der Funktion *q* beschrieben (siehe nachstehende Abbildung).



Der Kreisbogen *k* verläuft zwischen den Punkten *F* und $G = (1{,}18\,|\,1)$. Der zugehörige Kreis hat den Mittelpunkt $M = (2{,}34\,|\,-0{,}16)$.

1) Zeigen Sie, dass die Steigung der Tangente *t* an den Kreisbogen im Punkt *G* den Wert 1 hat.

2) Veranschaulichen Sie in der obigen Abbildung denjenigen Winkel α, der durch die nachstehende Formel berechnet werden kann.
$\overrightarrow{MF} \cdot \overrightarrow{MG} = \left|\overrightarrow{MF}\right| \cdot \left|\overrightarrow{MG}\right| \cdot \cos(\alpha)$

Zwischen den Punkten *G* und *R* kann die Begrenzungslinie des Carports durch den Graphen der Funktion *q* beschrieben werden.

$q(x) = -0{,}00078 \cdot x^4 + 0{,}0312 \cdot x^3 - 0{,}366 \cdot x^2 + 1{,}74 \cdot x - 0{,}593$
x, $q(x)$ ... Koordinaten in m

3) Berechnen Sie die Länge der in der obigen Abbildung dargestellten Begrenzungslinie *q* des Carports im Intervall [1,18; 6,66].

Möglicher Lösungsweg

a1) $h(x) = a \cdot \sqrt{x + 1} - 0{,}5$

a2) $-1{,}62 = b \cdot \sqrt{0{,}4}$
$b = -2{,}561...$

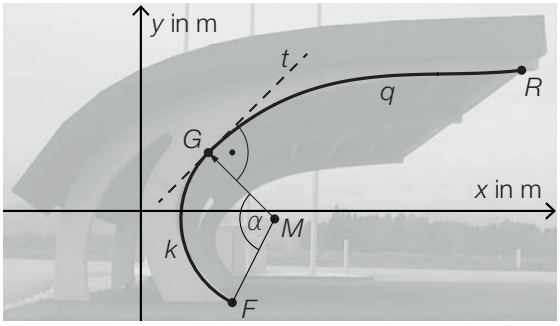
a3)

$f'(0{,}1) = h'(-0{,}9)$	☒

b1) $\overrightarrow{MG} = \begin{pmatrix} -1{,}16 \\ 1{,}16 \end{pmatrix}$

Normalvektor zu $\overrightarrow{MG}$: $\begin{pmatrix} 1{,}16 \\ 1{,}16 \end{pmatrix}$ ist parallel zu $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $k = 1$

b2)



b3) $\int_{1{,}18}^{6{,}66} \sqrt{1 + (q'(x))^2}\,dx = 5{,}84...$

Die Länge der Begrenzungslinie beträgt rund 5,8 m.

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das Eintragen der richtigen Zahlen und Rechenzeichen.
a2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln des Parameters b.
a3) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.
b1) Ein Punkt für das richtige Zeigen.
b2) Ein Punkt für das richtige Veranschaulichen des Winkels α.
b3) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Länge.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Tunnelvortrieb*

Aufgabennummer: B_521

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Für eine Eisenbahnstrecke wird ein Tunnel gegraben.

a) In der nebenstehenden Abbildung 1 ist ein Bagger für den Tunnelbau dargestellt.

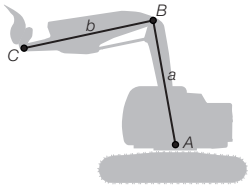


Abbildung 1

In der nachstehenden Abbildung 2 ist eine bestimmte Baggerposition dargestellt.

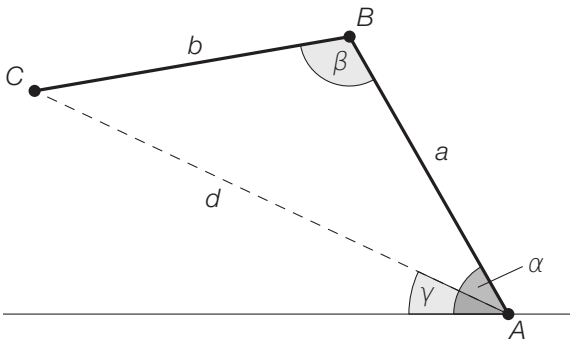


Abbildung 2

1) Veranschaulichen Sie in Abbildung 2 diejenige Länge s, die durch den nachstehenden Ausdruck berechnet werden kann.

$s = a \cdot \cos(\alpha)$

Es gilt:
$a = 4{,}65$ m
$b = 4{,}50$ m
$\beta = 110°$

2) Berechnen Sie die Länge d.

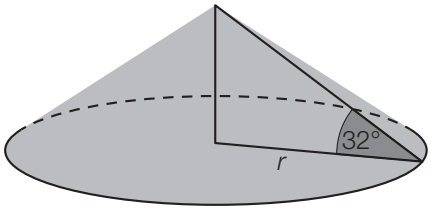
* ehemalige Klausuraufgabe

3) Kreuzen Sie die richtige Formel zur Berechnung des Winkels γ an. *[1 aus 5]*

$\gamma = \alpha - \arccos\left(\frac{a}{d}\right)$	☐
$\gamma = \alpha - \arcsin\left(\frac{b \cdot \sin(\beta)}{d}\right)$	☐
$\gamma = \arcsin\left(\frac{a \cdot \sin(\alpha)}{d}\right)$	☐
$\gamma = \alpha - \left(\frac{180° - \beta}{2}\right)$	☐
$\gamma = \arccos\left(\frac{b^2 + d^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot d}\right)$	☐

b) Ein Teil des anfallenden Materials wird aufgeschüttet. Der dabei entstehende Schüttkegel hat einen Neigungswinkel von 32° (siehe nachstehende Abbildungen).





Bildquelle: Anton, CC BY-SA 3.0, https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Schuettwinkelrp.jpg [06.04.2021] (adaptiert).

1) Berechnen Sie den Radius r eines solchen Schüttkegels mit einem Volumen von 200 m^3.

c) Beim Ausbau des Tunnels werden vorgefertigte Betonelemente eingesetzt. Die Breite dieser Betonelemente ist annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 5$ m und der Standardabweichung $\sigma = 0{,}005$ m.

Zur Qualitätssicherung werden Zufallsstichproben mit dem Stichprobenumfang $n = 10$ entnommen und die Stichprobenmittelwerte der Breiten ermittelt.

1) Geben Sie den Erwartungswert $\mu_{\bar{x}}$ und die Standardabweichung $\sigma_{\bar{x}}$ für die Verteilung dieser Stichprobenmittelwerte an.

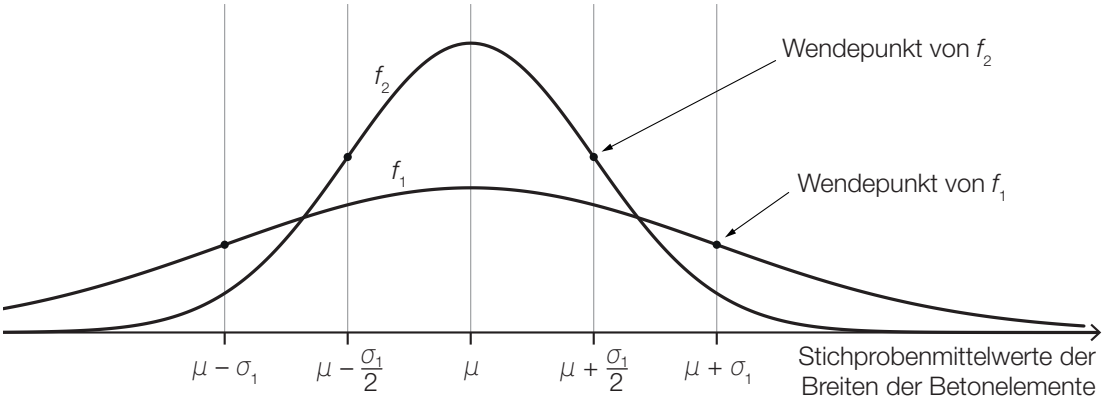
$\mu_{\bar{x}} =$ _____ m

$\sigma_{\bar{x}} =$ _____ m

2) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass diese Stichprobenmittelwerte zwischen 4,996 m und 5,004 m liegen.

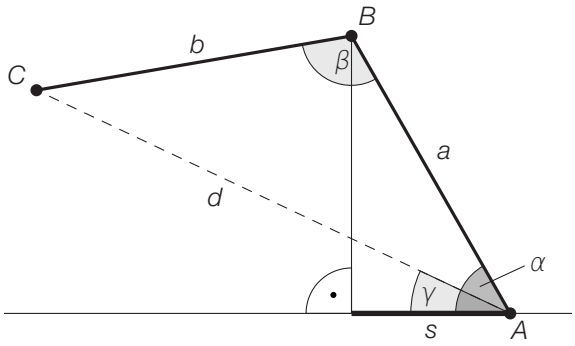
f_1 ist die Dichtefunktion für die Verteilung der Stichprobenmittelwerte mit dem Stichprobenumfang $n_1 = 6$.
f_2 ist die Dichtefunktion für die Verteilung der Stichprobenmittelwerte mit dem Stichprobenumfang n_2.

3) Ermitteln Sie mithilfe der nachstehenden Abbildung den Stichprobenumfang n_2.



Möglicher Lösungsweg

a1)



a2) $d = \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\beta)}$

$d = 7{,}495\ldots$ m

a3)

$\gamma = \alpha - \arcsin\left(\frac{b \cdot \sin(\beta)}{d}\right)$	☒

b1) $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$

$\tan(32°) = \frac{h}{r} \quad \Rightarrow \quad h = r \cdot \tan(32°)$

$200 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot r \cdot \tan(32°)$

$r = 6{,}73\ldots$ m

c1) $\mu_{\bar{x}} = 5$ m

$\sigma_{\bar{x}} = \frac{0{,}005}{\sqrt{10}}$ m = 0,00158... m

c2) $\overline{X}$ ... Stichprobenmittelwerte der Breite für $n = 10$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$P(4{,}996 \leq \overline{X} \leq 5{,}004) = 0{,}9885...$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt rund 98,9 %.

c3) $\sigma_2 = \frac{\sigma_1}{2} \quad \Rightarrow \quad n_2 = 4 \cdot 6 = 24$

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das richtige Veranschaulichen der Länge s.
a2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Länge d.
a3) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.
b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Radius r.
c1) Ein Punkt für das Angeben des richtigen Erwartungswerts und der richtigen Standardabweichung.
c2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Wahrscheinlichkeit.
c3) Ein Punkt für das richtige Ermitteln von n_2.

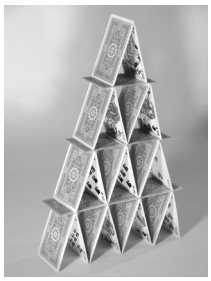
Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Kartenhaus*

Aufgabennummer: B_520

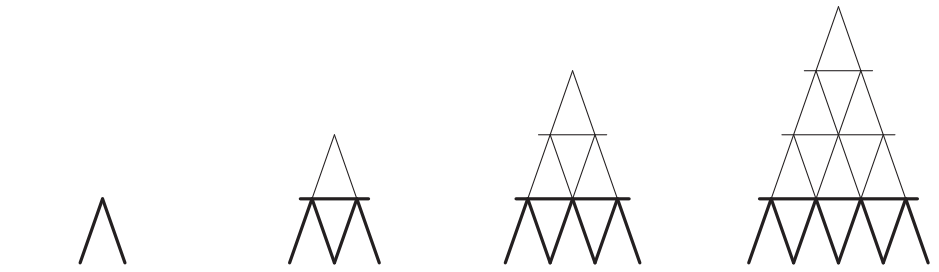
Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Aus Spielkarten kann man ein Kartenhaus bauen (siehe nebenstehendes Foto).



Bildquelle: https://pixabay.com/de/kartenhaus-zerbrechlich-geduld-763246/ [02.10.2019].

In der nachstehenden Abbildung sind Kartenhäuser, die aus einer unterschiedlichen Anzahl von Stockwerken bestehen, in der Ansicht von vorne skizziert.



1-stöckiges Haus | 2-stöckiges Haus | 3-stöckiges Haus | 4-stöckiges Haus

a) Die nachstehende Tabelle gibt an, wie viele Karten für ein *n*-stöckiges Kartenhaus insgesamt benötigt werden und wie viele davon für das unterste Stockwerk benötigt werden.

Anzahl der Stockwerke *n*	insgesamt benötigte Karten	Karten für das unterste Stockwerk
1	2	2
2	7	5
3	15	8
4	26	11
5		

1) Tragen Sie in der obigen Tabelle die beiden fehlenden Zahlen in die grau markierten Zellen ein.

* ehemalige Klausuraufgabe

Die Anzahl der Karten für das unterste Stockwerk kann durch die arithmetische Folge z_n beschrieben werden.

2) Erstellen Sie ein explizites Bildungsgesetz für die arithmetische Folge z_n.

Maria hat ein 24-stöckiges Kartenhaus errichtet und möchte es nun zu einem 25-stöckigen Kartenhaus erweitern.

3) Ermitteln Sie die Anzahl der zusätzlichen Karten, die Maria dafür benötigt.

b) Die Gesamtanzahl s_n der Karten für ein n-stöckiges Kartenhaus kann mit der nachstehenden Formel ermittelt werden.

$$s_n = 3 \cdot \frac{n \cdot (n + 1)}{2} - n$$

1) Berechnen Sie die Gesamtanzahl der Karten, die für ein 50-stöckiges Kartenhaus benötigt werden.

Alexander hat 3 vollständige Kartensets zu je 32 Karten zur Verfügung und möchte ein Kartenhaus mit möglichst vielen Stockwerken bauen.

2) Berechnen Sie die Anzahl der Stockwerke, die Alexanders Kartenhaus höchstens haben kann.

c) Bei einem Glücksspiel wird ein Kartenspiel mit 32 Karten verwendet, das genau 4 Asse enthält. Bryan zieht zufällig und ohne hinzusehen 1 Karte. Ist die gezogene Karte ein Ass, so gewinnt er € 20. Ist die gezogene Karte kein Ass, so verliert er € 5.

Die Zufallsvariable X gibt den Gewinn bei diesem Spiel in € an.

1) Erstellen Sie eine Wertetabelle für die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X.
2) Berechnen Sie den Erwartungswert von X.

Möglicher Lösungsweg

a1)

Anzahl der Stockwerke n	insgesamt benötigte Karten	Karten für das unterste Stockwerk
5	40	14

a2) $z_n = 2 + (n - 1) \cdot 3$

oder:

$z_n = 3 \cdot n - 1$

a3) $z_{25} = 74$

Um ein 25-stöckiges Kartenhaus zu errichten, benötigt Maria 74 zusätzliche Karten.

b1) $s_{50} = 3 \cdot \frac{50 \cdot 51}{2} - 50 = 3\,775$

Für ein 50-stöckiges Kartenhaus werden insgesamt 3 775 Karten benötigt.

b2) $3 \cdot 32 = 96$

$96 = 3 \cdot \frac{n \cdot (n + 1)}{2} - n$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$(n_1 = -8{,}16...)$; $n_2 = 7{,}83...$

Alexanders Kartenhaus kann höchstens 7 Stockwerke haben.

c1)

x_i	-5	20
$P(X = x_i)$	$\frac{7}{8}$	$\frac{1}{8}$

c2) $E(X) = -5 \cdot \frac{7}{8} + 20 \cdot \frac{1}{8} = -\frac{15}{8} = -1{,}875$

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das Eintragen der beiden richtigen Zahlen.
a2) Ein Punkt für das richtige Erstellen des expliziten Bildungsgesetzes.
a3) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der Anzahl der zusätzlich benötigten Karten.
b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Gesamtanzahl der Karten.
b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Anzahl der Stockwerke.
c1) Ein Punkt für das richtige Erstellen der Wertetabelle.
c2) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Erwartungswerts.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Kino*

Aufgabennummer: B_519

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Personen, die ein Kino besuchen, können Geld für 3 verschiedene Bereiche ausgeben:

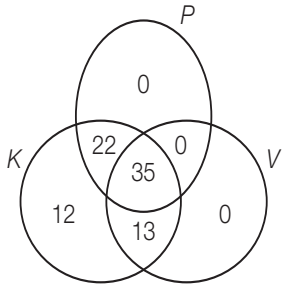
K … Menge der Personen, die für das Kinoticket Geld ausgeben
P … Menge der Personen, die für das Parkticket Geld ausgeben
V … Menge der Personen, die für die Verpflegung Geld ausgeben

1) Ordnen Sie den beiden Mengen jeweils die zutreffende Beschreibung aus A bis D zu.

$K \setminus (P \cup V)$	
$K \cap P$	

A	Menge der Personen, die nur für das Kinoticket Geld ausgeben
B	Menge der Personen, die für das Kinoticket Geld ausgeben
C	Menge der Personen, die sowohl für das Kinoticket als auch für das Parkticket Geld ausgeben
D	Menge der Personen, die entweder für das Kinoticket oder für das Parkticket oder für beides Geld ausgeben

Die Ergebnisse einer Befragung sind im nebenstehenden Venn-Diagramm dargestellt.



2) Beschreiben Sie die Bedeutung der Zahl 12 im obigen Venn-Diagramm im gegebenen Sachzusammenhang.

3) Berechnen Sie, wie viel Prozent der befragten Personen in der Menge $K \cap P \cap V$ enthalten sind.

* ehemalige Klausuraufgabe

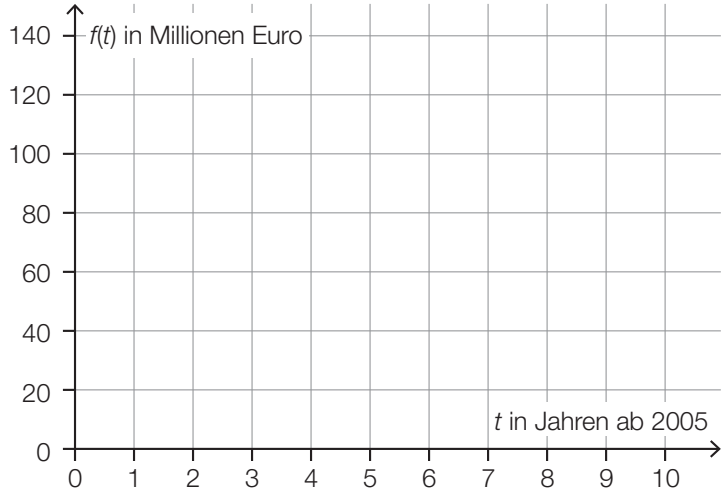
b) Die nachstehende Tabelle gibt die jährlichen Nettoeinnahmen aller Kinos in Österreich für einige Jahre an.

Jahr	2005	2006	2011	2012	2015
jährliche Nettoeinnahmen in Millionen Euro	94,8	104,3	115,7	118,5	127,2

Datenquelle: https://www.statistik.at/web_de/statistiken/menschen_und_gesellschaft/kultur/kinos_und_filme/045075.html [04.08.2021].

Die jährlichen Nettoeinnahmen in Millionen Euro sollen in Abhängigkeit von der Zeit t durch die lineare Funktion f beschrieben werden.

1) Stellen Sie mithilfe der Regressionsrechnung eine Gleichung der linearen Funktion f auf. Wählen Sie $t = 0$ für das Jahr 2005.
2) Interpretieren Sie den Wert der Steigung von f im gegebenen Sachzusammenhang.
3) Zeichnen Sie im nachstehenden Koordinatensystem den Graphen von f ein.



c) Ein Kino zeigt einen bestimmten Film gleichzeitig in 3 Kinosälen.

Im Kinosaal X wird der Film in der Standardversion gezeigt. Hier kostet ein Ticket € 14,80.
Im Kinosaal Y wird der Film in 3D gezeigt. Hier kostet ein Ticket € 17.
Im Kinosaal Z wird der Film im „Director's Cut" gezeigt. Hier kostet ein Ticket € 19,30.

Insgesamt wurden 120 Tickets verkauft und € 2.067 eingenommen.
Für Kinosaal Z wurden 25 % mehr Tickets als für Kinosaal X verkauft.

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Anzahl der jeweils verkauften Tickets für die Kinosäle X, Y und Z.
2) Berechnen Sie die Anzahl der jeweils verkauften Tickets für die Kinosäle X, Y und Z.

Möglicher Lösungsweg

a1)

$K \setminus (P \cup V)$	A
$K \cap P$	C

A	Menge der Personen, die nur für das Kinoticket Geld ausgeben
B	Menge der Personen, die für das Kinoticket Geld ausgeben
C	Menge der Personen, die sowohl für das Kinoticket als auch für das Parkticket Geld ausgeben
D	Menge der Personen, die entweder für das Kinoticket oder für das Parkticket oder für beides Geld ausgeben

a2) 12 Personen geben nur für das Kinoticket Geld aus.

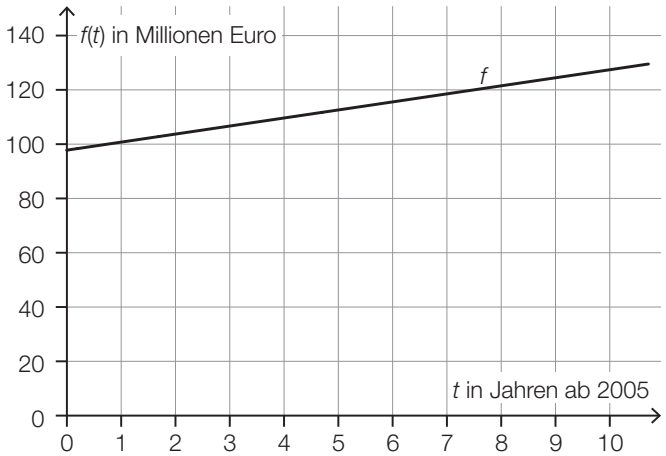
a3) $\frac{35}{12 + 13 + 35 + 22} = \frac{35}{82} = 0{,}4268...$

Rund 42,7 % aller befragten Personen sind in der Menge $K \cap P \cap V$ enthalten.

b1) Ermittlung mittels Technologieeinsatz:
$f(t) = 2{,}96 \cdot t + 97{,}9$ *(Koeffizienten gerundet)*

b2) Gemäß diesem Modell steigen die jährlichen Nettoeinnahmen um rund 2,96 Millionen Euro pro Jahr.

b3)



c1) x ... Anzahl der verkauften Tickets für Kinosaal X
y ... Anzahl der verkauften Tickets für Kinosaal Y
z ... Anzahl der verkauften Tickets für Kinosaal Z

I: $x + y + z = 120$
II: $14{,}8 \cdot x + 17 \cdot y + 19{,}3 \cdot z = 2067$
III: $1{,}25 \cdot x = z$

c2) Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$x = 40$
$y = 30$
$z = 50$

Lösungsschlüssel

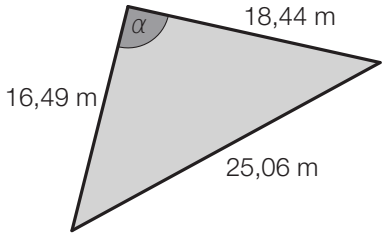
a1) Ein Punkt für das richtige Zuordnen.
a2) Ein Punkt für das richtige Beschreiben im gegebenen Sachzusammenhang.
a3) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Prozentsatzes.
b1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung der Funktion f.
b2) Ein Punkt für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang.
b3) Ein Punkt für das richtige Einzeichnen des Graphen von f.
c1) Ein Punkt für das richtige Erstellen des Gleichungssystems.
c2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Anzahl der jeweils verkauften Tickets.

Grundstücke*

Aufgabennummer: B_518

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

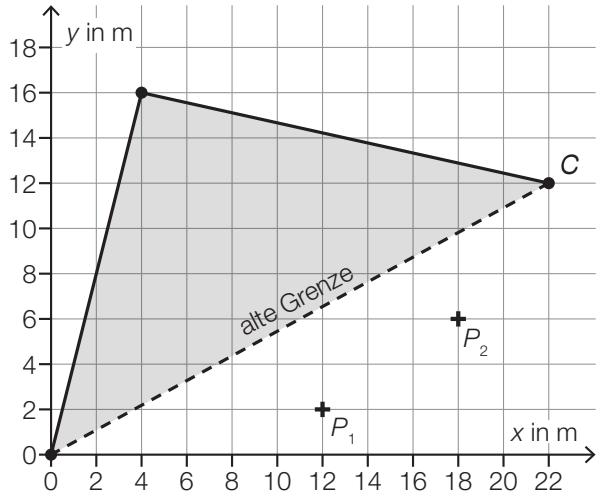
a) In der nachstehenden Abbildung ist ein dreieckiges Grundstück dargestellt.



1) Begründen Sie mithilfe der gegebenen Seitenlängen, warum der Winkel α der größte Winkel des Dreiecks ist.
2) Zeigen Sie mithilfe des Satzes von Pythagoras, dass α kein rechter Winkel ist.
3) Berechnen Sie den Winkel α.
4) Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Grundstücks.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Ein anderes dreieckiges Grundstück wird erweitert.
Die neue Grenze soll nun nicht mehr direkt vom Koordinatenursprung zum Punkt C verlaufen, sondern über die beiden markierten Punkte P_1 und P_2
(siehe nachstehende Abbildung).



Der Verlauf dieser neuen Grenze soll durch den Graphen einer Polynomfunktion f mit $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ beschrieben werden.

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten von f.
2) Berechnen Sie die Koeffizienten von f.
3) Berechnen Sie, um wie viele Quadratmeter der Flächeninhalt des Grundstücks durch die Erweiterung zunimmt.

Möglicher Lösungsweg

a1) Da der Winkel α der längsten Seite des Dreiecks gegenüberliegt, ist er der größte Winkel des Dreiecks.

a2) Wäre α ein rechter Winkel, dann müsste der Satz des Pythagoras gelten:

$16{,}49^2 + 18{,}44^2 = 611{,}9537$
$25{,}06^2 = 628{,}0036$
$611{,}9537 \neq 628{,}0036$

Daher ist α kein rechter Winkel.

a3) $25{,}06^2 = 18{,}44^2 + 16{,}49^2 - 2 \cdot 18{,}44 \cdot 16{,}49 \cdot \cos(\alpha)$
$\alpha = 91{,}51...°$

a4) $A = \frac{18{,}44 \cdot 16{,}49}{2} \cdot \sin(\alpha) = 151{,}984...$
Der Flächeninhalt dieses Grundstücks beträgt rund 151,98 m^2.

b1) I: $f(0) = 0$
II: $f(12) = 2$
III: $f(18) = 6$
IV: $f(22) = 12$

oder:

I: $a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = 0$
II: $a \cdot 12^3 + b \cdot 12^2 + c \cdot 12 + d = 2$
III: $a \cdot 18^3 + b \cdot 18^2 + c \cdot 18 + d = 6$
IV: $a \cdot 22^3 + b \cdot 22^2 + c \cdot 22 + d = 12$

b2) Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$a = \frac{1}{396} = 0{,}00252...$
$b = -\frac{19}{396} = -0{,}0479...$
$c = \frac{25}{66} = 0{,}378...$
$d = 0$

b3) $A = \frac{22 \cdot 12}{2} - \int_0^{22} f(x)\,dx = 62{,}7...$
Der Flächeninhalt des Grundstücks nimmt durch die Erweiterung um rund 63 m^2 zu.

Lösungsschlüssel

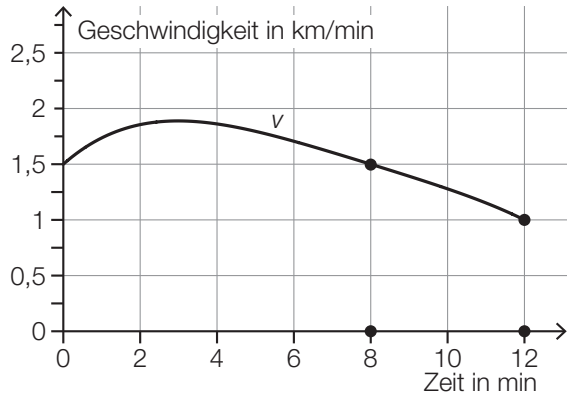
a1) Ein Punkt für das richtige Begründen.
a2) Ein Punkt für das richtige Zeigen.
a3) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Winkels α.
a4) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Flächeninhalts.
b1) Ein Punkt für das richtige Erstellen des Gleichungssystems.
b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Koeffizienten von f.
b3) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Flächeninhalts.

Bordcomputer*

Aufgabennummer: A_308

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Ein Bordcomputer hat 12 min lang die Geschwindigkeit eines PKW aufgezeichnet. Der Graph der so ermittelten Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v ist im nachstehenden Diagramm modellhaft dargestellt.



a) Der Flächeninhalt zwischen dem Graphen von v und der Zeitachse im Intervall [8 min; 12 min] kann durch den Flächeninhalt eines Vierecks angenähert werden. Die gekennzeichneten Gitterpunkte sind die Eckpunkte dieses Vierecks.

1) Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Vierecks.

2) Interpretieren Sie diesen Flächeninhalt im gegebenen Sachzusammenhang. Geben Sie dabei auch die zugehörige Einheit an.

b) Ein Motorrad ist in diesen 12 min mit einer konstanten Geschwindigkeit von 1,75 km/min gefahren.

1) Zeichnen Sie im obigen Diagramm den Graphen der Geschwindigkeit-Zeit-Funktion dieses Motorrads ein.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) 1) Kreuzen Sie die zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]*

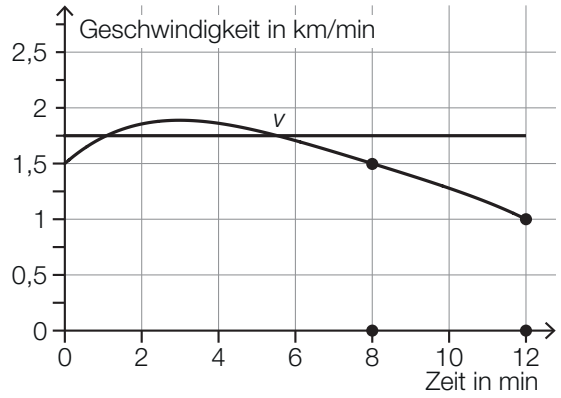
Der vom PKW zurückgelegte Weg nimmt im Intervall [4 min; 8 min] ab.	☐
Die Geschwindigkeit des PKW nimmt im Intervall [4 min; 8 min] zu.	☐
Die Beschleunigung des PKW ist im Intervall [4 min; 8 min] negativ.	☐
Die mittlere Geschwindigkeit des PKW ist im Intervall [4 min; 8 min] geringer als 1,5 km/min.	☐
Es gibt einen Zeitpunkt im Intervall [4 min; 8 min], zu dem der PKW mit 75 km/h fährt.	☐

Möglicher Lösungsweg

a1) $\frac{(1{,}5 + 1) \cdot 4}{2} = 5$

a2) Im Intervall [8 min; 12 min] hat der PKW (rund) 5 km zurückgelegt.

b1)



c1)

Die Beschleunigung des PKW ist im Intervall [4 min; 8 min] negativ.	☒

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Flächeninhalts.
a2) Ein Punkt für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang unter Angabe der zugehörigen Einheit.
b1) Ein Punkt für das richtige Einzeichnen des Graphen.
c1) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

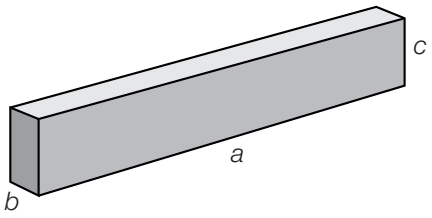
Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Holzfeuchte und Holztrocknung*

Aufgabennummer: A_307

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Beim Trocknen verkürzen sich die Seitenlängen eines feuchten quaderförmigen Holzstücks.



a, *b*, *c* ... Seitenlängen des quaderförmigen Holzstücks in feuchtem Zustand

In trockenem Zustand ist die Seitenlänge *a* um 0,5 %, die Seitenlänge *b* um 10 % und die Seitenlänge *c* um 5 % kürzer als in feuchtem Zustand.

1) Stellen Sie eine Formel zur Berechnung des Volumens *V* des quaderförmigen Holzstücks in trockenem Zustand auf. Verwenden Sie dabei die Seitenlängen *a*, *b* und *c*.

$V =$ _____

2) Ermitteln Sie, um wie viel Prozent das Volumen des quaderförmigen Holzstücks in trockenem Zustand kleiner als in feuchtem Zustand ist.

b) Holzbretter der gleichen Holzsorte mit verschiedenen Dicken trocknen unterschiedlich schnell. Dieser Zusammenhang kann näherungsweise durch die nachstehende Formel beschrieben werden.

$$\frac{T}{t} = \left(\frac{D}{d}\right)^{1,5}$$

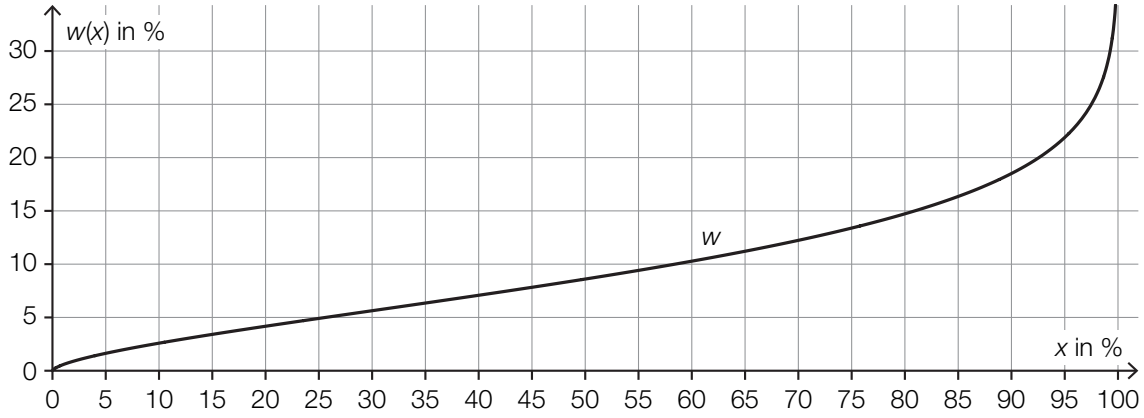
	Dicke	Trockenzeit
Holzbrett 1	*d*	*t*
Holzbrett 2	*D*	*T*

* ehemalige Klausuraufgabe

1) Kreuzen Sie denjenigen Ausdruck an, der nicht dem obigen Zusammenhang entspricht. *[1 aus 5]*

$\frac{T}{t} = \left(\frac{D}{d}\right)^{\frac{3}{2}}$	☐
$\frac{T}{t} = \left(\frac{d}{D}\right)^{-1,5}$	☐
$\frac{T}{t} = \sqrt{\left(\frac{D}{d}\right)^3}$	☐
$\frac{t}{T} = \left(\frac{d}{D}\right)^{-\frac{3}{2}}$	☐
$\frac{t}{T} = \left(\frac{d}{D}\right)^{1,5}$	☐

c) Im nachstehenden Diagramm ist der Zusammenhang zwischen der relativen Luftfeuchtigkeit x (in Prozent) und dem Wassergehalt $w(x)$ (in Prozent) einer bestimmten Holzsorte bei der Lagerung dargestellt.



1) Kennzeichnen Sie im obigen Diagramm denjenigen Punkt $P = (x_0 | w(x_0))$, für den gilt: $w'(x_0) = 1$

Der im obigen Diagramm dargestellte Zusammenhang soll im Intervall [45; 55] mithilfe der Punkte $A = (45 | 7{,}8)$ und $B = (55 | 9{,}4)$ durch eine lineare Funktion modelliert werden.

2) Stellen Sie eine Gleichung dieser linearen Funktion auf.

Möglicher Lösungsweg

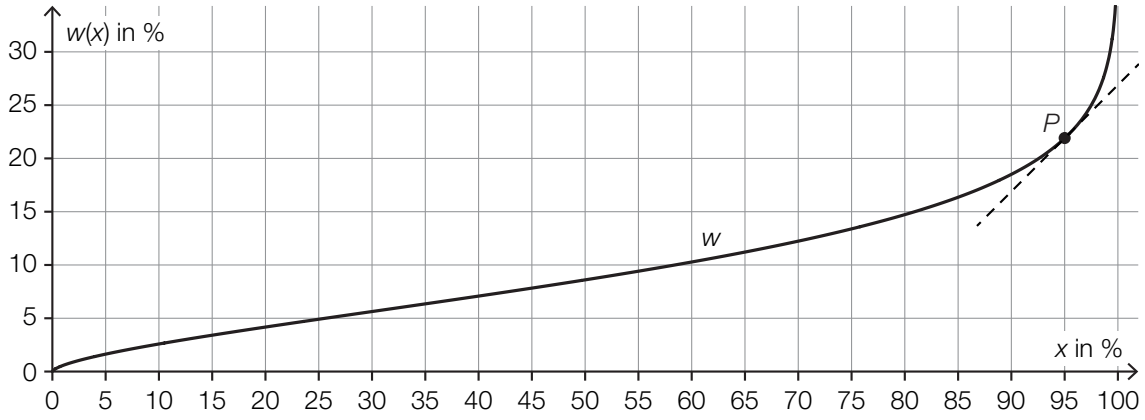
a1) $V = 0{,}995 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}95 \cdot a \cdot b \cdot c = 0{,}850725 \cdot a \cdot b \cdot c$

a2) $1 - 0{,}850725 = 0{,}149275$
Das Volumen des Holzstücks ist in trockenem Zustand um rund 14,9 % kleiner als in feuchtem Zustand.

b1)

$\frac{t}{T} = \left(\frac{d}{D}\right)^{-\frac{3}{2}}$	☒

c1)



Toleranzbereich für x_0: [92; 97]

c2) $f(x) = k \cdot x + d$
x ... relative Luftfeuchtigkeit in %
$f(x)$ ... Wassergehalt von Holz dieser Holzsorte bei der relativen Luftfeuchtigkeit x in %

$k = \frac{9{,}4 - 7{,}8}{55 - 45} = 0{,}16$
$d = 7{,}8 - 0{,}16 \cdot 45 = 0{,}6$
$f(x) = 0{,}16 \cdot x + 0{,}6$

Lösungsschlüssel

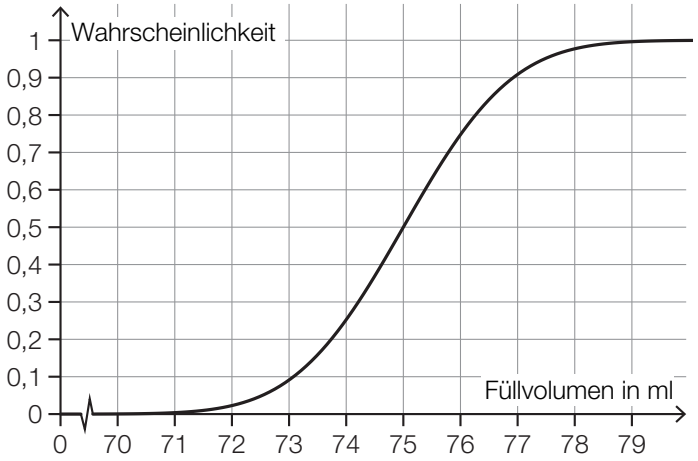
a1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel.
a2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln des Prozentsatzes.
b1) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.
c1) Ein Punkt für das richtige Kennzeichnen des Punktes *P*.
c2) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung.

Kosmetikartikel*

Aufgabennummer: A_306

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Ein Parfum wird in bestimmte Fläschchen abgefüllt. Das Füllvolumen wird dabei als annähernd normalverteilt mit der Standardabweichung σ = 1,5 ml angenommen. In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der zugehörigen Verteilungsfunktion dargestellt.



1) Lesen Sie aus der obigen Abbildung den Erwartungswert μ des Füllvolumens ab.

μ = _____ ml

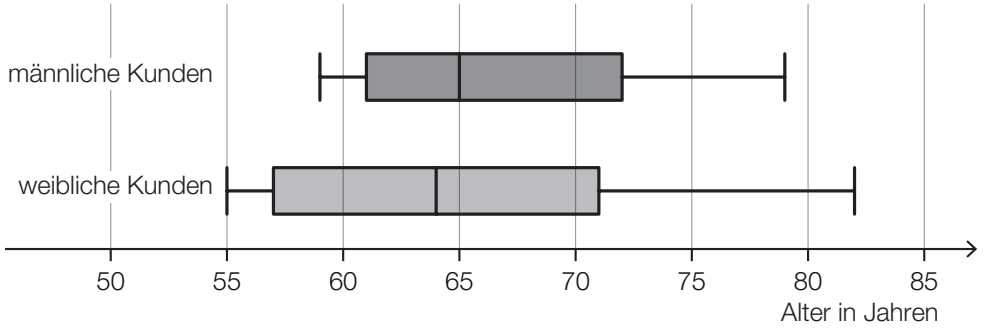
2) Ermitteln Sie dasjenige um μ symmetrische Intervall, in dem das Füllvolumen eines zufällig ausgewählten Fläschchens mit einer Wahrscheinlichkeit von 80 % liegt.

3) Veranschaulichen Sie in der obigen Abbildung die Wahrscheinlichkeit, dass das Füllvolumen eines zufällig ausgewählten Fläschchens höchstens 76 ml beträgt.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Ein bestimmter Kosmetikartikel wurde sowohl von männlichen als auch von weiblichen Kunden gekauft.

Eine Erhebung zum Alter aller Kunden, die diesen Kosmetikartikel gekauft haben, ist in der nachstehenden Abbildung in Form zweier Boxplots zusammengefasst.



1) Kreuzen Sie die zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]*

Die Spannweite des Alters der weiblichen Kunden ist kleiner als diejenige der männlichen Kunden.	☐
Die jüngste Person, die den Kosmetikartikel gekauft hat, ist männlich.	☐
Der Median des Alters der männlichen Kunden ist größer als derjenige der weiblichen Kunden.	☐
Mehr als die Hälfte der weiblichen Kunden ist älter als 65 Jahre.	☐
Das 3. Quartil des Alters der weiblichen Kunden ist größer als dasjenige der männlichen Kunden.	☐

Möglicher Lösungsweg

a1) $\mu = 75$ ml

a2) X ... Füllvolumen in ml

$P(X \leq a) = 0{,}1$

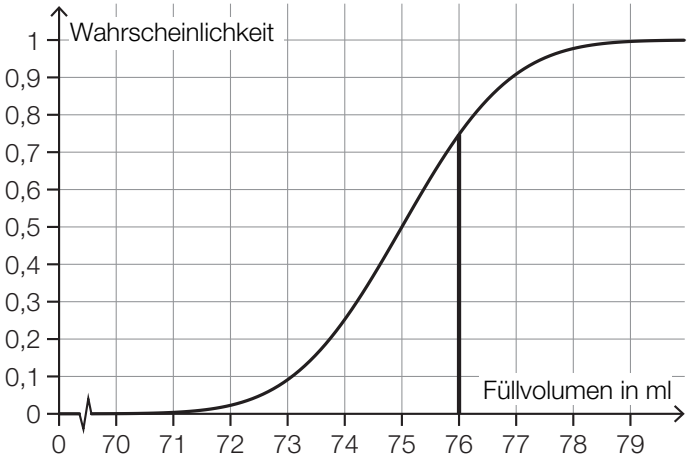
Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$a = 73{,}077...$

Intervall: [73,077...; 76,922...]
Auch ein Ermitteln mithilfe der Abbildung ist als richtig zu werten.

Toleranzbereich für die untere Intervallgrenze: [73; 73,2]
Toleranzbereich für die obere Intervallgrenze: [76,8; 77]

a3)



b1)

Der Median des Alters der männlichen Kunden ist größer als derjenige der weiblichen Kunden.	☒

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das richtige Ablesen des Erwartungswerts μ.
a2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln des Intervalls.
a3) Ein Punkt für das richtige Veranschaulichen der Wahrscheinlichkeit.
b1) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Leuchtdioden*

Aufgabennummer: A_305

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

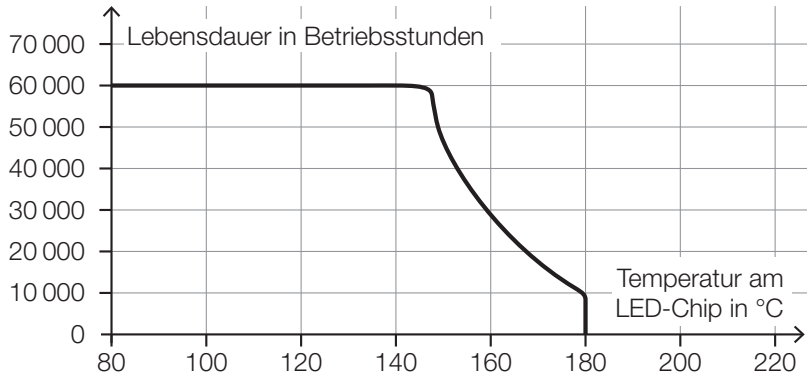
Leuchtdioden (LEDs) werden häufig als Beleuchtungsmittel verwendet.

a) LEDs haben einen begrenzten Öffnungswinkel. Für eine sogenannte *Rundum-Beleuchtung* werden daher mehrere LEDs benötigt. Die Anzahl der LEDs gleicher Bauart, die für eine Rundum-Beleuchtung benötigt werden, kann gemäß der nachstehenden Vorschrift berechnet werden.

Dividiere 1 durch den Sinus von einem Viertel des Öffnungswinkels.
Quadriere die erhaltene Zahl.
Ist das nun erhaltene Ergebnis nicht ganzzahlig, dann runde es auf die nächstgrößere ganze Zahl auf.

1) Berechnen Sie die Anzahl der LEDs mit einem Öffnungswinkel von 40°, die man gemäß der obigen Vorschrift für eine Rundum-Beleuchtung benötigt.

b) Die Lebensdauer von LEDs ist abhängig von der Temperatur am LED-Chip. Auf einer Website ist dieser Zusammenhang grafisch dargestellt (siehe nachstehende Abbildung).



Quelle: https://www.led-studien.de/wp-content/uploads/2015/10/Lebensdauer-nach-LED-Temperatur.png [16.08.2019] (adaptiert).

1) Ermitteln Sie die mittlere Änderungsrate der Lebensdauer bei Erhöhung der Temperatur von 140 °C auf 160 °C.

2) Begründen Sie, warum es sich bei der in der obigen Abbildung dargestellten Kurve nicht um den Graphen einer Funktion handeln kann.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Ein Maß für die Helligkeit einer Lichtquelle ist der sogenannte *Lichtstrom*. Dieser wird in der Einheit Lumen angegeben.
Man geht davon aus, dass der maximale Lichtstrom von LEDs durch technische Weiterentwicklung exponentiell ansteigen wird.
Dabei gilt: Alle 10 Jahre steigt der maximale Lichtstrom von LEDs auf das 20-Fache.

Diese Entwicklung kann durch eine Exponentialfunktion L modelliert werden.

$L(t) = L_0 \cdot a^t$

t … Zeit in Jahren
$L(t)$ … maximaler Lichtstrom zur Zeit t in Lumen
L_0 ... maximaler Lichtstrom zur Zeit $t = 0$ in Lumen
a ... positiver Parameter

1) Berechnen Sie den Parameter a.

2) Interpretieren Sie den Wert des Parameters a im gegebenen Sachzusammenhang.

Möglicher Lösungsweg

a1) $\left(\frac{1}{\sin\left(\frac{40°}{4}\right)}\right)^2 = 33{,}1...$

Für eine Rundum-Beleuchtung benötigt man 34 LEDs.

b1) $\frac{29\,000 - 60\,000}{160 - 140} = -1\,550$

Toleranzbereich: [–1 600; –1 500]

b2) Bei der dargestellten Kurve handelt es sich nicht um den Graphen einer Funktion, da nicht jedem Argument genau ein Funktionswert zugeordnet wird. (Hier sind der Temperatur 180 °C mehrere Lebensdauer-Werte zugeordnet.)

c1) $20 = a^{10} \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt[10]{20} = 1{,}349...$

c2) Der maximale Lichtstrom von LEDs nimmt laut diesem Modell pro Jahr um rund 35 % (bezogen auf den Wert des jeweiligen Vorjahrs) zu.

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Anzahl.
b1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der mittleren Änderungsrate.
b2) Ein Punkt für das richtige Begründen.
c1) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Parameters *a*.
c2) Ein Punkt für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang.

Kartenspiel*

Aufgabennummer: A_304

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Ein Kartenstapel besteht aus 20 *Diener*-Karten und 10 *Zauber*-Karten. Sabine zieht zufällig ohne Zurücklegen 3 Karten aus diesem Kartenstapel.

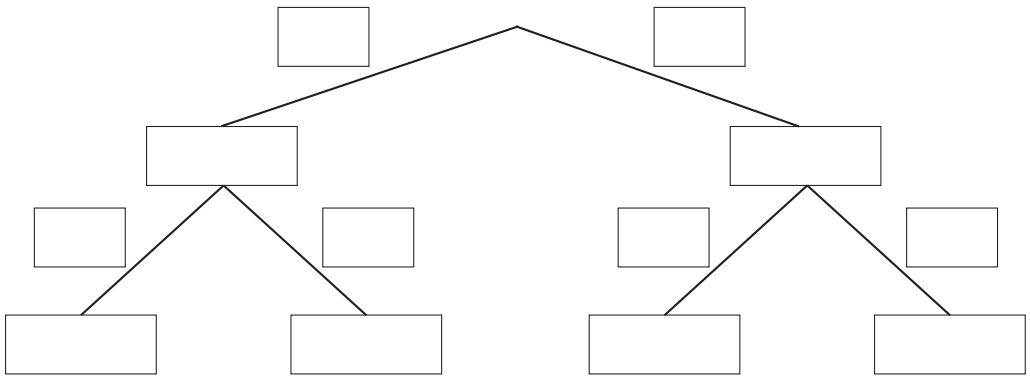
1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Sabine dabei genau 1 *Zauber*-Karte zieht.

2) Beschreiben Sie ein Ereignis E im gegebenen Sachzusammenhang, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem nachstehenden Ausdruck berechnet wird.

$$P(E) = 1 - \frac{20}{30} \cdot \frac{19}{29} \cdot \frac{18}{28} = 0{,}719...$$

b) Lukas wählt für 40 % seiner Spiele eine aggressive Strategie, für die restlichen Spiele wählt er eine defensive Strategie.
Spiele, für die er eine aggressive Strategie wählt, gewinnt er mit der Wahrscheinlichkeit p.
Spiele, für die er eine defensive Strategie wählt, gewinnt er mit einer Wahrscheinlichkeit von 54 %.

1) Vervollständigen Sie das nachstehende Baumdiagramm so, dass es den beschriebenen Sachverhalt wiedergibt.



Die Wahrscheinlichkeit, dass Lukas ein zufällig ausgewähltes Spiel gewinnt, beträgt 53,2 %.

2) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit p.

* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

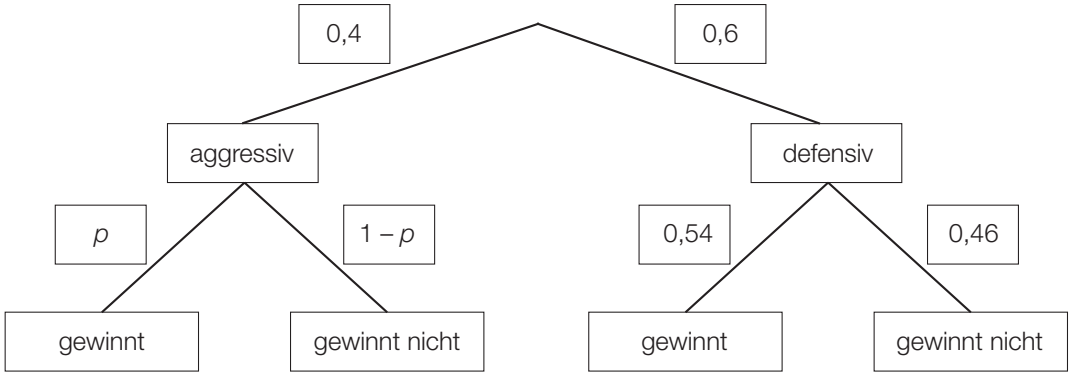
a1) X ... Anzahl der gezogenen *Zauber*-Karten

$P(X = 1) = 3 \cdot \frac{10}{30} \cdot \frac{20}{29} \cdot \frac{19}{28} = 0{,}4679...$

Die Wahrscheinlichkeit, dass Sabine genau 1 *Zauber*-Karte zieht, beträgt rund 46,8 %.

a2) E ... „Sabine zieht mindestens 1 *Zauber*-Karte“

b1)



Der Punkt ist auch zu vergeben, wenn im Baumdiagramm für p = *0,52 und für 1* – p = *0,48 angegeben wird (vgl. Lösung zu b2).*
Der Punkt ist auch zu vergeben, wenn im Baumdiagramm „verliert“ anstelle von „gewinnt nicht“ geschrieben wird.

b2) $0{,}4 \cdot p + 0{,}6 \cdot 0{,}54 = 0{,}532$

$p = 0{,}52$

Lösungsschlüssel

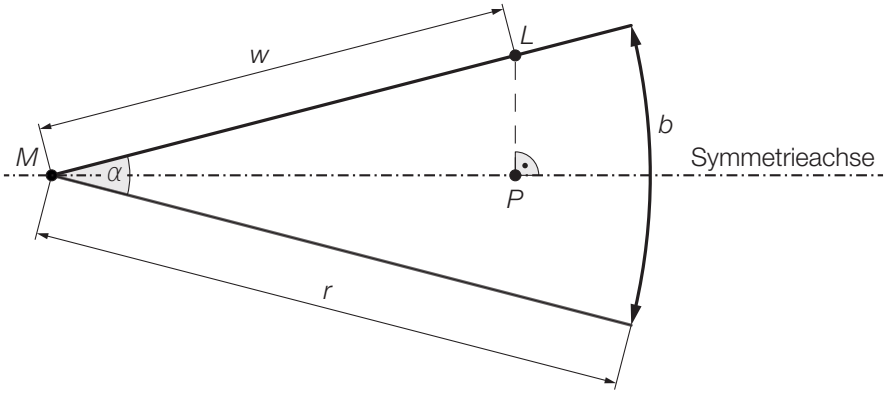
a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Wahrscheinlichkeit.
a2) Ein Punkt für das richtige Beschreiben des Ereignisses im gegebenen Sachzusammenhang.
b1) Ein Punkt für das richtige Vervollständigen des Baumdiagramms.
b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Wahrscheinlichkeit p.

Speerwurf*

Aufgabennummer: A_303

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Der Wurfbereich beim Speerwurf hat die Form eines Kreissektors (siehe nachstehende nicht maßstabgetreue Abbildung in der Ansicht von oben).



z ist die Differenz aus der tatsächlichen Wurfweite $w = \overline{ML}$ und der Streckenlänge $\overline{MP}$.

1) Stellen Sie unter Verwendung von w und α eine Formel zur Berechnung von z auf.

$z =$ _____

Für die Bogenlänge b des Kreissektors und den Öffnungswinkel α des Kreissektors gilt:
$b = 48{,}08$ m
$\alpha = 29°$

2) Berechnen Sie den Radius r des Kreissektors.

b) Ein Teil des Graphen der Funktion f beschreibt die Flugbahn der Speerspitze bei einem bestimmten Wurf.

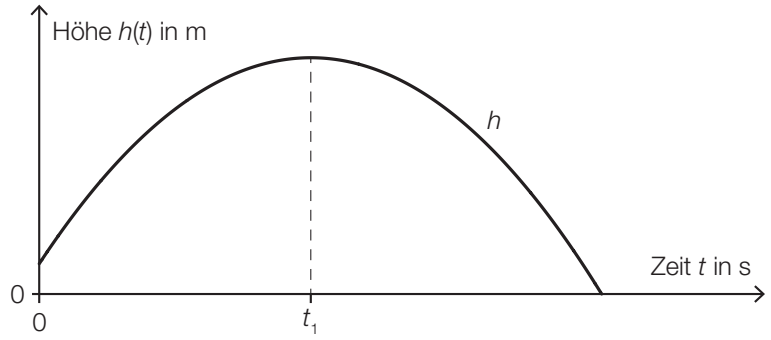
$f(x) = -0{,}01 \cdot x^2 + 0{,}7 \cdot x + 1{,}8$ mit $x \geq 0$

x ... horizontale Entfernung vom Abwurfpunkt in m
$f(x)$ ... Höhe über dem Boden bei der horizontalen Entfernung x in m

1) Berechnen Sie die horizontale Entfernung vom Abwurfpunkt, in der die Speerspitze bei diesem Wurf auf dem Boden auftrifft.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Die quadratische Funktion h beschreibt die Höhe der Speerspitze während eines bestimmten Wurfes in Abhängigkeit von der Zeit t (siehe nachstehende Abbildung).



1) Ordnen Sie den beiden Satzanfängen jeweils eine Fortsetzung aus A bis D so zu, dass zutreffende Aussagen entstehen.

Die momentane Änderungsrate von h zur Zeit t ist negativ für	
Die momentane Änderungsrate von h zur Zeit t ist null für	

A	$t = 0$
B	$t = t_1$
C	$t < t_1$
D	$t > t_1$

Möglicher Lösungsweg

a1) $z = w - w \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

a2) $b = \pi \cdot r \cdot \frac{\alpha}{180°}$

$r = \frac{b \cdot 180°}{\pi \cdot \alpha} = \frac{48{,}08 \cdot 180°}{\pi \cdot 29°} = 94{,}9...$

Der Radius r beträgt rund 95 m.

b1) $f(x) = 0$ *oder* $-0{,}01 \cdot x^2 + 0{,}7 \cdot x + 1{,}8 = 0$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$(x_1 = -2{,}48\dot{3})$, $x_2 = 72{,}48\dot{3}$

Die Speerspitze trifft in einer horizontalen Entfernung von rund 72,48 m auf dem Boden auf.

c1)

Die momentane Änderungsrate von h zur Zeit t ist negativ für	D
Die momentane Änderungsrate von h zur Zeit t ist null für	B

A	$t = 0$
B	$t = t_1$
C	$t < t_1$
D	$t > t_1$

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel.
a2) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Radius *r*.
b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der horizontalen Entfernung.
c1) Ein Punkt für das richtige Zuordnen.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Strandbar*

Aufgabennummer: B_488

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Eine kleine Strandbar bietet zwei Eisdesserts an: Eiskaffee und Bananensplit.

x ... Anzahl der Eiskaffees
y ... Anzahl der Bananensplits

a) Für einen Eiskaffee benötigt man 2 Kugeln Vanilleeis und 1 Portion Obers.
Für ein Bananensplit benötigt man 3 Kugeln Vanilleeis und 1 Portion Obers.
Es ist Vanilleeis für maximal 80 Kugeln vorhanden.
Der Obersvorrat reicht für die Herstellung von maximal 30 Eisdesserts.

1) Erstellen Sie ein Ungleichungssystem, das diesen Sachverhalt beschreibt.

2) Überprüfen Sie nachweislich, ob die Herstellung von 5 Eiskaffees und 25 Bananensplits möglich ist.

b) Die Zielfunktion E beschreibt den Gesamterlös in Euro bei einem Verkauf von x Eiskaffees und y Bananensplits.

$E(x, y) = p_1 \cdot x + p_2 \cdot y$

Der Preis eines Bananensplits ist um 20 % höher als der Preis eines Eiskaffees.

1) Erstellen Sie mithilfe von p_1 eine Formel zur Berechnung von p_2.

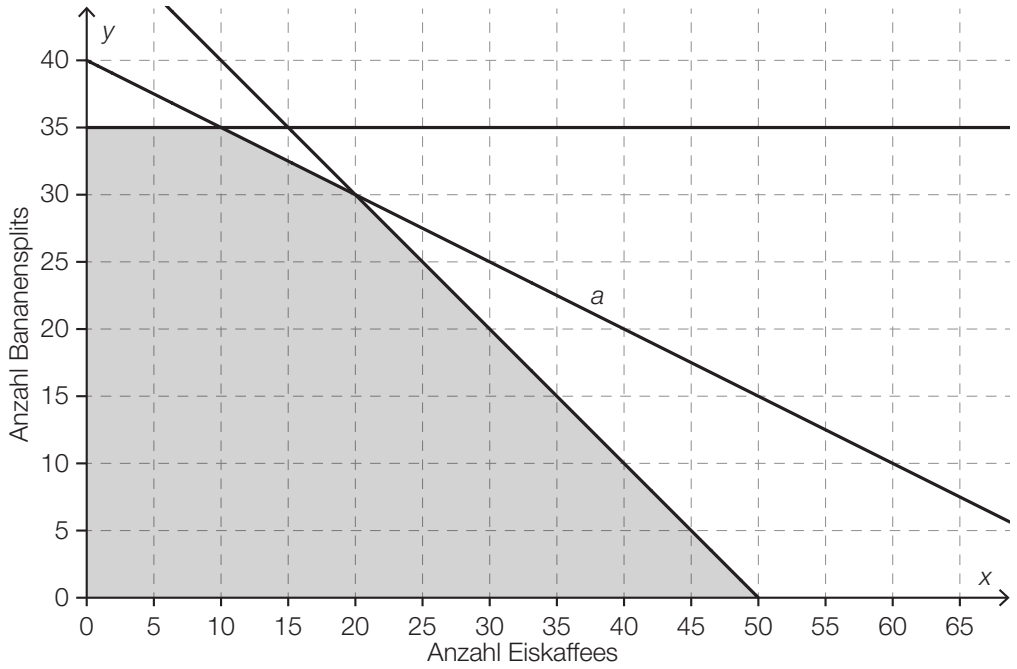
$p_2 =$ _____

Der Gesamterlös bei einem Verkauf von 10 Eiskaffees und 5 Bananensplits beträgt € 72.

2) Ermitteln Sie p_1 und p_2.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Im nächsten Sommer werden die Rezepte und die Preise verändert. In der nachstehenden Abbildung ist der Lösungsbereich für die Herstellung von *x* Eiskaffees und *y* Bananensplits dargestellt.



1) Vervollständigen Sie die nachstehende Gleichung der Geraden *a* durch Eintragen der fehlenden Zahl.

$x + \square \cdot y = 80$

Ein Eiskaffee wird um € 4,60 und ein Bananensplit um € 6,00 verkauft.
Die Kosten für die Herstellung betragen € 1,10 für einen Eiskaffee und € 1,50 für ein Bananensplit.

2) Erstellen Sie eine Gleichung der Zielfunktion zur Beschreibung des Gewinns in Euro.

3) Ermitteln Sie diejenigen Verkaufsmengen, bei denen der Gewinn maximal ist.

Möglicher Lösungsweg

a1) I: $2 \cdot x + 3 \cdot y \leq 80$
II: $x + y \leq 30$

a2) Es ist nicht möglich, weil die Ungleichung I in diesem Fall nicht erfüllt ist.
$2 \cdot 5 + 3 \cdot 25 > 80$

b1) $p_2 = 1{,}2 \cdot p_1$

b2) $72 = p_1 \cdot 10 + (1{,}2 \cdot p_1) \cdot 5 \quad \Rightarrow \quad p_1 = 4{,}5$
$p_2 = 1{,}2 \cdot 4{,}5 = 5{,}4$

c1) $x + \boxed{2} \cdot y = 80$

c2) $G(x, y) = 3{,}5 \cdot x + 4{,}5 \cdot y$

c3) $G(0, 35) = 157{,}5$
$G(10, 35) = 192{,}5$
$G(20, 30) = 205$
$G(50, 0) = 175$
Der maximale Gewinn wird bei einem Verkauf von 20 Eiskaffees und 30 Bananensplits erzielt.

Eine grafische Lösungsmethode ist ebenfalls zulässig.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × A: für das richtige Erstellen des Ungleichungssystems
Die Angabe der Nichtnegativitätsbedingungen ist nicht erforderlich.
a2) 1 × D: für das richtige nachweisliche Überprüfen
b1) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel
b2) 1 × B: für das richtige Ermitteln von p_1 und p_2
c1) 1 × A1: für das richtige Vervollständigen der Gleichung
c2) 1 × A2: für das richtige Erstellen der Gleichung der Zielfunktion
c3) 1 × B: für das richtige Ermitteln der Verkaufsmengen, bei denen der Gewinn maximal ist

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Öffentlicher Verkehr in Wien*

Aufgabennummer: B_515

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) In Wien kostet die Jahreskarte für öffentliche Verkehrsmittel bei einmaliger Zahlung € 365. Alternativ dazu kann die Jahreskarte auch durch 12 monatliche Zahlungen zu je € 33 bezahlt werden.

1) Berechnen Sie denjenigen effektiven Jahreszinssatz, bei dem 12 vorschüssige Monatsraten in Höhe von € 33 einem Barwert von € 365 entsprechen.

b) Die Anzahl der pro Jahr verkauften Jahreskarten für öffentliche Verkehrsmittel in Wien lässt sich für den Zeitraum von 2011 bis 2016 näherungsweise durch die Funktion N beschreiben.

$N(t) = 815\,000 - 450\,000 \cdot a^t$

t … Zeit in Jahren mit $t = 0$ für das Jahr 2011
$N(t)$ … Anzahl der pro Jahr verkauften Jahreskarten zur Zeit t
a … Parameter mit $0 < a < 1$

1) Erklären Sie, warum der Ordinatenabschnitt (Achsenabschnitt auf der vertikalen Achse) des Graphen der Funktion N nicht vom Parameter a abhängt.

Im Jahr 2015 wurden 700 000 Jahreskarten verkauft.

2) Berechnen Sie den Parameter a.

Es wird davon ausgegangen, dass die Funktion N auch die zukünftige Entwicklung der Anzahl der pro Jahr verkauften Jahreskarten richtig beschreibt.

3) Interpretieren Sie die Zahl 815 000 in der obigen Gleichung der Funktion N im gegebenen Sachzusammenhang.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Personen, die ein öffentliches Verkehrsmittel ohne gültige Fahrkarte benützen, werden als *Schwarzfahrer/innen* bezeichnet.
In der nachstehenden Tabelle ist der Anteil der Schwarzfahrer/innen in den öffentlichen Verkehrsmitteln in Wien für verschiedene Jahre angegeben.

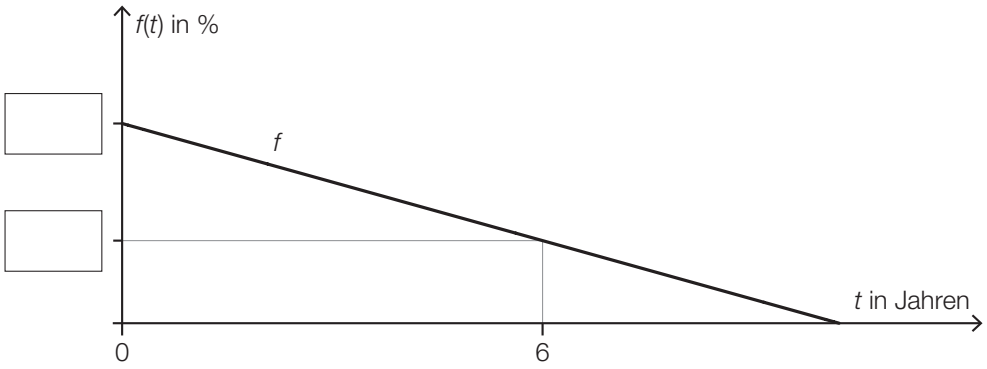
Jahr	2012	2013	2014	2015	2016
Anteil der Schwarzfahrer/innen in Prozent bezogen auf alle kontrollierten Personen	2,7	2,4	2,1	1,8	1,7

Datenquelle: https://wien.orf.at/v2/news/stories/2822992/ [27.10.2017].

Der Anteil der Schwarzfahrer/innen in Prozent soll in Abhängigkeit von der Zeit t in Jahren beschrieben werden.

1) Ermitteln Sie mithilfe der Regressionsrechnung eine Gleichung der zugehörigen linearen Funktion f. Wählen Sie $t = 0$ für das Jahr 2012.

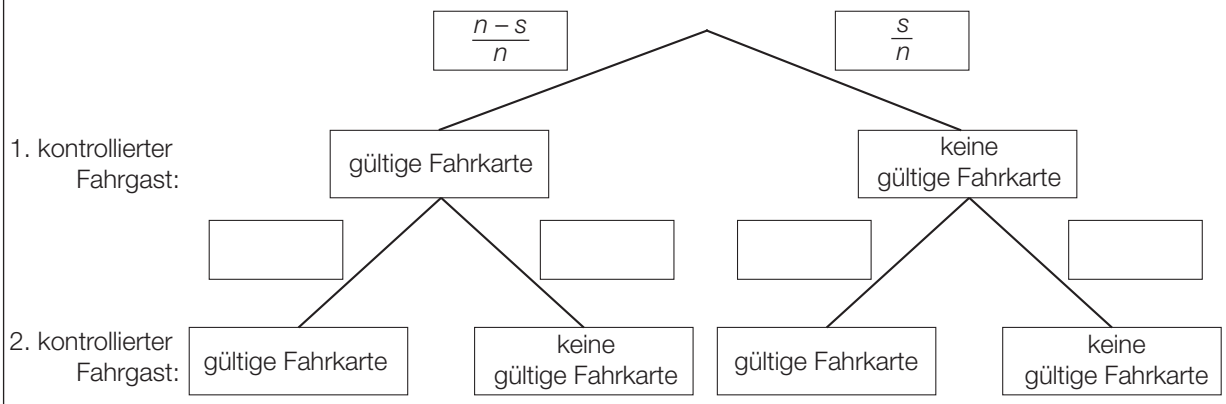
In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Regressionsfunktion f dargestellt.



2) Tragen Sie in der obigen Abbildung die fehlenden Zahlen in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.

d) In einer Straßenbahn befinden sich insgesamt n Fahrgäste, wovon s Fahrgäste keine gültige Fahrkarte besitzen. Eine Kontrollorin wählt nacheinander 2 Fahrgäste zufällig aus.

1) Tragen Sie im nachstehenden Baumdiagramm die fehlenden Wahrscheinlichkeiten in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.



Es soll die Wahrscheinlichkeit berechnet werden, dass genau 1 der beiden kontrollierten Fahrgäste keine gültige Fahrkarte besitzt.

2) Kreuzen Sie denjenigen Ausdruck an, der diese Wahrscheinlichkeit angibt. *[1 aus 5]*

$2 \cdot \frac{s}{n} \cdot \frac{n-s}{n-1}$	☐
$\frac{s}{n} \cdot \frac{n-s}{n-1}$	☐
$2 \cdot \frac{s}{n} \cdot \frac{n-s}{n}$	☐
$\frac{s}{n} \cdot \frac{n-s}{n}$	☐
$\frac{s}{n} \cdot \frac{s-1}{n-1}$	☐

Möglicher Lösungsweg

a1) q_{12} ... monatlicher Aufzinsungsfaktor

$$365 = 33 \cdot \frac{q_{12}^{12} - 1}{q_{12} - 1} \cdot \frac{1}{q_{12}^{11}}$$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$q_{12} = 1{,}0151...$
$i = q_{12}^{12} - 1 = 0{,}19818...$
Der effektive Jahreszinssatz beträgt rund 19,82 %.

b1) Der Ordinatenabschnitt ist der Funktionswert von N an der Stelle 0. Wegen $a^0 = 1$ ist dieser Ordinatenabschnitt daher unabhängig von a.

b2) $700\,000 = 815\,000 - 450\,000 \cdot a^4 \quad \Rightarrow \quad a = 0{,}7110...$

b3) Der Sättigungswert der Anzahl der pro Jahr verkauften Jahreskarten beträgt 815 000.

oder:

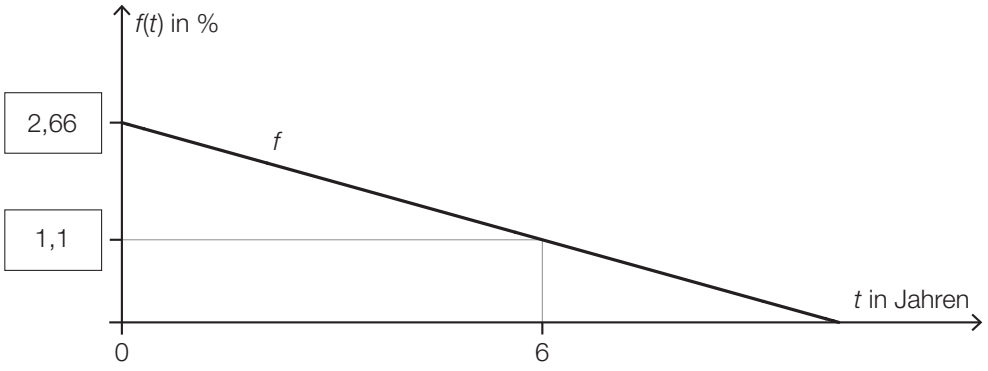
Gemäß der Funktion N nähert sich die Anzahl der pro Jahr verkauften Jahreskarten für $t \to \infty$ der Zahl 815 000 beliebig nahe an.

c1) Ermittlung mittels Technologieeinsatz:

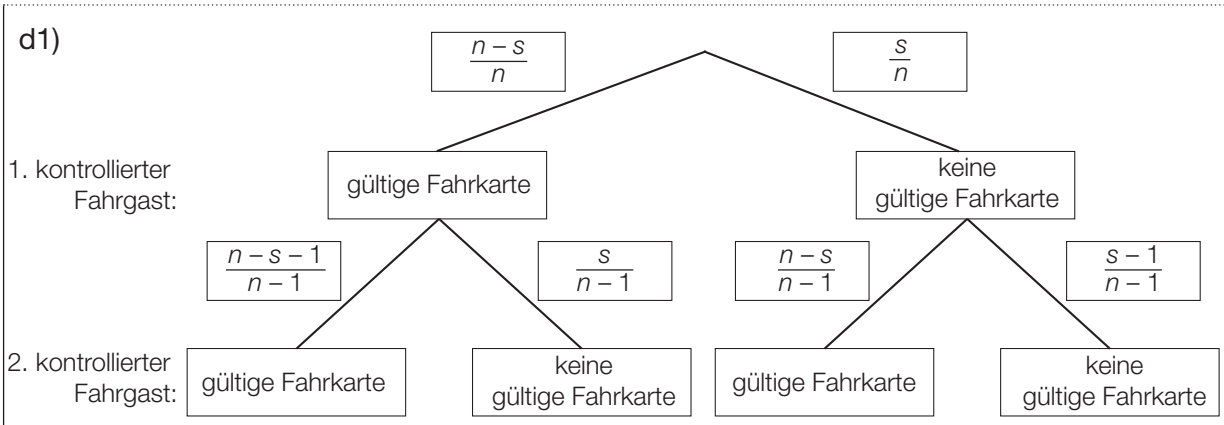
$f(t) = -0{,}26 \cdot t + 2{,}66$

t ... Zeit in Jahren
$f(t)$ ... Anteil der Schwarzfahrer/innen zur Zeit t in Prozent

c2)



d1)



d2)

$2 \cdot \frac{s}{n} \cdot \frac{n-s}{n-1}$	☒

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen des effektiven Jahreszinssatzes.
b1) Ein Punkt für das richtige Erklären.
b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Parameters *a*.
b3) Ein Punkt für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang.
c1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der Gleichung der Funktion *f*.
c2) Ein Punkt für das Eintragen der beiden richtigen Zahlen.
d1) Ein Punkt für das Eintragen der richtigen Wahrscheinlichkeiten.
d2) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

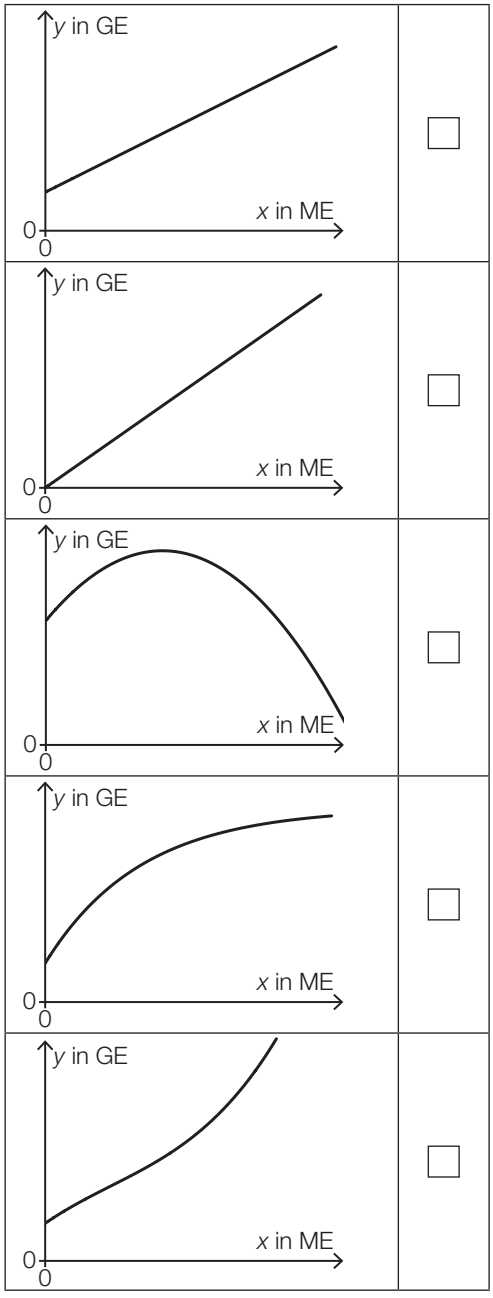
Möbel*

Aufgabennummer: B_513

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

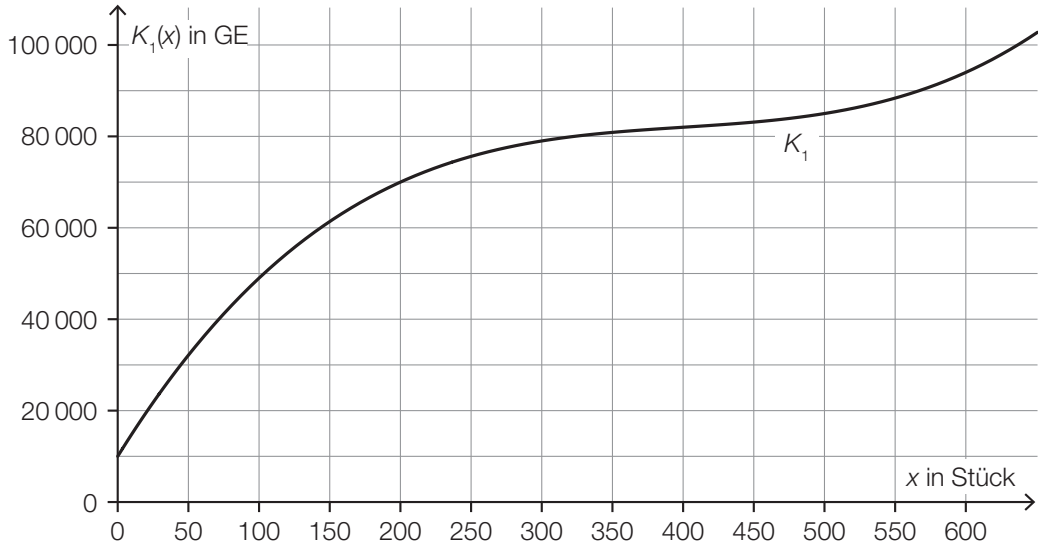
a) Im Folgenden sind die Graphen von 5 Funktionen dargestellt. Nur einer dieser Graphen kann der Graph einer Erlösfunktion sein.

1) Kreuzen Sie den zutreffenden Graphen an. *[1 aus 5]*



* ehemalige Klausuraufgabe

b) In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Kostenfunktion K_1 eines Betriebs bei der Produktion von Kleiderschränken dargestellt.



x ... Produktionsmenge in Stück
$K_1(x)$ ... Gesamtkosten bei der Produktionsmenge x in GE

1) Lesen Sie das größtmögliche Produktionsintervall ab, in dem der Verlauf der Kostenfunktion K_1 degressiv ist.

2) Ermitteln Sie mithilfe der obigen Abbildung die Stückkosten bei einer Produktion von 200 Stück.

Die Fixkosten können um 10 % reduziert werden.

3) Begründen Sie, warum sich die Grenzkostenfunktion dadurch nicht ändert.

c) Die Kostenfunktion K_2 eines Betriebs bei der Produktion von Kommoden ist gegeben durch:

$K_2(x) = 0{,}001 \cdot x^3 - 0{,}9 \cdot x^2 + a \cdot x + 3000$

x ... Produktionsmenge in Stück
$K_2(x)$ ... Gesamtkosten bei der Produktionsmenge x in GE

Bei einer Produktion von 100 Kommoden hat der Betrieb Gesamtkosten von 35 000 GE.

1) Berechnen Sie den Koeffizienten a der Kostenfunktion K_2.

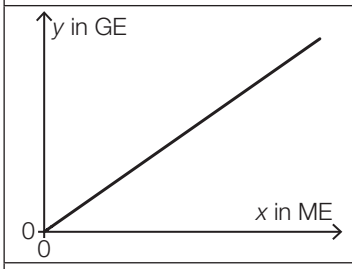
2) Berechnen Sie das Betriebsoptimum.

Der Break-even-Point wird bei einem Verkauf von 60 Kommoden erreicht.

3) Berechnen Sie den Preis pro Kommode bei dieser verkauften Menge.

Möglicher Lösungsweg

a1)

	☒

b1) Im Produktionsintervall [0; 400[ist der Verlauf der Kostenfunktion degressiv.
Toleranzbereich für die obere Intervallgrenze [325; 475]
Auch die Angabe als abgeschlossenes oder offenes Intervall ist als richtig zu werten.

b2) $\overline{K}_1(200) = \frac{K_1(200)}{200} = \frac{70\,000}{200} = 350$
Die Stückkosten betragen 350 GE pro Stück.

b3) Die Grenzkostenfunktion ist die Ableitung der Kostenfunktion. Die Fixkosten fallen beim Ableiten als konstantes Glied weg.

c1) $0{,}001 \cdot 100^3 - 0{,}9 \cdot 100^2 + a \cdot 100 + 3\,000 = 35\,000 \quad \Rightarrow \quad a = 400$

c2) $\overline{K}_2(x) = \frac{K_2(x)}{x} = 0{,}001 \cdot x^2 - 0{,}9 \cdot x + 400 + \frac{3\,000}{x}$

$\overline{K}_2'(x) = 0{,}002 \cdot x - 0{,}9 - \frac{3\,000}{x^2}$

$\overline{K}_2'(x) = 0$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$x = 457{,}1\ldots$

Das Betriebsoptimum liegt bei einer Produktion von rund 457 Kommoden.

c3) $K_2(60) = 23\,976$

$p = \frac{23\,976}{60} = 399{,}6$

Der Preis beträgt 399,60 GE pro Kommode.

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.
b1) Ein Punkt für das Ablesen des richtigen Produktionsintervalls.
b2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der Stückkosten.
b3) Ein Punkt für das richtige Begründen.
c1) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Koeffizienten a.
c2) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Betriebsoptimums.
c3) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Preises.

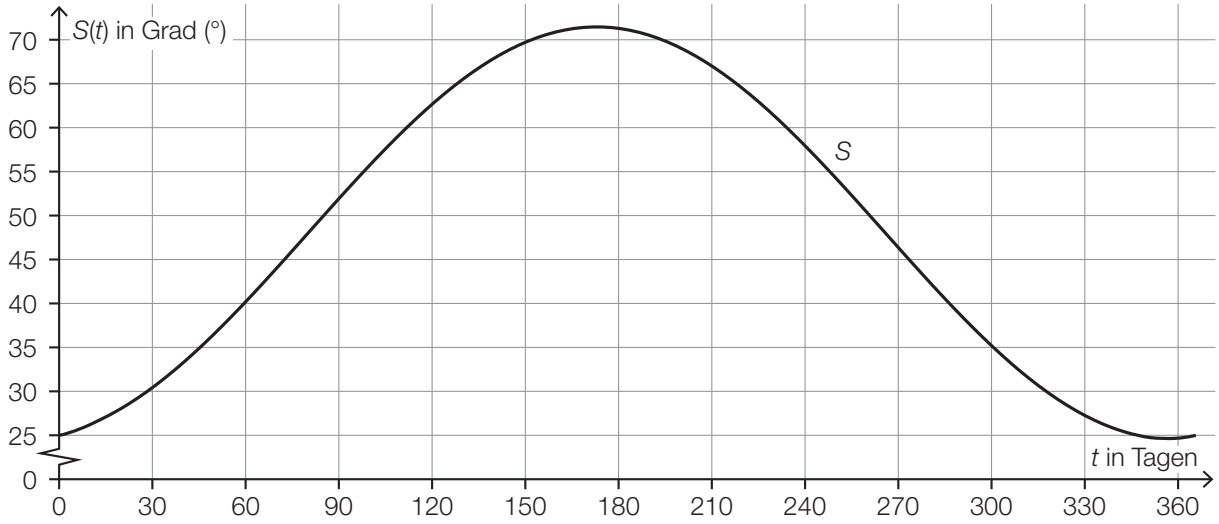
Sonnenlicht und Vitamin D*

Aufgabennummer: A_300

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Für die Bildung von Vitamin D in der Haut ist Sonnenlicht nötig. Ist der Einfallswinkel der Sonnenstrahlen in der Atmosphäre zu klein, kann kein Vitamin D gebildet werden.

a) Für jeden Tag eines Jahres wird der größte Einfallswinkel der Sonnenstrahlen betrachtet. Für eine bestimmte Stadt ist die zeitliche Entwicklung dieses Winkels als Graph der Funktion S dargestellt.



t ... Zeit ab Jahresbeginn in Tagen
$S(t)$ ... größter Einfallswinkel der Sonnenstrahlen zur Zeit t in Grad (°)

1) Lesen Sie dasjenige Zeitintervall ab, in dem der größte Einfallswinkel der Sonnenstrahlen mindestens 45° beträgt.

[_____ ; _____] (in Tagen)

Es wird folgende Berechnung durchgeführt: $\frac{S(90) - S(0)}{90} \approx 0{,}3$

2) Interpretieren Sie das Ergebnis dieser Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang. Geben Sie dabei die zugehörige Einheit an.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Die Vitamin-D-Konzentration in Claudias Blut sinkt ab Herbstbeginn und lässt sich durch die Funktion N beschreiben.

$N(t) = N_0 \cdot e^{-0{,}0173 \cdot t}$

t ... Zeit ab Herbstbeginn in Tagen
$N(t)$ ... Vitamin-D-Konzentration in Claudias Blut zur Zeit t in Nanogramm pro Milliliter (ng/ml)
N_0 ... Vitamin-D-Konzentration in Claudias Blut zu Herbstbeginn in ng/ml

Der Körper ist ausreichend mit Vitamin D versorgt, wenn dessen Konzentration im Blut mindestens 30 ng/ml beträgt.

Claudia möchte wissen, wie hoch die Vitamin-D-Konzentration im Blut zu Herbstbeginn mindestens sein muss, damit ihr Körper nach 60 Tagen noch ausreichend mit Vitamin D versorgt ist.

1) Berechnen Sie die dafür notwendige Vitamin-D-Konzentration zu Herbstbeginn.

Im obigen Modell beträgt die Halbwertszeit beim Abbau von Vitamin D in Claudias Körper 40 Tage.

2) Kreuzen Sie die zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]*

Nach 80 Tagen ist noch die Hälfte von N_0 vorhanden.	☐
Nach 100 Tagen ist noch ein Drittel von N_0 vorhanden.	☐
Nach 120 Tagen ist noch ein Viertel von N_0 vorhanden.	☐
Nach 140 Tagen ist noch ein Achtel von N_0 vorhanden.	☐
Nach 160 Tagen ist noch ein Sechzehntel von N_0 vorhanden.	☐

Möglicher Lösungsweg

a1) [73; 273] (in Tagen)
Toleranzbereich für die untere Grenze: [70; 80]
Toleranzbereich für die obere Grenze: [270; 280]

a2) In den ersten 90 Tagen des Jahres steigt der größte Einfallswinkel der Sonnenstrahlen pro Tag um durchschnittlich 0,3°.

oder:

Die mittlere Änderungsrate des größten Einfallswinkels der Sonnenstrahlen im Zeitintervall [0; 90] beträgt 0,3° pro Tag.

b1) $30 = N_0 \cdot e^{-0{,}0173 \cdot 60} \quad \Rightarrow \quad N_0 = 84{,}7...$

Die Vitamin-D-Konzentration im Blut zu Herbstbeginn muss (mindestens) rund 85 ng/ml betragen.

b2)

Nach 160 Tagen ist noch ein Sechzehntel von N_0 vorhanden.	☒

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das Ablesen des richtigen Zeitintervalls.
a2) Ein Punkt für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang.
b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der notwendigen Vitamin-D-Konzentration zu Herbstbeginn.
b2) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Handyproduktion*

Aufgabennummer: B_517

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Ein Unternehmen produziert die zwei Handymodelle H_1 und H_2.
Dabei werden die beiden Mikrochip-Sorten M_1 und M_2 benötigt.
Für die Produktion der Mikrochips werden unter anderem die Rohstoffe Silicium (R_1) und Kupfer (R_2) benötigt.

Die nachstehende Tabelle, die der Matrix $\boldsymbol{R}$ entspricht, beschreibt den Mengenbedarf an Rohstoffen (in ME) für die Herstellung je eines Stücks der beiden Mikrochip-Sorten.

	M_1	M_2
R_1	5	7
R_2	1	2

Die nachstehende Tabelle, die der Matrix $\boldsymbol{S}$ entspricht, beschreibt den Mengenbedarf an Mikrochips (in Stück) für die Herstellung je eines Stücks der beiden Handymodelle.

	H_1	H_2
M_1	5	1
M_2	0	4

a) 1) Ermitteln Sie diejenige Matrix $\boldsymbol{A}$, die den Mengenbedarf an Rohstoffen für die Herstellung je eines Stücks der beiden Handymodelle beschreibt.

Bei einer bestimmten Produktionsvariante wird die Matrix $\boldsymbol{S}$ durch eine Matrix $\boldsymbol{S}_1 = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ x & 4 \end{pmatrix}$ so ersetzt, dass sich anstelle von $\boldsymbol{A}$ die neue Matrix $\begin{pmatrix} 46 & 33 \\ 11 & 9 \end{pmatrix}$ ergibt.

2) Ermitteln Sie x.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Die Anzahlen der täglich produzierten Handys der Handymodelle H_1 und H_2 können durch den Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ dargestellt werden.

Die Preise pro ME für die Rohstoffe R_1 und R_2 können durch den Vektor $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ dargestellt werden.

1) Beschreiben Sie, was durch den Ausdruck $\boldsymbol{S} \cdot \vec{x}$ im gegebenen Sachzusammenhang berechnet wird.

2) Ermitteln Sie die Zeilen- und die Spaltenanzahl der Matrix $\vec{p}^{\,T} \cdot \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{S} \cdot \vec{x}$.

Zeilenanzahl: _____

Spaltenanzahl: _____

c) Der Prozess der Handyproduktion wird geändert. Die neue Verflechtung zwischen den Rohstoffen, den Mikrochips und den Handymodellen kann durch die nachstehende Tabelle beschrieben werden.

	R_1	R_2	M_1	M_2	H_1	H_2
R_1	0	0	5	7	6	0
R_2	0	0	1	2	0	0
M_1	0	0	0	0	5	1
M_2	0	0	0	0	0	4
H_1	0	0	0	0	0	0
H_2	0	0	0	0	0	0

1) Vervollständigen Sie den nachstehenden Gozinto-Graphen so, dass er den beschriebenen Sachverhalt wiedergibt.



Die tägliche Nachfrage nach den Rohstoffen R_1 und R_2, den Mikrochips M_1 und M_2 sowie den Handymodellen H_1 und H_2 kann durch den Vektor $\vec{\boldsymbol{n}}$ beschrieben werden:

$$\vec{\boldsymbol{n}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\,000 \\ 1\,000 \\ 500 \\ 700 \end{pmatrix}$$

2) Lesen Sie die Anzahl der insgesamt täglich nachgefragten Mikrochips ab.

d) Die häufigsten Fehler, die bei den Handymodellen H_1 und H_2 auftreten, sind Displayfehler und Akkufehler.

Die Wahrscheinlichkeiten, mit denen diese beiden Fehler auftreten, sind in der nachstehenden Vierfeldertafel dargestellt.

	Displayfehler	kein Displayfehler	Summe
Akkufehler	0,01	0,02	0,03
kein Akkufehler	0,01	0,96	0,97
Summe	0,02	0,98	1,00

1) Beschreiben Sie ein Ereignis im gegebenen Sachzusammenhang, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem nachstehenden Ausdruck berechnet wird.

   $1 - 0{,}96 = 0{,}04$

2) Überprüfen Sie nachweislich, ob die beiden Ereignisse „Displayfehler“ und „Akkufehler“ voneinander unabhängig sind.

Bei einem Handy ist ein Displayfehler aufgetreten.

3) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass unter dieser Bedingung auch ein Akkufehler auftritt.

Möglicher Lösungsweg

a1) $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} 25 & 33 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$

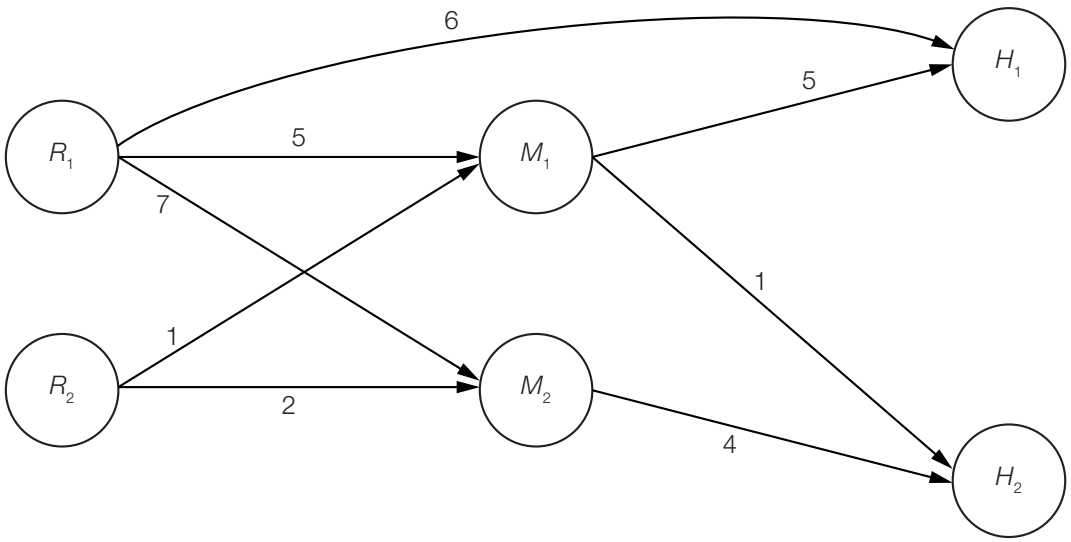
a2) $5 \cdot 5 + 7 \cdot x = 46 \quad \Rightarrow \quad x = 3$
$1 \cdot 5 + 2 \cdot x = 11 \quad \Rightarrow \quad x = 3$

Für die Punktevergabe ist eine der beiden Gleichungen ausreichend.

b1) Es wird die Anzahl der Mikrochips M_1 und M_2 berechnet, die für die Produktion von x_1 Handys vom Modell H_1 und x_2 Handys vom Modell H_2 benötigt werden.

b2) Zeilenanzahl: 1
Spaltenanzahl: 1

c1)



c2) Es werden insgesamt 3 000 Mikrochips täglich nachgefragt.

d1) Mindestens einer der beiden Fehler tritt auf.

d2) Die Ereignisse „Displayfehler“ (D) und „Akkufehler“ (A) sind unabhängig, wenn gilt:
$P(D) \cdot P(A) = P(D \cap A)$
$P(D \cap A) = 0{,}01$
$P(D) \cdot P(A) = 0{,}02 \cdot 0{,}03 = 0{,}0006 \neq 0{,}01$

Daher sind die beiden Ereignisse nicht unabhängig.

d3) $P(A \mid D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{0{,}01}{0{,}02} = \frac{1}{2}$

Die Wahrscheinlichkeit, dass unter dieser Bedingung ein Akkufehler auftritt, beträgt 50 %.

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der Matrix $\boldsymbol{A}$.
a2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln von x.
b1) Ein Punkt für das richtige Beschreiben im gegebenen Sachzusammenhang.
b2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der Zeilen- und der Spaltenanzahl.
c1) Ein Punkt für das richtige Vervollständigen des Gozinto-Graphen.
c2) Ein Punkt für das Ablesen der richtigen Anzahl.
d1) Ein Punkt für das richtige Beschreiben im gegebenen Sachzusammenhang.
d2) Ein Punkt für das richtige nachweisliche Überprüfen.
d3) Ein Punkt für das richtige Berechnen der bedingten Wahrscheinlichkeit.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Reisebus*

Aufgabennummer: B_516

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein Reiseunternehmen plant, einen neuen Reisebus anzuschaffen.

a) Für den Reisebus rechnet das Reiseunternehmen mit Anschaffungskosten in Höhe von € 180.000, einer Nutzungsdauer von 6 Jahren und einem Restwert in Höhe von € 40.000. Zudem rechnet es mit jährlichen Versicherungskosten in Höhe von € 3.300, jährlichen Treibstoffkosten in Höhe von € 8.500 und jährlichen Reparaturkosten in Höhe von € 8.200. Das Reiseunternehmen erwartet durch die Anschaffung des Reisebusses jährliche Einnahmen in Höhe von € 50.000.

1) Übertragen Sie alle Einnahmen und Ausgaben in die nachstehende Tabelle.

Jahr	Einnahmen in €	Ausgaben in €
0		
1		
2		
3		
4		
5		
6		

2) Erklären Sie anhand der obigen Tabelle, warum diese Investition vorteilhaft sein könnte.

Das Reiseunternehmen rechnet mit einem kalkulatorischen Zinssatz von 4 % p. a.

3) Berechnen Sie den Kapitalwert dieser Investition.

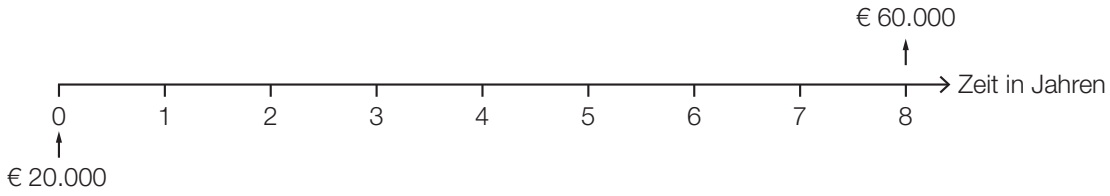
* ehemalige Klausuraufgabe

b) Für den Ankauf des Reisebusses hat das Reiseunternehmen in den letzten 8 Jahren eine Rücklage in Höhe von € 60.000 gebildet.

Die Höhe der Rücklage ergibt sich aus einer Einmalzahlung in Höhe von € 20.000 und regelmäßigen Zahlungen R:

$$20\,000 \cdot 1{,}021^8 + R \cdot \frac{1{,}021^4 - 1}{1{,}021 - 1} \cdot 1{,}021^2 = 60\,000$$

1) Tragen Sie alle Zahlungen R auf der nachstehenden Zeitachse ein.



2) Berechnen Sie die Höhe von R.

c) Für den Ankauf des Reisebusses nimmt das Reiseunternehmen einen Kredit zu einem Zinssatz von 3 % p. a. auf. Die Rückzahlung des Kredits erfolgt durch gleichbleibende jährliche Annuitäten.

Einige Werte des Tilgungsplans sind in der nachstehenden Tabelle angegeben.

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
2				€ 35.331,00
3	€ 1.059,93	€ 2.440,07		

1) Tragen Sie in der obigen Tabelle die Höhe der Annuität in die grau markierte Zelle ein.

Bei der weiteren Tilgung des Kredits verbleibt ein Restbetrag, der ein Jahr nach der letzten Vollrate bezahlt wird.

2) Ermitteln Sie die Höhe dieses Restbetrags.

Möglicher Lösungsweg

a1)

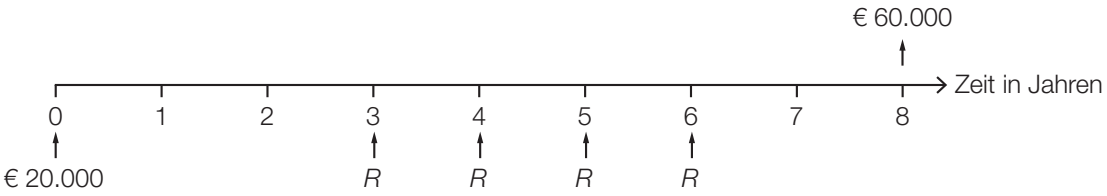
Jahr	Einnahmen in €	Ausgaben in €
0		180 000
1	50 000	20 000
2	50 000	20 000
3	50 000	20 000
4	50 000	20 000
5	50 000	20 000
6	90 000	20 000

a2) Da die Summe der Einnahmen (€ 340.000) höher als die Summe der Ausgaben (€ 300.000) ist, könnte die Investition vorteilhaft sein.

a3) $C_0 = -180\,000 + \frac{30\,000}{1{,}04} + \frac{30\,000}{1{,}04^2} + \frac{30\,000}{1{,}04^3} + \frac{30\,000}{1{,}04^4} + \frac{30\,000}{1{,}04^5} + \frac{70\,000}{1{,}04^6} = 8\,876{,}6...$

Der Kapitalwert beträgt rund € 8.877.

b1)



b2) $R = (60\,000 - 20\,000 \cdot 1{,}021^8) \cdot \frac{1{,}021 - 1}{(1{,}021^4 - 1) \cdot 1{,}021^2} = 8\,455{,}200...$

Die Höhe von R beträgt € 8.455,20.

c1)

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
2				€ 35.331,00
3	€ 1.059,93	€ 2.440,07	**€ 3.500,00**	

c2) $35\,331 = 3\,500 \cdot \frac{1{,}03^n - 1}{1{,}03 - 1} \cdot \frac{1}{1{,}03^n}$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$n = 12{,}204...$

$\left(35\,331 - 3\,500 \cdot \frac{1{,}03^{12} - 1}{1{,}03 - 1} \cdot \frac{1}{1{,}03^{12}}\right) \cdot 1{,}03^{13} = 722{,}498...$

Die Höhe des Restbetrags beträgt € 722,50.

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das richtige Übertragen aller Einnahmen und Ausgaben.
a2) Ein Punkt für das richtige Erklären.
a3) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Kapitalwerts.
b1) Ein Punkt für das richtige Eintragen der vier Zahlungen.
b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Höhe von R.
c1) Ein Punkt für das Eintragen der richtigen Höhe der Annuität.
c2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der Höhe des Restbetrags.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Porzellan*

Aufgabennummer: B_514

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

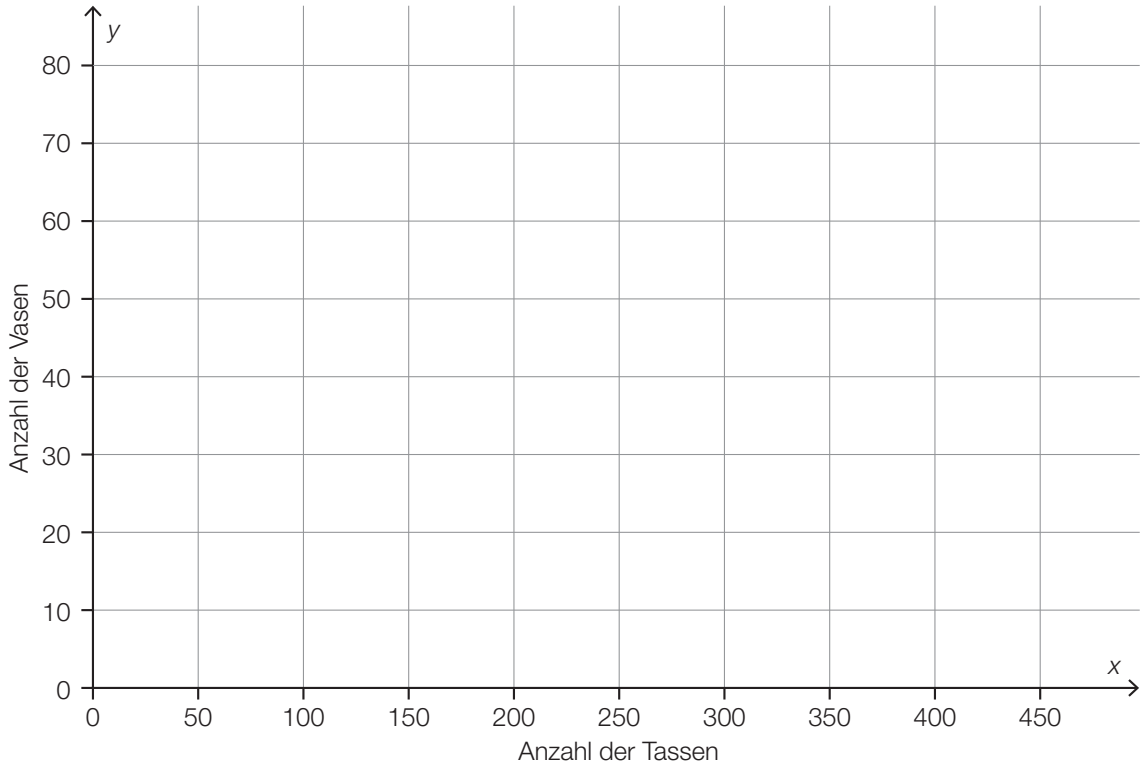
Ein Betrieb stellt Tassen und Vasen aus Porzellan her.

a) Am Standort *A* des Betriebs gelten folgende Produktionseinschränkungen:

Für die Produktion einer Tasse werden 0,2 kg Porzellanmasse benötigt.
Für die Produktion einer Vase wird 1 kg Porzellanmasse benötigt.
Insgesamt können maximal 80 kg Porzellanmasse verarbeitet werden.
Es können maximal 300 Tassen und maximal 50 Vasen produziert werden.

1) Erstellen Sie ein Ungleichungssystem, das die Produktionseinschränkungen für x Tassen und y Vasen beschreibt.

2) Zeichnen Sie in der nachstehenden Abbildung den Lösungsbereich dieses Ungleichungssystems ein.

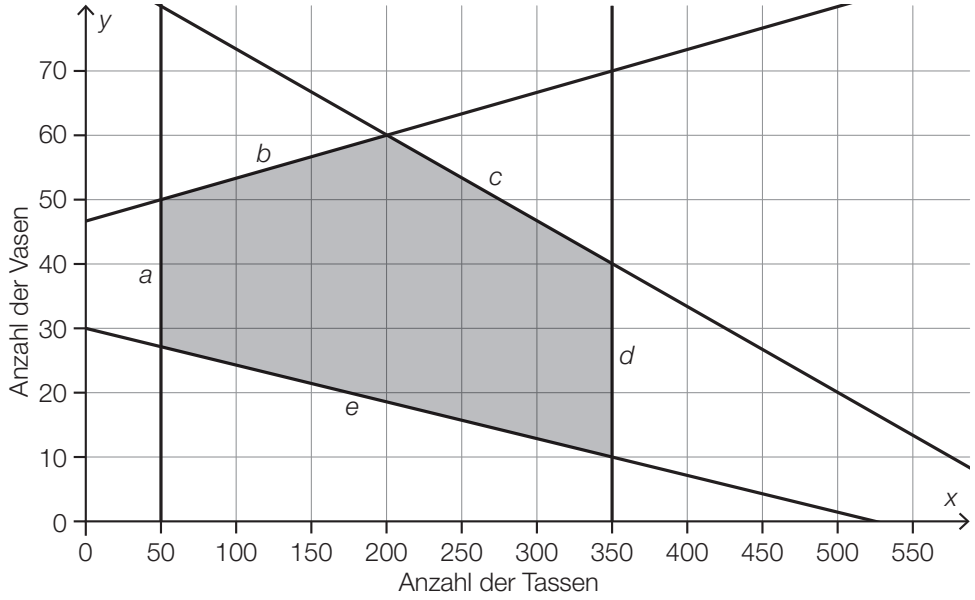


Jemand behauptet: „Wenn 90 kg Porzellanmasse verarbeitet werden, ist es möglich, 250 Tassen und 40 Vasen zu produzieren.“

3) Überprüfen Sie nachweislich, ob diese Behauptung richtig ist.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Die Produktionseinschränkungen am Standort *B* des Betriebs sind in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



1) Vervollständigen Sie die nachstehende Gleichung der Geraden *e* durch Eintragen der fehlenden Zahlen.

$y =$ ☐ $\cdot\, x +$ ☐

2) Ordnen Sie den beiden Aussagen jeweils die entsprechende Gerade zu.

Eine Gleichung der Geraden ist gegeben durch: $-x + 15 \cdot y = 700$	
Die zugehörige Ungleichung beschreibt die Mindestproduktionsmenge für eines der beiden Produkte.	

A	*a*
B	*b*
C	*c*
D	*d*

Der Verkaufspreis für eine Tasse beträgt € 8, jener für eine Vase € 12.
Der Erlös soll maximiert werden.

3) Stellen Sie eine Gleichung der Zielfunktion *E* für den Erlös auf.

$E(x, y) =$ _____

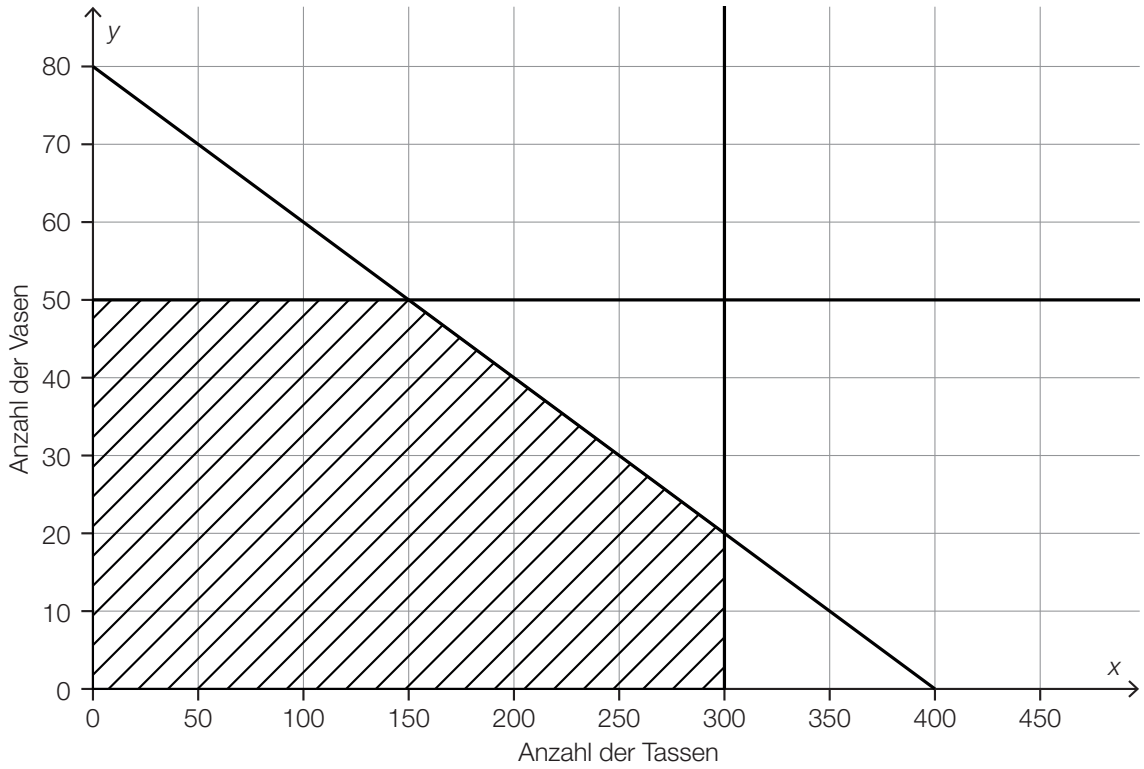
4) Ermitteln Sie die optimalen Produktionsmengen für den Standort *B*.

Möglicher Lösungsweg

a1) I: $0{,}2 \cdot x + y \leq 80$
II: $x \leq 300$
III: $y \leq 50$

Die Nichtnegativitätsbedingungen $x \geq 0$ *und* $y \geq 0$ *sind für die Punktevergabe nicht relevant.*

a2)



a3) $0{,}2 \cdot 250 + 40 = 90$
Mit 90 kg Porzellanmasse ist es möglich, 250 Tassen und 40 Vasen zu produzieren.

Für die Punktevergabe ist es nicht erforderlich, zu überprüfen, ob die Ungleichungen II und III erfüllt sind.

b1) $y = \boxed{-\frac{2}{35}} \cdot x + \boxed{30}$

b2)

Eine Gleichung der Geraden ist gegeben durch: $-x + 15 \cdot y = 700$	B
Die zugehörige Ungleichung beschreibt die Mindestproduktionsmenge für eines der beiden Produkte.	A

A	*a*
B	*b*
C	*c*
D	*d*

b3) $E(x, y) = 8 \cdot x + 12 \cdot y$

b4) $E(200, 60) = 2320$
$E(350, 40) = 3280$
Es müssen 350 Tassen und 40 Vasen produziert werden.

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Ungleichung I (Einschränkung bezüglich Porzellanmasse).
Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Ungleichungen II und III (Einschränkung bezüglich der Maximalanzahl an Tassen und an Vasen).
a2) Ein Punkt für das richtige Einzeichnen des Lösungsbereichs.
a3) Ein Punkt für das richtige nachweisliche Überprüfen.
b1) Ein Punkt für das richtige Vervollständigen der Gleichung der Geraden *e*.
b2) Ein Punkt für das richtige Zuordnen.
b3) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung der Zielfunktion *E*.
b4) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der optimalen Produktionsmengen.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Kinderlieder*

Aufgabennummer: B_511

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Eine Pädagogin fragt die 26 Kinder ihrer Gruppe, ob sie das Kinderlied *Aramsamsam* und ob sie das Kinderlied *Backe, backe Kuchen* kennen.
7 Kinder kennen beide Kinderlieder.
Insgesamt 13 Kinder kennen das Kinderlied *Aramsamsam*.
3 Kinder kennen keines der beiden Kinderlieder.

a) Die Pädagogin wählt 2 verschiedene Kinder aus den 26 Kindern ihrer Gruppe zufällig aus.

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass beide Kinder sowohl das Kinderlied *Aramsamsam* als auch das Kinderlied *Backe, backe Kuchen* kennen.

2) Beschreiben Sie ein mögliches Ereignis E im gegebenen Sachzusammenhang, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem nachstehenden Ausdruck berechnet wird.

$$P(E) = \frac{3}{26} \cdot \frac{2}{25}$$

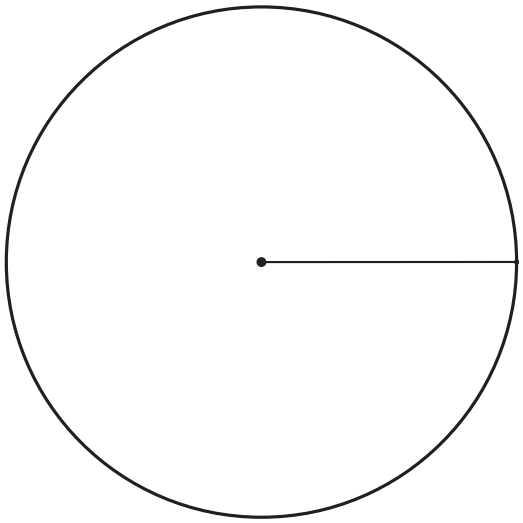
* ehemalige Klausuraufgabe

b) In der nachstehenden Tabelle sollen für diesen Sachverhalt die zugehörigen Prozentsätze für die Gruppe von 26 Kindern eingetragen werden.

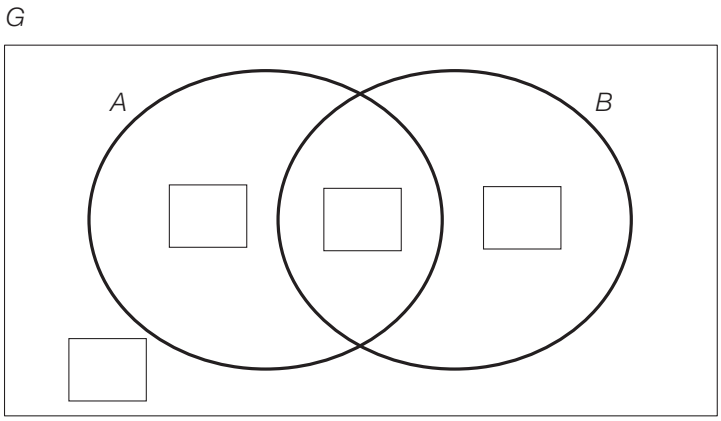
kennen genau eines der beiden Kinderlieder	%
kennen beide Kinderlieder	%
kennen keines der beiden Kinderlieder	11,54 %

1) Tragen Sie in der obigen Tabelle die beiden fehlenden Zahlen ein.

2) Vervollständigen Sie das nachstehende Kreisdiagramm so, dass es den durch die Tabelle beschriebenen Sachverhalt wiedergibt.



c) 1) Vervollständigen Sie das nachstehende Venn-Diagramm durch Eintragen aller Anzahlen in die dafür vorgesehenen Kästchen.



G ... Menge aller Kinder der Gruppe
A ... Menge der Kinder, die das Kinderlied *Aram-samsam* kennen
B ... Menge der Kinder, die das Kinderlied *Backe, backe Kuchen* kennen

2) Ermitteln Sie die Anzahl der Elemente der Menge $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Mit den Kindern, denen beide Kinderlieder bekannt sind, singt die Pädagogin das bis dahin allen Kindern der Gruppe unbekannte Kinderlied *Twinkle, twinkle, little star*.

T ... Menge der Kinder, die das Kinderlied *Twinkle, twinkle, little star* mit der Pädagogin singen

3) Kreuzen Sie die <u>nicht</u> zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]*

$T \subseteq (A \cup B)$	☐
$T \subseteq (A \cap B)$	☐
$T \subseteq (G \setminus B)$	☐
$T \not\subseteq (B \setminus A)$	☐
$T \not\subseteq (A \setminus B)$	☐

Möglicher Lösungsweg

a1) $\frac{7}{26} \cdot \frac{6}{25} = 0{,}06461...$

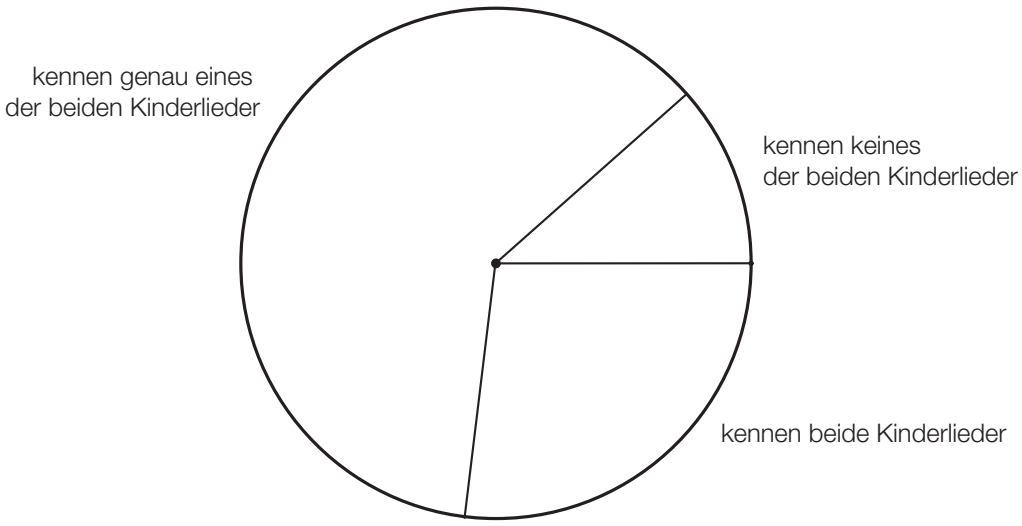
Die Wahrscheinlichkeit, dass beide Kinder sowohl das Kinderlied *Aramsamsam* als auch das Kinderlied *Backe, backe Kuchen* kennen, beträgt rund 6,46 %.

a2) Beide Kinder kennen keines der beiden Kinderlieder.

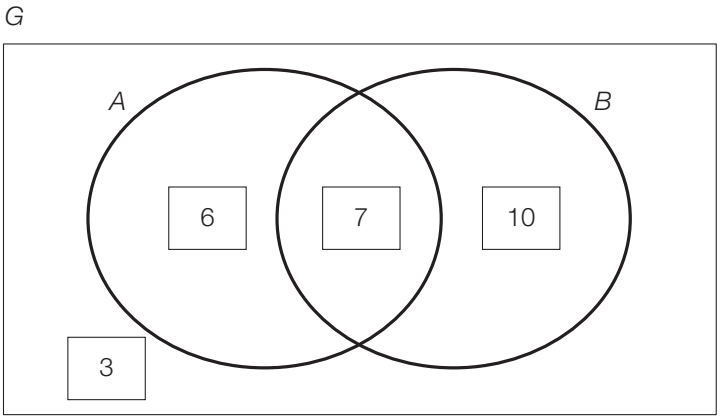
b1)

kennen genau eines der beiden Kinderlieder	61,54 %
kennen beide Kinderlieder	26,92 %
kennen keines der beiden Kinderlieder	11,54 %

b2)



c1)



c2) 6 + 10 = 16

c3)

$T \subseteq (G \setminus B)$	☒

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Wahrscheinlichkeit.
a2) Ein Punkt für das richtige Beschreiben im gegebenen Sachzusammenhang.
b1) Ein Punkt für das Eintragen der beiden richtigen Zahlen.
b2) Ein Punkt für das richtige Vervollständigen des Kreisdiagramms.
c1) Ein Punkt für das richtige Vervollständigen des Venn-Diagramms.
c2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der Anzahl der Elemente.
c3) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

Ressourcen*

Aufgabennummer: B_512

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Im Zeitraum von 1970 bis 2010 hat der jährliche globale Rohstoffverbrauch von 22 Milliarden Tonnen auf 70 Milliarden Tonnen zugenommen.[1]
Im selben Zeitraum hat sich die Weltbevölkerung auf 7 Milliarden verdoppelt.

a) 1) Berechnen Sie auf Basis dieser Angaben den durchschnittlichen jährlichen Rohstoffverbrauch pro Person im Jahr 1970.

Die zeitliche Entwicklung des globalen Rohstoffverbrauchs kann durch eine arithmetische Folge oder durch eine geometrische Folge modelliert werden.

Im Modell *A* wird das jährliche prozentuelle Wachstum bezogen auf das jeweilige Vorjahr als konstant angenommen.

2) Erstellen Sie für das Modell *A* ein explizites Bildungsgesetz für den globalen Rohstoffverbrauch. Wählen Sie $n = 1$ für das Jahr 1970, d. h., $n = 41$ entspricht dem Jahr 2010.

Im Modell *B* wird das jährliche absolute Wachstum als konstant angenommen.

3) Erstellen Sie für das Modell *B* ein rekursives Bildungsgesetz für den globalen Rohstoffverbrauch. Wählen Sie $n = 1$ für das Jahr 1970, d. h., $n = 41$ entspricht dem Jahr 2010.

Für das Jahr 2050 wird ein jährlicher globaler Rohstoffbedarf von 180 Milliarden Tonnen angenommen.

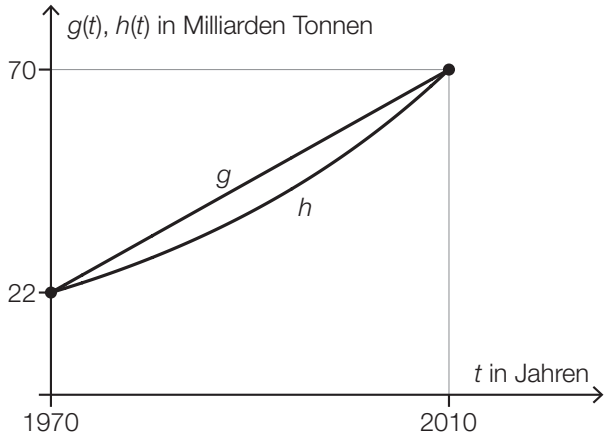
4) Tragen Sie die fehlende Zahl in das dafür vorgesehene Kästchen ein.

180 Milliarden Tonnen = $1{,}8 \cdot 10^{\square}$ kg

* ehemalige Klausuraufgabe

[1] Vgl. http://derstandard.at/2000041471018/Weltweiter-Rohstoffverbrauch-seit-1970-mehr-als-verdreifacht [26.11.2020].

b) Die zeitliche Entwicklung des jährlichen globalen Rohstoffverbrauchs kann durch die streng monoton steigende lineare Funktion g oder durch die streng monoton steigende Exponentialfunktion h modelliert werden (siehe nachstehende Abbildung).



1) Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass eine richtige Aussage entsteht.

Für _____ ① _____ von g und h gilt: _____ ② _____.

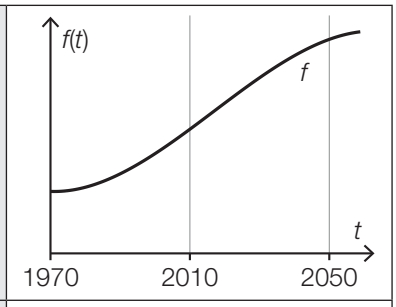
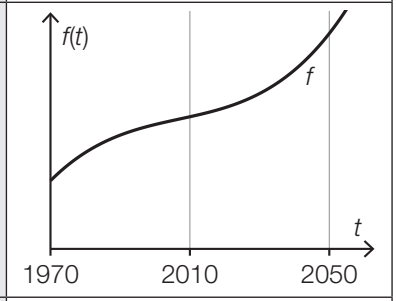
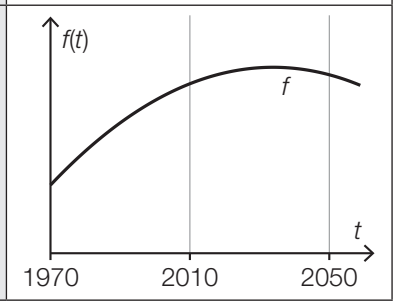
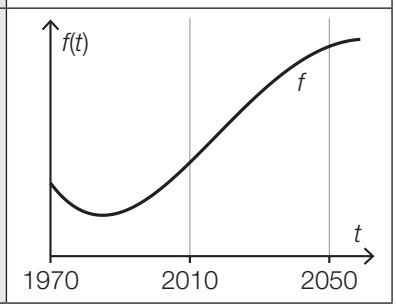
①	
genau 1 Stelle	☐
genau 2 Stellen	☐
mehr als 2 Stellen	☐

②	
$g(t) = h(t) = 0$	☐
$g'(t) = h'(t)$	☐
$g''(t) = h''(t)$	☐

c) Die zeitliche Entwicklung des jährlichen globalen Rohstoffverbrauchs kann durch verschiedene Polynomfunktionen modelliert werden.

1) Ordnen Sie den beiden Aussagen jeweils den entsprechenden Funktionsgraphen aus A bis D zu.

Für alle t mit $2010 < t < 2050$ gilt: $f''(t) > 0$	
Für genau ein t mit $1970 < t < 2050$ gilt: $f'(t) = 0$ und $f''(t) < 0$	

A	
B	
C	
D	

Möglicher Lösungsweg

a1) $\frac{22 \cdot 10^9}{3{,}5 \cdot 10^9} = 6{,}28...$

Der durchschnittliche jährliche Rohstoffverbrauch pro Person betrug im Jahr 1970 rund 6,3 Tonnen.

a2) $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$

b_n ... jährlicher Rohstoffverbrauch im Jahr n in Milliarden Tonnen

$b_1 = 22$
$b_{41} = 70$
$q = \sqrt[40]{\frac{70}{22}} = 1{,}02935...$
$b_n = 22 \cdot 1{,}0294^{n-1}$

a3) $a_{n+1} = a_n + d$

a_n ... jährlicher Rohstoffverbrauch im Jahr n in Milliarden Tonnen

$a_1 = 22$
$a_{41} = 70$
$d = \frac{70 - 22}{40} = 1{,}2$
$a_{n+1} = a_n + 1{,}2$ (mit $a_1 = 22$)

Der Punkt ist auch zu vergeben, wenn das Startglied $a_1 = 22$ *beim rekursiven Bildungsgesetz nicht angegeben ist.*

a4) 180 Milliarden Tonnen = $1{,}8 \cdot 10^{\boxed{14}}$ kg

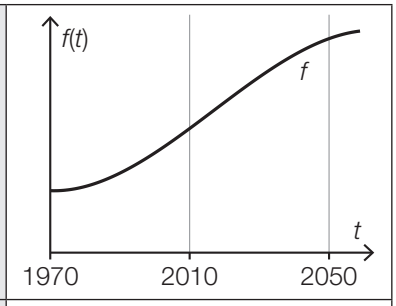
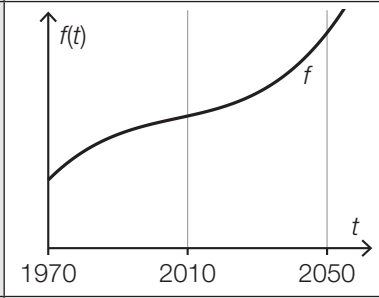
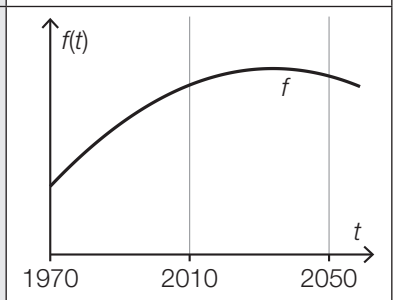
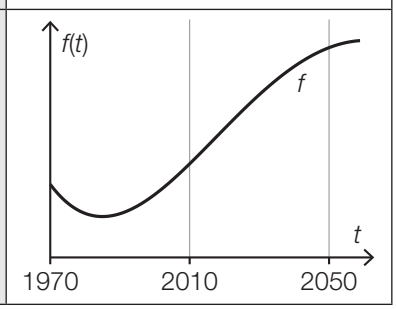
b1)

①	
genau 1 Stelle	☒

②	
$g'(t) = h'(t)$	☒

c1)

Für alle t mit $2010 < t < 2050$ gilt: $f''(t) > 0$	B
Für genau ein t mit $1970 < t < 2050$ gilt: $f'(t) = 0$ und $f''(t) < 0$	C

A	
B	
C	
D	

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen des durchschnittlichen jährlichen Rohstoffverbrauchs pro Person im Jahr 1970.
a2) Ein Punkt für das richtige Erstellen des expliziten Bildungsgesetzes der geometrischen Folge.
a3) Ein Punkt für das richtige Erstellen des rekursiven Bildungsgesetzes der arithmetischen Folge.
a4) Ein Punkt für das Eintragen der richtigen Zahl.
b1) Ein Punkt für das Ankreuzen der beiden richtigen Satzteile.
c1) Ein Punkt für das richtige Zuordnen.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Zahlen können auch komplex sein*

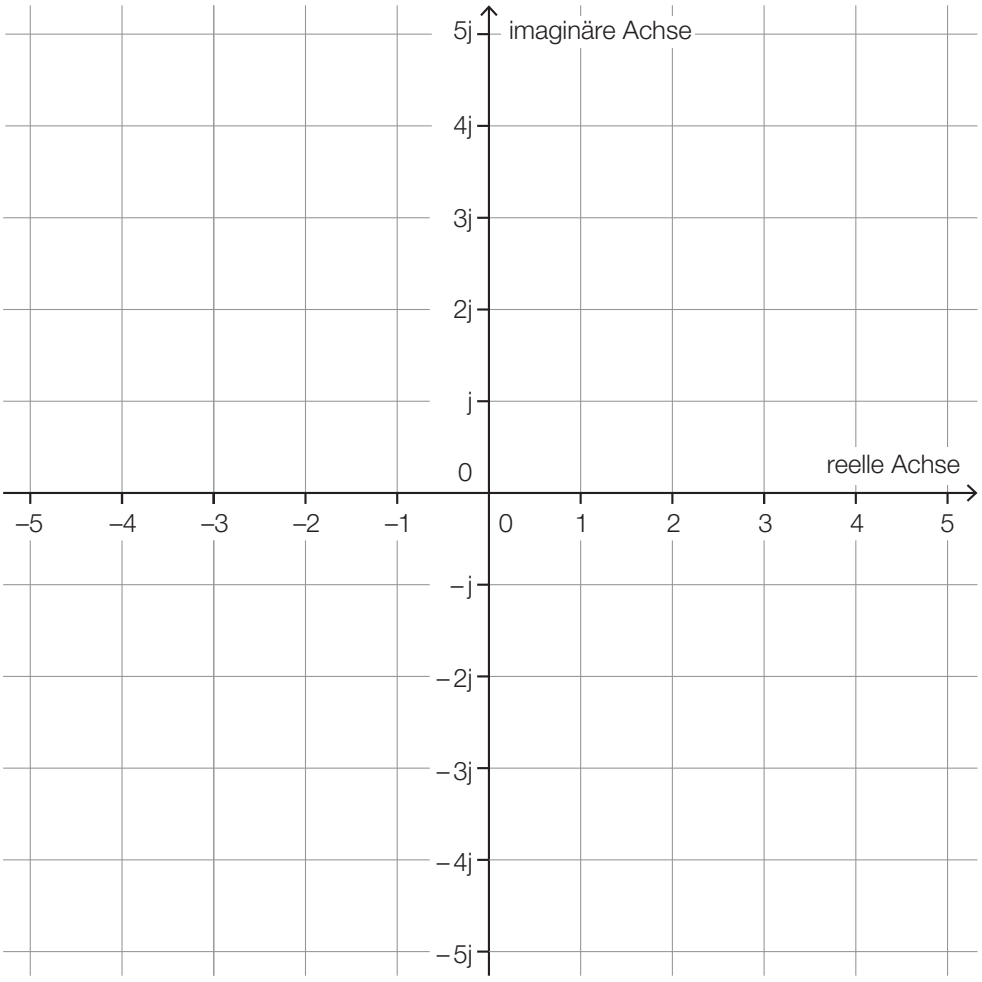
Aufgabennummer: B_510

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Viele Vorgänge in der Elektrotechnik können modellhaft mithilfe von komplexen Zahlen beschrieben werden. Dabei wird die imaginäre Einheit mit j bezeichnet.

a) 1) Zeichnen Sie in der nachstehenden Abbildung die komplexe Zahl $z_1 = 2 \cdot e^{-j \cdot \frac{\pi}{2}}$ ein.

2) Zeichnen Sie in der nachstehenden Abbildung die beiden komplexen Zahlen z_2 und z_3 ein, die den Realteil –3 und den Betrag 5 haben.



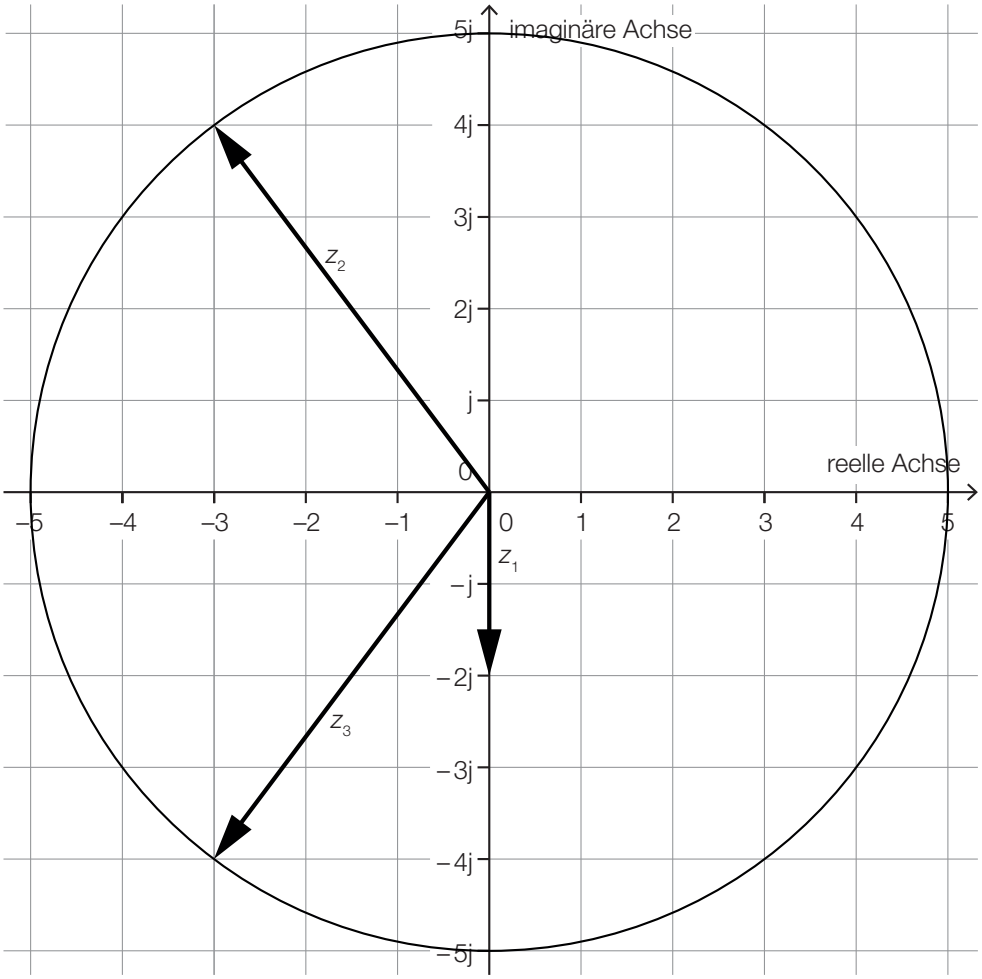
b) Zu jeder komplexen Zahl $z = a + b \cdot j$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ gibt es die konjugiert komplexe Zahl $z^* = a - b \cdot j$.

1) Zeigen Sie allgemein, dass $z \cdot z^*$ eine reelle Zahl ist.

* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

a1 und a2)



Auch ein Einzeichnen der komplexen Zahlen als Punkte in der Gauß'schen Zahlenebene ist als richtig zu werten.

b1) $z \cdot z^* = (a + b \cdot \mathrm{j}) \cdot (a - b \cdot \mathrm{j}) = a^2 - b^2 \cdot \mathrm{j}^2 = a^2 + b^2$

Mit $a, b \in \mathbb{R}$ ist auch $a^2 + b^2 \in \mathbb{R}$.

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das richtige Einzeichnen von z_1.
a2) Ein Punkt für das richtige Einzeichnen von z_2 und z_3.
b1) Ein Punkt für das richtige Zeigen.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Meerwasser und mehr Wasser*

Aufgabennummer: B_509

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Die Funktion V beschreibt näherungsweise den zeitlichen Verlauf des Wasservolumens eines bestimmten Sees. Dabei wird das Wasservolumen in Kubikmetern und die Zeit t in Tagen angegeben.

V erfüllt die folgende Differenzialgleichung:

$$\frac{dV}{dt} = 0{,}001 \cdot (350 - V) \text{ mit } V > 0$$

1) Argumentieren Sie anhand der Differenzialgleichung, für welche Werte von V das Wasservolumen dieses Sees gemäß diesem Modell zunimmt.

2) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung mithilfe der Methode *Trennen der Variablen*.

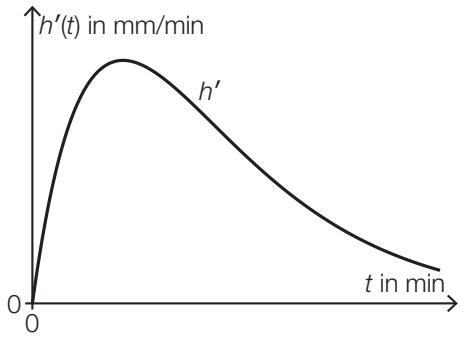
Zur Zeit $t = 0$ beträgt das Wasservolumen 150 m^3.

3) Berechnen Sie die spezielle Lösung der Differenzialgleichung.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Während eines Regenschauers wird der Wasserstand in einem bestimmten, anfangs leeren zylinderförmigen Gefäß gemessen.

Die Funktion h' beschreibt modellhaft die momentane Änderungsrate des Wasserstands in diesem Gefäß (siehe nachstehende Abbildung).



$h'(t) = 1{,}5 \cdot t \cdot e^{-0{,}3 \cdot t}$ mit $0 \le t \le 15$

t ... Zeit in min
$h'(t)$ ... momentane Änderungsrate des Wasserstands zur Zeit t in mm/min

1) Ermitteln Sie dasjenige Zeitintervall, in dem gemäß diesem Modell die momentane Änderungsrate des Wasserstands mindestens 1 mm/min beträgt.

c) Der innerhalb eines Tages schwankende Wasserstand in einem bestimmten Hafenbecken kann näherungsweise durch die Funktion f beschrieben werden. Der niedrigste Wasserstand wird zur Zeit $t = 0$ erreicht und beträgt 2 m, der höchste Wasserstand beträgt 4 m.

$f(t) = a + b \cdot \cos(0{,}507 \cdot t)$

t ... Zeit nach dem niedrigsten Wasserstand in h
$f(t)$ ... Wasserstand zur Zeit t in m

1) Geben Sie die Parameter a und b der Funktion f an.

Möglicher Lösungsweg

a1) Das Volumen nimmt zu, wenn die momentane Änderungsrate $\frac{dV}{dt}$ positiv ist. Dies ist dann der Fall, wenn V kleiner als 350 ist.

a2) $\int \frac{1}{350 - V}\, dV = \int 0{,}001\, dt \quad oder \quad \int \frac{V'}{350 - V}\, dt = \int 0{,}001\, dt$

$-\ln|350 - V(t)| = 0{,}001 \cdot t + C_1$
$V(t) = 350 + C \cdot e^{-0{,}001 \cdot t}$

a3) $V(0) = 150 \Rightarrow C = -200$
$V(t) = 350 - 200 \cdot e^{-0{,}001 \cdot t}$

b1) $h'(t) = 1 \quad oder \quad 1{,}5 \cdot t \cdot e^{-0{,}3 \cdot t} = 1$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$t_1 = 0{,}86...$ und $t_2 = 8{,}47...$

Im Zeitintervall [0,86...; 8,47...] beträgt die momentane Änderungsrate des Wasserstands mindestens 1 mm/min.

c1) $a = 3$
$b = -1$

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das richtige Argumentieren.
a2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der allgemeinen Lösung der Differenzialgleichung mithilfe der Methode *Trennen der Variablen*.
a3) Ein Punkt für das richtige Berechnen der speziellen Lösung der Differenzialgleichung.
b1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln des Zeitintervalls.
c1) Ein Punkt für das Angeben des richtigen Parameters a.
Ein Punkt für das Angeben des richtigen Parameters b.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Olympische Sommerspiele 2008 in Peking*

Aufgabennummer: B_508

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Bei den Olympischen Sommerspielen 2008 in Peking siegte Usain Bolt im Finale des 100-Meter-Laufes der Männer. Die Silbermedaille ging an Richard Thompson.

Die jeweilige Geschwindigkeit der beiden Läufer bei diesem Lauf kann durch die nachstehenden Funktionen modellhaft beschrieben werden.

$v_B(t) = 12{,}151 \cdot (1 - e^{-0{,}684 \cdot t})$
$v_T(t) = 12{,}15 \cdot (1 - e^{-0{,}601 \cdot t})$

t ... Zeit ab dem Start in s
$v_B(t)$ ... Geschwindigkeit von Usain Bolt zur Zeit t in m/s
$v_T(t)$ ... Geschwindigkeit von Richard Thompson zur Zeit t in m/s

1) Berechnen Sie die Beschleunigung von Usain Bolt 1 s nach dem Start.

2) Beschreiben Sie, was mit dem nachstehenden Ausdruck im gegebenen Sachzusammenhang berechnet wird.
$\frac{1}{8-5} \cdot \int_5^8 v_B(t)\,dt$

Usain Bolt überquerte die Ziellinie 9,69 s nach dem Start.

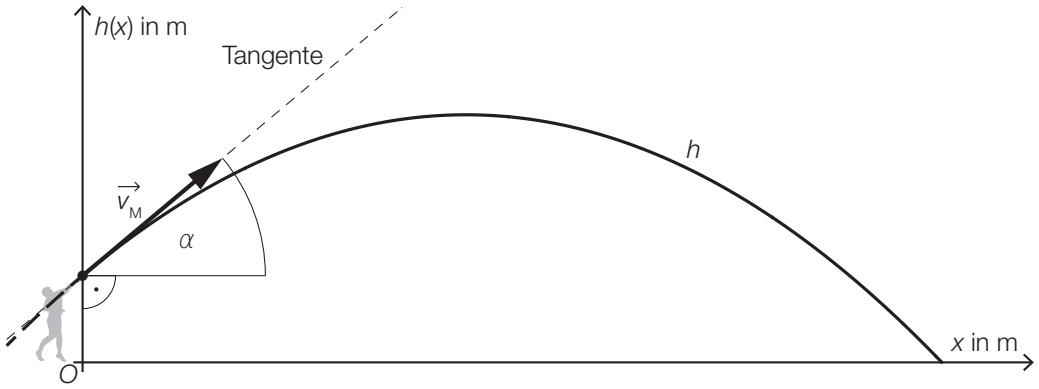
3) Ermitteln Sie, wie weit Richard Thompson von der Ziellinie entfernt war, als Usain Bolt diese überquerte.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Bei den Olympischen Sommerspielen 2008 in Peking siegte Tomasz Majewski im Kugelstoß-Finale der Männer. Die Flugbahn der Kugel kann modellhaft durch den Graphen der Funktion h mit $h(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ beschrieben werden.

x, $h(x)$ ... Koordinaten der Flugbahn in m

An der Stelle $x = 0$ kann die Geschwindigkeit der Kugel durch den Geschwindigkeitsvektor $\overrightarrow{v_M}$ beschrieben werden (siehe nachstehende Abbildung).



1) Tragen Sie die fehlenden Ausdrücke in die dafür vorgesehenen Kästchen ein. Verwenden Sie dabei den Winkel α.

$$\overrightarrow{v_M} = \left|\overrightarrow{v_M}\right| \cdot \begin{pmatrix} \square \\ \square \end{pmatrix}$$

2) Weisen Sie nach, dass gilt: $\tan(\alpha) = b$

c) Bei den Olympischen Sommerspielen 2008 in Peking siegte Tirunesh Dibaba im Finale des 10000-Meter-Laufes der Frauen. In der nachstehenden Tabelle sind einige Distanzen und die zugehörigen Zwischenzeiten für die erste Hälfte des Laufes angegeben.

Distanz in m	1000	2000	3000	4000	5000
Zeit in s	180,5	360,2	543,8	726,6	910,0

Datenquelle: https://sportsscientists.com/2008/08/beijng-2008-10000-m-women/ [15.12.2020].

Die Zeit soll in Abhängigkeit von der Distanz durch eine lineare Regressionsfunktion beschrieben werden.

1) Ermitteln Sie mithilfe der Regressionsrechnung eine Gleichung dieser linearen Funktion.

Tirunesh Dibaba benötigte für diesen 10000-Meter-Lauf insgesamt 29 min 54,66 s.

2) Berechnen Sie den Betrag des relativen Fehlers, wenn zur Berechnung der Laufzeit von Tirunesh Dibaba die ermittelte Regressionsfunktion verwendet wird.

Möglicher Lösungsweg

a1) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$v_B'(1) = 4{,}193...$

Die Beschleunigung von Usain Bolt 1 s nach dem Start betrug rund 4,19 m/s^2.

a2) Es wird die mittlere Geschwindigkeit (in m/s) von Usain Bolt im Zeitintervall [5; 8] berechnet.

a3) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$100 - \int_0^{9{,}69} v_T(t)\,dt = 2{,}423...$

Richard Thompson war rund 2,42 m von der Ziellinie entfernt, als Usain Bolt diese überquerte.

b1) $\vec{v}_M = \left|\vec{v}_M\right| \cdot \begin{pmatrix} \boxed{\cos(\alpha)} \\ \boxed{\sin(\alpha)} \end{pmatrix}$

b2) $h'(x) = 2 \cdot a \cdot x + b$
$\tan(\alpha) = h'(0) = b$

c1) Ermittlung mittels Technologieeinsatz:

$f(x) = 0{,}18254 \cdot x - 3{,}4$

x ... Distanz in m
$f(x)$ ... Zeit bei der Distanz x in s

c2) $f(10\,000) = 1\,822$
29 min 54,66 s = 1 794,66 s

$$\left|\frac{1\,794{,}66 - 1\,822}{1\,794{,}66}\right| = 0{,}0152...$$

Der Betrag des relativen Fehlers beträgt rund 1,5 %.

Lösungsschlüssel

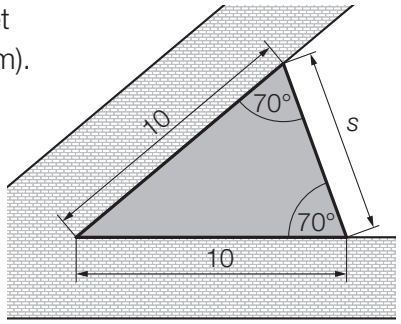
a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Beschleunigung.
a2) Ein Punkt für das richtige Beschreiben im gegebenen Sachzusammenhang.
a3) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der Entfernung.
b1) Ein Punkt für das Eintragen der richtigen Ausdrücke.
b2) Ein Punkt für das richtige Nachweisen.
c1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der Gleichung der linearen Regressionsfunktion.
c2) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Betrags des relativen Fehlers.

Schlosspark*

Aufgabennummer: B_507

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) In einem Schlosspark wird ein dreieckiges Blumenbeet angelegt (siehe nebenstehende Abbildung – Maße in m).



1) Ergänzen Sie den nachstehenden Ausdruck durch Eintragen der richtigen Werte in die dafür vorgesehenen Kästchen.

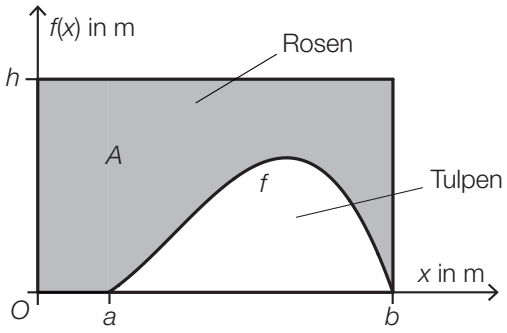
$$s = \sqrt{\square + \square - 2 \cdot 10^2 \cdot \cos(\square)}$$

Das Blumenbeet soll mit einem Vlies gegen Unkraut abgedeckt werden. Das Abdecken des Blumenbeets kostet pro Quadratmeter € 1,42.

2) Berechnen Sie die Kosten für das Abdecken des Blumenbeets.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Ein rechteckiges Blumenbeet mit den Seitenlängen b und h ist in einen Bereich für Rosen und einen Bereich für Tulpen unterteilt. Die Begrenzungslinie zwischen diesen Bereichen kann modellhaft durch den Graphen der Funktion f beschrieben werden (siehe nachstehende Abbildung).



1) Stellen Sie mithilfe der obigen Abbildung eine Formel zur Berechnung des Inhalts A der grau markierten Fläche auf.

$A =$ _____

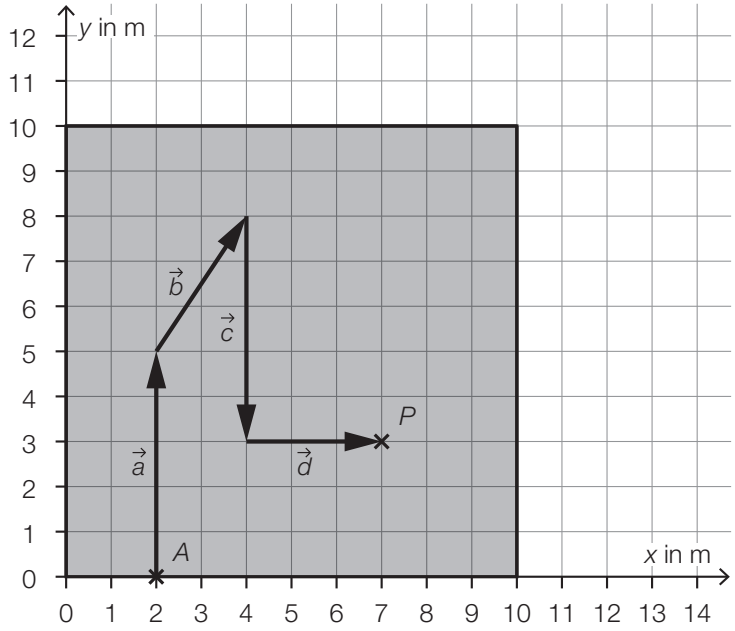
f ist eine Polynomfunktion 3. Grades mit $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$.
Folgende Punkte liegen auf dem Graphen von f: (3|0,8), (5|2,7), (7|3,7), (9|2,3).

2) Berechnen Sie mithilfe dieser Punkte die Koeffizienten a, b, c und d.

c) Im Schlosspark gibt es ein Labyrinth aus Hecken. Der Weg durch das Labyrinth wird durch Aneinanderreihen der Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \ldots, \vec{h}$ (in alphabetischer Reihenfolge) beschrieben. Dabei beginnt jeder Vektor an der Spitze des vorherigen Vektors.

Es gilt: $\vec{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{f} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{g} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{h} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ (Maße in m)

In der nachstehenden Abbildung ist die quadratische Grundfläche des Labyrinths dargestellt. Der Startpunkt A des Weges durch das Labyrinth, die ersten vier Vektoren und der Punkt P sind bereits eingezeichnet.



1) Tragen Sie die fehlenden Zahlen in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.

$\vec{b} = \begin{pmatrix} \square \\ \square \end{pmatrix}$

2) Ermitteln Sie die Länge des Weges durch das Labyrinth vom Startpunkt A zum Punkt P.

3) Vervollständigen Sie ausgehend vom Punkt P den Weg durch das Labyrinth durch Einzeichnen der Vektoren $\vec{e}, \vec{f}, \vec{g}$ und $\vec{h}$.

4) Kreuzen Sie die auf die gegebenen Vektoren nicht zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]*

Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{c}$ sind Gegenvektoren.	☐
Die Vektoren $\vec{f}$ und $\vec{g}$ haben den gleichen Betrag.	☐
Die Vektoren $\vec{f}$ und $\vec{h}$ sind parallel.	☐
Die Vektoren $\vec{d}$ und $\vec{e}$ haben den gleichen Betrag.	☐
Die Vektoren $\vec{d}$ und $\vec{e}$ stehen normal aufeinander.	☐

d) Im Schlosspark wird Schilf gepflanzt. In den ersten Wochen nach der Pflanzung wird die Höhe einer bestimmten Pflanze notiert.

Zeit t nach der Pflanzung in Wochen	1	2	3	4	5	6
Höhe der Pflanze zur Zeit t in cm	30	34	39	44	48	52

Die Höhe dieser Pflanze soll in Abhängigkeit von der Zeit t durch die lineare Funktion h beschrieben werden.

t ... Zeit nach der Pflanzung in Wochen
$h(t)$ ... Höhe der Pflanze zur Zeit t in cm

1) Ermitteln Sie mithilfe der Regressionsrechnung eine Gleichung der linearen Funktion h.

2) Berechnen Sie gemäß diesem Modell die Höhe der Pflanze 20 Wochen nach der Pflanzung.

Möglicher Lösungsweg

a1) $s = \sqrt{\boxed{10^2} + \boxed{10^2} - 2 \cdot 10^2 \cdot \cos\left(\boxed{40°}\right)}$

Der Punkt ist auch zu vergeben, wenn im 3. Kästchen das Grad-Zeichen fehlt.

a2) $\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 \cdot \sin(40°) \cdot 1{,}42 = 45{,}637...$

Die Kosten für das Abdecken des Blumenbeets betragen € 45,64.

b1) $A = b \cdot h - \int_a^b f(x)\,dx$

b2) I: $f(3) = 0{,}8$
II: $f(5) = 2{,}7$
III: $f(7) = 3{,}7$
IV: $f(9) = 2{,}3$

oder:

I: $a \cdot 3^3 + b \cdot 3^2 + c \cdot 3 + d = 0{,}8$
II: $a \cdot 5^3 + b \cdot 5^2 + c \cdot 5 + d = 2{,}7$
III: $a \cdot 7^3 + b \cdot 7^2 + c \cdot 7 + d = 3{,}7$
IV: $a \cdot 9^3 + b \cdot 9^2 + c \cdot 9 + d = 2{,}3$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$a = -\frac{1}{32} = -0{,}03125$

$b = \frac{57}{160} = 0{,}35625$

$c = -\frac{59}{160} = -0{,}36875$

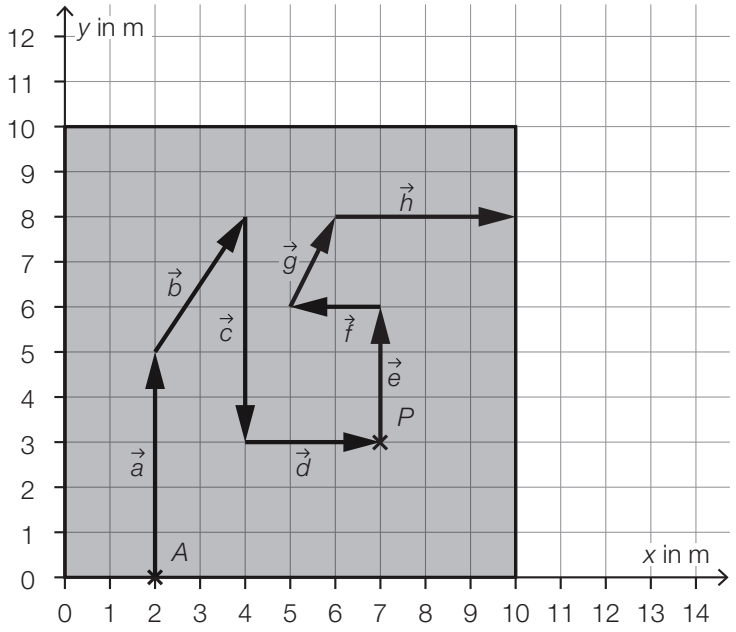
$d = -\frac{73}{160} = -0{,}45625$

c1) $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

c2) $5 + \sqrt{2^2 + 3^2} + 5 + 3 = 16{,}60...$

Die Länge des Weges durch das Labyrinth vom Startpunkt A zum Punkt P beträgt rund 16,6 m.

c3)



c4)

Die Vektoren $\vec{f}$ und $\vec{g}$ haben den gleichen Betrag.	☒

d1) Ermittlung mittels Technologieeinsatz:

$h(t) = 4{,}49 \cdot t + 25{,}47$ *(Koeffizienten gerundet)*

d2) $h(20) = 115{,}1...$

Die Höhe der Pflanze 20 Wochen nach der Pflanzung beträgt rund 115 cm.

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das Ergänzen der drei richtigen Werte.
a2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Kosten.
b1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel.
b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Koeffizienten a, b, c und d.
c1) Ein Punkt für das Eintragen der richtigen Zahlen.
c2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der Länge des Weges.
c3) Ein Punkt für das richtige Vervollständigen des Weges.
c4) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.
d1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der Gleichung der Funktion h.
d2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Höhe der Pflanze.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Flughafen*

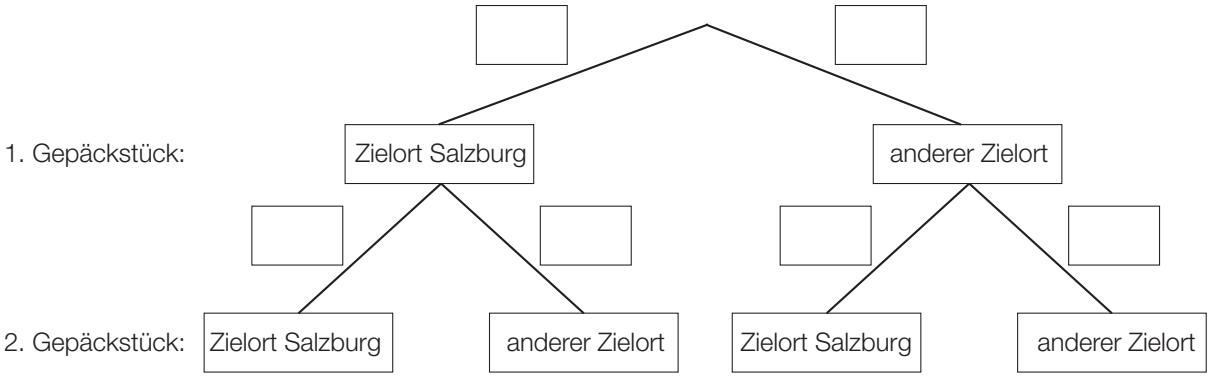
Aufgabennummer: B_506

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Auf einem bestimmten Flughafen werden Gepäckstücke mit unterschiedlichen Zielorten aufgegeben. Jedes Gepäckstück hat mit der gleichen Wahrscheinlichkeit p den Zielort Salzburg.

Es werden 2 Gepäckstücke unabhängig voneinander zufällig ausgewählt und im Hinblick auf deren jeweiligen Zielort überprüft.

1) Tragen Sie im nachstehenden Baumdiagramm die fehlenden Wahrscheinlichkeiten in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.



Die Wahrscheinlichkeit, dass von 2 zufällig ausgewählten Gepäckstücken mindestens 1 nicht den Zielort Salzburg hat, beträgt 97,75 %.

2) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit p.

3) Ordnen Sie den beiden Ereignissen jeweils die zutreffende Wahrscheinlichkeit aus A bis D zu.

Von 5 zufällig ausgewählten Gepäckstücken hat keines den Zielort Salzburg.	
Von 5 zufällig ausgewählten Gepäckstücken haben alle den Zielort Salzburg.	

A	$(1 - p)^5$
B	p^5
C	$1 - p^5$
D	$1 - (1 - p)^5$

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Der Kerosinverbrauch eines bestimmten Flugzeugs auf einer bestimmten Strecke kann als annähernd normalverteilt angenommen werden. Der Erwartungswert beträgt μ = 845 L/100 km und die Standardabweichung beträgt σ = 25 L/100 km.

1) Ermitteln Sie dasjenige um μ symmetrische Intervall, in dem der Kerosinverbrauch mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % liegt.

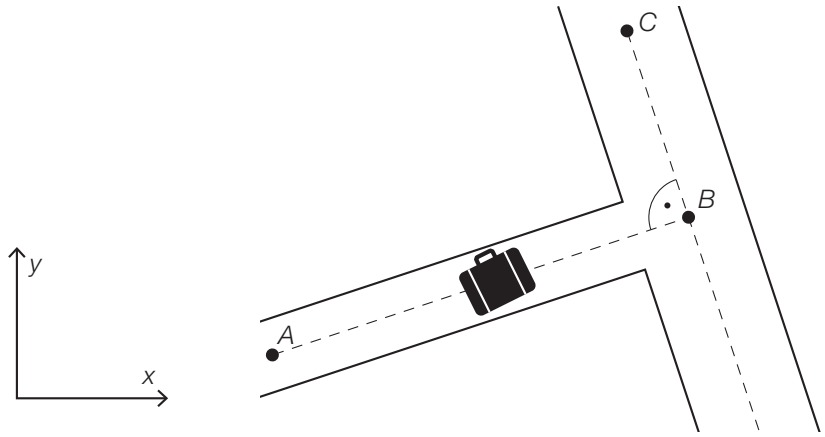
Nach Reparaturarbeiten soll der Erwartungswert des Kerosinverbrauchs mithilfe eines Konfidenzintervalls neu geschätzt werden. Dabei wird angenommen, dass die Standardabweichung gleich geblieben ist.

Nach den Reparaturarbeiten wurde der Kerosinverbrauch in L/100 km von einer Zufallsstichprobe von 10 Flügen auf dieser Strecke gemessen:

844	840	864	820	788	858	832	817	839	796

2) Ermitteln Sie das zweiseitige 99-%-Konfidenzintervall für den Erwartungswert des Kerosinverbrauchs nach den Reparaturarbeiten.

c) In der nachstehenden Abbildung ist modellhaft ein Koffer auf einem Gepäckförderband dargestellt. Der Koffer bewegt sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1{,}2 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$ m/s vom Punkt *A* zum Punkt *B*.



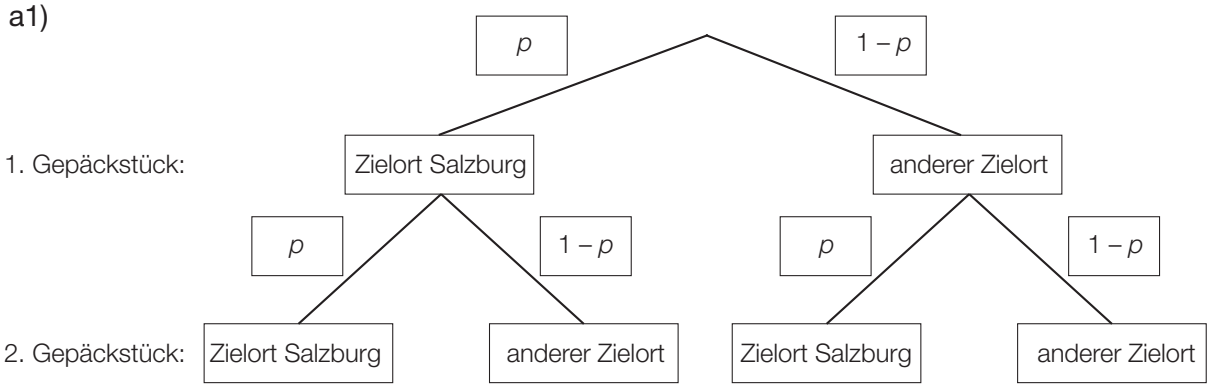
1) Berechnen Sie $|\vec{v}|$ in m/min.

Anschließend bewegt sich der Koffer mit der Geschwindigkeit $\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ y_w \end{pmatrix}$ m/s vom Punkt *B* zum Punkt *C*. Die beiden Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ stehen normal aufeinander.

2) Ermitteln Sie y_w.

Möglicher Lösungsweg

a1)



Der Punkt ist auch zu vergeben, wenn im Baumdiagramm für p = *0,15 und für 1* – p = *0,85 angegeben wird (vgl. Lösung zu a2).*

a2) $0{,}9775 = 1 - p^2$

$p = \sqrt{0{,}0225} = 0{,}15$

a3)

Von 5 zufällig ausgewählten Gepäckstücken hat keines den Zielort Salzburg.	A
Von 5 zufällig ausgewählten Gepäckstücken haben alle den Zielort Salzburg.	B

A	$(1 - p)^5$
B	p^5
C	$1 - p^5$
D	$1 - (1 - p)^5$

b1) X ... Kerosinverbrauch in L/100 km

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$P(\mu - a \leq X \leq \mu + a) = 0{,}90 \quad \Rightarrow \quad [803{,}8...; 886{,}1...]$

b2) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

Stichprobenmittelwert: $\bar{x} = 829{,}8$

Berechnung des 99-%-Konfidenzintervalls $[\mu_u; \mu_o]$ mithilfe der Normalverteilung:

$$\mu_u = 829{,}8 - 2{,}576 \cdot \frac{25}{\sqrt{10}} = 809{,}4...$$

$$\mu_o = 829{,}8 + 2{,}576 \cdot \frac{25}{\sqrt{10}} = 850{,}1...$$

Daraus ergibt sich folgendes Konfidenzintervall in L/100 km: [809,4...; 850,1...]

c1) $|\vec{v}| = \sqrt{1{,}2^2 + 0{,}5^2} = 1{,}3$

1,3 m/s = 78 m/min

c2) $\vec{v} \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} 1{,}2 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ y_w \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad -1{,}2 + 0{,}5 \cdot y_w = 0 \quad \Rightarrow \quad y_w = 2{,}4$

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das Eintragen der richtigen Wahrscheinlichkeiten.
a2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Wahrscheinlichkeit p.
a3) Ein Punkt für das richtige Zuordnen.
b1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln des Intervalls.
b2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln des Konfidenzintervalls.
c1) Ein Punkt für das richtige Berechnen von $|\vec{v}|$ in m/min.
c2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln von y_w.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Gewächshäuser*

Aufgabennummer: B_505

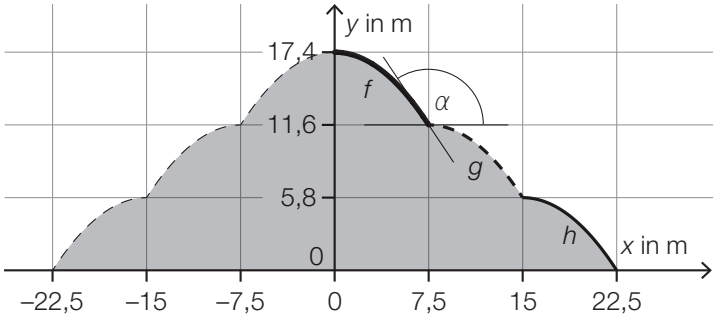
Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Auf der Insel Mainau steht ein besonderes Gewächshaus (siehe nebenstehende Abbildung).



Bildquelle: BMBWF

Die nebenstehende Abbildung zeigt die Vorderseite des Gewächshauses in einem Koordinatensystem. Die Vorderseite ist dabei symmetrisch zur y-Achse.



Der Graph der Funktion g ergibt sich durch Verschiebung des Graphen der Funktion f um 7,5 m nach rechts und 5,8 m nach unten.

1) Tragen Sie die fehlenden Rechenzeichen und Zahlen in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.

$g(x) = f\left(x \square \square\right) \square \square$

Die Funktion f ist gegeben durch:

$$f(x) = \frac{87}{5} - \frac{116}{1\,125} \cdot x^2 \quad \text{mit} \quad 0 \le x \le 7{,}5$$

x, $f(x)$ … Koordinaten in m

An der Stelle $x = 7{,}5$ schließt die Tangente an den Graphen von f mit der horizontalen Tangente an den Graphen von g den stumpfen Winkel α ein (siehe obige Abbildung).

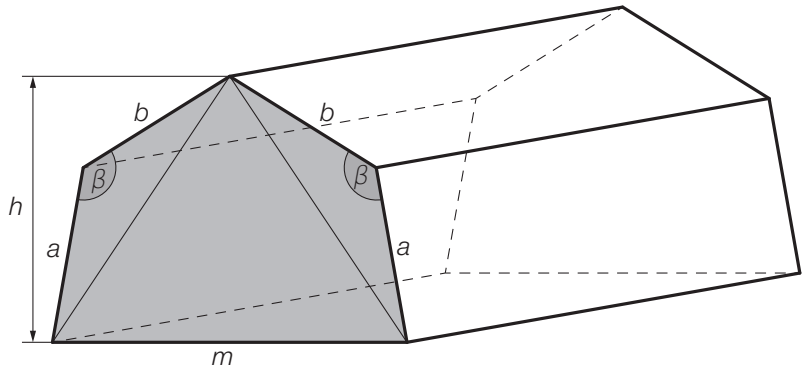
2) Berechnen Sie den Winkel α.

Die in der obigen Abbildung eingezeichneten Graphen der Funktionen f, g und h haben jeweils die gleiche Länge.

3) Berechnen Sie den Umfang der grau markierten Fläche.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) In der nachstehenden Abbildung ist ein Gewächshaus in Form eines Prismas dargestellt.



1) Stellen Sie eine Formel zur Berechnung des Inhalts A der grau markierten Fläche auf. Verwenden Sie dabei die Längen a, b, m und h sowie den Winkel β.

$A =$ _____

Es gilt: $a = 2$ m, $h = 3$ m, $m = 4$ m, $\beta = 132°$

2) Berechnen Sie die Länge b.

Möglicher Lösungsweg

a1) $g(x) = f(x - 7{,}5) - 5{,}8$

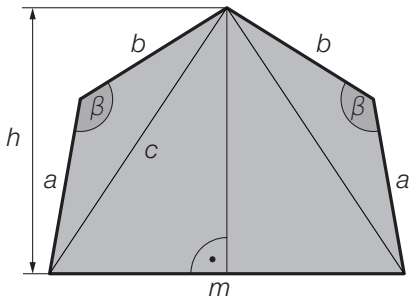
a2) $\alpha = 180° - |\arctan(f'(7{,}5)| = 122{,}88...°$

a3) $45 + 6 \cdot \int_0^{7{,}5} \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx = 104{,}19...$

Der Umfang der grau markierten Fläche beträgt rund 104,2 m.

b1) $A = \frac{m \cdot h}{2} + a \cdot b \cdot \sin(\beta)$

b2)



$c = \sqrt{h^2 + \left(\frac{m}{2}\right)^2} = \sqrt{13}$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\beta)$

$13 = 4 + b^2 - 4 \cdot b \cdot \cos(132°)$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

($b_1 = -4{,}62...$)

$b_2 = 1{,}94...$

Die Länge b beträgt rund 1,9 m.

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das Eintragen der richtigen Rechenzeichen und Zahlen.

a2) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Winkels α.

a3) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Umfangs.

b1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel.

b2) Ein Punkt für den richtigen Ansatz.
Ein Punkt für das richtige Berechnen der Länge b.

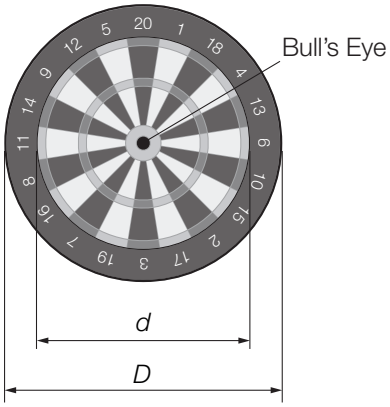
Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Darts*

Aufgabennummer: A_302

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

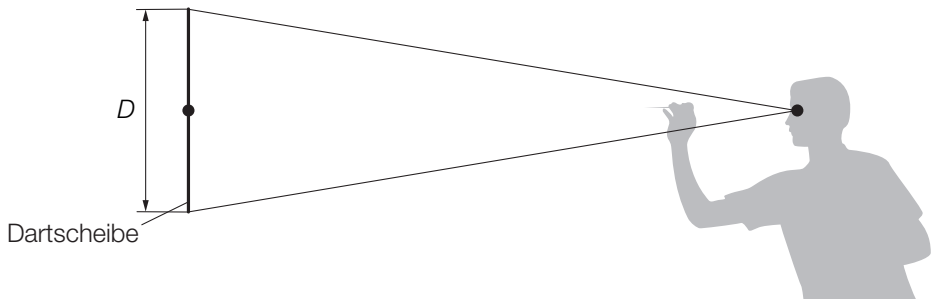
Darts ist ein Spiel, bei dem Pfeile auf eine kreisförmige Dartscheibe geworfen werden (siehe nebenstehende Abbildung).



a) In der obigen Abbildung sind die Durchmesser zweier Kreise gekennzeichnet, die einen gemeinsamen Mittelpunkt haben. Der innere Kreis hat den Durchmesser $d = 34$ cm und der äußere Kreis den Durchmesser $D = 45$ cm.

1) Berechnen Sie, wie viel Prozent die Fläche des inneren Kreises bezogen auf jene des äußeren Kreises ausmacht.

b) Eine Dartscheibe mit dem Durchmesser D hängt senkrecht an einer Wand (siehe unten stehende nicht maßstabgetreue Abbildung in der Ansicht von der Seite).
Der Mittelpunkt der Dartscheibe und das Auge eines Spielers befinden sich in der gleichen Höhe über dem Boden.
L ist der Abstand des Auges vom Mittelpunkt der Dartscheibe. α ist der Sehwinkel, unter dem der Spieler die Dartscheibe sieht.



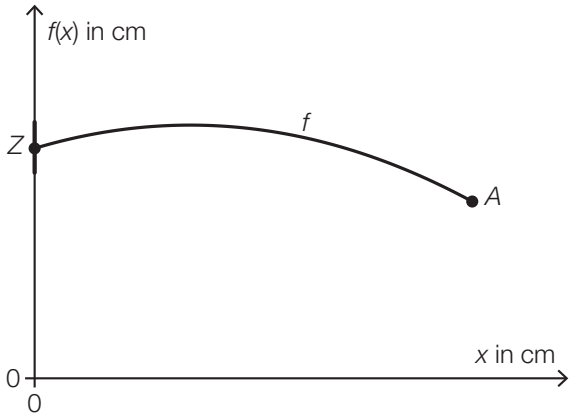
1) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung die Größen L und α ein.

2) Stellen Sie mithilfe von D und L eine Formel zur Berechnung von α auf.

$\alpha =$ _____.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Die nachstehende Abbildung zeigt modellhaft die Flugbahn eines Dartpfeils zwischen dem Abwurfpunkt A und dem Zielpunkt Z.



Die Flugbahn kann in diesem Modell durch den Graphen der quadratischen Funktion f beschrieben werden:

$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

x ... horizontaler Abstand zur Dartscheibe in cm
$f(x)$ ... Höhe über dem Boden im Abstand x in cm

Der Zielpunkt Z befindet sich in einer Höhe von 173 cm über dem Boden.
Die größte Höhe von 182 cm über dem Boden erreicht der Pfeil an derjenigen Stelle, an der er vom Zielpunkt Z einen horizontalen Abstand von 75 cm hat.

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten a, b und c.

2) Berechnen Sie die Koeffizienten a, b und c.

d) Ein Spieler wirft 5-mal hintereinander auf eine Dartscheibe. Die Wahrscheinlichkeit, das sogenannte *Bull's Eye* in der Mitte der Dartscheibe zu treffen, beträgt bei jedem Wurf p.

1) Ordnen Sie den beiden Satzanfängen jeweils eine Fortsetzung aus A bis D zu, sodass zutreffende Aussagen entstehen.

Mit dem Ausdruck $\binom{5}{4} \cdot p^4 \cdot (1-p) + p^5$ wird die Wahrscheinlichkeit berechnet, dass der Spieler bei 5 Würfen ...	
Mit dem Ausdruck $1 - \binom{5}{4} \cdot p^4 \cdot (1-p) - p^5$ wird die Wahrscheinlichkeit berechnet, dass der Spieler bei 5 Würfen ...	

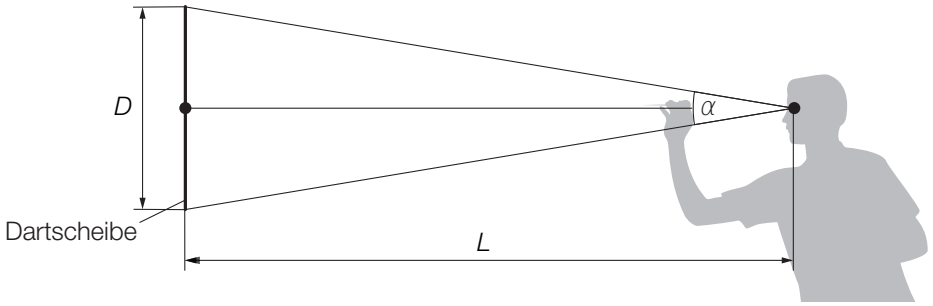
A	... höchstens 3-mal das Bull's Eye trifft.
B	... mindestens 3-mal das Bull's Eye trifft.
C	... höchstens 4-mal das Bull's Eye trifft.
D	... mindestens 4-mal das Bull's Eye trifft.

Möglicher Lösungsweg

a1) $\frac{A_1}{A_2} = \frac{d^2}{D^2} = 0{,}570...$

Die Fläche des inneren Kreises macht rund 57 % der Fläche des äußeren Kreises aus.

b1)



b2) $\alpha = 2 \cdot \arctan\left(\frac{D}{2 \cdot L}\right)$

c1) $f'(x) = 2 \cdot a \cdot x + b$

I: $f(0) = 173$
II: $f(75) = 182$
III: $f'(75) = 0$

oder:

I: $c = 173$
II: $5625 \cdot a + 75 \cdot b + c = 182$
III: $150 \cdot a + b = 0$

c2) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$a = -\frac{1}{625} = -0{,}0016$

$b = \frac{6}{25} = 0{,}24$

$c = 173$

d1)

Mit dem Ausdruck $\binom{5}{4} \cdot p^4 \cdot (1-p) + p^5$ wird die Wahrscheinlichkeit berechnet, dass der Spieler bei 5 Würfen ...	D
Mit dem Ausdruck $1 - \binom{5}{4} \cdot p^4 \cdot (1-p) - p^5$ wird die Wahrscheinlichkeit berechnet, dass der Spieler bei 5 Würfen ...	A

A	... höchstens 3-mal das Bull's Eye trifft.
B	... mindestens 3-mal das Bull's Eye trifft.
C	... höchstens 4-mal das Bull's Eye trifft.
D	... mindestens 4-mal das Bull's Eye trifft.

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Prozentsatzes.
b1) Ein Punkt für das richtige Einzeichnen der Größen L und α.
b2) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel.
c1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichungen mithilfe der Koordinaten.
Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung mithilfe der 1. Ableitung.
c2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Koeffizienten a, b und c.
d1) Ein Punkt für das richtige Zuordnen.

Steig- bzw. Sinkflug von Flugzeugen*

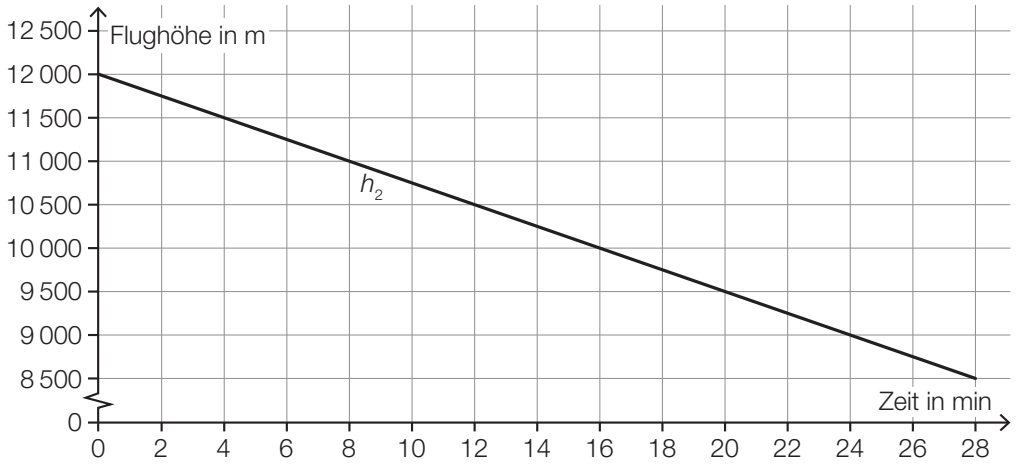
Aufgabennummer: A_301

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Ein Flugzeug beginnt zur Zeit $t = 0$ in einer Flughöhe von 12 000 m mit dem Sinkflug. Dabei nimmt die Flughöhe um 90 m/min ab. Die Flughöhe (in Metern) in Abhängigkeit von der Zeit t (in Minuten) soll für den Sinkflug durch die lineare Funktion h_1 beschrieben werden.

1) Stellen Sie eine Gleichung der Funktion h_1 auf.

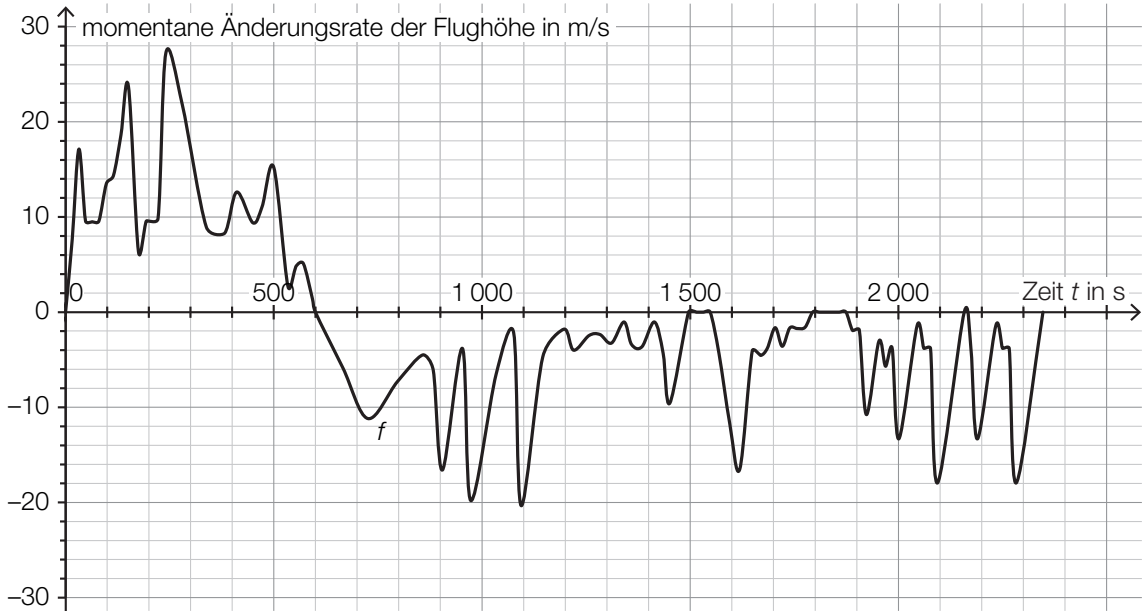
Für ein zweites Flugzeug zeigt der nachstehend dargestellte Graph der Funktion h_2 den Zusammenhang zwischen der Flughöhe und der Zeit.



2) Überprüfen Sie nachweislich, ob das zweite Flugzeug schneller als das erste Flugzeug sinkt.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Die momentane Änderungsrate der Flughöhe (Steig- bzw. Sinkgeschwindigkeit) eines Flugzeugs auf einem Flug von München nach Frankfurt am Main kann näherungsweise durch die Funktion f beschrieben werden (siehe nachstehende Abbildung).



Datenquelle: https://de.flightaware.com/live/flight/DLH99/history/20180905/0710Z/EDDM/EDDF/tracklog [22.02.2019].

Zur Zeit $t = 0$ hebt das Flugzeug in München ab.

1) Lesen Sie aus der obigen Abbildung diejenige Zeit t_m ab, zu der das Flugzeug seine maximale Flughöhe erreicht.

$t_m =$ _____ s

Es wird folgende Berechnung durchgeführt: $\int_{1550}^{1800} f(t)\,dt = -1\,249$ m

2) Interpretieren Sie das Ergebnis dieser Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang.

Möglicher Lösungsweg

a1) $h_1(t) = -90 \cdot t + 12\,000$

t ... Zeit in min
$h_1(t)$ ... Flughöhe zur Zeit t in m

a2) Ablesen der Steigung der Funktion h_1 aus der Funktionsgleichung: $k_1 = -90$
Ablesen der Steigung der Funktion h_2 aus dem Funktionsgraphen: $k_2 = -125$
$|k_1| < |k_2|$

Das zweite Flugzeug sinkt also schneller als das erste Flugzeug.

b1) $t_m = 600$ s
Toleranzbereich: [590; 610]

b2) Die Flughöhe des Flugzeugs nimmt im Zeitintervall [1 550; 1 800] um 1 249 m ab.

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung der Funktion h_1.
a2) Ein Punkt für das richtige nachweisliche Überprüfen.
b1) Ein Punkt für das richtige Ablesen.
b2) Ein Punkt für das richtige Interpretieren des Ergebnisses im gegebenen Sachzusammenhang.

Bäume*

Aufgabennummer: A_299

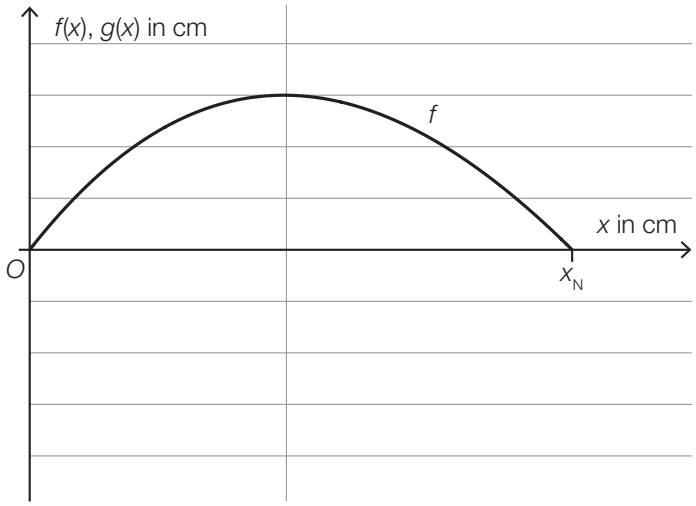
Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Die Form des Blattes einer Buche lässt sich in einem Koordinatensystem näherungsweise durch die Fläche zwischen dem Graphen der Funktion f und dem Graphen der Funktion g beschreiben.

$f(x) = 0{,}0047 \cdot x^3 - 0{,}2 \cdot x^2 + 1{,}28 \cdot x$ mit $0 \le x \le x_N$
$g(x) = -f(x)$

x, $f(x)$, $g(x)$ ... Koordinaten in cm

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Funktion f dargestellt.



1) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den Graphen der Funktion g im Intervall $[0; x_N]$ ein.
2) Berechnen Sie die Nullstelle x_N.
3) Berechnen Sie gemäß diesem Modell den Flächeninhalt dieses Blattes.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Für eine Modellrechnung werden folgende Annahmen getroffen:
An einem bestimmten Sommertag scheint die Sonne 14,5 Stunden lang.
Ein Blatt eines Laubbaums produziert bei Sonnenschein pro Stunde 2,14 mg Sauerstoff.
Ein Laubbaum hat 30 000 Blätter.

1) Berechnen Sie die Sauerstoffmenge, die solch ein Laubbaum an diesem Sommertag produziert. Geben Sie das Ergebnis in Kilogramm an.

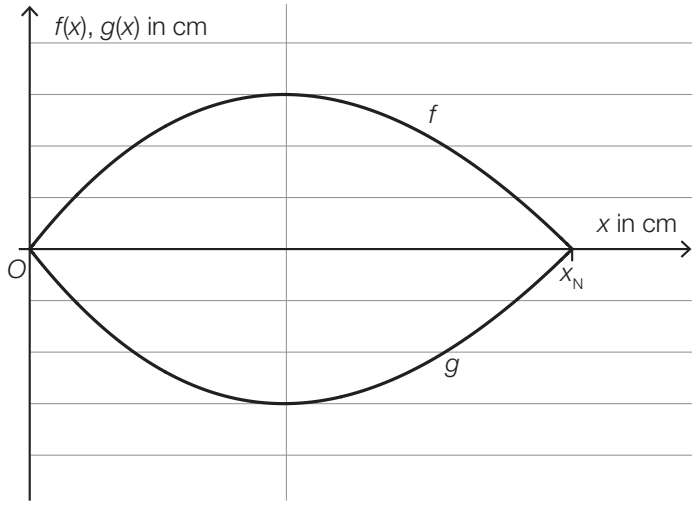
Eine Person benötigt 0,816 kg Sauerstoff pro Tag.
Man möchte wissen, wie viele solcher Laubbäume erforderlich sind, um den täglichen Sauerstoffbedarf von x Personen zu decken. Diese Anzahl an Laubbäumen wird mit n bezeichnet.

2) Stellen Sie mithilfe von x eine Formel zur Berechnung von n auf.

$n =$ _____

Möglicher Lösungsweg

a1)



a2) $f(x) = 0$ *oder* $0{,}0047 \cdot x^3 - 0{,}2 \cdot x^2 + 1{,}28 \cdot x = 0$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$x_1 = 0$, $x_2 = 7{,}84\ldots$, $x_3 = 34{,}70\ldots$
$x_N = 7{,}84\ldots$

a3) $2 \cdot \int_0^{7{,}84\ldots} f(x)\,dx = 23{,}30\ldots$

Der Flächeninhalt dieses Blattes beträgt rund 23,3 cm^2.

b1) $\frac{30\,000 \cdot 2{,}14 \cdot 14{,}5}{1\,000 \cdot 1\,000} = 0{,}9309$

Ein solcher Laubbaum produziert an diesem Sommertag rund 0,93 kg Sauerstoff.

b2) $n = \frac{0{,}816}{0{,}9309} \cdot x$ *oder* $n = 0{,}8765\ldots \cdot x$

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das richtige Einzeichnen des Graphen der Funktion g.
a2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Nullstelle x_N.
a3) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Flächeninhalts.
b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der produzierten Sauerstoffmenge in kg.
b2) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel.

Zirkus*

Aufgabennummer: A_298

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Eine bestimmte Zirkusvorstellung wurde von 65 Erwachsenen und 57 Kindern besucht. Diese bezahlten insgesamt Eintritt in Höhe von 1.179 Euro.
Eine andere Zirkusvorstellung mit den gleichen Eintrittspreisen wurde von 82 Erwachsenen und 74 Kindern besucht. Diese bezahlten insgesamt Eintritt in Höhe von 1.502 Euro.

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung des Eintrittspreises x für einen Erwachsenen und des Eintrittspreises y für ein Kind.

2) Berechnen Sie die Eintrittspreise x und y.

b) Eine Gruppe von n Personen bestellt Eintrittskarten für einen anderen Zirkus zu einem Eintrittspreis von p Euro pro Person. Bis zum Tag der Vorstellung hat sich die Gruppengröße jedoch um k Personen erhöht, und der Veranstalter gewährt deshalb allen eine Ermäßigung von 5 % auf den Eintrittspreis.

1) Kreuzen Sie den richtigen Ausdruck zur Berechnung des insgesamt bezahlten Eintritts an. *[1 aus 5]*

$\frac{(n + k) \cdot p}{0{,}95}$	☐
$(n + k) \cdot p \cdot 0{,}95$	☐
$0{,}95 \cdot (n + k \cdot p)$	☐
$0{,}05 \cdot (n + k) \cdot p$	☐
$(n \cdot k + p) \cdot 0{,}95$	☐

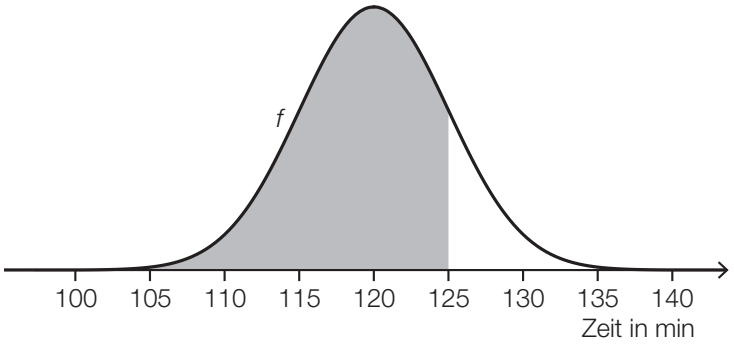
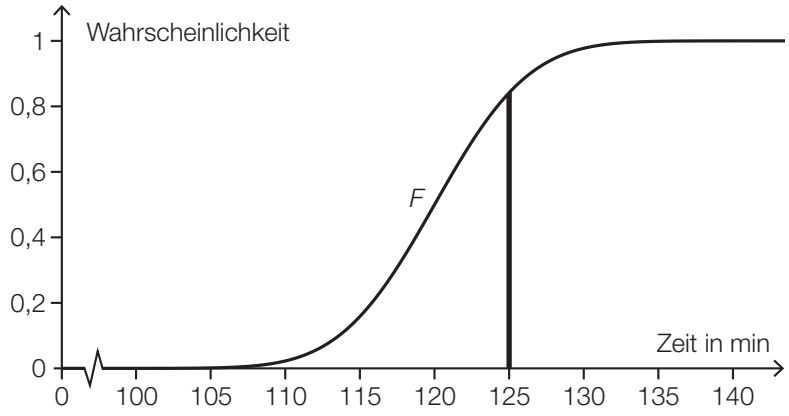
* ehemalige Klausuraufgabe

c) Die Dauer der Zirkusvorstellungen ist annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 120$ min und der Standardabweichung $\sigma = 5$ min.

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Zirkusvorstellung mindestens 118 min dauert.

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Zirkusvorstellung höchstens 125 min dauert, soll mithilfe der zugehörigen Dichtefunktion f bzw. mithilfe der zugehörigen Verteilungsfunktion F dargestellt werden.

2) Kreuzen Sie diejenige Darstellung an, die nicht dieser Wahrscheinlichkeit entspricht. *[1 aus 5]*

$0{,}5 + \int_{120}^{125} f(x)\,dx$	☐
$\int_{-\infty}^{125} f(x)\,dx$	☐
$1 - F(125)$	☐
	☐
	☐

Möglicher Lösungsweg

a1) $65 \cdot x + 57 \cdot y = 1\,179$
$82 \cdot x + 74 \cdot y = 1\,502$

a2) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$x = 12$
$y = 7$

Der Eintrittspreis für einen Erwachsenen beträgt € 12, der Eintrittspreis für ein Kind beträgt € 7.

b1)

$(n + k) \cdot p \cdot 0{,}95$	☒

c1) X ... Dauer der Zirkusvorstellung in min

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$P(X \geq 118) = 0{,}6554...$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt rund 65,5 %.

c2)

$1 - F(125)$	☒

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das richtige Erstellen des Gleichungssystems.
a2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Eintrittspreise x und y.
b1) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.
c1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Wahrscheinlichkeit.
c2) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

BMBWF
BUNDESMINISTERIUM
FÜR BILDUNG, WISSENSCHAFT
UND FORSCHUNG
www.bmbwf.gv.at

Hydraulik

Aufgabennummer: B_287

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Hydraulikzylinder sind mittels Flüssigkeit betriebene Arbeitszylinder. Zwischen dem Durchmesser d_K des Zylinderkolbens und dem Betrag F_A der ausfahrenden Kraft besteht folgender Zusammenhang:

$$F_A = p \cdot \frac{d_K^2 \cdot \pi}{4}$$

F_A … Betrag der ausfahrenden Kraft in Newton (N)
p … Druck in N/mm²
d_K … Kolbendurchmesser in mm

In der nachstehenden Tabelle sind einige Messwerte einer Testreihe für einen mit dem Druck p = 10 N/mm² belasteten Hydraulikzylinder angegeben.

d_K in mm	50	60	70	80	90
F_A in kN	18,59	27,15	39,03	51,29	62,24

– Berechnen Sie für den Messwert bei d_K = 70 mm den relativen Fehler des Messwerts bezüglich des aus der Formel erhaltenen Wertes für F_A in Prozent.
– Erstellen Sie für die Messwerte ein alternatives Modell zur Berechnung von F_A in Abhängigkeit von d_K in Form einer quadratischen Ausgleichsfunktion.

Ausgleichsfunktionen werden mit der Methode der kleinsten Quadrate ermittelt.

– Kreuzen Sie die auf diese Methode zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]*

Die Parameter der Ausgleichsfunktion werden so bestimmt, dass der erste und der letzte Messpunkt auf dem Funktionsgraphen liegen.	☐
Die Parameter der Ausgleichsfunktion werden so bestimmt, dass möglichst viele Messpunkte genau auf dem Funktionsgraphen liegen.	☐
Die Parameter der Ausgleichsfunktion werden so bestimmt, dass die Summe der Quadrate der senkrechten Abstände der Messpunkte vom Funktionsgraphen möglichst klein ist.	☐
Die Parameter der Ausgleichsfunktion werden so bestimmt, dass die Summe der senkrechten Abstände der Messpunkte vom Funktionsgraphen null ist.	☐
Die Parameter der Ausgleichsfunktion werden so bestimmt, dass die Steigung der Ausgleichsfunktion möglichst gering ist.	☐

b) Für die Modellierung eines speziellen Gehäuses eines Hydraulikzylinders wird die Funktion f verwendet.

$$f(x) = \frac{1}{0{,}1 \cdot x + 0{,}35} - 0{,}85$$

x, $f(x)$ … Koordinaten in Längeneinheiten

– Zeichnen Sie die Funktion f im Intervall $[-20; 20]$.

Rotiert die Funktion f im Intervall $[0; x_N]$ um die x-Achse, erhält man ein Modell des gewünschten Gehäuses, wobei x_N die Nullstelle der Funktion f ist.

– Berechnen Sie das Volumen des Gehäuses.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $F_A = p \cdot \frac{d_K^2 \cdot \pi}{4}$

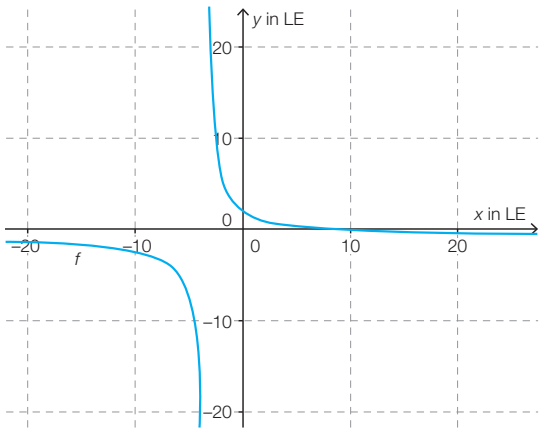
$F_A = 10 \cdot \frac{70^2 \cdot \pi}{4} = 38\,484{,}51\ldots \text{ N} \approx 38{,}4845 \text{ kN}$

relativer Fehler: $\frac{39{,}03 - 38{,}4845}{38{,}4845} = 0{,}01417\ldots \approx 1{,}4\ \%$

Ermitteln der Ausgleichsfunktion mittels Technologieeinsatz:
$F_A(d_K) = 0{,}0037 \cdot d_K^2 + 0{,}5984 \cdot d_K - 21{,}025$ (Koeffizienten gerundet)

[...]	
[...]	
Die Parameter der Ausgleichsfunktion werden so bestimmt, dass die Summe der Quadrate der senkrechten Abstände der Messpunkte vom Funktionsgraphen möglichst klein ist.	☒
[...]	
[...]	

b)



$x_N \approx 8{,}265$

$V_x = \pi \cdot \int_0^{8{,}265} (f(x))^2 \, dx = 17{,}0678\ldots \text{ VE}$

$V_x \approx 17{,}07 \text{ VE}$

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) 1 Zahlen und Maße
b) 4 Analysis

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) leicht

Punkteanzahl:

a) 3
b) 3

Thema: Sonstiges

Quellen: –

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Terrassenüberdachung

Aufgabennummer: B_021

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

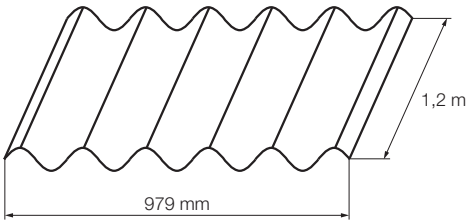
Für die Überdachung einer Terrasse werden Wellblechplatten angebracht. Das Querschnittsprofil des Wellblechs kann näherungsweise durch den Graphen der Funktion g beschrieben werden:

$g(x) = 27{,}5 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{89} \cdot x\right)$ mit $0 \le x \le 979$

x, $g(x)$ … Koordinaten in Millimetern (mm)

a) – Stellen Sie die Funktion g grafisch dar.

Eine montierte Wellblechplatte hat eine Breite von 979 mm, eine Länge von 1,2 m und eine Dicke von 1 mm (siehe nebenstehende nicht maßstabgetreue Abbildung).
Der Stahl hat eine Dichte von $\rho = 7{,}85$ g/cm^3.



– Berechnen Sie die Masse der Wellblechplatte in Kilogramm (kg).

b) An den Stellen der maximalen Steigung des Querschnitts des Wellblechs sollen Schneesicherungen angebracht werden. Dazu werden die 1. Ableitung g' und die 2. Ableitung g'' berechnet.

Die Berechnung der 2. Ableitung der Funktion g enthält genau einen Fehler.

(1) $g'(x) = \frac{\pi \cdot 27{,}5}{89} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{89} \cdot x\right)$

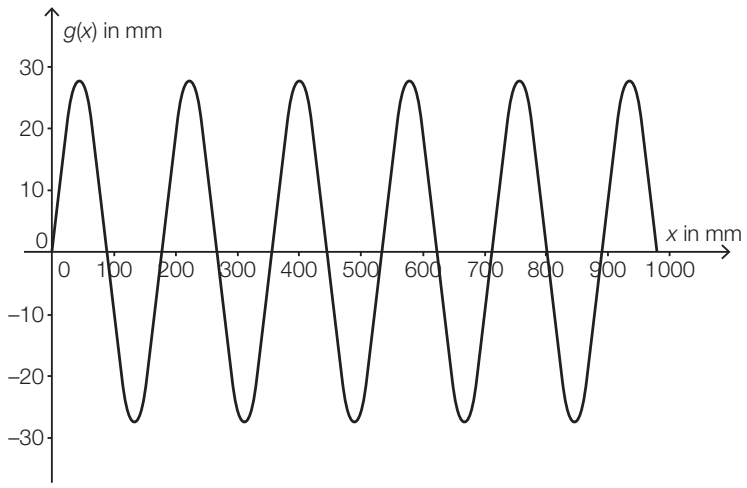
(2) $g''(x) = \frac{\pi \cdot 27{,}5}{89} \cdot \left(-\sin\left(\frac{\pi}{89} \cdot x\right)\right)$

– Beschreiben Sie anhand der Ableitungsregeln, welcher Fehler bei der Berechnung der 2. Ableitung begangen wurde.
– Zeigen Sie, dass die Funktion g an der Stelle $x = 534$ mm eine maximale Steigung hat.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



$s = \int_0^{979} \sqrt{(1 + (g'(x))^2)}\,dx$

$s = 1\,179{,}633\ldots$ mm

$V = s \cdot 1\,200 \cdot 1$

$V = 1\,415\,559{,}970\ldots$ mm^3 = $1\,415{,}559\ldots$ cm^3

$m = V \cdot \rho$

$m \approx 11{,}1$ kg

b) Bei der Berechnung der 2. Ableitung wurde die Kettenregel falsch angewendet. Die innere Ableitung des Ausdrucks $\cos\left(\frac{\pi}{89} \cdot x\right)$ wurde nicht berücksichtigt.

An den Wendestellen des Querschnitts des Wellblechs ist die Steigung maximal.
An diesen gilt: $g''(x) = 0$ und $g'(x) > 0$.

$\sin\left(\frac{\pi}{89} \cdot 534\right) = 0 \Rightarrow g''(534) = 0$

$g'(534) = 0{,}97\ldots > 0$

Die Funktion g hat an der Stelle $x = 534$ eine maximale Steigung.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) D Argumentieren und Kommunizieren

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:

a) schwer
b) mittel

Punkteanzahl:

a) 3
b) 2

Thema: Bauwesen

Quellen: —

Puzzle

Aufgabennummer: B_034

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Eine Puzzle-Spielmatte für Kleinkinder besteht aus 47 Einzelteilen in vier verschiedenen Farben. Die nachstehende Tabelle zeigt die Anzahl der Teile mit den jeweiligen Farben.

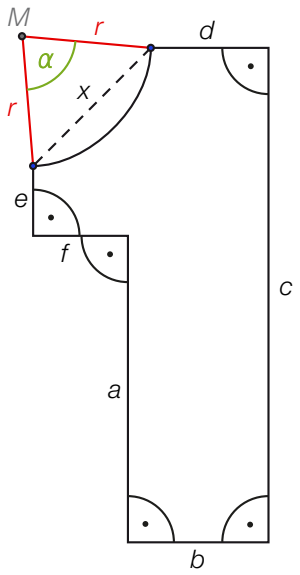
Farbe	Gelb	Blau	Rot	Grün
Anzahl	11	9	12	15

– Stellen Sie die prozentuellen Häufigkeiten der Farben in einem Kreisdiagramm dar.
– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass zwei zufällig entnommene Puzzleteile dieselbe Farbe haben.
– Interpretieren Sie, welche Wahrscheinlichkeit mit der nachstehenden Formel berechnet wird.

$$P(X) = 1 - \frac{9}{47} \cdot \frac{8}{46} \cdot \frac{7}{45}$$

b) Bei einem Puzzleteil wird die Ziffer 1 wie abgebildet dargestellt.

$a = 13$ cm
$b = 6$ cm
$c = 21$ cm
$d = 5$ cm
$e = 3$ cm
$f = 4$ cm
$r = 5{,}5$ cm



– Berechnen Sie den Winkel α.
– Bestimmen Sie den Flächeninhalt der Ziffer 1 vom Puzzleteil.

c) In einem Betrieb werden Puzzlematten hergestellt.
Mit zunehmendem Verkaufspreis werden weniger Mengeneinheiten verkauft.
Aufgrund von Marktbeobachtungen ergibt sich folgende Preisfunktion der Nachfrage:

$$p(x) = -\frac{3}{100}x + 110$$

x ... monatlich nachgefragte Mengeneinheiten (ME)
$p(x)$ ... Preis in Geldeinheiten pro Mengeneinheit (GE/ME) bei der Nachfrage von x ME

– Bestimmen Sie die monatlich nachgefragten Mengeneinheiten bei einem Preis von 25,50 GE/ME.

d) Die Herstellungskosten für eine Mengeneinheit Puzzlematten können mit € 1,50 veranschlagt werden. Dazu kommen monatliche Fixkosten von € 4.000.

– Ordnen Sie die gegebenen Funktionen zu. *[2 zu 4]*

Gesamtkostenfunktion $K(x) = ...$	
Stückkostenfunktion $\overline{K}(x)$	

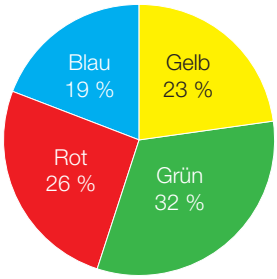
A	$1{,}5 + \frac{4\,000}{x}$
B	$\frac{1{,}5}{x} + 4\,000$
C	$1{,}5 + 4\,000 \cdot x$
D	$1{,}50 \cdot x + 4\,000$

– Erklären Sie den Unterschied zwischen Stückkostenfunktion und Grenzkostenfunktion im Sachzusammenhang.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



$$P = \frac{11}{47} \cdot \frac{10}{46} + \frac{9}{47} \cdot \frac{8}{46} + \frac{12}{47} \cdot \frac{11}{46} + \frac{15}{47} \cdot \frac{14}{46} = \frac{11 \cdot 10 + 9 \cdot 8 + 12 \cdot 11 + 15 \cdot 14}{47 \cdot 46} = 0{,}2423\ldots \approx 24\,\%$$

Die Formel gibt die Wahrscheinlichkeit an, bei 3-maligem Ziehen höchstens zwei blaue Puzzleteile zu erhalten.
(Auch andere richtige Formulierungen sind möglich.)

b) $x = \sqrt{(b + f - d)^2 + (c - a - e)^2} = \sqrt{50}$

$\alpha = 2 \cdot \arcsin\left(\frac{x}{2r}\right) = 80{,}00$

$\alpha \approx 80°$

$$A = a \cdot b + e \cdot (b + f) + d \cdot (c - a - e) + \frac{(c - a - e) \cdot (b + f - d)}{2} + \frac{r^2 \cdot \sin(\alpha)}{2} - \frac{r^2 \cdot \pi \cdot \alpha}{360}$$

$A \approx 139{,}3\ \text{cm}^2$

c) $x = \frac{11\,000}{3} - \frac{100 \cdot p}{3}$

$x(25{,}50) = 2\,816{,}6\ldots \approx 2\,817$

Es werden monatlich beim angegebenen Preis ungefähr 2 817 Mengeneinheiten Matten nachgefragt.

d)

Gesamtkostenfunktion $K(x) = \ldots$	D
Stückkostenfunktion $\overline{K}(x)$	A

A	$1{,}5 + \frac{4\,000}{x}$
B	$\frac{1{,}5}{x} + 4\,000$
C	$1{,}5 + 4\,000 \cdot x$
D	$1{,}50 \cdot x + 4\,000$

Aus der Grenzkostenfunktion kann man die lokale Änderungsrate (in GE pro Stück) der Kosten bei einer bestimmten Stückzahl produzierter Matten ablesen.
Aus der Stückkostenfunktion kann man die durchschnittlichen Kosten pro Mengeneinheit Matten bei einer bestimmten produzierten Stückzahl ablesen.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 2 Algebra und Geometrie
d) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) —
c) —
d) D Argumentieren und Kommunizieren

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) leicht
d) mittel

Punkteanzahl:

a) 3
b) 3
c) 1
d) 2

Thema: Alltag

Quellen: —

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Pensionsvorsorge*

Aufgabennummer: B_420

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Alexander möchte für seine Pension ansparen. In den folgenden Aufgaben wird die Kapitalertragsteuer nicht berücksichtigt.

a) Er zahlt 15 Jahre lang monatlich vorschüssig € 400 auf ein mit 0,27 % p. m. verzinstes privates Pensionskonto und lässt sein Geld anschließend 25 Jahre bei gleichbleibendem Zinssatz angelegt.

– Berechnen Sie seinen privaten Pensionsbetrag nach 40 Jahren.

b) Eine Bank unterbreitet ihm folgenden Vorschlag:
Durch Einzahlungen von € 20.000 sofort, € 30.000 nach 5 Jahren und € 40.000 nach 15 Jahren garantiert sie ihm nach insgesamt 40 Jahren ein angespartes Kapital von € 200.000.

– Veranschaulichen Sie diesen Zahlungsstrom (Einzahlungen und angespartes Kapital) auf einer Zeitachse.
– Berechnen Sie den zugehörigen Jahreszinssatz.

c) Er hat auf seinem privaten Pensionskonto, das mit 2 % p. a. verzinst wird, einen Betrag in Höhe von € 200.000 angespart.

Nun vergleicht er zwei Auszahlungsvarianten:
Variante 1: Er hebt am Ende jedes Jahres € 12.000 ab.
Variante 2: Er hebt am Ende jedes Jahres € 4.000 ab.

– Berechnen Sie, wie oft er bei Variante 1 den vollen Betrag abheben könnte.
– Erklären Sie, warum bei Variante 2 das angesparte Kapital am Pensionskonto erhalten bleibt.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

* ehemalige Klausuraufgabe

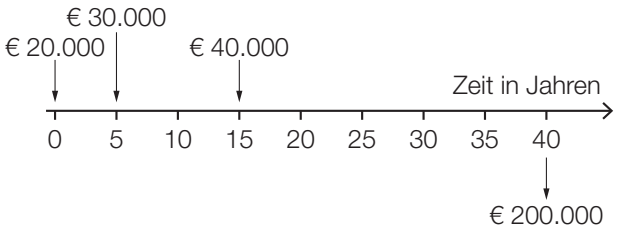
Möglicher Lösungsweg

a) $400 \cdot 1{,}0027 \cdot \frac{1{,}0027^{180} - 1}{0{,}0027} = 92\,803{,}312...$

$92\,803{,}312... \cdot 1{,}0027^{300} = 208\,385{,}722...$

Sein privater Pensionsbetrag beträgt nach 40 Jahren rund € 208.385,72.

b)



$200\,000 = 20\,000 \cdot (1 + i)^{40} + 30\,000 \cdot (1 + i)^{35} + 40\,000 \cdot (1 + i)^{25}$

Lösung mittels Technologieeinsatz:

$i = 0{,}02514...$

Der zugehörige Jahreszinssatz beträgt rund 2,51 % p. a.

c) $200\,000 = 12\,000 \cdot \frac{1{,}02^n - 1}{0{,}02} \cdot \frac{1}{1{,}02^n}$

Lösung mittels Technologieeinsatz:

$n = 20{,}4...$

Er könnte 20-mal den vollen Betrag in Höhe von € 12.000 abheben.

Bei Variante 2 bleibt das angesparte Kapital erhalten, weil der Betrag, den er am Ende jedes Jahres abhebt, genau den anfallenden Zinsen entspricht.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für die richtige Berechnung des Pensionsbeitrags nach 40 Jahren

b) 1 × A: für das richtige Darstellen auf einer Zeitachse
1 × B: für die richtige Berechnung des Jahreszinssatzes

c) 1 × B: für die richtige Berechnung der Anzahl der Vollraten
1 × D: für die richtige Erklärung

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Küchenkauf*

Aufgabennummer: B_453

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Frau Tomić will eine neue Küche um € 30.000 kaufen.

a) Um sich die Küche leisten zu können, hat sie vor 7 Jahren, vor 4 Jahren und vor 1 Jahr jeweils € 3.000 auf ein Sparbuch mit fixem Zinssatz eingezahlt. Nun befinden sich € 10.000 auf dem Sparbuch.

1) Berechnen Sie den zugrunde liegenden Jahreszinssatz.

Bei diesem Sparvorgang wurden jährlich 25 % Kapitalertragsteuer (KESt) abgezogen.

2) Berechnen Sie den Jahreszinssatz des Sparbuchs vor Abzug der KESt.

b) Frau Tomić benötigt für den Kauf der Küche einen Kredit in Höhe von € 20.000. Ein Bekannter von Frau Tomić bietet an, ihr das Geld zu einem fixen Zinssatz von 4 % p. a. zu leihen. Für die Rückzahlung vereinbaren sie, dass am Ende des 1. Semesters nur die Zinsen zu bezahlen sind, danach sind Semesterraten in Höhe von jeweils € 2.000 fällig.

1) Berechnen Sie den äquivalenten Semesterzinssatz.

2) Vervollständigen Sie die Zeilen für die Semester 1 und 2 des nachstehenden Tilgungsplans.

Semester	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Semesterrate	Restschuld
0	---	---	---	€ 20.000
1				
2				

3) Erklären Sie, warum die folgende Behauptung richtig ist: „Eine Verdoppelung der Semesterrate führt nicht zu einer Verdoppelung des Tilgungsanteils.“

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Für einen Kredit in Höhe von € 20.000 holt Frau Tomić ein Angebot von einer Bank ein. Die Bank schlägt für die Rückzahlung nachschüssige Jahresraten in Höhe von jeweils € 3.000 bei einem Jahreszinssatz *i* vor.

1) Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung der Restschuld *S* nach *t* Jahren.

$S =$ _____

Möglicher Lösungsweg

a1) $3000 \cdot (1 + i)^7 + 3000 \cdot (1 + i)^4 + 3000 \cdot (1 + i) = 10000$

$i = 0{,}02617...$

Der zugrunde liegende Jahreszinssatz beträgt rund 2,62 %.

a2) $\frac{0{,}02617...}{0{,}75} = 0{,}0349...$

Der Jahreszinssatz vor Abzug der KESt beträgt rund 3,5 %.

b1) $i_2 = \sqrt{1{,}04} - 1 = 0{,}01980...$

Der äquivalente Semesterzinssatz beträgt rund 1,98 %.

b2)

Semester	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Semesterrate	Restschuld
0	---	---	---	€ 20.000
1	€ 396,08	€ 0	€ 396,08	€ 20.000
2	€ 396,08	€ 1.603,92	€ 2.000	€ 18.396,08

b3) Der Tilgungsanteil berechnet sich aus der Differenz von Semesterrate und Zinsanteil. Wenn die Semesterrate verdoppelt wird, bleibt der Zinsanteil trotzdem gleich hoch. Somit ist der neue Tilgungsanteil mehr als doppelt so hoch wie der alte Tilgungsanteil.

c1) $S = 20000 \cdot (1 + i)^t - 3000 \cdot \frac{(1 + i)^t - 1}{i}$

oder:

$S = 20000 \cdot q^t - 3000 \cdot \frac{q^t - 1}{q - 1}$ mit $q = 1 + i$

Lösungsschlüssel

a1) 1 × B1: für die richtige Berechnung des Jahreszinssatzes
a2) 1 × B2: für die richtige Berechnung des Jahreszinssatzes vor Abzug der KESt
b1) 1 × B1: für die richtige Berechnung des äquivalenten Semesterzinssatzes
b2) 1 × B2: für das richtige Vervollständigen der Zeile für das Semester 1 des Tilgungsplans
1 × B3: für das richtige Vervollständigen der Zeile für das Semester 2 des Tilgungsplans
b3) 1 × D: für die richtige Erklärung
c1) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel

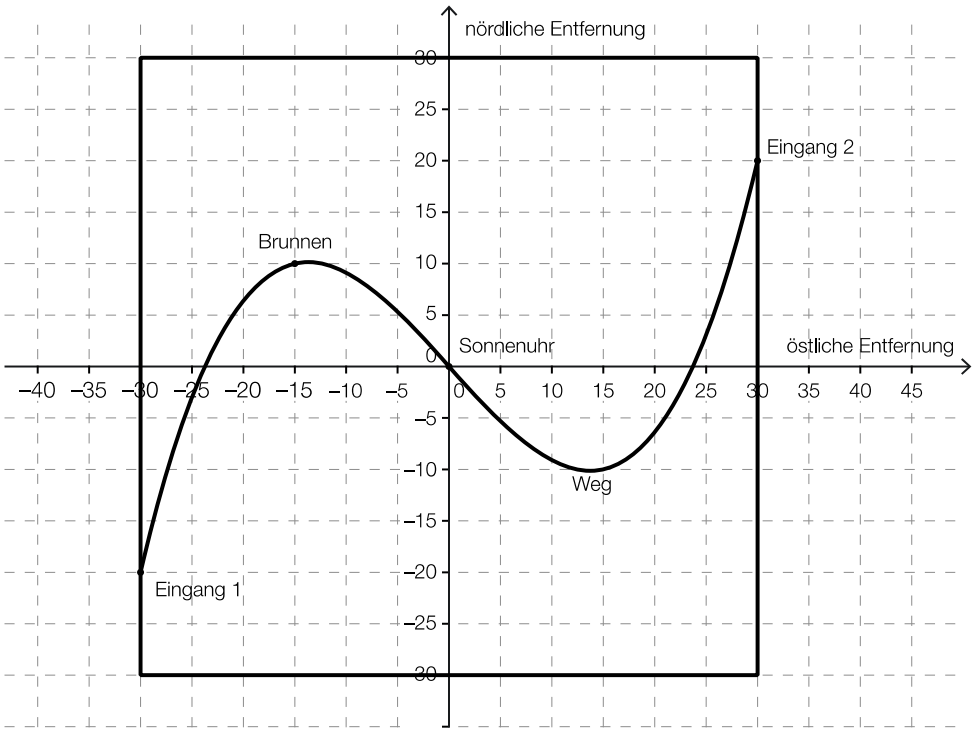
Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Kinderspielplatz (2)

Aufgabennummer: A_285

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein quadratischer Kinderspielplatz soll neu angelegt werden. In der Mitte des Kinderspielplatzes ist eine große Sonnenuhr, ein Brunnen ist bereits vorhanden. Wie in der nachstehenden Abbildung zu sehen ist, soll ein Weg vom Eingang 1 zum Brunnen führen, weiter zur Sonnenuhr und von dort zum Eingang 2.



a) Der Weg kann durch eine Polynomfunktion f dritten Grades modelliert werden.

$$f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$$

x ... Entfernung von der Sonnenuhr in östlicher Richtung in Metern (m)
$f(x)$ ... Entfernung von der Sonnenuhr in nördlicher Richtung in m

– Stellen Sie dasjenige lineare Gleichungssystem auf, mit dem man die Koeffizienten a, b, c und d der Polynomfunktion berechnen kann. (Entnehmen Sie die notwendigen Informationen der Abbildung.)
– Lösen Sie das Gleichungssystem.
– Zeigen Sie, dass der Wendepunkt der Polynomfunktion f genau an der Stelle der Sonnenuhr liegt.

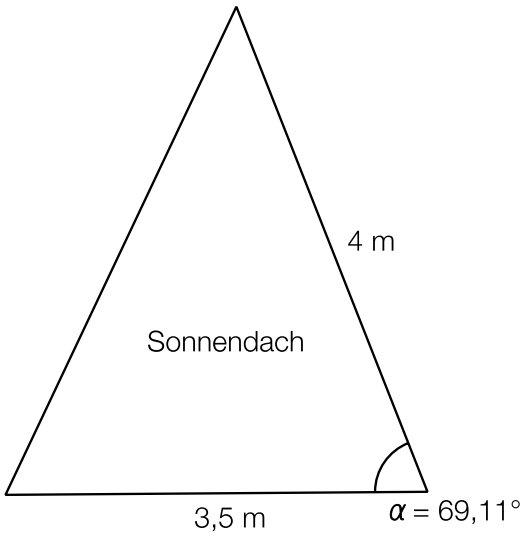
b) Die Funktion A mit $A(d) = \frac{d^2}{2}$ beschreibt den funktionalen Zusammenhang zwischen dem Flächeninhalt des quadratischen Spielplatzes und dessen Diagonale.
Ein Mitarbeiter behauptet: „Wenn wir den Flächeninhalt des Spielplatzes verdoppeln wollen, müssen wir die Diagonale verdoppeln."

– Überprüfen Sie, ob die Behauptung des Mitarbeiters richtig ist.

c) Ein Kind läuft außerhalb des Weges geradlinig vom Eingang 1 zur Sonnenuhr (0|0) und dann zum Brunnen (–15|10).

– Stellen Sie eine Formel auf, mit der die geradlinige Entfernung zwischen der Sonnenuhr und dem Brunnen berechnet werden kann.
– Berechnen Sie die Entfernung, die das Kind läuft.

d) Um den Kindern im Sommer einen Schatten bieten zu können, wird ein dreieckiges Sonnendach angebracht. Für die Produktion des Sonnendachs rechnet man mit 10 % Verschnitt. 1 m² des verwendeten Stoffes kostet € 11,95.



– Berechnen Sie den Flächeninhalt des Sonnendaches.
– Berechnen Sie die Kosten des Stoffes für das Sonnendach.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) (–30|–20) einsetzen liefert $\text{I}: -20 = (-30)^3 \cdot a + (-30)^2 \cdot b + (-30) \cdot c + d$
(–15|10) einsetzen liefert $\text{II}: 10 = (-15)^3 \cdot a + (-15)^2 \cdot b + (-15) \cdot c + d$
(0|0) einsetzen liefert $\text{III}: 0 = d$
(30|20) einsetzen liefert $\text{IV}: 20 = 30^3 \cdot a + 30^2 \cdot b + 30 \cdot c + d$

Lösung mittels Technologieeinsatz:
$a \approx 0{,}001975$
$b = 0$
$c \approx -1{,}1111$
$d = 0$

Im Wendepunkt muss $f''(x)$ gleich null sein.
$f''(x) = 6 \cdot a \cdot x + 2 \cdot b$
Da $b = 0$ ist, ergibt Einsetzen von $x = 0$ für $f''(x)$ null.

b) Behauptung: $A(2d) = 2A(d)$

$$A(2d) = \frac{(2d)^2}{2} = \frac{4d^2}{2} = 4 \cdot \frac{d^2}{2} = 4A(d)$$

Also ist die Behauptung falsch. Der Flächeninhalt wird vervierfacht, wenn die Diagonale verdoppelt wird.

Jede Begründung, dass durch das Verdoppeln der Diagonale eine Vervierfachung entsteht, ist richtig.

c) Länge zwischen Brunnen und Sonnenuhr: $l = \sqrt{(-15)^2 + 10^2}$

Gesamtlänge in Metern: 36,06 + 18,03 = 54,09

d) Flächeninhalt des Sonnendaches in m²:
$\frac{h}{4} = \sin(69{,}11°) \Rightarrow h = 3{,}737...$
$A = \frac{3{,}5 \cdot h}{2} = 6{,}539...$

Der Flächeninhalt des Sonnendaches beträgt rund 6,54 m².

Kosten des Stoffes:
$A \cdot 1{,}1 \cdot 11{,}95 = 85{,}966...$

Die Kosten des Stoffes für das Sonnendach betragen € 85,97.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 2 Algebra und Geometrie
d) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) —
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) A Modellieren und Transferieren
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren, B Operieren und Technologieeinsatz
b) —
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) —

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) leicht
d) leicht

Punkteanzahl:

a) 3
b) 1
c) 2
d) 2

Thema: Sonstiges

Quelle: http://www.esvocampingshop.com/de/zeltstoff-de/sonnensegelstoff-de.html

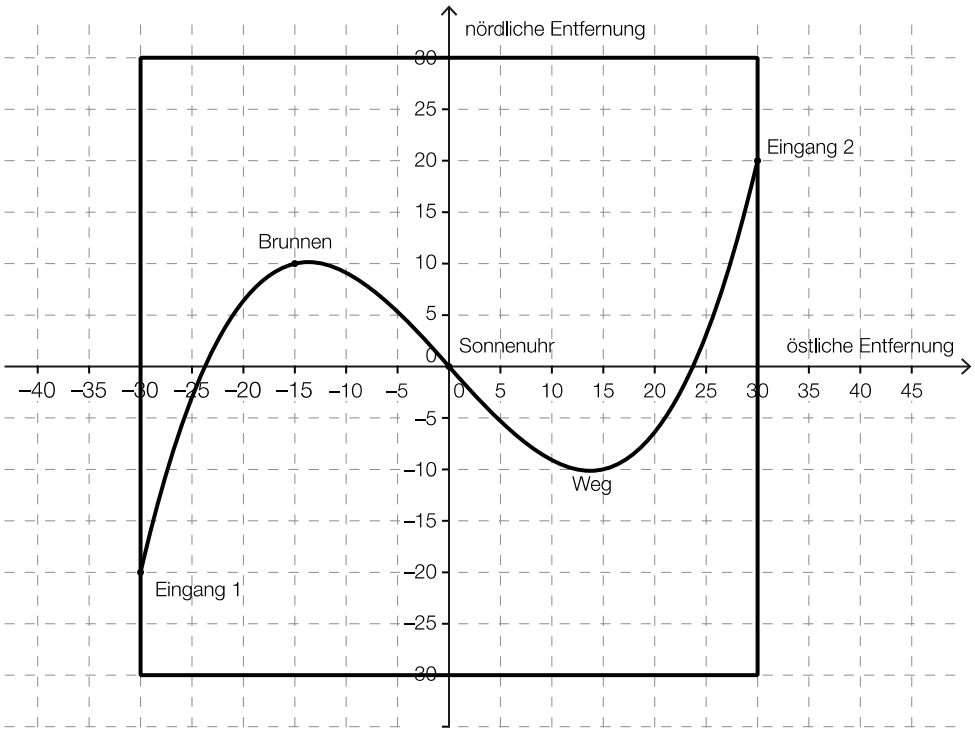
Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Kinderspielplatz (1)

Aufgabennummer: B_247

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein quadratischer Kinderspielplatz soll neu angelegt werden. In der Mitte des Kinderspielplatzes ist eine große Sonnenuhr, ein Brunnen ist bereits vorhanden. Wie in der nachstehenden Abbildung zu sehen ist, soll ein Weg vom Eingang 1 zum Brunnen führen, weiter zur Sonnenuhr und von dort zum Eingang 2.



a) Der Weg kann durch eine Polynomfunktion f dritten Grades modelliert werden.

$$f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$$

x ... Entfernung von der Sonnenuhr in östlicher Richtung in Metern (m)
$f(x)$ ... Entfernung von der Sonnenuhr in nördlicher Richtung in m

– Stellen Sie dasjenige lineare Gleichungssystem auf, mit dem man die Koeffizienten a, b, c und d der Polynomfunktion berechnen kann. (Entnehmen Sie die notwendigen Informationen der Abbildung.)
– Lösen Sie das Gleichungssystem.
– Zeigen Sie, dass der Wendepunkt der Polynomfunktion f genau an der Stelle der Sonnenuhr liegt.

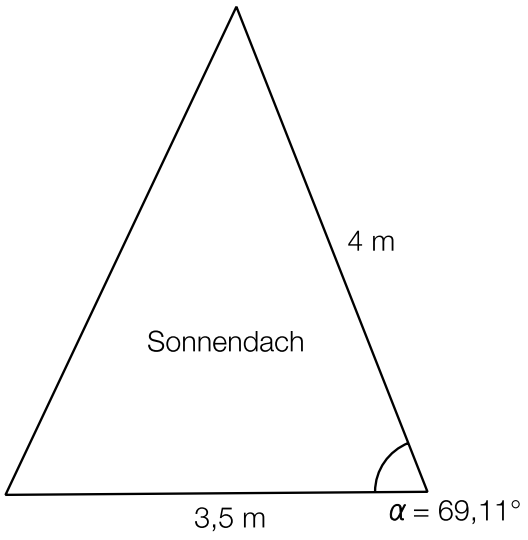
b) Die Funktion A mit $A(d) = \frac{d^2}{2}$ beschreibt den funktionalen Zusammenhang zwischen dem Flächeninhalt des quadratischen Spielplatzes und dessen Diagonale.
Ein Mitarbeiter behauptet: „Wenn wir den Flächeninhalt des Spielplatzes verdoppeln wollen, müssen wir die Diagonale verdoppeln."

– Überprüfen Sie, ob die Behauptung des Mitarbeiters richtig ist.

c) Ein Kind läuft außerhalb des Weges geradlinig vom Eingang 1 zur Sonnenuhr und dann zum Brunnen.

– Stellen Sie denjenigen Vektor auf, der den geradlinigen Weg vom Eingang 1 zur Sonnenuhr beschreibt.
– Berechnen Sie die Entfernung, die das Kind läuft.

d) Um den Kindern im Sommer einen Schatten bieten zu können, wird ein dreieckiges Sonnendach angebracht. Für die Produktion des Sonnendachs rechnet man mit 10 % Verschnitt. 1 m² des verwendeten Stoffes kostet € 11,95.



– Berechnen Sie den Flächeninhalt des Sonnendaches.
– Berechnen Sie die Kosten des Stoffes für das Sonnendach.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) (–30|–20) einsetzen liefert $\text{I}: -20 = (-30)^3 \cdot a + (-30)^2 \cdot b + (-30) \cdot c + d$
(–15|10) einsetzen liefert $\text{II}: 10 = (-15)^3 \cdot a + (-15)^2 \cdot b + (-15) \cdot c + d$
(0|0) einsetzen liefert $\text{III}: 0 = d$
(30|20) einsetzen liefert $\text{IV}: 20 = 30^3 \cdot a + 30^2 \cdot b + 30 \cdot c + d$

Lösung mittels Technologieeinsatz:
$a \approx 0{,}001975$
$b = 0$
$c \approx -1{,}1111$
$d = 0$

Im Wendepunkt muss $f''(x)$ gleich null sein.
$f''(x) = 6 \cdot a \cdot x + 2 \cdot b$
Da $b = 0$ ist, ergibt Einsetzen von $x = 0$ für $f''(x)$ null.

b) Behauptung: $A(2d) = 2A(d)$

$$A(2d) = \frac{(2d)^2}{2} = \frac{4d^2}{2} = 4 \cdot \frac{d^2}{2} = 4A(d)$$

Also ist die Behauptung falsch. Der Flächeninhalt wird vervierfacht, wenn die Diagonale verdoppelt wird.

Jede Begründung, dass durch das Verdoppeln der Diagonale eine Vervierfachung entsteht, ist richtig.

c) Verbindungsvektor Eingang 1 – Sonnenuhr: $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-30\\-20\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}30\\20\end{pmatrix}$
Länge: $\sqrt{30^2 + 20^2} \approx 36{,}06$

Verbindungsvektor Sonnenuhr – Brunnen: $\begin{pmatrix}-15\\10\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-15\\10\end{pmatrix}$
Länge: $\sqrt{(-15)^2 + 10^2} \approx 18{,}03$

Gesamtlänge in Metern: 36,06 + 18,03 = 54,09

d) Flächeninhalt des Sonnendaches in m²: $A = \frac{4 \cdot 3{,}5 \cdot \sin(69{,}11°)}{2} = 6{,}539...$

Der Flächeninhalt des Sonnendaches beträgt rund 6,54 m².

Kosten des Stoffes: $A \cdot 1{,}1 \cdot 11{,}95 = 85{,}966...$

Die Kosten des Stoffes für das Sonnendach betragen € 85,97.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 2 Algebra und Geometrie
d) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) —
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) A Modellieren und Transferieren
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren, B Operieren und Technologieeinsatz
b) —
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) —

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) leicht
d) leicht

Punkteanzahl:

a) 3
b) 1
c) 2
d) 2

Thema: Sonstiges

Quelle: http://www.esvocampingshop.com/de/zeltstoff-de/sonnensegelstoff-de.html

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

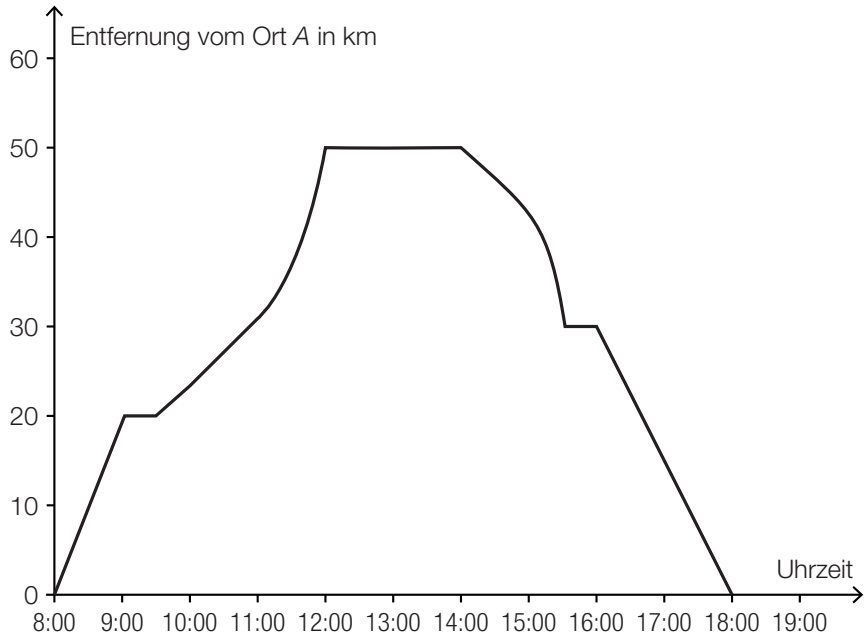
Radausflug

Aufgabennummer: A_042

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Ein Ort *A* ist mit dem 50 km entfernten Ort *B* durch einen Radweg verbunden.

a) In der nachstehenden Grafik ist die Entfernung eines Radfahrers vom Ort *A* in Abhängigkeit von der Uhrzeit während einer Tages-Fahrrad-Tour von *A* nach *B* und wieder zurück dargestellt.



– Lesen Sie aus dem Diagramm ab, wann der Radfahrer den Rückweg antritt.
– Bestimmen Sie die Durchschnittsgeschwindigkeit des Radfahrers im Zeitintervall von 14:00 Uhr bis 15:30 Uhr.
– Interpretieren Sie das Diagramm im Zeitintervall von 15:30 Uhr bis 16:00 Uhr im gegebenen Sachzusammenhang.

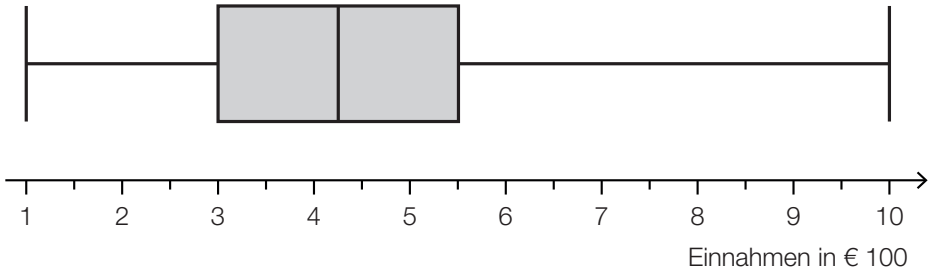
b) Die Radtour führt an einem See vorbei. Von einem 15 m hohen Aussichtsturm am Seeufer erblickt man durch Senken eines Fernrohrs aus der Horizontalen um $\alpha = 26°$ die Mastspitze eines Segelboots. Die Mastspitze liegt 2,9 m über dem Wasserspiegel des Sees.

– Erstellen Sie eine Skizze, die diesen Sachverhalt beschreibt.
– Berechnen Sie, wie weit das Boot vom Fußpunkt des Turmes entfernt ist.

c) Der See ist an der tiefsten Stelle 15 m tief. Die Lichtintensität I nimmt mit der Wassertiefe ab. Misst man diese in lotrechter Richtung in einmetrigen Abständen, so ergibt sich pro Meter eine Abnahme von 12 % in Bezug auf den jeweils vorherigen Messwert.

– Stellen Sie eine Gleichung derjenigen Funktion auf, die die Lichtintensität in Abhängigkeit von der Wassertiefe beschreibt.
– Ermitteln Sie, auf wie viel Prozent des Ausgangswerts die Lichtintensität in 15 m Tiefe gesunken ist.

d) Im Ort *B* befindet sich ein kleiner Kiosk. Die Tageseinnahmen einer Saison sind im nachstehenden Boxplot veranschaulicht.



– Lesen Sie den Median und die beiden Quartile sowie die minimalen und die maximalen Tageseinnahmen ab.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

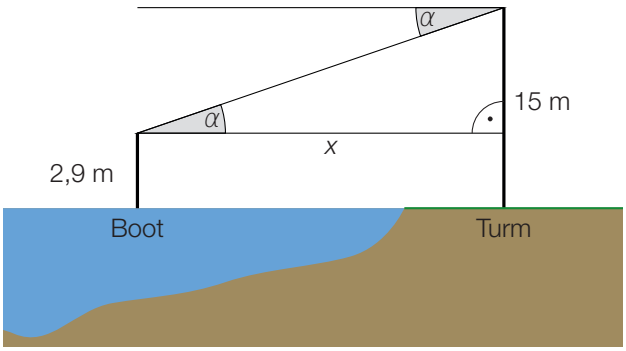
a) – Um 14:00 Uhr wird der Rückweg nach *A* angetreten.
– Zwischen 14:00 Uhr und 15:30 Uhr wird eine Strecke von 20 km mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von $13{,}\overline{3}$ km/h zurückgelegt.
– Von 15:30 Uhr bis 16:00 Uhr legt der Radfahrer eine Pause ein.

b) $\tan(\alpha) = \frac{12{,}1}{x}$

$x \cdot \tan(\alpha) = 12{,}1$

$x = \frac{12{,}1}{\tan(\alpha)}$

$x = 24{,}80\ldots$



Das Boot ist rund 24,8 m vom Fußpunkt des Turmes entfernt.

c) $I(t) = I_0 \cdot 0{,}88^t$

t … Wassertiefe in m
$I(t)$ … Lichtintensität in der Tiefe t
I_0 … Lichtintensität an der Wasseroberfläche

$I(15) = I_0 \cdot 0{,}88^{15} = I_0 \cdot 0{,}1469...$
Die Lichtintensität ist in 15 m Tiefe auf rund 14,7 % des Ausgangswerts gesunken.

d) Der Median beträgt rund € 425. Die beiden Quartile betragen q_1 = € 300 und q_3 = € 550.
Die minimalen Tageseinnahmen betragen € 100 und die maximalen € 1.000.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 3 Funktionale Zusammenhänge
d) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) 1 Zahlen und Maße
b) —
c) —
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) A Modellieren und Transferieren
c) A Modellieren und Transferieren
d) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) —

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) mittel
d) leicht

Punkteanzahl:

a) 3
b) 2
c) 2
d) 1

Thema: Freizeit

Quellen: —

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

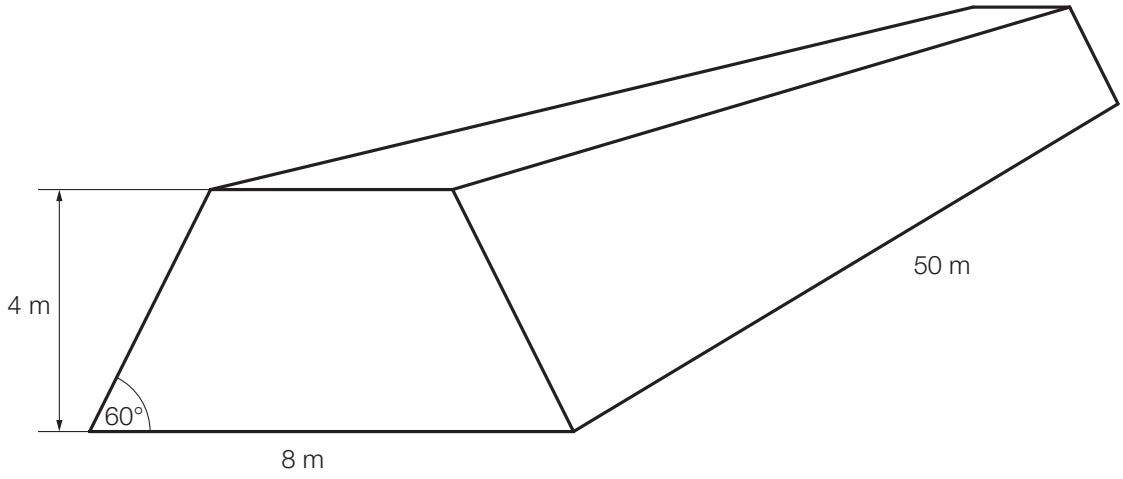
Hochwasserschutz

Aufgabennummer: A_056

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Für den Hochwasserschutz soll an einem Flussufer ein Damm aufgeschüttet werden.

a) Der Dammquerschnitt hat annähernd die Form eines gleichschenkeligen Trapezes mit der Basislänge 8 m und der Höhe 4 m. Der Damm ist 50 m lang.
Der Neigungswinkel der Seitenflächen gegen die Grundfläche des Damms beträgt 60°.
(Siehe nachstehende Abbildung.)



– Berechnen Sie das Volumen des Schüttmaterials, das für die Errichtung dieses Damms benötigt wird.

b) In der ersten Woche sollen a Kubikmeter des Schüttmaterials mit der Dichte ϱ (in Tonnen pro Kubikmeter) mit einem Muldenkipper zur Baustelle gebracht werden. Der Muldenkipper kann bei jeder Fahrt b Tonnen des Schüttmaterials befördern.
Die Masse m ist das Produkt aus Volumen V und Dichte ϱ, also $m = V \cdot \varrho$.

– Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung der Anzahl A der Fahrten des Muldenkippers aus a, b und ϱ.

$A =$ _____

c) In der folgenden Tabelle sind die maximalen Wasserdurchflüsse eines Flusses an einer bestimmten Stelle für die Jahre 2005 bis 2012 dokumentiert:

Jahr	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012
maximaler Wasserdurchfluss in m^3/s	31	45	45	28	26	98	102	22

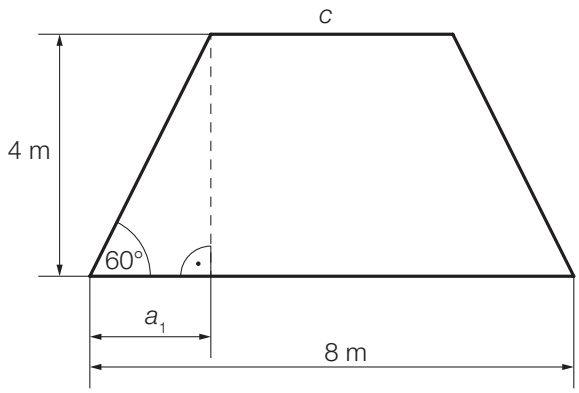
– Berechnen Sie das arithmetische Mittel $\bar{x}$ und den Median $\tilde{x}$ der maximalen Wasserdurchflüsse mithilfe der Daten aus der Tabelle.

– Erklären Sie, welche Eigenschaften die beiden Zentralmaße gegenüber Ausreißern haben.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



$a_1 = \frac{4}{\tan(60°)} = 2{,}309\ldots$

$c = 8 - 2 \cdot a_1 = 3{,}381\ldots$

$A_{Trapez} = \frac{(8 + 3{,}38\ldots) \cdot 4}{2} = 22{,}762\ldots$

$V = A_{Trapez} \cdot 50 = 1\,138{,}1\ldots$

Das Volumen des benötigten Schüttmaterials beträgt rund 1 138 m^3.

b) $A = \frac{a \cdot \varrho}{b}$

c) arithmetisches Mittel

$\bar{x} = \frac{31 + 45 + 45 + 28 + 26 + 98 + 102 + 22}{8}$

$\bar{x} = 49{,}625\ m^3/s$

Median

$\tilde{x} = \frac{31 + 45}{2}$

$\tilde{x} = 38\ m^3/s$

Das arithmetische Mittel berücksichtigt allfällige Ausreißer stärker als der Median.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) 1 Zahlen und Maße
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) A Modellieren und Transferieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) –
b) –
c) D Argumentieren und Kommunizieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) leicht
c) leicht

Punkteanzahl:

a) 2
b) 1
c) 2

Thema: Alltag

Quellen: –

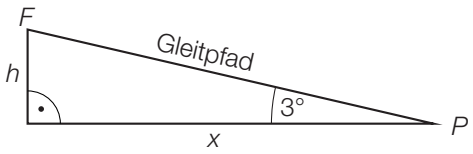
Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Flugzeuge

Aufgabennummer: A_126

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Ein Verkehrsflugzeug folgt beim Landeanflug einem Gleitpfad, der eine geradlinige Verbindung zwischen der aktuellen Position des Flugzeugs *F* und dem Landepunkt *P* ist. Der Gleitpfad schließt mit der horizontalen Landebahn einen Winkel von 3° ein (siehe nachstehende nicht maßstabgetreue Skizze).

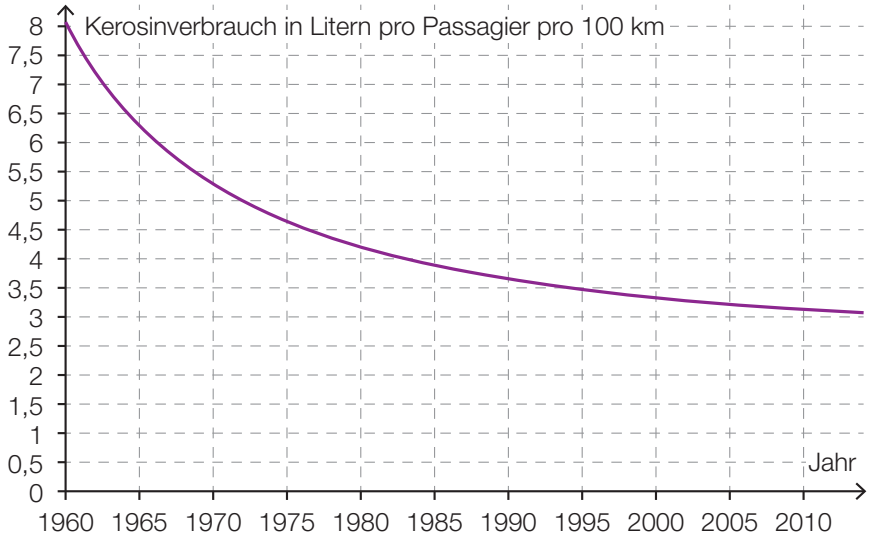


– Erstellen Sie mithilfe der Höhe *h* eine Formel zur Berechnung der horizontalen Entfernung *x*.

$x =$ _____

– Berechnen Sie, in welcher Höhe *h* sich das Flugzeug befindet, wenn es eine Horizontalentfernung von 10 km vom Landepunkt hat.

b) Der Kerosinverbrauch wird üblicherweise pro Passagier pro 100 km angegeben. Die nachstehende Abbildung stellt die Abnahme des Kerosinverbrauchs von Flugzeugen in den vergangenen Jahrzenten dar.



– Ermitteln Sie mithilfe der obigen Abbildung die mittlere Änderungsrate des Kerosinverbrauchs im Zeitintervall [1960; 1995].

– Ermitteln Sie mithilfe der obigen Abbildung die momentane Änderungsrate des Kerosinverbrauchs im Jahr 1970.

c) Der Kerosinverbrauch von Flugzeugen kann ab dem Jahr 1960 näherungsweise durch die Funktion f beschrieben werden.

$f(t) = 5{,}3 \cdot 0{,}935^t + 2{,}9$

t … Zeit nach 1960 in Jahren
$f(t)$ … Kerosinverbrauch in Litern pro Passagier pro 100 km

– Berechnen Sie mithilfe der Funktion f, in welchem Jahr der Kerosinverbrauch 3 Liter pro Passagier pro 100 km beträgt.

– Interpretieren Sie die Bedeutung der Zahl 2,9 in der Funktionsgleichung von f im gegebenen Sachzusammenhang.

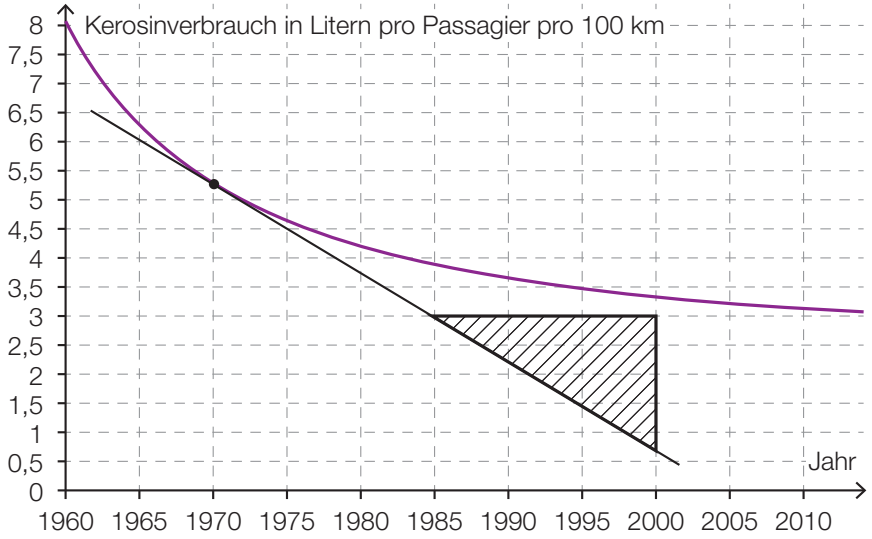
Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $x = \frac{h}{\tan(3°)}$

$h = 10 \cdot \tan(3°) = 0{,}5241\ldots$
Das Flugzeug befindet sich in rund 524 m Höhe.

b)



1960 … ca. 8 Liter pro Passagier pro 100 km
1995 … ca. 3,5 Liter pro Passagier pro 100 km

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3{,}5 - 8}{1995 - 1960} = \frac{-4{,}5}{35} \approx -0{,}13$
Die mittlere Änderungsrate beträgt ungefähr –0,13 Liter Kerosin pro Passagier pro 100 km pro Jahr.

Steigung der in der obigen Abbildung eingezeichneten Tangente: $\frac{-2{,}3}{15} \approx -0{,}15$
Die momentane Änderungsrate beträgt ungefähr –0,15 Liter Kerosin pro Passagier pro 100 km pro Jahr.

c) $f(t) = 3$ bzw. $5{,}3 \cdot 0{,}935^t + 2{,}9 = 3$

Lösung mittels Technologieeinsatz:
$t = 59{,}0\ldots$
Im Jahr 2019 beträgt der Kerosinverbrauch 3 Liter pro Passagier pro 100 km.

Gemäß der Funktion f nähert sich der Kerosinverbrauch mit zunehmender Zeit immer mehr dem Wert 2,9. Dieser Wert wird aber nie erreicht oder unterschritten.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 4 Analysis
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) —
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) leicht
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2
c) 2

Thema: Sonstiges

Quellen: —

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Anschaffungen

Aufgabennummer: B_134

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Für die Anschaffung von neuer Hardware in einem Unternehmen muss ein Kredit aufgenommen werden.

a) Für einen Kredit in Höhe von € 50.000 bietet eine Bank bei einer Laufzeit von 10 Jahren und Rückzahlung durch nachschüssige Monatsraten einen effektiven Jahreszinssatz von 4,5 %.

– Berechnen Sie die Höhe der Monatsraten.

b) Das Angebot einer anderen Bank für die Rückzahlung eines Kredits in Höhe von € 50.000 ist ausschnittsweise im folgenden Tilgungsplan dargestellt:

Semester	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0				€ 50.000
1	€ 1.112,62	€ 11.387,38	€ 12.500	€ 38.612,62
2	€ 859,22	€ 11.640,78	€ 12.500	€ 26.971,84
3	€ 600,19	€ 11.899,81	€ 12.500	€ 15.072,03
4			€ 12.500	

– Zeigen Sie, dass diesem Tilgungsplan ein effektiver Jahreszinssatz von rund 4,5 % zugrunde liegt.
– Vervollständigen Sie im obigen Tilgungsplan die Zeile für das 4. Semester.

Die Rückzahlung des Kredits soll am Ende des 5. Semesters durch eine Restzahlung abgeschlossen werden.

– Berechnen Sie die Höhe dieser Restzahlung.

c) Der Unternehmer nimmt einen weiteren Kredit in Höhe von € 10.000 auf, den er innerhalb eines Jahres zurückzahlen möchte.

Er kann zwischen 2 Rückzahlungsvarianten bei gleichem Jahreszinssatz *i* wählen:

- 1. Variante: 2 nachschüssige Semesterraten in Höhe von € 5.000 und 1 Restzahlung
- 2. Variante: 4 nachschüssige Quartalsraten in Höhe von € 2.500 und 1 Restzahlung

– Erklären Sie, warum 2 nachschüssige Quartalsraten von € 2.500 nicht genau einer nachschüssigen Semesterrate von € 5.000 entsprechen.
– Erklären Sie, bei welcher Variante der Unternehmer eine höhere Restzahlung zu tätigen hat.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) monatlicher Aufzinsungsfaktor: $q_{12} = \sqrt[12]{1{,}045}$

$$50\,000 = R \cdot \frac{q_{12}^{120} - 1}{q_{12} - 1} \cdot \frac{1}{q_{12}^{120}} \quad \Rightarrow \quad R = 516{,}020\ldots$$

Die Höhe der Monatsraten beträgt € 516,02.

b) Semesterzinssatz $i_2 = \frac{1\,112{,}62}{50\,000} = 0{,}02225\ldots$

effektiver Jahreszinssatz $i = (1 + i_2)^2 - 1 = 0{,}04499\ldots \approx 4{,}50\ \%$

Semester	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0				€ 50.000
1	€ 1.112,62	€ 11.387,38	€ 12.500	€ 38.612,62
2	€ 859,22	€ 11.640,78	€ 12.500	€ 26.971,84
3	€ 600,19	€ 11.899,81	€ 12.500	€ 15.072,03
4	€ 335,39	€ 12.164,61	€ 12.500	€ 2.907,42

Die Restschuld vom Ende des 4. Semesters wird ein weiteres Semester aufgezinst. Es sind daher am Ende des 5. Semesters noch € 2.972,11 fällig.

c) Zu dem Zeitpunkt, zu dem die Semesterrate gezahlt wird (also am Ende des Semesters), wurde die 1. bezahlte Quartalsrate bereits 1 Semester lang verzinst. Der Endwert der beiden Quartalsraten ist daher etwas höher als die Semesterrate.

Der Endwert der Quartalsraten ist etwas höher als der Endwert der Semesterraten. Daher ist die Restzahlung bei der 1. Variante höher.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) D Argumentieren und Kommunizieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) —

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 3
c) 2

Thema: Wirtschaft

Quellen: —

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Zirbenkugel-Wassergefäße*

Aufgabennummer: B_504

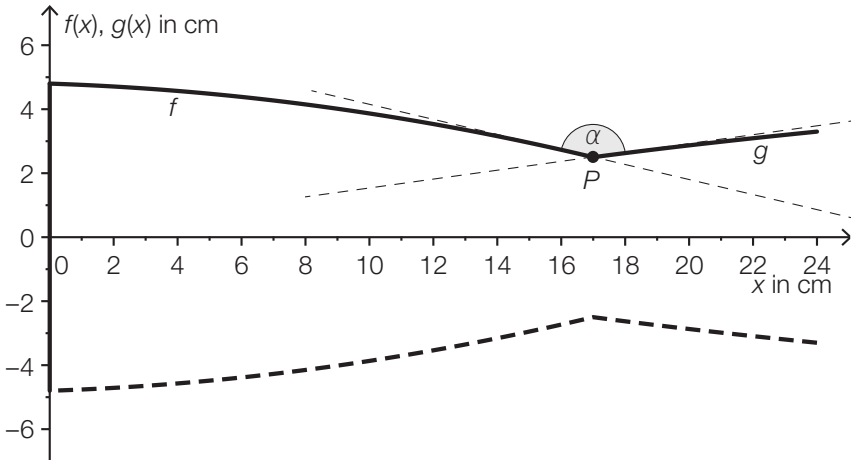
Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

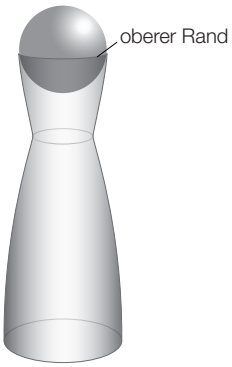
In einer Glasmanufaktur werden Wassergefäße hergestellt, die mit einer Kugel aus Zirbenholz verschlossen werden.

a) Das (liegende) Wassergefäß kann modellhaft durch die Rotation der Graphen der Funktionen f und g um die x-Achse beschrieben werden. Die Glasdicke wird dabei vernachlässigt.

$$f(x) = -\frac{1}{170} \cdot x^2 - \frac{3}{85} \cdot x + \frac{24}{5} \text{ mit } 0 \le x \le 17$$

$$g(x) = \frac{5}{6} \cdot \sqrt{x - 8} \text{ mit } 17 \le x \le 24$$





Im Schnittpunkt P schließen die Tangente an den Graphen von f und die Tangente an den Graphen von g den stumpfen Winkel α ein.

1) Berechnen Sie diesen stumpfen Winkel α.

Das Wassergefäß ist 18 cm hoch mit Wasser gefüllt.

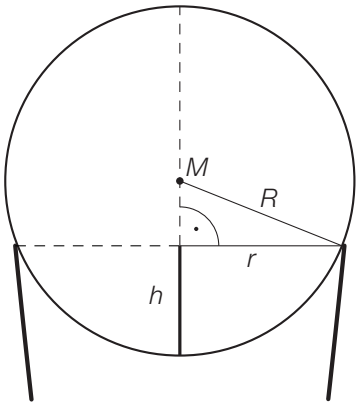
2) Ermitteln Sie die im Wassergefäß enthaltene Wassermenge in Litern.

Das Wassergefäß soll mit einer Markierung für eine Füllmenge von 1 L versehen werden.

3) Berechnen Sie die Entfernung dieser Markierung vom oberen Rand des Wassergefäßes.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Die Zirbenholz-Kugel hat den Mittelpunkt *M* und den Radius *R*. Der kreisförmige obere Rand des Wassergefäßes, auf dem die Zirbenholz-Kugel aufliegt, hat den Radius *r*.



1) Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung der in der obigen Abbildung eingezeichneten Länge *h* aus *R* und *r*.

h = _____

c) Die Zirbenholz-Kugel hat einen Durchmesser von 70 mm.
Zirbenholz hat eine Dichte von rund 380 kg/m^3.
Die Masse *m* ist das Produkt aus Dichte ϱ und Volumen *V*, also $m = \varrho \cdot V$.

1) Berechnen Sie die Masse der Zirbenholz-Kugel in Gramm.

Möglicher Lösungsweg

a1) $\alpha = 180° - |\arctan(f'(17))| - \arctan(g'(17)) = 158{,}852...°$

a2) $\pi \cdot \int_0^{17} \left(f(x)\right)^2 \mathrm{d}x + \pi \cdot \int_{17}^{18} \left(g(x)\right)^2 \mathrm{d}x = 871{,}3...$

$871{,}3...\ \mathrm{cm}^3 = 0{,}8713...\ \mathrm{L}$

Die Wassermenge beträgt rund 0,871 L.

a3) $1\,000 = \pi \cdot \int_0^{17} \left(f(x)\right)^2 \mathrm{d}x + \pi \cdot \int_{17}^{24-a} \left(g(x)\right)^2 \mathrm{d}x$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$a_1 = 1{,}238...$

$(a_2 = 30{,}761...)$

Die Entfernung dieser Markierung vom oberen Rand des Wassergefäßes beträgt rund 1,24 cm.

b1) $h = R - \sqrt{R^2 - r^2}$

c1) $380\ \mathrm{kg/m}^3 = 0{,}38\ \mathrm{g/cm}^3$

$m = 0{,}38 \cdot \frac{4}{3} \cdot 3{,}5^3 \cdot \pi = 68{,}24...$

Die Zirbenholz-Kugel hat eine Masse von rund 68,2 g.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × B1: für das richtige Berechnen des Winkels α
a2) 1 × B2: für das richtige Ermitteln der Wassermenge in Litern
a3) 1 × A: für den richtigen Ansatz
1 × B3: für das richtige Berechnen der Entfernung der Markierung vom oberen Rand des Wassergefäßes
b1) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel zur Berechnung von h
c1) 1 × B: für das richtige Berechnen der Masse in Gramm

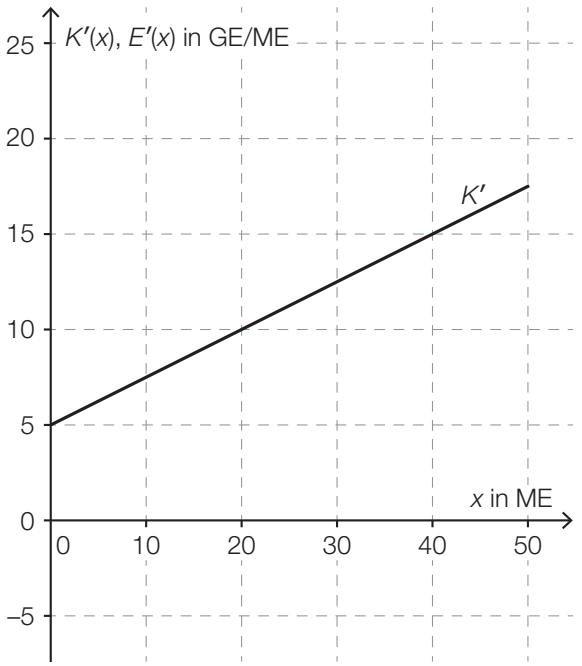
Scharniere*

Aufgabennummer: B_503

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein Unternehmen stellt Scharniere her.

a) In der nebenstehenden Abbildung ist der Graph der linearen Grenzkostenfunktion K' für die Herstellung von *Clip*-Scharnieren dargestellt.



1) Erstellen Sie eine Gleichung der Grenzkostenfunktion K'.

Die Fixkosten für die Herstellung von *Clip*-Scharnieren betragen 50 GE.

2) Erstellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Kostenfunktion K.

Die Grenzerlösfunktion E' für *Clip*-Scharniere ist gegeben durch:

$E'(x) = -0{,}5 \cdot x + 20$

x ... Absatzmenge in ME
$E'(x)$ ... Grenzerlös bei der Absatzmenge x in GE/ME

3) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den Graphen der Grenzerlösfunktion E' im Intervall [0; 50] ein.

4) Interpretieren Sie die Nullstelle der Grenzerlösfunktion E' in Bezug auf den Erlös.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Die Durchschnittskosten für die Herstellung des Scharniers *Modul* lassen sich durch die Durchschnittskostenfunktion $\overline{K}$ mit $\overline{K}(x) = \frac{K(x)}{x}$ beschreiben:

$\overline{K}(x) = 0{,}25 \cdot x + 3 + \frac{1}{x}$

x ... Produktionsmenge in ME
$\overline{K}(x)$ ... Durchschnittskosten bei der Produktionsmenge x in GE/ME

Es werden folgende Rechenschritte ausgeführt:

$\overline{K}'(x) = 0{,}25 - \frac{1}{x^2}$

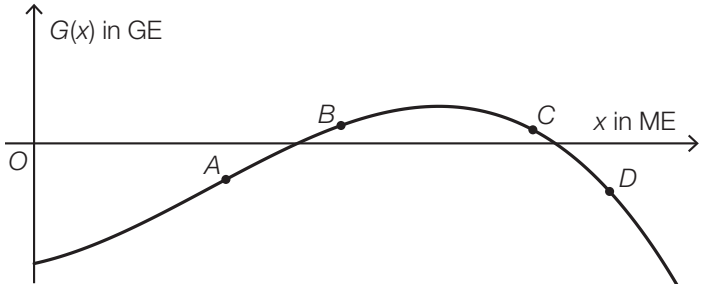
$0{,}25 - \frac{1}{x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{\frac{1}{0{,}25}}$

$x_1 = 2\,, \quad (x_2 = -2)$

1) Interpretieren Sie die Lösung $x_1 = 2$ im gegebenen Sachzusammenhang.

2) Zeigen Sie mithilfe der Regel zum Ableiten von Potenzfunktionen, dass man als Ableitung von $\frac{1}{x}$ den Ausdruck $-\frac{1}{x^2}$ erhält.

c) In der unten stehenden Abbildung ist der Graph der Gewinnfunktion G für das Scharnier *Top* dargestellt.
Auf dem Graphen der Gewinnfunktion G sind die Punkte A, B, C und D eingezeichnet.



1) Ordnen Sie den beiden Aussagen jeweils den zutreffenden Punkt aus A bis D zu. *[2 zu 4]*

$G(x) > 0$ und $G'(x) > 0$	
$G(x) < 0$ und $G'(x) < 0$	

A	Punkt A
B	Punkt B
C	Punkt C
D	Punkt D

d) Der Gewinn für das Scharnier *Cardo* kann durch die Funktion G beschrieben werden:

$G(x) = -0{,}01 \cdot x^3 + 0{,}28 \cdot x^2 + 1{,}75 \cdot x - 50$

x ... Absatzmenge in ME
$G(x)$ ... Gewinn bei der Absatzmenge x in GE

1) Ermitteln Sie die untere Gewinngrenze.

2) Ermitteln Sie den maximalen Gewinn.

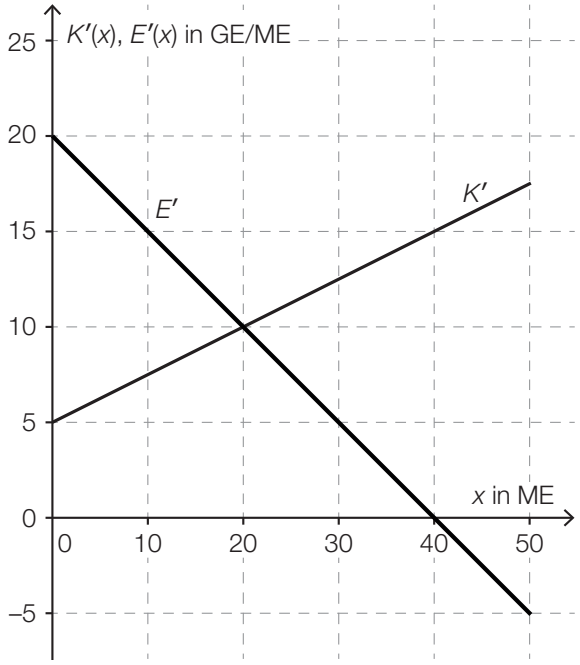
Möglicher Lösungsweg

a1) $K'(x) = 0{,}25 \cdot x + 5$
x ... Produktionsmenge in ME
$K'(x)$ ... Grenzkosten bei der Produktionsmenge x in GE

a2) $K(x) = \int (0{,}25 \cdot x + 5)\,dx = 0{,}125 \cdot x^2 + 5 \cdot x + C$

$K(0) = 50 \quad \Rightarrow \quad C = 50$
$K(x) = 0{,}125 \cdot x^2 + 5 \cdot x + 50$

a3)



a4) Die Nullstelle der Grenzerlösfunktion ist diejenige Absatzmenge, bei der der Erlös maximal ist.

b1) Bei dieser Produktionsmenge handelt es sich um das Betriebsoptimum.

oder:

Bei dieser Produktionsmenge sind die Durchschnittskosten minimal.

b2) $\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = (-1) \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

c1)

$G(x) > 0$ und $G'(x) > 0$	B
$G(x) < 0$ und $G'(x) < 0$	D

A	Punkt *A*
B	Punkt *B*
C	Punkt *C*
D	Punkt *D*

d1) $G(x) = 0$ *oder* $-0{,}01 \cdot x^3 + 0{,}28 \cdot x^2 + 1{,}75 \cdot x - 50 = 0$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$x_1 = 13{,}48...$ $(x_2 = 27{,}83...; x_3 = -13{,}31...)$
Die untere Gewinngrenze liegt bei rund 13,5 ME.

d2) $G'(x) = 0$ *oder* $-0{,}03 \cdot x^2 + 0{,}56 \cdot x + 1{,}75 = 0$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$x_1 = 21{,}39...$ $(x_2 = -2{,}72...)$
$G(21{,}39...) = 17{,}67...$
Der maximale Gewinn beträgt rund 17,7 GE.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × A1: für das richtige Erstellen der Gleichung der Grenzkostenfunktion
a2) 1 × A2: für das richtige Erstellen der Gleichung der Kostenfunktion
a3) 1 × A3: für das richtige Einzeichnen des Graphen der Grenzerlösfunktion
a4) 1 × C: für das richtige Interpretieren der Nullstelle der Grenzerlösfunktion in Bezug auf den Erlös
b1) 1 × C: für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang
b2) 1 × D: für das richtige Zeigen
c1) 1 × C: für das richtige Zuordnen
d1) 1 × B1: für das richtige Ermitteln der unteren Gewinngrenze
d2) 1 × B2: für das richtige Ermitteln des maximalen Gewinns

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Wohnanlage*

Aufgabennummer: B_502

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Eine Wohnanlage wird saniert.

a) Die Kosten für die Sanierung in Höhe von € 52.647,60 werden proportional zur Wohnungsgröße aufgeteilt.
Die jeweiligen Größen der 4 Wohnungen sind: 52 m^2, 60 m^2, 78 m^2 und 102 m^2.

1) Berechnen Sie den Kostenanteil für die Sanierung der größten Wohnung in Euro.

b) Zur Finanzierung der Sanierung nehmen die Wohnungseigentümer einen Kredit in Höhe von € 20.000 auf.
Sie vereinbaren mit der Bank, den Kredit durch 6 vorschüssige Jahresraten R zu tilgen. Die erste Jahresrate ist nach 3 Jahren fällig. Für die Rückzahlung wird der Jahreszinssatz i vereinbart.

1) Veranschaulichen Sie diesen Zahlungsstrom (Kreditbetrag und Jahresraten) auf einer Zeitachse.
2) Erstellen Sie eine Gleichung zur Berechnung von R. Verwenden Sie dabei den Jahreszinssatz i.

Unmittelbar vor dem Bezahlen der 1. Jahresrate entscheiden sich die Wohnungseigentümer dafür, bei ansonsten gleichbleibenden Bedingungen den Kredit mit nur 3 Jahresraten zu tilgen.

3) Argumentieren Sie, dass diese neuen Jahresraten weniger als doppelt so hoch wie die zuvor vereinbarten Jahresraten sind.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Eine andere Bank unterbreitet den Wohnungseigentümern zur Rückzahlung eines Kredits ein Angebot, bei dem der Kredit bei einem fixen Jahreszinssatz in 5 Jahren vollständig getilgt wird.
Im Folgenden ist ein Teil des Tilgungsplans dargestellt.

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0	– – –	– – –	– – –	€ 20.000,00
1	€ 600,00		€ 600,00	
2	€ 600,00		€ 5.500,00	€ 15.100,00
3			€ 5.500,00	€ 10.053,00
4			€ 5.500,00	€ 4.854,59
5				€ 0,00

1) Berechnen Sie den Jahreszinssatz des Kredits.

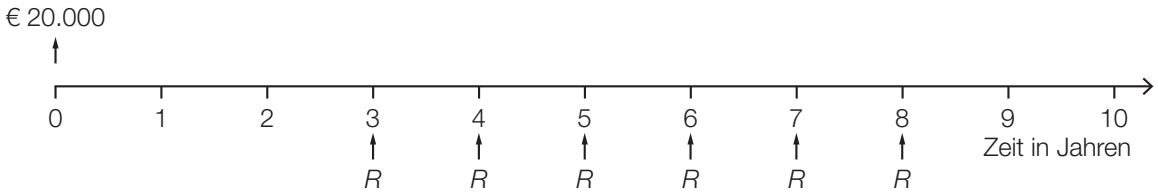
2) Tragen Sie im obigen Tilgungsplan die fehlenden Beträge in die grau markierten Zellen ein.

Möglicher Lösungsweg

a1) $52\,647{,}60 \cdot \frac{102}{52 + 60 + 78 + 102} = 18\,390{,}60$

Der Kostenanteil für die Sanierung der größten Wohnung beträgt € 18.390,60.

b1)



b2) $20\,000 \cdot (1 + i)^3 = R \cdot \frac{(1 + i)^6 - 1}{i} \cdot \frac{1}{(1 + i)^5}$

Auch eine Verwendung des Aufzinsungsfaktors q = *1* + i *ist als richtig zu werten.*

b3) Da das Geld früher zurückgezahlt wird, fallen weniger Zinsen an, und damit sind die Raten weniger als doppelt so hoch.

c1) $i = \frac{600}{20\,000} = 0{,}03 = 3\ \%$

c2)

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0	– – –	– – –	– – –	€ 20.000,00
1	€ 600,00	**€ 0,00**	€ 600,00	
2	€ 600,00		€ 5.500,00	€ 15.100,00
3			€ 5.500,00	€ 10.053,00
4			€ 5.500,00	€ 4.854,59
5	**€ 145,64**	**€ 4.854,59**	**€ 5.000,23**	€ 0,00

Lösungsschlüssel

a1) 1 × B: für das richtige Berechnen des Kostenanteils
b1) 1 × A1: für das richtige Veranschaulichen des Zahlungsstroms auf der Zeitachse
b2) 1 × A2: für das richtige Erstellen der Gleichung
b3) 1 × D: für das richtige Argumentieren
c1) 1 × B1: für das richtige Berechnen des Jahreszinssatzes
c2) 1 × A: für das richtige Eintragen des Tilgungsanteils im Jahr 1
1 × B2: für das richtige Eintragen der 3 Beträge in die letzte Zeile des Tilgungsplans

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Streaming*

Aufgabennummer: B_501

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein Fernsehsender entschließt sich, einen Streaming-Dienst für Filme auf den Markt zu bringen. Damit können Filme über das Internet abgespielt werden.
Die Zeit nach der Markteinführung in Monaten wird mit t bezeichnet.

a) Bei der Markteinführung ($t = 0$) nutzen 1 000 Kunden dieses Angebot.

Die Anzahl der Kunden steigt im 1. Jahr nach der Markteinführung pro Monat jeweils um etwa 20 % bezogen auf die Anzahl des jeweiligen Vormonats.

Die Anzahl der Kunden soll in Abhängigkeit von der Zeit t beschrieben werden.

1) Erstellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Funktion.
2) Berechnen Sie die Anzahl der Kunden für $t = 7$.
3) Berechnen Sie, wie lange es nach der Markteinführung dauert, bis die Anzahl der Kunden erstmals 8 000 übersteigt.

b) In der nachstehenden Tabelle ist die Anzahl der Kunden für einen bestimmten Zeitraum angegeben.

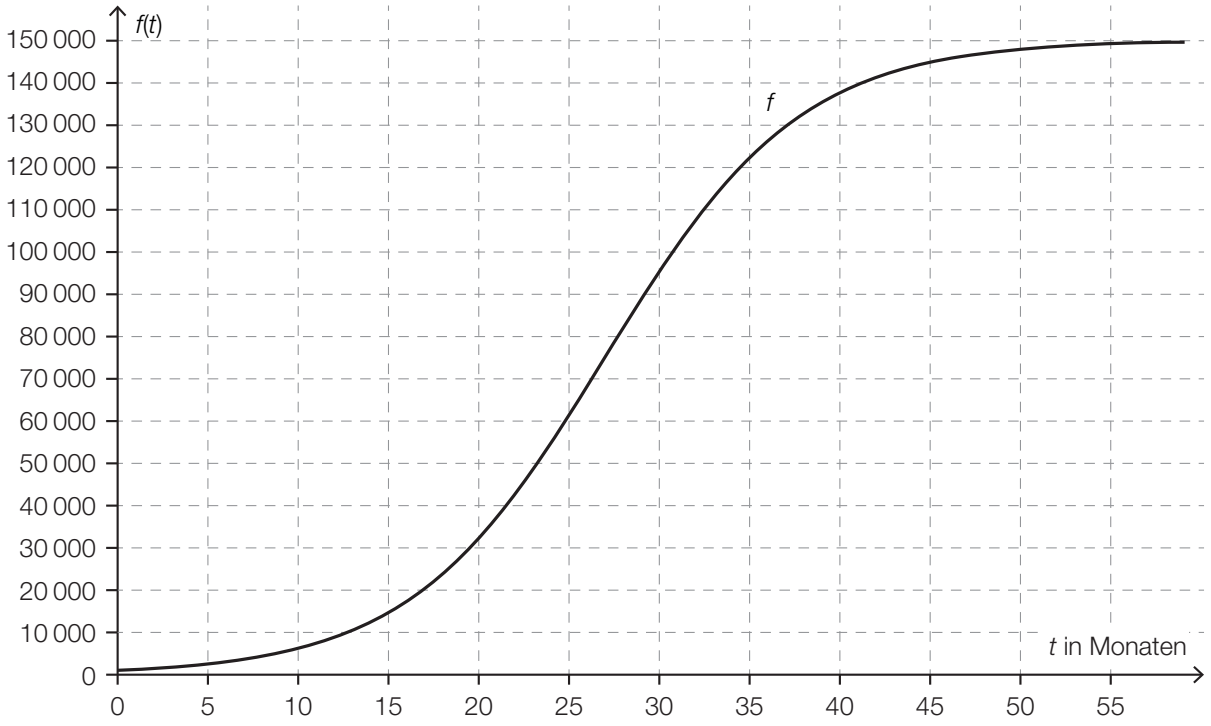
Zeit t in Monaten	18	20	24	26	28
Anzahl der Kunden	23 800	32 200	54 600	68 000	81 900

Die Anzahl der Kunden soll in Abhängigkeit von der Zeit t beschrieben werden.

1) Ermitteln Sie eine Gleichung der zugehörigen linearen Regressionsfunktion.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Die über einen längeren Zeitraum betrachtete zeitliche Entwicklung der Anzahl der Kunden kann näherungsweise durch die logistische Funktion f beschrieben werden (siehe nachstehende Abbildung).



1) Lesen Sie aus der obigen Abbildung den Zeitpunkt des stärksten Wachstums der Anzahl der Kunden ab.

Für die Funktion f gilt: $f(t) = \frac{150\,000}{1 + c \cdot e^{-\lambda \cdot t}}$

Bei der Markteinführung ($t = 0$) nutzen 1 000 Kunden dieses Angebot.

2) Ermitteln Sie die Parameter c und λ der Funktion f.

Möglicher Lösungsweg

a1) $N(t) = 1\,000 \cdot 1{,}2^t$

a2) $N(7) = 3\,583{,}1...$

Zur Zeit $t = 7$ nutzen rund 3 583 Kunden das Angebot.

a3) $N(t) = 8\,000$ *oder* $1\,000 \cdot 1{,}2^t = 8\,000$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$t = 11{,}40...$

b1) Ermittlung mittels Technologieeinsatz:
$A(t) = 5\,820 \cdot t - 82\,919$ *(Koeffizienten gerundet)*

c1) 27 Monate nach der Markteinführung wächst die Anzahl der Kunden am stärksten.
Toleranzbereich: [25; 29]

c2) $f(0) = 1\,000$ *oder* $\frac{150\,000}{1 + c} = 1\,000 \Rightarrow c = 149$

$f(27) = 75\,000$ *oder* $\frac{150\,000}{1 + 149 \cdot e^{-\lambda \cdot 27}} = 75\,000$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$\lambda = 0{,}185...$

Die Verwendung anderer Punkte auf dem Graphen von f *für das Ermitteln des Parameters* λ *ist ebenfalls als richtig zu werten.*

Lösungsschlüssel

a1) 1 × A: für das richtige Erstellen der Funktionsgleichung
a2) 1 × B1: für das richtige Berechnen der Anzahl der Kunden
a3) 1 × B2: für das richtige Berechnen der Zeitdauer
b1) 1 × B: für das richtige Ermitteln der Gleichung der Regressionsfunktion
c1) 1 × C1: für das richtige Ablesen des Zeitpunkts des stärksten Wachstums (Toleranzbereich: [25; 29])
c2) 1 × B1: für das richtige Ermitteln des Parameters c
1 × B2: für das richtige Ermitteln des Parameters λ

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

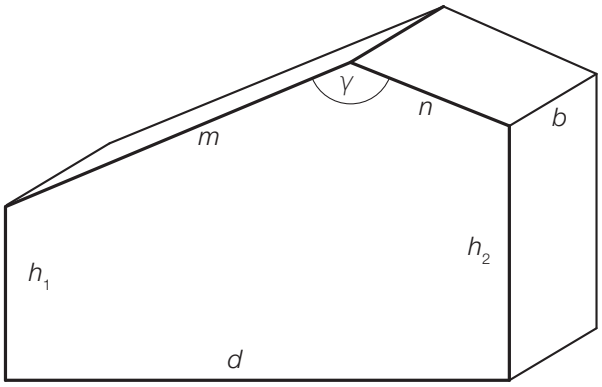
Asymmetrisches Satteldach*

Aufgabennummer: B_500

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein Haus wird geplant. Im Erstentwurf ist ein asymmetrisches Satteldach geplant, das aus zwei rechteckigen Dachflächen besteht.

a) Das Haus soll eine rechteckige Grundfläche und lotrechte Wände haben. Es ist in der nachstehenden Skizze modellhaft dargestellt.



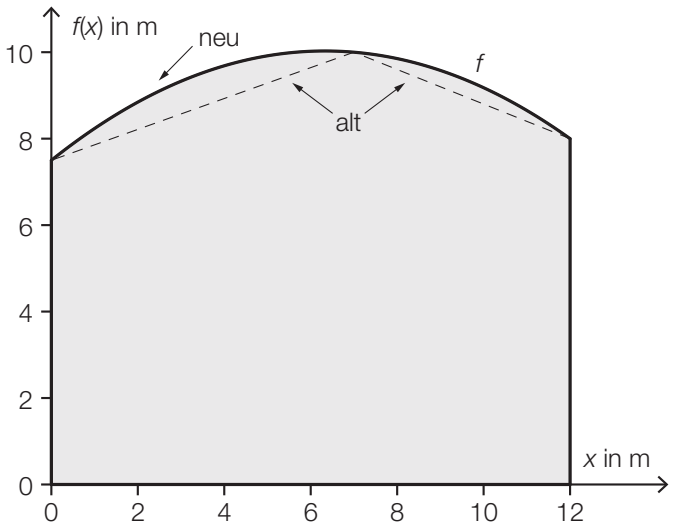
1) Zeichnen Sie in der obigen Skizze denjenigen Winkel α ein, für den gilt:
$$\frac{\sin(\alpha)}{n} = \frac{\sin(\gamma)}{\sqrt{(h_2 - h_1)^2 + d^2}}$$

2) Begründen Sie, warum der Winkel α ein spitzer Winkel sein muss, wenn gilt: $\gamma \approx 139°$.

3) Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung des Volumens V des oben dargestellten Hauses. Verwenden Sie dabei die eingezeichneten Seitenlängen und den Winkel γ.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Es wird ein neuer Entwurf mit einer anderen Dachform erstellt. In der unten stehenden Abbildung ist die Querschnittsfläche des Hauses modellhaft dargestellt.
Die obere Begrenzungslinie verläuft dabei durch die Punkte $A = (0|7{,}5)$, $B = (7|10)$ und $C = (12|8)$. Dieser Verlauf soll durch den Graphen der quadratischen Funktion f mit $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ beschrieben werden.



1) Erstellen Sie mithilfe der Koordinaten von A, B und C ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten a, b und c.

2) Berechnen Sie die Koeffizienten a, b und c.

3) Berechnen Sie den Inhalt Q_{neu} der grau markierten Querschnittsfläche des Hauses.

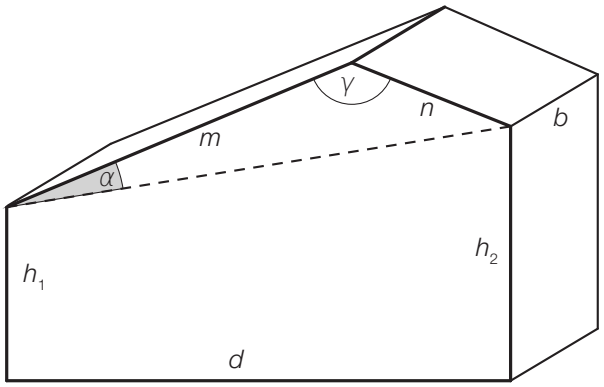
Der Inhalt der Querschnittsfläche des Hauses im alten Entwurf mit Satteldach (Erstentwurf) wird mit Q_{alt} bezeichnet.

Es wird folgende Berechnung durchgeführt:
$$\frac{Q_{neu} - Q_{alt}}{Q_{alt}} \approx 0{,}046$$

4) Interpretieren Sie das Ergebnis dieser Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang.

Möglicher Lösungsweg

a1)



a2) Ein Dreieck kann wegen der Winkelsumme von 180° nur 1 stumpfen Winkel haben.

a3) $V = \left(\frac{1}{2} \cdot m \cdot n \cdot \sin(\gamma) + \frac{(h_1 + h_2) \cdot d}{2}\right) \cdot b$

b1) $f(0) = 7{,}5$
$f(7) = 10$
$f(12) = 8$

oder:

$a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 7{,}5$
$a \cdot 7^2 + b \cdot 7 + c = 10$
$a \cdot 12^2 + b \cdot 12 + c = 8$

b2) Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$a = -\frac{53}{840} = -0{,}063...$
$b = \frac{671}{840} = 0{,}798...$
$c = 7{,}5$

b3) $Q_{neu} = \int_0^{12} f(x)\,dx = 111{,}17...$

Der Inhalt der Querschnittsfläche beträgt rund 111,2 m².

b4) Die Querschnittsfläche im neuen Entwurf ist um rund 4,6 % größer als im alten Entwurf.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × C: für das richtige Einzeichnen des Winkels α
a2) 1 × D: für das richtige Begründen
a3) 1 × A1: für den richtigen Ansatz
1 × A2: für das richtige Erstellen der Formel zur Berechnung des Volumens V
b1) 1 × A: für das richtige Erstellen des Gleichungssystems
b2) 1 × B1: für das richtige Berechnen der Koeffizienten
b3) 1 × B2: für das richtige Berechnen des Inhalts der Querschnittsfläche
b4) 1 × C: für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

*Würfelspaß**

Aufgabennummer: B_499

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Würfelspaß ist ein Spiel, das mit herkömmlichen fairen Spielwürfeln gespielt wird, bei denen die Augenzahlen 1 bis 6 jeweils mit gleicher Wahrscheinlichkeit als Würfelergebnis auftreten.
Die Spieler/innen müssen Aufträge erfüllen.

a) Auftrag „Größer“:
Ein Würfel wird 2-mal hintereinander geworfen. Der Auftrag „Größer“ ist erfüllt, wenn die Augenzahl des 2. Wurfes größer als die Augenzahl des 1. Wurfes ist.

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, den Auftrag „Größer“ zu erfüllen.

Auftrag „Sieben“:
Es werden 2 Würfel gleichzeitig geworfen. Der Auftrag „Sieben“ ist erfüllt, wenn die Augensumme 7 ergibt.

2) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, den Auftrag „Sieben“ zu erfüllen, kleiner ist als die Wahrscheinlichkeit, den Auftrag „Größer“ zu erfüllen.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Auftrag „Nur nicht 2“:
Es werden 5 Würfel gleichzeitig geworfen. Zeigt dabei kein einziger Würfel die Augenzahl 2, so erhält man 10 Punkte. Für jeden Würfel, der die Augenzahl 2 zeigt, werden 2 Punkte von diesen maximal erreichbaren 10 Punkten abgezogen.

Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der Würfel, die dabei die Augenzahl 2 zeigen.

In der nachstehenden Tabelle sollen die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen X und die Anzahl der jeweils erreichten Punkte dargestellt werden.

x_i	0	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$ (gerundete Werte)	0,4019	0,4019		0,0322	0,0032	0,0001
erreichte Punkte				4		

1) Vervollständigen Sie in der obigen Tabelle die Zeile „erreichte Punkte“.

2) Ergänzen Sie in der obigen Tabelle die fehlende Wahrscheinlichkeit.

3) Bestimmen Sie den Erwartungswert für diejenige Zufallsvariable, die die Anzahl der erreichten Punkte beschreibt.

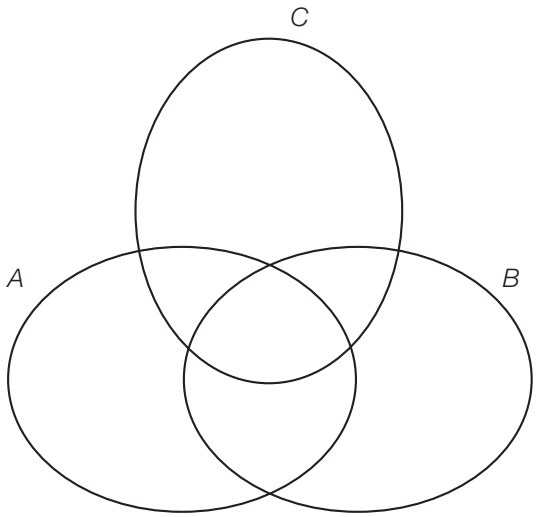
c) Die Aufträge bei *Würfelspaß* unterscheiden sich hinsichtlich der Anzahl der Mitspieler/innen, der Anzahl der verwendeten Würfel und der Anzahl der erlaubten Würfe.

A ... Menge der Aufträge, bei denen alle Spieler/innen mitspielen
B ... Menge der Aufträge, bei denen mehrere Würfel verwendet werden
C ... Menge der Aufträge, bei denen mehrere Würfe erlaubt sind

Die nachstehende Tabelle gibt die Einteilung für 6 Aufträge wieder.

	ist Element der Menge *A*	ist Element der Menge *B*	ist Element der Menge *C*
„Größer“	nein	nein	ja
„Sieben“	nein	ja	nein
„Nur nicht 2“	nein	ja	nein
„Solo“	nein	ja	ja
„Alle Achtung“	ja	nein	nein
„8 gewinnt“	ja	nein	ja

1) Markieren Sie im nachstehenden Venn-Diagramm denjenigen Bereich, in dem der Auftrag „Nur nicht 2“ liegt.



2) Geben Sie alle Aufträge an, die in der Menge $C \setminus (A \cup B)$ enthalten sind.

Möglicher Lösungsweg

a1) Wahrscheinlichkeit, den Auftrag „Größer“ zu erfüllen: $\frac{5+4+3+2+1}{36} = \frac{15}{36}$

a2) Wahrscheinlichkeit, den Auftrag „Sieben“ zu erfüllen: $6 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{6}{36}$

Die Wahrscheinlichkeit, den Auftrag „Sieben“ zu erfüllen, ist also kleiner als die Wahrscheinlichkeit, den Auftrag „Größer“ zu erfüllen.

b1 und b2)

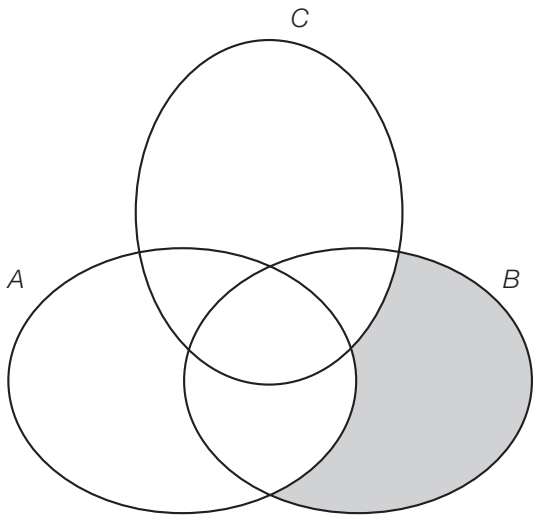
x_i	0	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$ (gerundete Werte)	0,4019	0,4019	**0,1607**	0,0322	0,0032	0,0001
erreichte Punkte	**10**	**8**	**6**	4	**2**	**0**

$P(X = 2) = 1 - 0{,}4019 - 0{,}4019 - 0{,}0322 - 0{,}0032 - 0{,}0001 = 0{,}1607$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit kann auch mithilfe der Binomialverteilung ermittelt werden. Man erhält dabei: $P(X = 2) = 0{,}16075...$

b3) $0{,}4019 \cdot 10 + 0{,}4019 \cdot 8 + 0{,}1607 \cdot 6 + 0{,}0322 \cdot 4 + 0{,}0032 \cdot 2 = 8{,}33...$
Der Erwartungswert beträgt rund 8,3 Punkte.

c1)



c2) „Größer“

Lösungsschlüssel

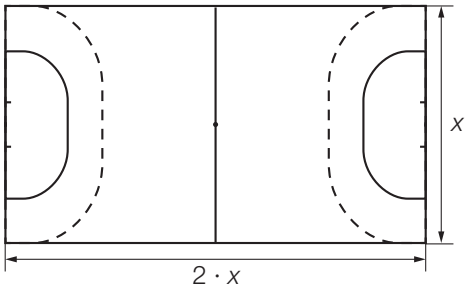
a1) 1 × B: für das richtige Berechnen der Wahrscheinlichkeit für die Erfüllung des Auftrags „Größer“
a2) 1 × D: für das richtige Zeigen
b1) 1 × C: für das richtige Vervollständigen der Zeile „erreichte Punkte“
b2) 1 × A: für das richtige Ergänzen der fehlenden Wahrscheinlichkeit
b3) 1 × B: für das richtige Bestimmen des Erwartungswerts
c1) 1 × C1: für das richtige Markieren des Bereichs
c2) 1 × C2: für das richtige Angeben des Auftrags „Größer“

Handball*

Aufgabennummer: B_498

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Von einem rechteckigen Handball-Spielfeld werden der Boden und die Bande renoviert. Die Bande ist eine Wand, die das Spielfeld entlang der Begrenzungslinie umgibt.



Die Kosten der Renovierung für 1 m Bande betragen € 5, die Kosten der Renovierung für 1 m² Boden betragen € 7,50. Sämtliche Werkzeuge und Arbeitsmittel kosten einen fixen Betrag von € 5.000. Die gesamten Kosten der Renovierung für das oben dargestellte Spielfeld werden mit K bezeichnet.

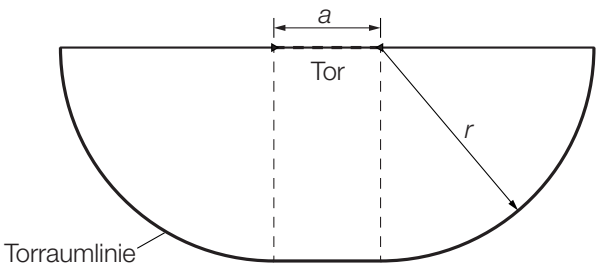
1) Erstellen Sie mithilfe von x eine Formel zur Berechnung von K.

$K =$ _____

2) Berechnen Sie die gesamten Kosten der Renovierung für ein Spielfeld mit der Breite $x = 20$ m.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Der *Torraum* wird durch die Torraumlinie begrenzt (siehe nachstehende Skizze).

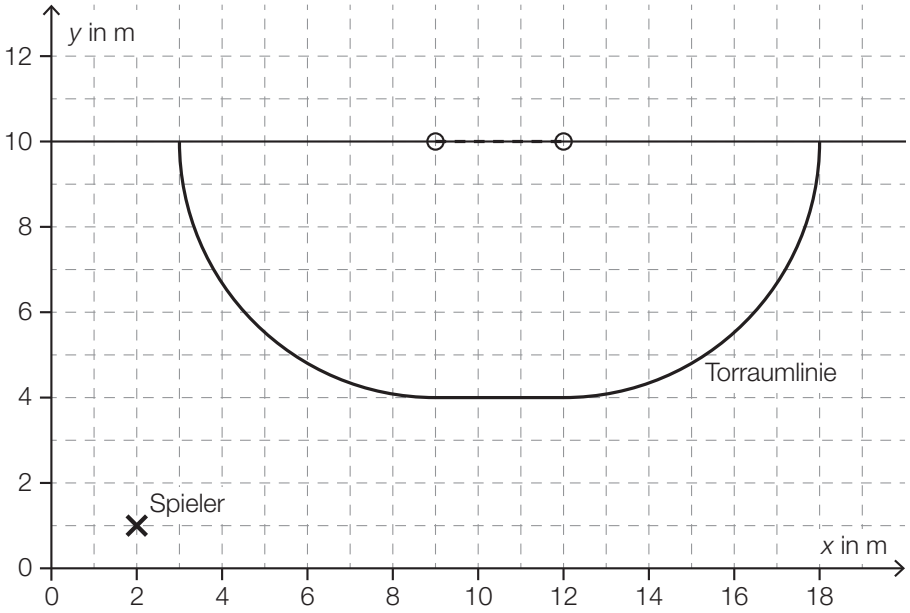


Die Fläche des Torraums setzt sich aus einem Rechteck und zwei Viertelkreisen zusammen.

1) Erstellen Sie aus a und r eine Formel zur Berechnung des Flächeninhalts A des Torraums.

$A =$ _____

c) In der unten stehenden Abbildung ist die Position eines Spielers mit × markiert. Ausgehend von dieser Position soll ein Spielzug eingezeichnet werden, der sich aus dem Vektor $\vec{s}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ und daran anschließend dem Vektor $\vec{s}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ zusammensetzt.



1) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung diesen Spielzug mithilfe von Pfeilen ein.

Möglicher Lösungsweg

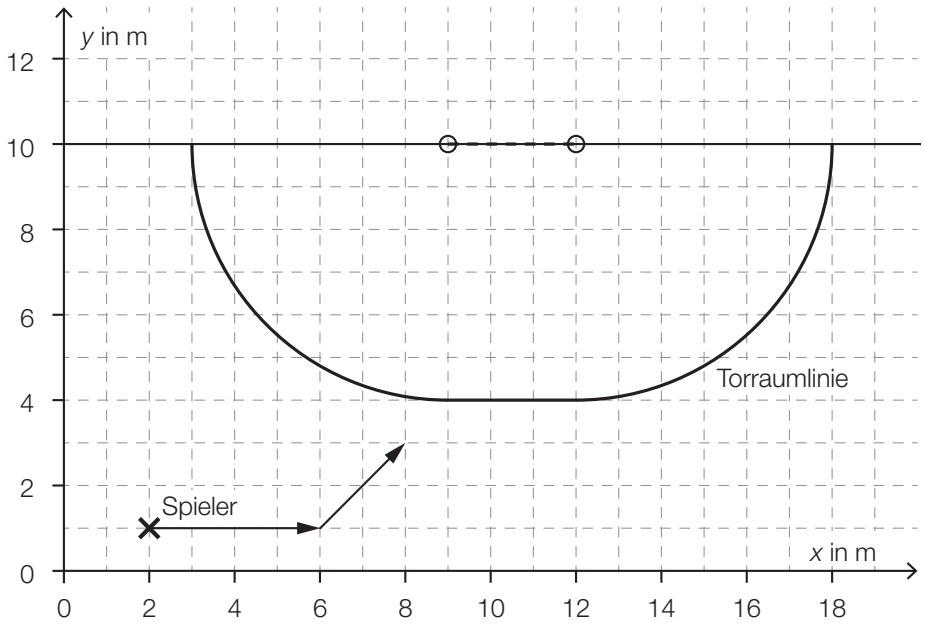
a1) $K = 15 \cdot x^2 + 30 \cdot x + 5000$

a2) $15 \cdot 20^2 + 30 \cdot 20 + 5000 = 11600$

Die gesamten Kosten der Renovierung betragen € 11.600.

b1) $A = r \cdot a + \frac{r^2 \cdot \pi}{2}$

c1)



Lösungsschlüssel

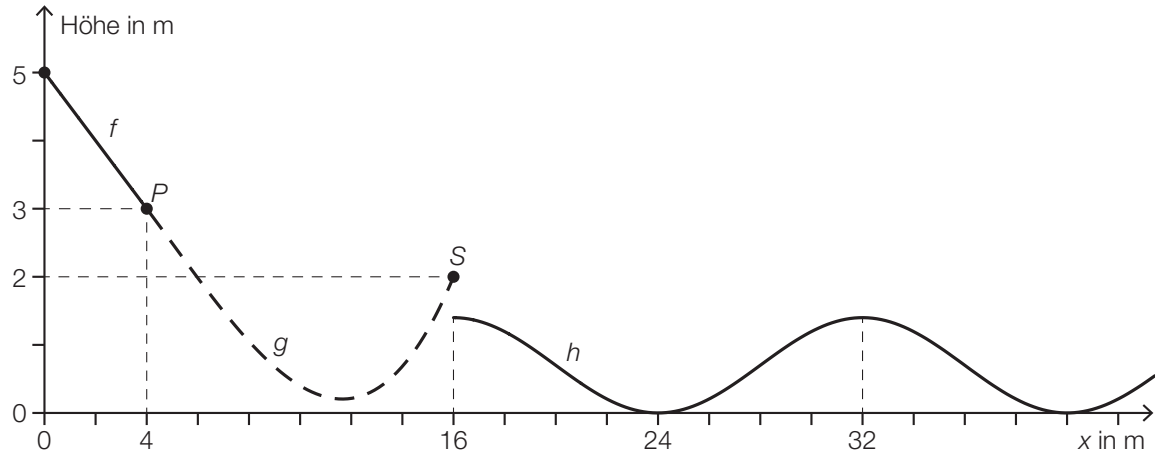
a1) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel zur Berechnung der gesamten Kosten
a2) 1 × B: für das richtige Berechnen der gesamten Kosten
b1) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel zur Berechnung des Flächeninhalts
c1) 1 × A: für das richtige Einzeichnen des Spielzugs mithilfe von Pfeilen

BMX-Bahn*

Aufgabennummer: B_497

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Für den Bau einer BMX-Bahn wird ein Plan erstellt. In der nachstehenden Abbildung ist die Profillinie einer geplanten Teilstrecke dargestellt.



a) Die Profillinie wird bis zum Punkt P näherungsweise durch die lineare Funktion f beschrieben.
Die Profillinie zwischen den Punkten P und S wird näherungsweise durch die Polynomfunktion 3. Grades g mit $g(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ beschrieben.
Im Punkt P hat die Polynomfunktion g die gleiche Steigung wie die lineare Funktion f.
Im Punkt S beträgt ihr Steigungswinkel 42°.

1) Erstellen Sie mithilfe der Informationen zu P und S ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten a, b, c und d.

2) Übertragen Sie dieses Gleichungssystem in Matrizenschreibweise.

* ehemalige Klausuraufgabe

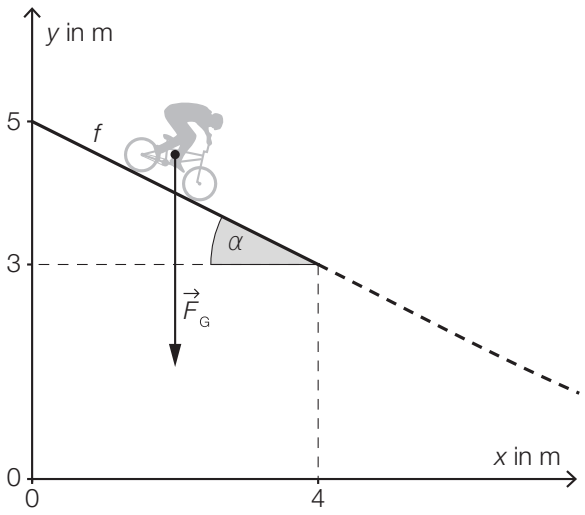
b) Ein Teil der Profillinie wird näherungsweise durch die Funktion h beschrieben:

$h(x) = 0{,}7 \cdot \sin(b \cdot x + c) + d$ mit $x \geq 16$

Der Graph der Funktion h berührt die x-Achse.

1) Geben Sie den Parameter d der Funktion h an.
2) Ermitteln Sie den Höhenunterschied zwischen dem Punkt S und dem Maximum von h.
3) Ermitteln Sie den Parameter b der Funktion h.

c) Im 1. Abschnitt der Teilstrecke wirkt auf einen BMX-Fahrer die Gewichtskraft $\vec{F}_G$.



1) Berechnen Sie den Winkel α.

Die Gewichtskraft $\vec{F}_G$ kann in zwei Komponenten zerlegt werden:
Eine Komponente ist die Hangabtriebskraft $\vec{F}_H$. Diese ist parallel zur Geraden f.
Die andere Komponente ist die Normalkraft $\vec{F}_N$. Diese ist normal zur Geraden f.

2) Veranschaulichen Sie in der oberen Abbildung die Zerlegung der Gewichtskraft $\vec{F}_G$ in die Komponenten $\vec{F}_H$ und $\vec{F}_N$.
3) Berechnen Sie $|\vec{F}_H|$ für $|\vec{F}_G| = 900$ Newton.

Möglicher Lösungsweg

a1) $g(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$
$g'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x + c$

I: $g(4) = 3$
II: $g(16) = 2$
III: $g'(4) = -0{,}5$
IV: $g'(16) = \tan(42°) = 0{,}90...$

oder:

I: $64 \cdot a + 16 \cdot b + 4 \cdot c + d = 3$
II: $4\,096 \cdot a + 256 \cdot b + 16 \cdot c + d = 2$
III: $48 \cdot a + 8 \cdot b + c = -0{,}5$
IV: $768 \cdot a + 32 \cdot b + c = \tan(42°) = 0{,}90...$

a2) $\begin{pmatrix} 64 & 16 & 4 & 1 \\ 4\,096 & 256 & 16 & 1 \\ 48 & 8 & 1 & 0 \\ 768 & 32 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -0{,}5 \\ 0{,}90... \end{pmatrix}$

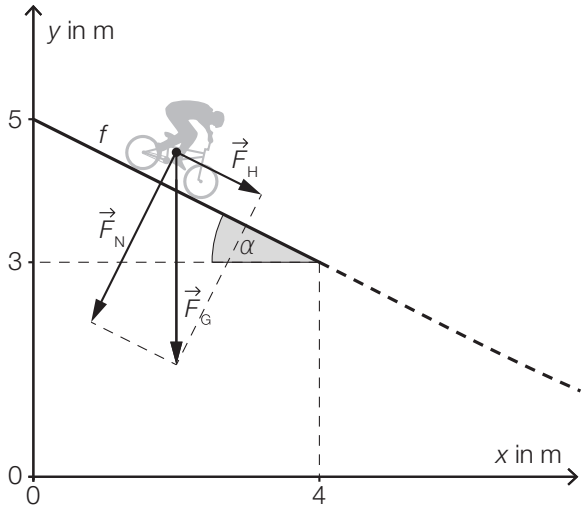
b1) $d = 0{,}7$

b2) $2 - 2 \cdot 0{,}7 = 0{,}6$
Der Höhenunterschied beträgt 0,6 m.

b3) $b = \frac{2 \cdot \pi}{16} = \frac{\pi}{8}$

c1) $\alpha = \arctan(0{,}5) = 26{,}56...° \approx 26{,}6°$
Auch die Angabe von –26,6° für den Winkel α ist als richtig zu werten.

c2)



c3) $\left|\vec{F}_H\right| = 900 \cdot \sin(26{,}56...°) = 402{,}49...$

Lösungsschlüssel

a1) 1 × A1: für das richtige Erstellen der Gleichungen mithilfe der Koordinaten der Punkte
1 × A2: für das richtige Erstellen der Gleichungen mithilfe der 1. Ableitung
a2) 1 × A3: für das richtige Übertragen in Matrizenschreibweise
b1) 1 × C: für das richtige Angeben des Parameters *d*
b2) 1 × B1: für das richtige Ermitteln des Höhenunterschieds
b3) 1 × B2: für das richtige Ermitteln des Parameters *b*
c1) 1 × B1: für das richtige Berechnen des Winkels α
c2) 1 × A: für das richtige Veranschaulichen der Zerlegung von $\vec{F}_G$ als Kräfteparallelogramm oder Kraftdreieck
c3) 1 × B2: für das richtige Berechnen von $\left|\vec{F}_H\right|$

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Kondensator*

Aufgabennummer: B_496

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein Kondensator ist ein elektronisches Bauelement, das mithilfe einer Batterie aufgeladen werden kann. Ist der Kondensator bei einem Aufladevorgang zu Beginn ungeladen, so kann der Verlauf der Kondensatorspannung durch die Funktion u beschrieben werden.

$u(t) = U_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ mit $t \geq 0$

t ... Zeit in s
$u(t)$ ... Kondensatorspannung zur Zeit t in Volt (V)
U_0 ... Spannung der Batterie (konstant) in V
τ ... Zeitkonstante in s

a) Die zugehörige Differenzialgleichung für die Kondensatorspannung u lautet:
$\tau \cdot \frac{du}{dt} + u = U_0$

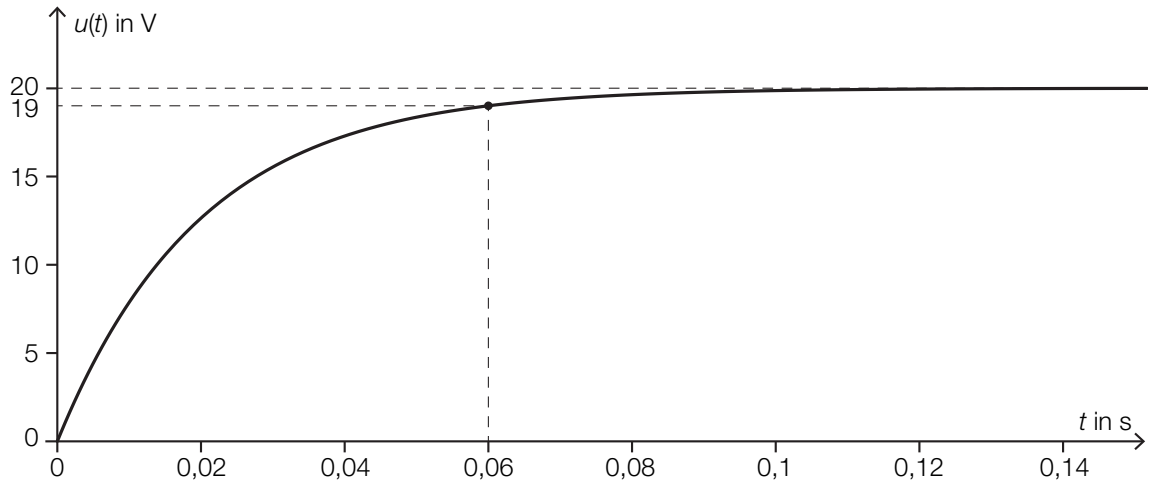
1) Berechnen Sie mithilfe der Methode *Trennen der Variablen* die allgemeine Lösung dieser Differenzialgleichung.

2) Zeigen Sie, dass die Lösung der Differenzialgleichung für die Anfangsbedingung $u(0) = 0$ der oben angegebenen Funktion u entspricht.

b) 1) Begründen Sie anhand der oben angegebenen Funktionsgleichung, warum die Kondensatorspannung für $t \to \infty$ asymptotisch gegen U_0 geht.

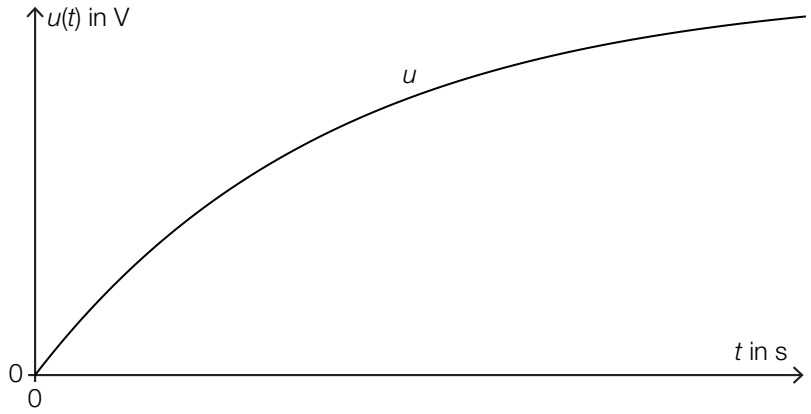
* ehemalige Klausuraufgabe

c) In der nachstehenden Abbildung ist der Verlauf der Kondensatorspannung für $U_0 = 20$ V dargestellt.



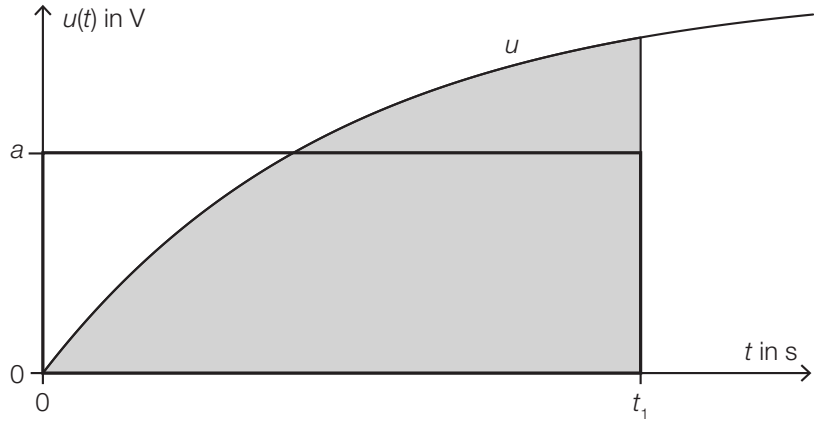
1) Berechnen Sie die Zeitkonstante τ.

d) In der nachstehenden Abbildung ist der Verlauf der Kondensatorspannung bei einem Aufladevorgang dargestellt.



1) Markieren Sie diejenige Stelle, an der die 1. Ableitung von u im dargestellten Bereich den maximalen Wert annimmt.

Der Inhalt der grau markierten Fläche und der Flächeninhalt des Rechtecks mit den Seitenlängen t_1 und a sind gleich groß (siehe nachstehende Abbildung).



2) Beschreiben Sie die Bedeutung von a im gegebenen Sachzusammenhang.

3) Erstellen Sie mithilfe der Funktion u eine Formel zur Berechnung von a.

a = _____

Möglicher Lösungsweg

a1) $\tau \cdot \frac{du}{dt} + u = U_0$

$\int \frac{u'}{U_0 - u} dt = \int \frac{1}{\tau} dt \quad \left(\text{oder:} \quad \int \frac{du}{U_0 - u} = \int \frac{1}{\tau} dt\right)$

$-\ln|U_0 - u(t)| = \frac{t}{\tau} + C_1$

$U_0 - u(t) = C \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$

$u(t) = U_0 - C \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$

a2) $u(0) = 0 \quad \text{oder} \quad U_0 - C \cdot e^0 = 0 \quad \Rightarrow \quad C = U_0$

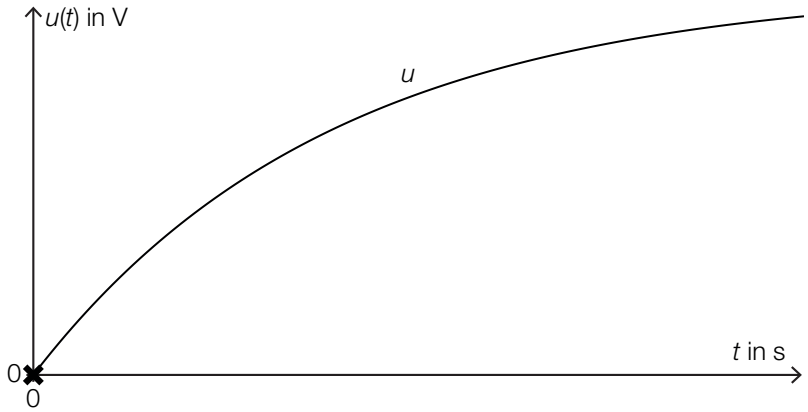
$u(t) = U_0 - U_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = U_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

b1) Mit beliebig groß werdendem t geht $e^{-\frac{t}{\tau}}$ gegen null, und damit geht $u(t)$ gegen U_0.

c1) $u(0{,}06) = 19 \quad \text{oder} \quad 20 \cdot \left(1 - e^{-\frac{0{,}06}{\tau}}\right) = 19$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$\tau = 0{,}020...$

d1)



d2) a ist die mittlere Kondensatorspannung im Zeitintervall $[0; t_1]$.

d3) $a = \frac{1}{t_1} \cdot \int_0^{t_1} u(t)\, dt$

Lösungsschlüssel

a1) 1 × B: für das richtige Berechnen der allgemeinen Lösung mithilfe der Methode *Trennen der Variablen*
a2) 1 × D: für das richtige Zeigen
b1) 1 × D: für das richtige Begründen
c1) 1 × B: für das richtige Berechnen der Zeitkonstanten τ
d1) 1 × C1: für das richtige Markieren der Stelle
d2) 1 × C2: für das richtige Beschreiben der Bedeutung im gegebenen Sachzusammenhang
d3) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

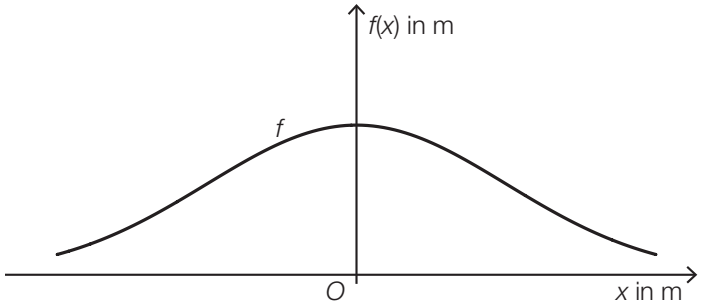
Grünbrücken*

Aufgabennummer: B_495

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Über Grünbrücken können wildlebende Tiere stark befahrene Verkehrswege wie z. B. Autobahnen gefahrlos überqueren.

a) In der nachstehenden Abbildung ist eine Grünbrücke modellhaft dargestellt.



Die Höhe der Grünbrücke kann durch die Funktion f beschrieben werden:

$f(x) = a \cdot e^{-b \cdot x^2}$

x, $f(x)$ ... Koordinaten in m
a, b ... positive Parameter

Die Grünbrücke hat an der Stelle $x = 0$ m eine Höhe von 10 m.
Die Grünbrücke hat an der Stelle $x = 20$ m eine Höhe von 6 m.

1) Geben Sie den Parameter a an.
2) Berechnen Sie den Parameter b.
3) Berechnen Sie diejenige Stelle, an der die Steigung von f am größten ist.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Verschiedene Formen von Grünbrücken sollen modelliert werden. Dazu wird der Graph der Funktion g untersucht.

$g(x) = a \cdot e^{-b \cdot (x+c)^2}$ mit $a, b, c > 0$

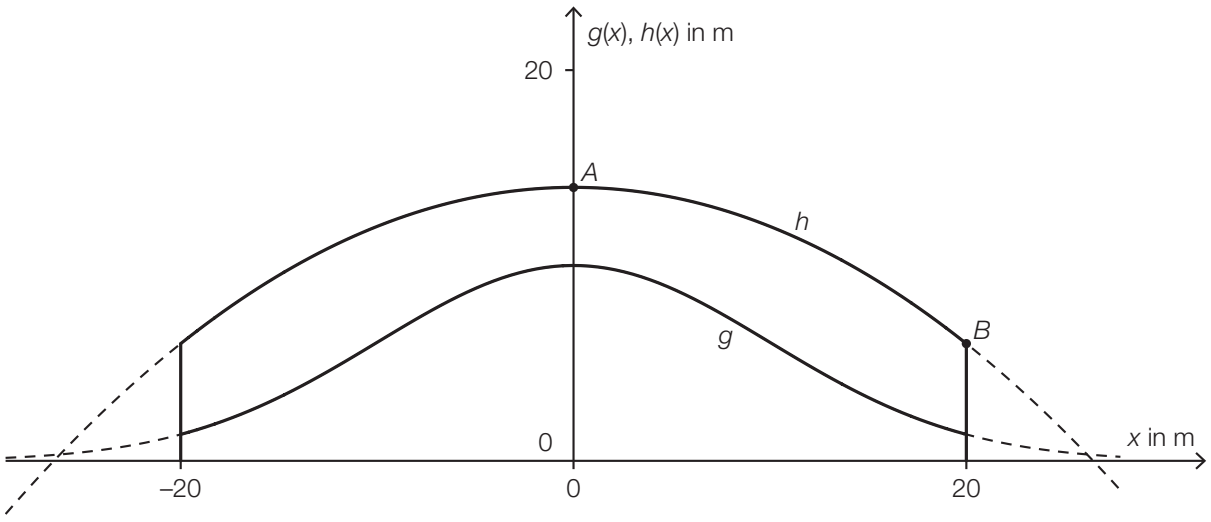
1) Ordnen Sie den beiden Satzanfängen jeweils die zutreffende Fortsetzung aus A bis D zu. *[2 zu 4]*

Eine Vergrößerung des Parameters a bewirkt, ...	
Eine Vergrößerung des Parameters c bewirkt, ...	

A	... dass das Maximum der Funktion größer wird.
B	... dass der Graph nach links verschoben wird.
C	... dass der Graph nach rechts verschoben wird.
D	... dass das Maximum der Funktion kleiner wird.

c) Als Geländer einer Grünbrücke ist eine Betonmauer geplant.

Die obere und die untere Begrenzungslinie der Betonmauer (in der Seitenansicht) können im Intervall [–20; 20] näherungsweise durch den Graphen der Funktion h und den Graphen der Funktion g beschrieben werden (siehe nachstehende Abbildung).



1) Kennzeichnen Sie in der obigen Abbildung diejenige Fläche, deren Inhalt mit dem nachstehenden Ausdruck berechnet werden kann.

$$\int_0^{20} h(x)\,dx - \int_0^{20} g(x)\,dx$$

Die Funktion h ist eine Polynomfunktion 2. Grades.

Der Scheitelpunkt von h ist $A = (0|14)$. Weiters verläuft h durch den Punkt $B = (20|6)$.

2) Ermitteln Sie die Koeffizienten der Funktion h.

3) Berechnen Sie die Länge des Graphen von h im Intervall [–20; 20].

Möglicher Lösungsweg

a1) $a = 10$

a2) $f(20) = 6$ *oder* $6 = 10 \cdot e^{-400 \cdot b}$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$b = 0{,}001277...$

a3) $f''(x) = 0$ *oder* $-2 \cdot a \cdot b \cdot e^{-b \cdot x^2} \cdot (1 - 2 \cdot b \cdot x^2) = 0$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$x_1 = -19{,}78...$; $x_2 = 19{,}78...$

Die Steigung von f ist an der Stelle $x \approx -19{,}8$ m am größten.

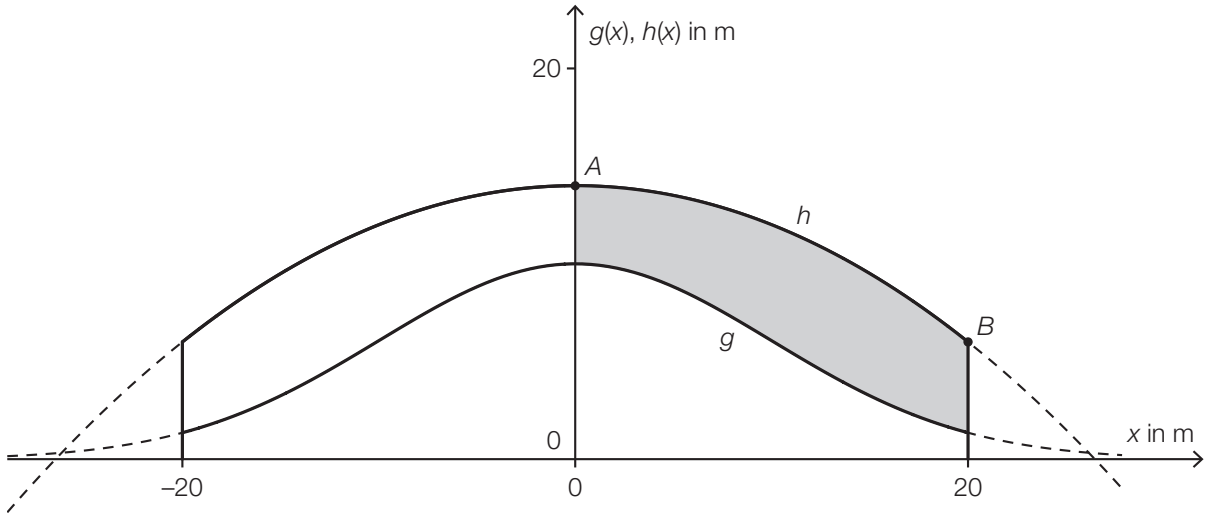
Der Punkt ist auch dann zu vergeben, wenn statt der Lösung $x_1 \approx -19{,}8$ die Lösung $x_2 \approx 19{,}8$ angegeben ist.

b1)

Eine Vergrößerung des Parameters *a* bewirkt, ...	A
Eine Vergrößerung des Parameters *c* bewirkt, ...	B

A	... dass das Maximum der Funktion größer wird.
B	... dass der Graph nach links verschoben wird.
C	... dass der Graph nach rechts verschoben wird.
D	... dass das Maximum der Funktion kleiner wird.

c1)



c2) $h(x) = a \cdot x^2 + c$

$h(0) = 14 \quad \Rightarrow \quad c = 14$

$h(20) = 6 \quad \Rightarrow \quad a \cdot 400 + 14 = 6 \quad \Rightarrow \quad a = -0{,}02$

c3) $s = \int_{-20}^{20} \sqrt{1 + (h'(x))^2}\, dx$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$s = 43{,}929...$

Die Länge des Graphen von h beträgt rund 43,93 m.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × A: für das richtige Angeben des Parameters a

a2) 1 × B1: für das richtige Berechnen des Parameters b

a3) 1 × B2: für das richtige Berechnen der Stelle mit der größten Steigung
Der Punkt ist auch dann zu vergeben, wenn statt der Lösung $x_1 = -19{,}8$ die Lösung $x_2 = 19{,}8$ angegeben ist.

b1) 1 × C: für das richtige Zuordnen

c1) 1 × C: für das richtige Kennzeichnen

c2) 1 × B1: für das richtige Ermitteln der Koeffizienten

c3) 1 × B2: für das richtige Berechnen der Länge des Graphen von h im gegebenen Intervall

Sauna*

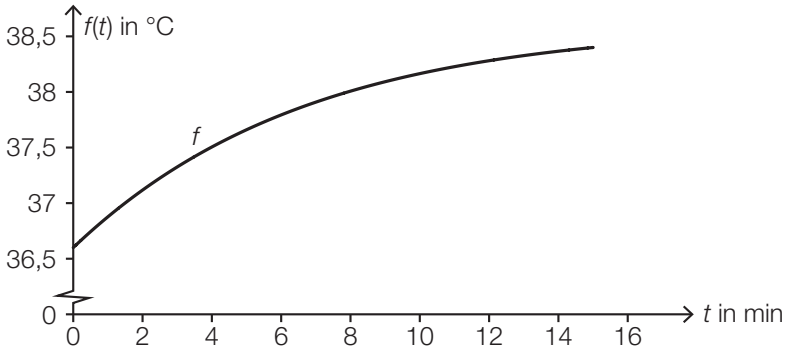
Aufgabennummer: A_297

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

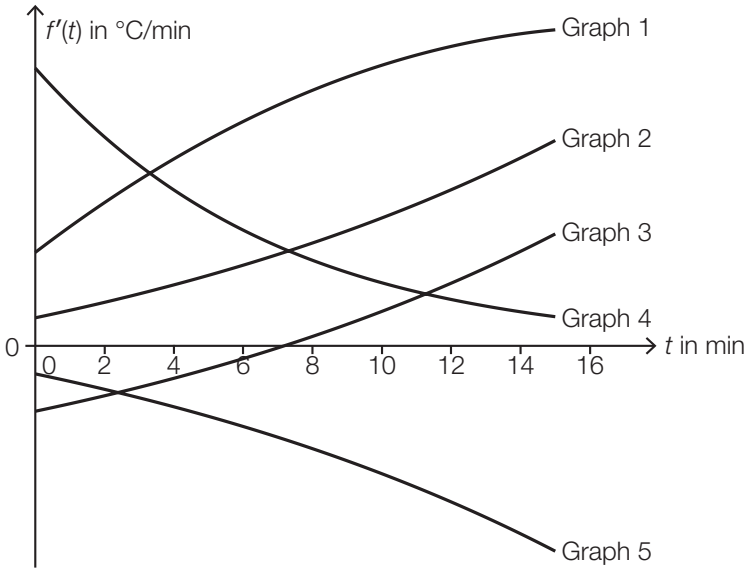
In der kalten Jahreszeit besuchen viele Menschen regelmäßig eine Sauna.

a) Der Graph der Funktion f in der nachstehenden Abbildung zeigt die Körpertemperatur eines Saunagasts während eines Saunagangs.

t ... Zeit seit Betreten der Sauna in min
$f(t)$ ... Körpertemperatur zur Zeit t in °C



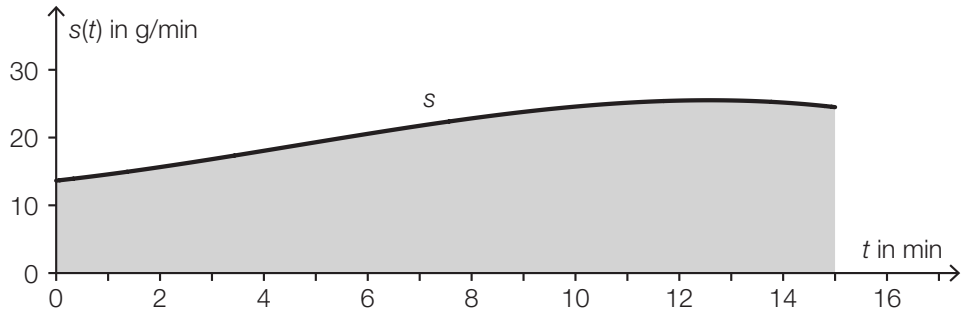
1) Kreuzen Sie den zutreffenden Graphen der zugehörigen Ableitungsfunktion f' an. *[1 aus 5]*



Graph 1	☐
Graph 2	☐
Graph 3	☐
Graph 4	☐
Graph 5	☐

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Die Funktion s, deren Graph in der nachstehenden Abbildung dargestellt ist, beschreibt die momentane Schweißabsonderung eines Saunagasts zur Zeit t bei einem 15-minütigen Saunagang.

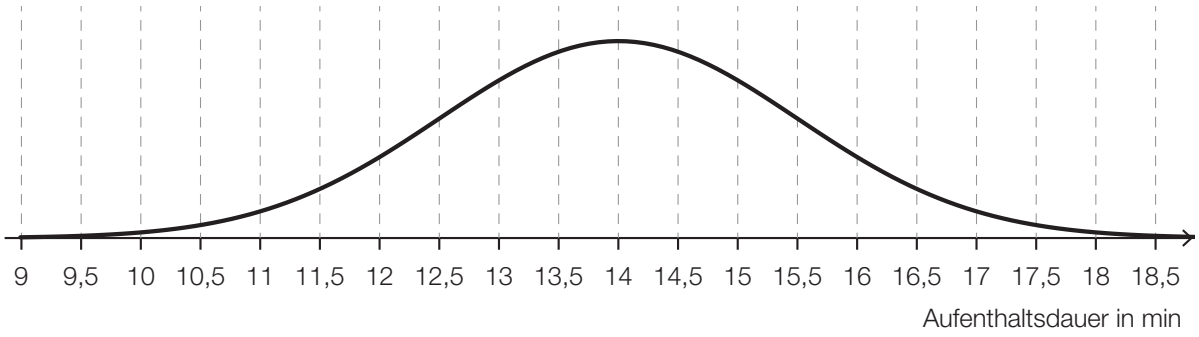


1) Erstellen Sie mithilfe der Funktion s eine Formel zur Berechnung des Inhalts A der grau markierten Fläche.

$A =$ _____

2) Beschreiben Sie die Bedeutung von A im gegebenen Sachzusammenhang. Geben Sie dabei die zugehörige Einheit an.

c) In einer bestimmten Sauna ist die Aufenthaltsdauer der Saunagäste annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 14$ min. In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der zugehörigen Dichtefunktion dargestellt.



1) Lesen Sie aus der obigen Abbildung die Standardabweichung σ ab.

$\sigma =$ _____ min

2) Veranschaulichen Sie in der obigen Abbildung die Wahrscheinlichkeit, dass die Aufenthaltsdauer eines zufällig ausgewählten Saunagasts mehr als 16 min beträgt.

d) Frau Maier nimmt sich vor, zwischen Oktober und April an jedem Mittwoch die Sauna zu besuchen.
Sie stellt fest, dass sie diese Termine unabhängig voneinander mit jeweils 90%iger Wahrscheinlichkeit wahrnehmen kann.

Man betrachtet n Wochen in diesem Zeitraum.

1) Beschreiben Sie ein mögliches Ereignis E im gegebenen Sachzusammenhang, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem nachstehenden Ausdruck berechnet werden kann.
$P(E) = 1 - 0{,}1^n$

Möglicher Lösungsweg

a1)

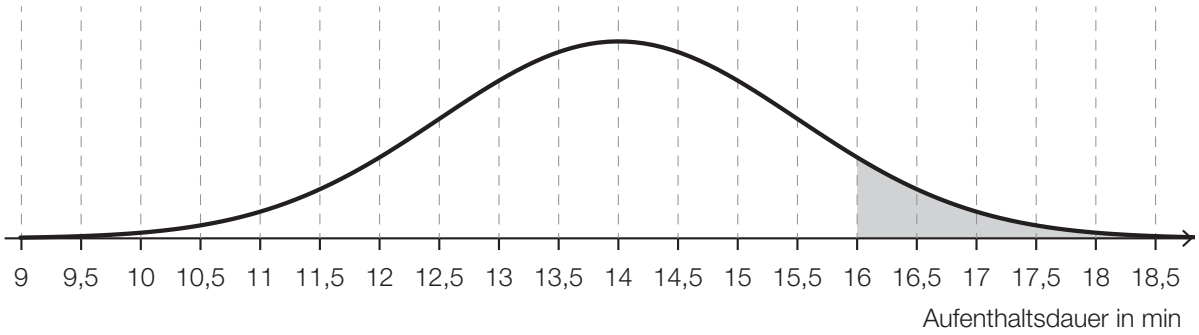
Graph 4	☒

b1) $A = \int_0^{15} s(t)\,dt$

b2) A ist die Schweißmenge in Gramm, die der Saunagast während des Saunagangs abgesondert hat.

c1) $\sigma = 1{,}5$ min
Toleranzbereich: [1; 2]

c2)



d1) In diesen n Wochen besucht sie (mittwochs) mindestens 1-mal die Sauna.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × A: für das richtige Ankreuzen
b1) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel
b2) 1 × C: für das richtige Beschreiben im gegebenen Sachzusammenhang unter Angabe der entsprechenden Einheit
c1) 1 × C: für das richtige Ablesen von σ (Toleranzbereich: [1; 2])
c2) 1 × A: für das richtige Veranschaulichen der Wahrscheinlichkeit
d1) 1 × C: für das richtige Beschreiben des Ereignisses im gegebenen Sachzusammenhang

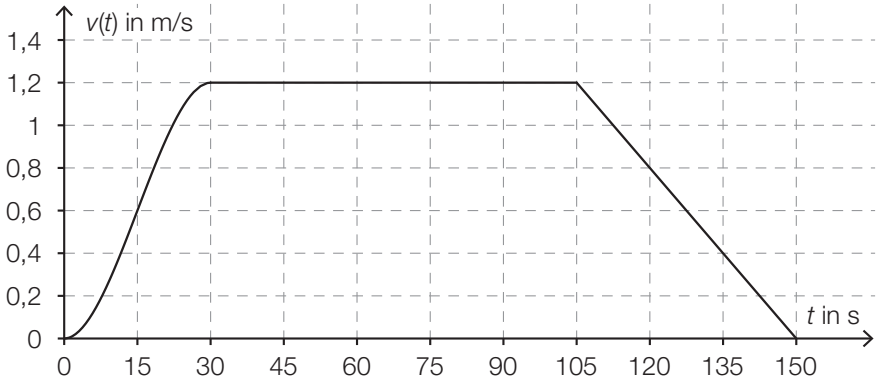
Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

*Torre de Collserola**

Aufgabennummer: A_296

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Vom Fußpunkt des *Torre de Collserola* (Fernsehturm in Barcelona) bis zu dessen Aussichtsplattform führt ein Aufzug senkrecht nach oben.
In der nachstehenden Abbildung ist die Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v bei einer Aufzugsfahrt modellhaft dargestellt.



t ... Zeit in s
$v(t)$ ... Geschwindigkeit zur Zeit t in m/s

a) 1) Ermitteln Sie die maximale Geschwindigkeit bei dieser Aufzugsfahrt in km/h.

b) 1) Ermitteln Sie mithilfe der obigen Abbildung die Steigung k der Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v im Zeitintervall [105; 150].

2) Interpretieren Sie die Steigung k und ihr Vorzeichen im gegebenen Sachzusammenhang.Geben Sie dabei die zugehörige Einheit an.

c) Im Zeitintervall [0; 30] gilt für die Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v:

$$v(t) = -\frac{1}{11\,250} \cdot t^3 + \frac{1}{250} \cdot t^2 \quad \text{mit} \quad 0 \le t \le 30$$

Die Aufzugsfahrt dauert insgesamt 150 Sekunden.

1) Berechnen Sie die Länge des Weges, der bei dieser Aufzugsfahrt insgesamt zurückgelegt wird.

* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

a1) maximale Geschwindigkeit: 1,2 m/s
$1{,}2 \cdot 3{,}6 = 4{,}32$

Die maximale Geschwindigkeit beträgt 4,32 km/h.

b1) $k = -\frac{1{,}2}{45} = -0{,}0266...$

b2) k ist die Beschleunigung des Aufzugs in m/s^2. Das Vorzeichen gibt an, dass die Geschwindigkeit abnimmt.

oder:

Pro Sekunde nimmt die Geschwindigkeit des Aufzugs um rund 0,027 m/s ab.

c1) $\int_0^{30} \left(-\frac{1}{11\,250} \cdot t^3 + \frac{1}{250} \cdot t^2\right) dt + 1{,}2 \cdot 75 + \frac{1{,}2 \cdot 45}{2} = 135$

oder:

$\frac{1{,}2 \cdot 30}{2} + 1{,}2 \cdot 75 + \frac{1{,}2 \cdot 45}{2} = 135$

Der zurückgelegte Weg hat eine Länge von insgesamt 135 m.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × B: für das richtige Ermitteln der maximalen Geschwindigkeit in km/h
b1) 1 × B: für das richtige Ermitteln der Steigung k
b2) 1 × C: für das richtige Interpretieren der Steigung k und ihres Vorzeichens unter Verwendung der entsprechenden Einheit(en) im gegebenen Sachzusammenhang
c1) 1 × A: für den richtigen Ansatz (Länge des zurückgelegten Weges entspricht dem Inhalt derjenigen Fläche, die der Graph mit der horizontalen Achse im Intervall [0; 150] einschließt)
1 × B: für das richtige Berechnen der Länge des zurückgelegten Weges

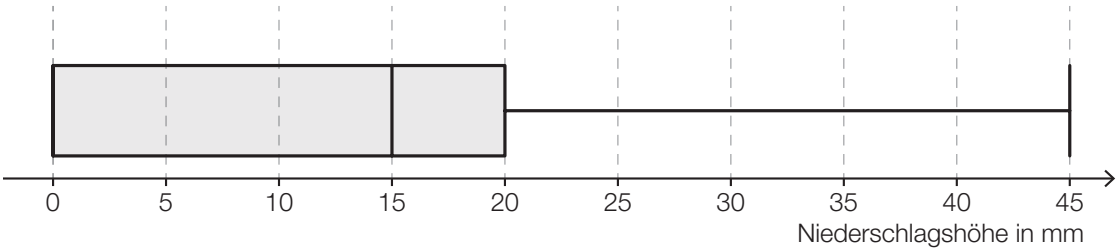
Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Niederschlagsmessung*

Aufgabennummer: A_295

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) An einem bestimmten Ort wurde an jedem Tag eines bestimmten Monats die Niederschlagshöhe gemessen. In der nachstehenden Abbildung sind die gesammelten Daten als Boxplot dargestellt.



1) Kreuzen Sie die mit Sicherheit zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]*

An jedem Tag dieses Monats gab es Niederschlag.	☐
An $\frac{3}{4}$ aller Tage dieses Monats betrug die Niederschlagshöhe weniger als 15 mm.	☐
An über 50 % aller Tage dieses Monats betrug die Niederschlagshöhe mehr als 20 mm.	☐
An mindestens 25 % aller Tage dieses Monats hat es keinen Niederschlag gegeben.	☐
An 75 % aller Tage dieses Monats betrug die Niederschlagshöhe mehr als 20 mm.	☐

* ehemalige Klausuraufgabe (adaptiert)

b) Niederschlagsmengen werden oft in der Einheit „Liter pro Quadratmeter“ (L/m²) angegeben. Alternativ wird aber auch die zugehörige Niederschlagshöhe in der Einheit „Millimeter“ (mm) angegeben.

1) Zeigen Sie, dass eine Niederschlagsmenge von 1 L/m² genau einer Niederschlagshöhe von 1 mm entspricht.

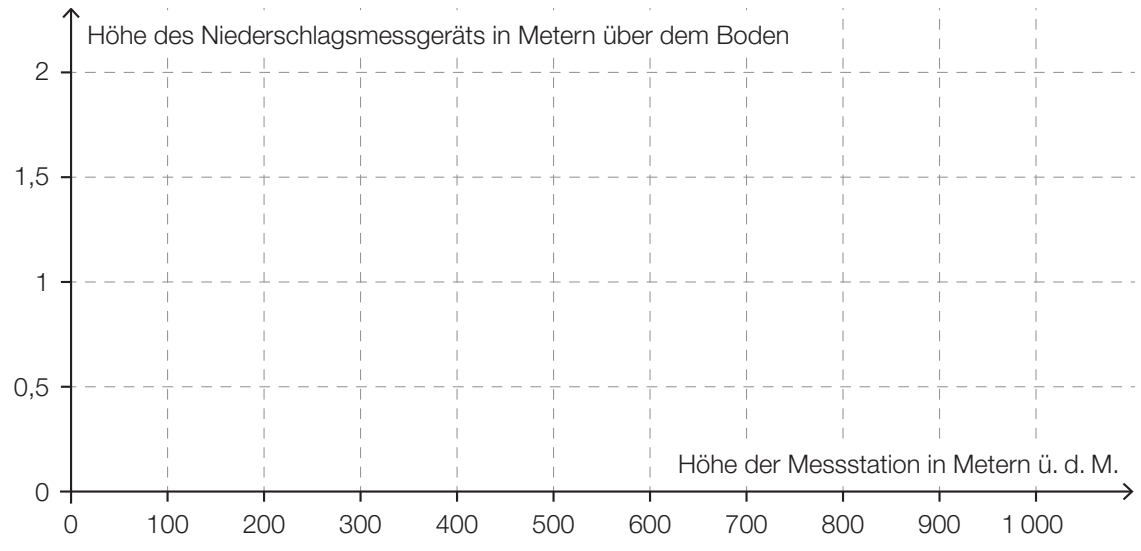
Im Juni 2016 betrug die Niederschlagshöhe an einer bestimmten Messstation in Wien insgesamt 79 mm. Der Normalwert (langjähriger Durchschnittswert) für Wien im Juni beträgt 70 mm.

2) Berechnen Sie, um wie viel Prozent die Niederschlagshöhe im Juni 2016 über dem Normalwert lag.

c) Die Höhe, in der Niederschlagsmessgeräte über dem Boden aufgestellt werden, hängt von der Höhe der Messstation über dem Meeresspiegel (ü. d. M.) ab.

Bei einer Höhe der Messstation von bis zu 500 m ü. d. M. beträgt die Höhe, in der ein Niederschlagsmessgerät aufgestellt wird, genau 1 m über dem Boden.
Bei einer Höhe der Messstation von mehr als 500 m ü. d. M. und bis zu 800 m ü. d. M. wird das Niederschlagsmessgerät 1,5 m über dem Boden aufgestellt.
Bei einer Höhe der Messstation von mehr als 800 m ü. d. M. wird das Niederschlagsmessgerät 2 m über dem Boden aufgestellt.

1) Veranschaulichen Sie diese Informationen im nachstehenden Koordinatensystem.



Möglicher Lösungsweg

a1)

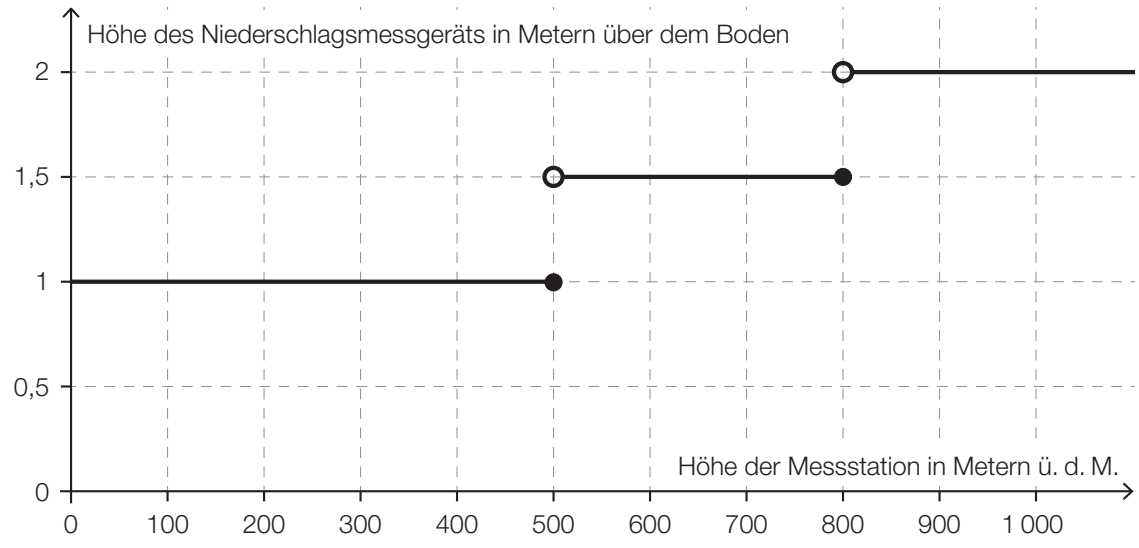
An mindestens 25 % aller Tage dieses Monats hat es keinen Niederschlag gegeben.	☒

b1) $1\ \frac{L}{m^2} = \frac{1\ dm^3}{1\ m^2} = \frac{10^6\ mm^3}{10^6\ mm^2} = 1\ mm$

b2) $\frac{79 - 70}{70} = 0{,}128...$

Die Niederschlagshöhe im Juni 2016 lag um rund 13 % über dem Normalwert.

c1)



Für die Punktevergabe ist entscheidend, dass die horizontalen Abschnitte jeweils in der richtigen Höhe dargestellt sind. Das Verhalten an den Sprungstellen ist für die Punktevergabe nicht relevant.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × C: für das richtige Ankreuzen
b1) 1 × D: für das richtige Zeigen
b2) 1 × B: für das richtige Berechnen des Prozentsatzes
c1) 1 × A: für das richtige Veranschaulichen

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

*New Horizons**

Aufgabennummer: A_294

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

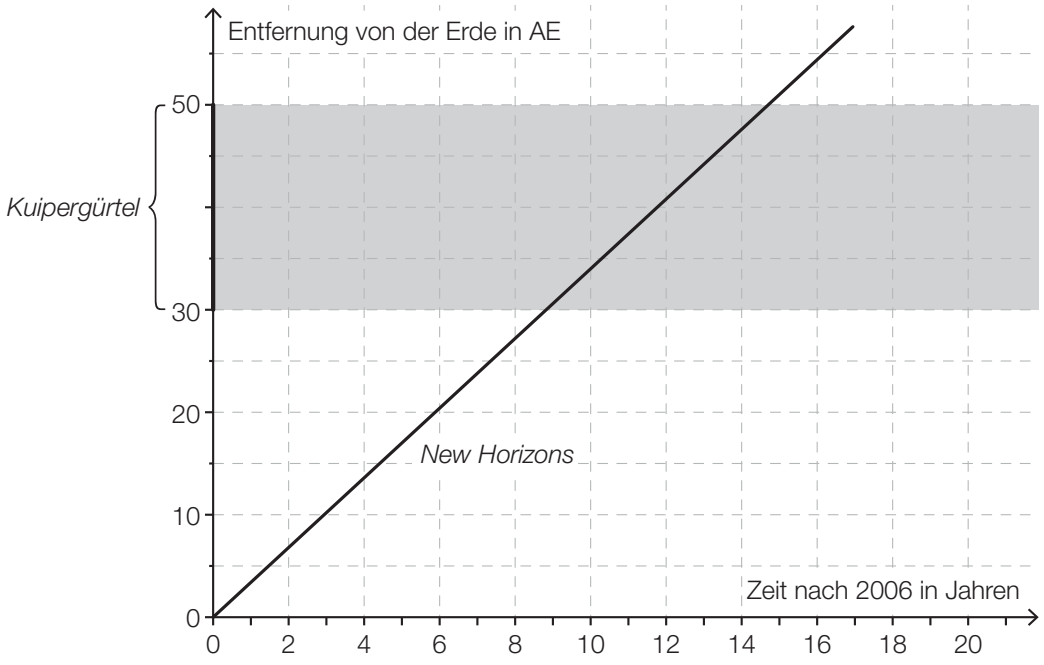
New Horizons ist eine Raumsonde, die im Jahr 2006 von der Erde aus in den Weltraum gestartet ist und immer noch unterwegs ist.

a) Rund 9 Jahre nach ihrem Start flog *New Horizons* am Zwergplaneten Pluto vorbei. Sie bewegte sich in diesen 9 Jahren mit einer mittleren Geschwindigkeit von 16,2 km/s.
Es gilt vereinfacht: 1 Jahr = 365 Tage.

1) Berechnen Sie die Länge des Weges, den *New Horizons* in 9 Jahren zurückgelegt hat.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Im unten stehenden Diagramm ist die Entfernung von *New Horizons* von der Erde in Abhängigkeit von der Zeit näherungsweise dargestellt. Eine in der Astronomie gebräuchliche Längeneinheit ist die sogenannte *astronomische Einheit* (AE).
In einer Entfernung von 30 bis 50 AE von der Erde durchfliegt *New Horizons* den sogenannten *Kuipergürtel.*

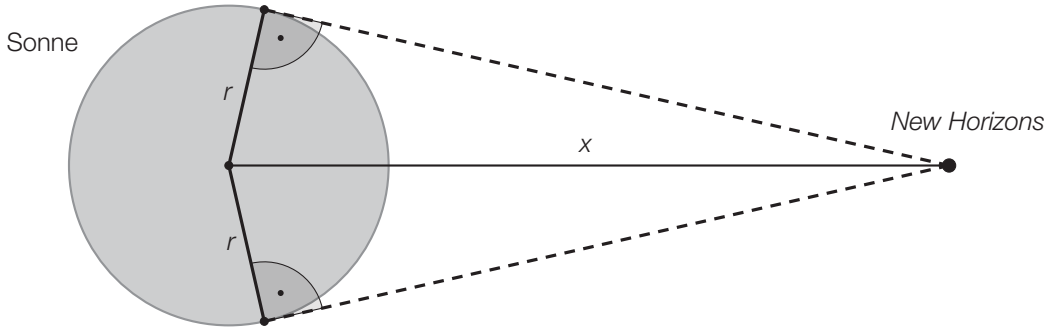


1) Lesen Sie aus dem obigen Diagramm ab, wie lange *New Horizons* benötigt, um den gesamten Kuipergürtel zu durchfliegen.

4 Jahre nach dem Start von *New Horizons* ist eine weitere Raumsonde von der Erde gestartet. Diese Raumsonde fliegt auf derselben Route wie *New Horizons*, aber mit der halben Geschwindigkeit.

2) Zeichnen Sie im obigen Diagramm die Entfernung dieser Raumsonde von der Erde in Abhängigkeit von der Zeit ein.

c) Die nachstehende (nicht maßstabgetreue) Skizze zeigt die Position von *New Horizons* relativ zur Sonne.



1) Zeichnen Sie in der obigen Skizze den Sehwinkel α ein, unter dem die Sonne von *New Horizons* aus gesehen wird.

2) Erstellen Sie aus r und x eine Formel zur Berechnung des Sehwinkels α.

$\alpha =$ _____

Möglicher Lösungsweg

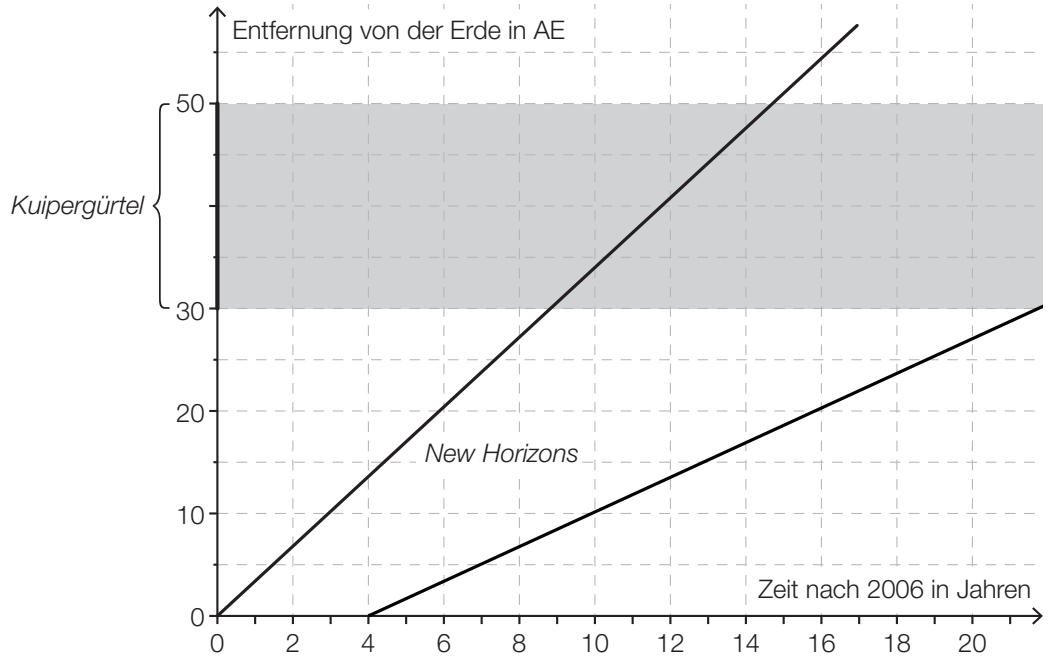
a1) $16{,}2 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365 \cdot 9 = 4\,597\,948\,800 \approx 4{,}6 \cdot 10^9$

Der zurückgelegte Weg hat eine Länge von rund $4{,}6 \cdot 10^9$ km.

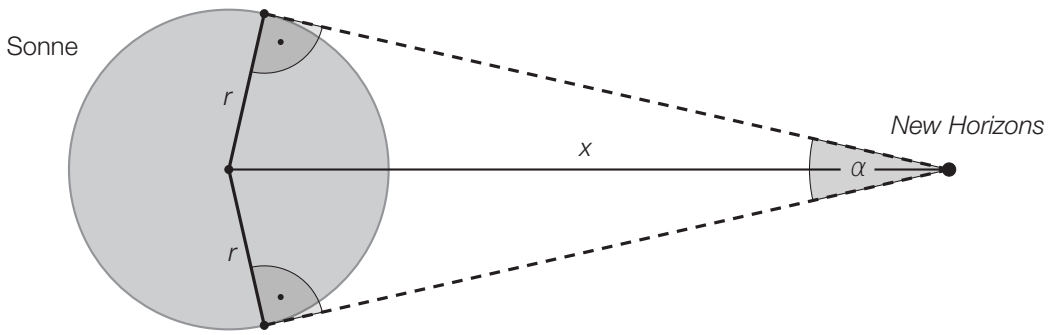
Das Ergebnis muss nicht in Gleitkommadarstellung angegeben werden.

b1) *New Horizons* benötigt etwa 6 Jahre, um den gesamten Kuipergürtel zu durchfliegen.
Toleranzbereich: [5,5 Jahre; 6,5 Jahre]

b2)



c1)



c2) $\alpha = 2 \cdot \arcsin\left(\frac{r}{x}\right)$

Lösungsschlüssel

a1) 1 × B: für das richtige Berechnen der Länge des zurückgelegten Weges
b1) 1 × C: für das richtige Ablesen der Zeit (Toleranzbereich: [5,5 Jahre; 6,5 Jahre])
b2) 1 × A: für das richtige Einzeichnen
c1) 1 × A1: für das richtige Einzeichnen des Sehwinkels α
c2) 1 × A2: für das richtige Erstellen der Formel zur Berechnung des Sehwinkels α

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Sicherheit auf dem Schulweg*

Aufgabennummer: A_293

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Im Nahbereich von Schulen stellen die zu- und abfahrenden Fahrzeuge ein großes Problem dar.

a) Vor einer Schule werden Geschwindigkeitsmessungen durchgeführt. Es ist bekannt, dass sich Kfz-Lenker/innen mit einer Wahrscheinlichkeit von nur 26 % an das geltende Tempolimit halten.

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sich von 20 zufällig ausgewählten Kfz-Lenkerinnen und -Lenkern mehr als die Hälfte an das geltende Tempolimit hält.

b) Vor einer Schule wurden über einen Zeitraum von einer Woche Geschwindigkeitsmessungen durchgeführt. 2 958 Fahrzeuge, das sind 85 % aller kontrollierten Fahrzeuge, fuhren langsamer als 33 km/h.

1) Berechnen Sie, wie viele Fahrzeuge in dieser Woche insgesamt kontrolliert wurden.

Die Ergebnisse dieser Geschwindigkeitsmessungen sollen in einem Boxplot dargestellt werden.

2) Erklären Sie, warum für diesen Boxplot die Aussage „Das Quartil q_3 beträgt 35 km/h“ nicht richtig sein kann.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Der relative Anteil derjenigen Schüler/innen, die mit dem Auto zur Schule gebracht werden, kann für einen bestimmten Zeitabschnitt modellhaft durch die Funktion f beschrieben werden.

$f(t) = 0{,}1 + 0{,}2 \cdot b^t$

t ... Zeit ab Beginn der Beobachtung
$f(t)$ ... relativer Anteil derjenigen Schüler/innen, die mit dem Auto zur Schule gebracht werden, zur Zeit t
b ... Parameter ($b > 0$, $b \neq 1$)

1) Beschreiben Sie den Einfluss des Parameters b auf das Monotonieverhalten der Funktion f.

Folgende Berechnung wurde durchgeführt:

$f(0) = 0{,}1 + 0{,}2 \cdot b^0 = 0{,}1 + 0 = 0{,}1$

2) Beschreiben Sie, welcher Fehler bei dieser Berechnung gemacht wurde.

Möglicher Lösungsweg

a1) Binomialverteilung mit $n = 20$, $p = 0{,}26$
X ... Anzahl der Kfz-Lenker/innen, die sich an das geltende Tempolimit halten

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$P(X > 10) = 0{,}0054...$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt rund 0,5 %.

b1) 2 958 : 0,85 = 3 480
In dieser Woche wurden insgesamt 3 480 Fahrzeuge kontrolliert.

b2) Diese Aussage kann nicht richtig sein, da bekannt ist, dass 85 % der Fahrzeuge langsamer als 33 km/h fuhren. Daher kann das Quartil q_3 (also diejenige Geschwindigkeit, die von mindestens 25 % der Fahrzeuge erreicht oder überschritten wurde) nicht größer als 33 km/h sein.

c1) Beschreibung des Einflusses des Parameters b auf das Monotonieverhalten:
$b < 1$ ... f ist streng monoton fallend
$b > 1$ ... f ist streng monoton steigend

c2) Es wurde fälschlich $b^0 = 0$ angenommen.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × B: für das richtige Berechnen der Wahrscheinlichkeit
b1) 1 × B: für das richtige Berechnen der Anzahl der Fahrzeuge
b2) 1 × D: für das richtige Erklären
c1) 1 × C1: für das richtige Beschreiben des Einflusses des Parameters *b*
c2) 1 × C2: für das richtige Beschreiben des Fehlers

BMB
Bundesministerium
für Bildung

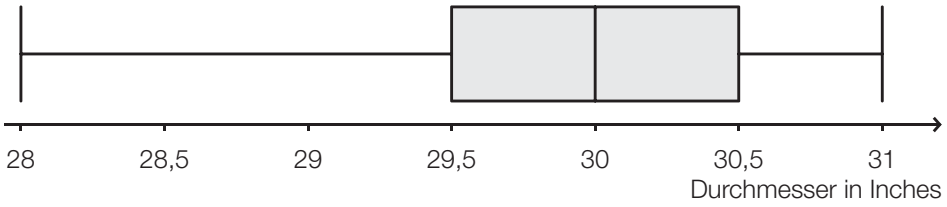
Riesenpizza*

Aufgabennummer: A_238

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

In den USA wird die Größe einer Pizza durch ihren Durchmesser (in Inches) angegeben.
Im Folgenden werden Pizzen immer als kreisrund angenommen.

a) Bei 30-Inch-Pizzen verschiedener Lieferanten wurde der tatsächliche Durchmesser bestimmt. Die Messergebnisse sind im folgenden Boxplot zusammengefasst:



– Lesen Sie die Spannweite ab.

b) – Zeigen Sie allgemein, dass der Flächeninhalt einer (kreisrunden) Pizza vervierfacht wird, wenn ihr Durchmesser verdoppelt wird.

* ehemalige Klausuraufgabe (adaptiert)

c) Für eine bestimmte Pizzasorte wird der Preis pro Flächeneinheit in Abhängigkeit vom Durchmesser modellhaft durch folgende quadratische Funktion P beschrieben:

$P(d) = 0{,}0003 \cdot d^2 - 0{,}015 \cdot d + 0{,}2619$ mit $8 \leq d \leq 30$

d ... Durchmesser der Pizza in Inches
$P(d)$ ... Preis pro Flächeneinheit einer Pizza mit Durchmesser d in US-Dollar

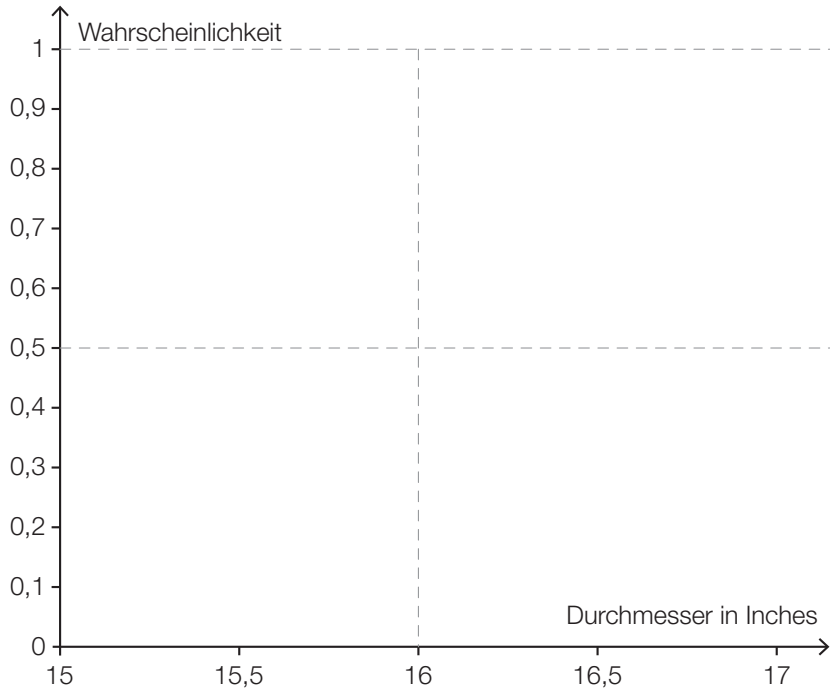
– Ermitteln Sie, für welchen Durchmesser der Preis pro Flächeneinheit am geringsten ist.

– Berechnen Sie, wie viel diese Pizza kostet.

d) Die Durchmesser von 16-Inch-Pizzen eines bestimmten Lieferanten sind annähernd normalverteilt mit einem Erwartungswert $\mu = 16$ Inch und einer Standardabweichung $\sigma = 0{,}3$ Inch.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Pizza einen Durchmesser von mindestens 16,2 Inch hat.

– Skizzieren Sie den Graphen der Verteilungsfunktion dieser Normalverteilung in der nachstehenden Abbildung.



Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Spannweite: 3 Inch

b) Flächeninhalt eines Kreises mit Durchmesser d: $A_d = \frac{d^2}{4} \cdot \pi$

Flächeninhalt eines Kreises mit Durchmesser $2d$: $A_{2d} = \frac{4d^2}{4} \cdot \pi = d^2 \cdot \pi = 4 \cdot A_d$

Ein Nachweis mit konkreten Zahlenwerten für die Durchmesser ist nicht ausreichend.

c) $P'(d) = 0{,}0006 \cdot d - 0{,}015$
$P'(d) = 0 \Rightarrow d = 25$

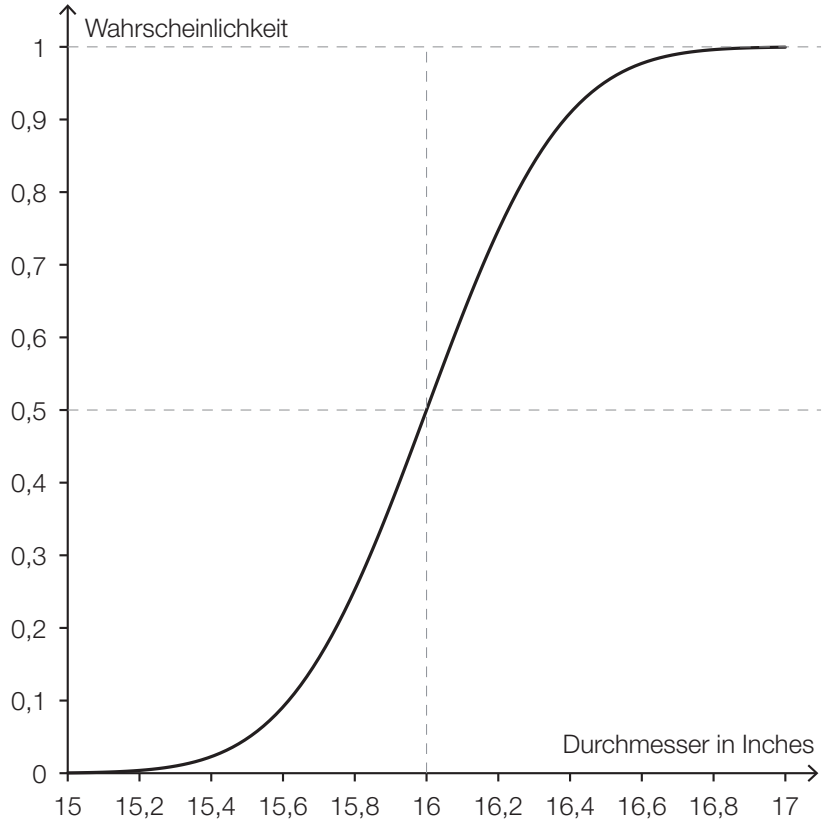
Die Pizza mit dem geringsten Preis pro Flächeneinheit hat einen Durchmesser von 25 Inch.

$P(25) = 0{,}0744$
$P(25) \cdot \left(\frac{25}{2}\right)^2 \cdot \pi = 36{,}521\ldots$

Gemäß diesem Modell kostet diese Pizza 36,52 US-Dollar.

d) Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$P(X \geq 16{,}2) = 0{,}2524\ldots$

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Pizza einen Durchmesser von mindestens 16,2 Inch hat, beträgt rund 25,2 %.



Lösungsschlüssel

a) 1 × C: für das richtige Ablesen der Spannweite

b) 1 × D: für den richtigen allgemeinen Nachweis (Ein Nachweis mit konkreten Zahlenwerten für die Durchmesser ist nicht ausreichend.)

c) 1 × B1: für die richtige Bestimmung der Extremstelle (Der Nachweis, dass es sich bei der Extremstelle um eine Minimumstelle handelt, ist nicht erforderlich.)
1 × B2: für die richtige Berechnung des Preises der Pizza

d) 1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit
1 × A: für das richtige Skizzieren des Graphen der Verteilungsfunktion (charakteristischer Funktionsverlauf und Funktionswert an der Stelle μ richtig eingezeichnet)

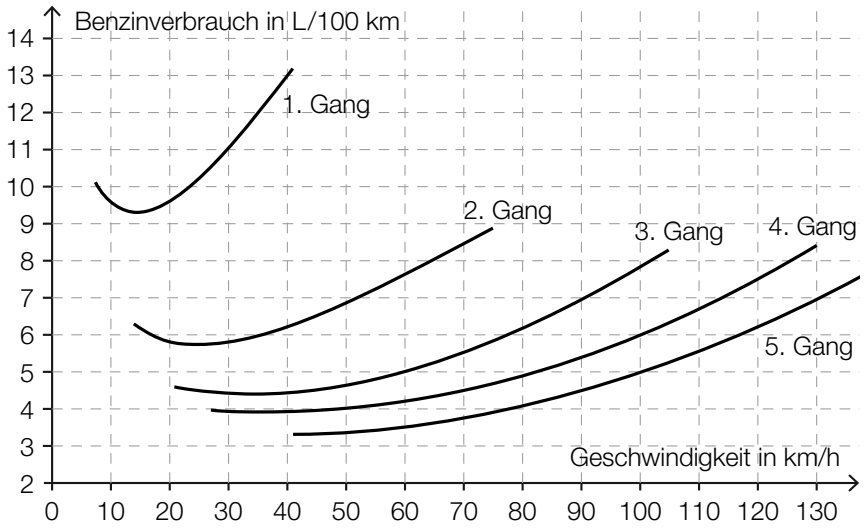
BMBWF
BUNDESMINISTERIUM
FÜR BILDUNG, WISSENSCHAFT
UND FORSCHUNG
www.bmbwf.gv.at

Benzinverbrauch

Aufgabennummer: A_185

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

In der nachstehenden Grafik wird der Benzinverbrauch eines Personenkraftwagens in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit dargestellt.



a) – Lesen Sie aus der obigen Grafik ab, wie viele Liter Benzin pro 100 km man sich ersparen kann, wenn bei 35 km/h nicht mit dem 2. Gang, sondern mit dem 3. Gang gefahren wird.
– Beschreiben Sie den Verlauf der momentanen Änderungsrate des Verbrauchs für die Kurve des 2. Gangs im Geschwindigkeitsintervall [15 km/h; 75 km/h].

b) Der Benzinverbrauch im 1. Gang kann im Intervall [7 km/h; 40 km/h] näherungsweise durch folgende Funktionsgleichung beschrieben werden:

$$b_1(v) = \frac{3 \cdot v^2 + 10 \cdot v + 1500}{10 \cdot (v + 10)}$$

v … Geschwindigkeit in km/h
$b_1(v)$ … Benzinverbrauch bei der Geschwindigkeit v in Litern pro 100 Kilometer (L/100 km)

– Ermitteln Sie die mittlere Änderungsrate des Benzinverbrauchs für das Intervall [10 km/h; 30 km/h].
– Berechnen Sie die relative Änderung des Benzinverbrauchs in Prozent bei einer Erhöhung der Geschwindigkeit von 10 km/h auf 30 km/h.

c) Der Benzinverbrauch im 4. Gang kann näherungsweise durch eine quadratische Funktion b_4 mit $b_4(v) = a \cdot v^2 + b \cdot v + c$ beschrieben werden. Bei 40 km/h ist der Benzinverbrauch minimal und beträgt 3,9 L/100 km. Bei 100 km/h beträgt der Verbrauch 6 L/100 km.

v ... Geschwindigkeit in km/h
$b_4(v)$ ... Benzinverbrauch bei der Geschwindigkeit v in Litern pro 100 Kilometer (L/100 km)

– Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten a, b und c.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Man kann sich etwa 1,5 L pro 100 km sparen.

Die momentane Änderungsrate des Verbrauchs ist von 15 km/h bis 25 km/h negativ und nimmt bei etwa 25 km/h den Wert 0 an (minimaler Verbrauch). Ab 25 km/h bis 75 km/h ist die momentane Änderungsrate positiv, ab rund 45 km/h etwa konstant.

b) $\frac{b_1(30) - b_1(10)}{30 - 10} = 0{,}0875 \ \frac{\text{L/100 km}}{\text{km/h}}$

$\frac{b_1(30) - b_1(10)}{b_1(10)} = 0{,}18421\ldots$

Die relative Änderung des Benzinverbrauchs bei einer Erhöhung der Geschwindigkeit von 10 km/h auf 30 km/h beträgt rund 18,42 %.

c) I: $b_4'(40) = 0$ bzw. $80 \cdot a + b = 0$
II: $b_4(40) = 3{,}9$ bzw. $1\,600 \cdot a + 40 \cdot b + c = 3{,}9$
III: $b_4(100) = 6$ bzw. $10\,000 \cdot a + 100 \cdot b + c = 6$

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 4 Analysis
c) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) —
c) —

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2
c) 2

Thema: Verkehr

Quelle: Effizient unterwegs. Hintergrundwissen für Spritsparprofis. Volkswagen AG, Konzernforschung Umwelt Produkt, 38436 Wolfsburg, Stand: März 2009, Artikel-Nr. 960.1606.02.01

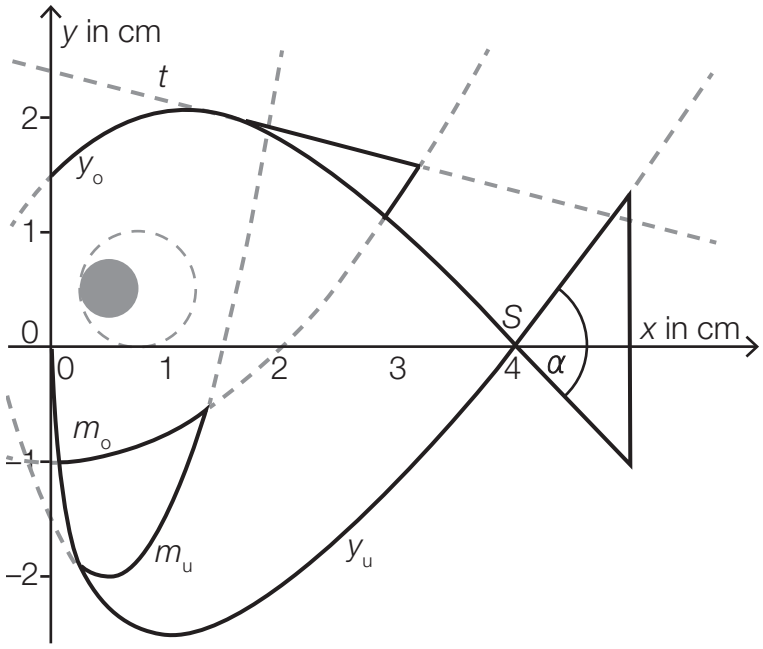
Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Nemo

Aufgabennummer: B_364

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Eine Schülerin hat mithilfe mathematischer Funktionen den Fisch *Nemo* gestaltet:



Die Funktionen y_u und y_o sind definiert durch:

$y_u(x) = \frac{5}{2} \cdot \left(x - 2 \cdot \sqrt{x}\right)$ und $y_o(x) = \frac{11}{256} \cdot x^3 - \frac{33}{64} \cdot x^2 + x + \frac{3}{2}$

x, $y_u(x)$, $y_o(x)$ … Koordinaten in cm

a) – Berechnen Sie den Winkel α.

b) Die obere Begrenzungslinie der Rückenflosse ist durch eine Tangente t an die Funktion y_o im Punkt $x = 1{,}5$ cm erzeugt.

– Stellen Sie eine Funktionsgleichung der Tangente t auf.

c) – Weisen Sie nach, dass $S = (4|0)$ der Wendepunkt der Funktion y_o ist.

– Markieren Sie in der obigen Abbildung diejenige Fläche A, die dem Ausdruck $A = \int_0^4 y_o(x)\,dx$ entspricht.

d) Der Mund von Nemo wird durch die 2 quadratischen Funktionen m_o und m_u erzeugt.

– Ordnen Sie den beiden Funktionen jeweils die richtige Funktionsgleichung zu. *[2 zu 4]*

m_o	
m_u	

A	$y(x) = -\frac{1}{4} \cdot x^2 - 1$
B	$y(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 2$
C	$y(x) = 2 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 2$
D	$y(x) = \frac{1}{4} \cdot x^2 - 1$

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $y_o'(x) = \frac{33}{256} \cdot x^2 - \frac{33}{32} \cdot x + 1$ und $y_u'(x) = \frac{5}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

$k_1 = y_o'(4) = -\frac{17}{16} = -1{,}0625$ und $k_2 = y_u'(4) = \frac{5}{4} = 1{,}25$

$\alpha_1 = \arctan(k_1) = -46{,}735\ldots°$ und $\alpha_2 = \arctan(k_2) = 51{,}340\ldots°$

$\alpha = \alpha_2 - \alpha_1 = 98{,}075...° \approx 98{,}08°$

b) $t(x) = k \cdot x + d$

$k = y_o'(1{,}5) = -\frac{263}{1\,024}$

$t(1{,}5) = y_o(1{,}5) \Rightarrow -\frac{263}{1\,024} \cdot 1{,}5 + d = \frac{4\,065}{2\,048} \Rightarrow d = \frac{2\,427}{1\,024}$

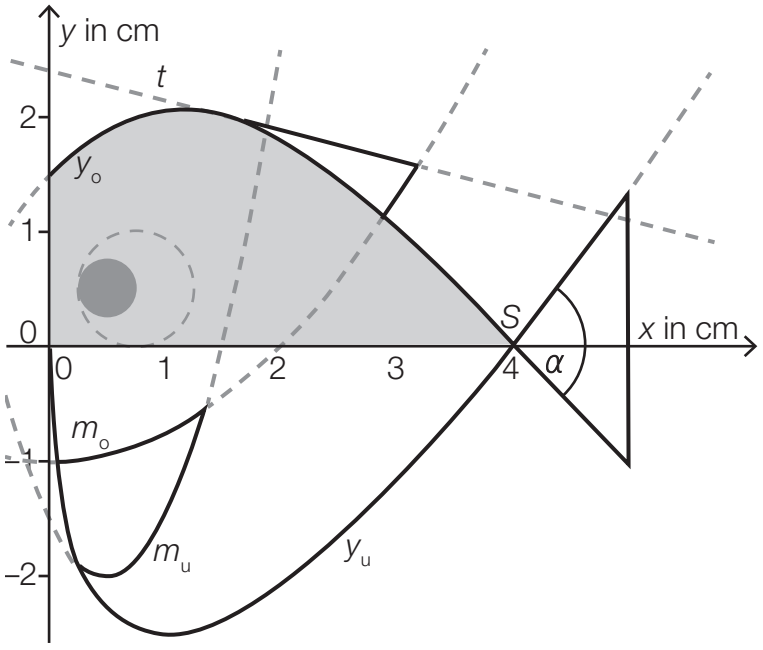
$t(x) = -\frac{263}{1\,024} \cdot x + \frac{2\,427}{1\,024} \approx -0{,}26 \cdot x + 2{,}37$

c) $y_o''(x) = \frac{33}{128} \cdot x - \frac{33}{32}$

$y_o''(4) = 0$

$y_o'''(x) = \frac{33}{128} \neq 0$

Da $y_o''(4) = 0$ und $y_o'''(4) \neq 0$ ist, ist 4 eine Wendestelle von y_o. Somit ist $(4 \mid y_o(4)) = (4 \mid 0)$ ein Wendepunkt von y_o.



d)

m_o	D
m_u	C

A	$y(x) = -\frac{1}{4} \cdot x^2 - 1$
B	$y(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 2$
C	$y(x) = 2 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 2$
D	$y(x) = \frac{1}{4} \cdot x^2 - 1$

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 4 Analysis
c) 4 Analysis
d) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) —
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) A Modellieren und Transferieren
c) D Argumentieren und Kommunizieren
d) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) —
c) A Modellieren und Transferieren
d) —

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) leicht
d) leicht

Punkteanzahl:

a) 1
b) 1
c) 2
d) 1

Thema: Sonstiges

Quellen: —

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Elektromagnetische Strahlung*

Aufgabennummer: B_487

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Beim Eindringen von elektromagnetischer Strahlung in ein Medium nimmt die Intensität mit der Eindringtiefe ab. Die Funktion E beschreibt die Intensität der Strahlung in Abhängigkeit von der Eindringtiefe.

x ... Eindringtiefe in m
$E(x)$ ... Intensität bei der Eindringtiefe x in Watt pro Quadratmeter (W/m^2)

Die 1. Ableitung der Funktion E nach der Eindringtiefe x ist proportional zur Funktion E.

1) Vervollständigen Sie die nachstehende Differenzialgleichung. Bezeichnen Sie dabei den Proportionalitätsfaktor mit $-k$ ($k > 0$).

$$\frac{dE}{dx} = _____$$

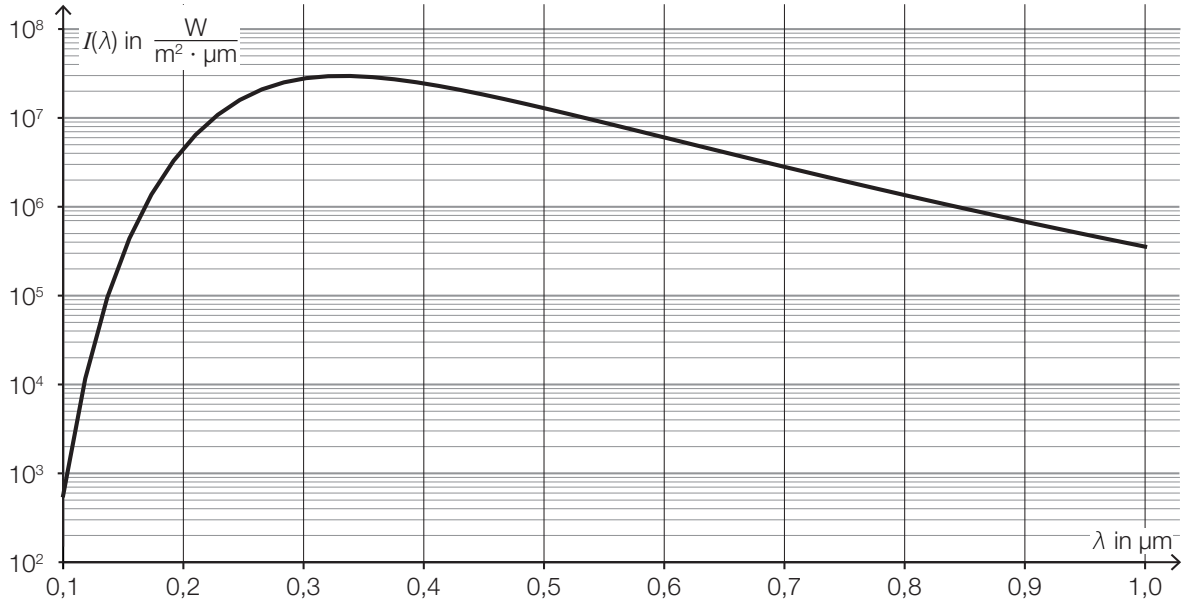
Beim Durchgang von Strahlung durch ein Medium treten Störeinflüsse auf. Diese Störeinflüsse werden durch Addition einer Konstanten S auf der rechten Seite der Differenzialgleichung berücksichtigt.

2) Berechnen Sie die allgemeine Lösung dieser inhomogenen Differenzialgleichung mithilfe der Methode *Trennen der Variablen*.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Die Streuung von Sonnenstrahlung an kleinen Molekülen der Atmosphäre ist dafür verantwortlich, dass der Himmel tagsüber blau erscheint.

Die Intensität der gestreuten Sonnenstrahlung kann in Abhängigkeit von der Wellenlänge λ näherungsweise durch die Funktion I beschrieben werden. In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Funktion I in einem ordinatenlogarithmischen Koordinatensystem dargestellt.



1) Lesen Sie aus der obigen Abbildung das Maximum der Funktion I ab.

I_{max} = _____ $\frac{W}{m^2 \cdot \mu m}$

Der relative Anteil der gestreuten Sonnenstrahlung an der gesamten Sonnenstrahlung hängt von der Wellenlänge λ ab. In einem bestimmten Wellenlängenbereich gilt:

$$A(\lambda) = 1 - e^{\frac{-0,0106}{\lambda^4}}$$

λ ... Wellenlänge in µm
$A(\lambda)$ ... relativer Anteil der gestreuten Sonnenstrahlung bei der Wellenlänge λ

2) Argumentieren Sie mathematisch, dass sich $A(\lambda)$ für größer werdendes λ dem Wert 0 nähert.

c) Der sogenannte *Poynting-Vektor* $\vec{S}$ ist ein Vektor in $\mathbb{R}^3$, der bei Berechnungen mit elektromagnetischen Wellen verwendet wird.

Dabei gilt:

$\vec{S} = k \cdot \left(\vec{E} \times \vec{B}\right)$
$\vec{E}$, $\vec{B}$ ... Vektoren in $\mathbb{R}^3$ zur Beschreibung von elektromagnetischen Wellen
k ... Konstante, $k > 0$

1) Geben Sie an, wie groß der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{S}$ und $\vec{B}$ ist.

2) Kreuzen Sie denjenigen Ausdruck an, der zu $\vec{S} = k \cdot \left(\vec{E} \times \vec{B}\right)$ äquivalent ist. *[1 aus 5]*

$k = \frac{\vec{S}}{\vec{B} \times \vec{E}}$	☐
$k \cdot \vec{S} = \vec{E} \times \vec{B}$	☐
$-\vec{S} = k \cdot \left(\vec{B} \times \vec{E}\right)$	☐
$\frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\vec{S}} = k$	☐
$\vec{S} = -k \cdot \left(\vec{E} \times \vec{B}\right)$	☐

Möglicher Lösungsweg

a1) $\frac{dE}{dx} = -k \cdot E$

a2) Differenzialgleichung mit Störfunktion S: $\frac{dE}{dx} = -k \cdot E + S$

Lösung mithilfe der Methode *Trennen der Variablen*:

$$\frac{dE}{-k \cdot E + S} = dx \quad \left(\text{oder: } \frac{E'}{-k \cdot E + S} = 1\right)$$

$$\int \frac{dE}{-k \cdot E + S} = \int dx \quad \left(\text{oder: } \int \frac{E'(x)}{-k \cdot E(x) + S} dx = \int 1\, dx\right)$$

$$\frac{\ln|-k \cdot E(x) + S|}{-k} = x + C_1$$

$$-k \cdot E(x) + S = C_2 \cdot e^{-k \cdot x}$$

$$E(x) = C \cdot e^{-k \cdot x} + \frac{S}{k}$$

b1) $I_{max} = 3 \cdot 10^7 \frac{W}{m^2 \cdot \mu m}$

b2) Für größer werdendes λ nähert sich der relative Anteil dem Wert 0, da der Ausdruck $e^{\frac{-0{,}0106}{\lambda^4}}$ immer weiter gegen 1 geht.

c1) Der Winkel zwischen $\vec{S}$ und $\vec{B}$ beträgt 90°.

c2)

$-\vec{S} = k \cdot \left(\vec{B} \times \vec{E}\right)$	☒

Lösungsschlüssel

a1) 1 × A: für das richtige Vervollständigen der Differenzialgleichung
a2) 1 × B: für das richtige Berechnen der allgemeinen Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung mithilfe der Methode *Trennen der Variablen*
b1) 1 × C: für das richtige Ablesen von I_{max}
b2) 1 × D: für das richtige mathematische Argumentieren
c1) 1 × C1: für das richtige Angeben des Winkels
c2) 1 × C2: für das richtige Ankreuzen

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Obstfliegenfalle*

Aufgabennummer: B_486

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

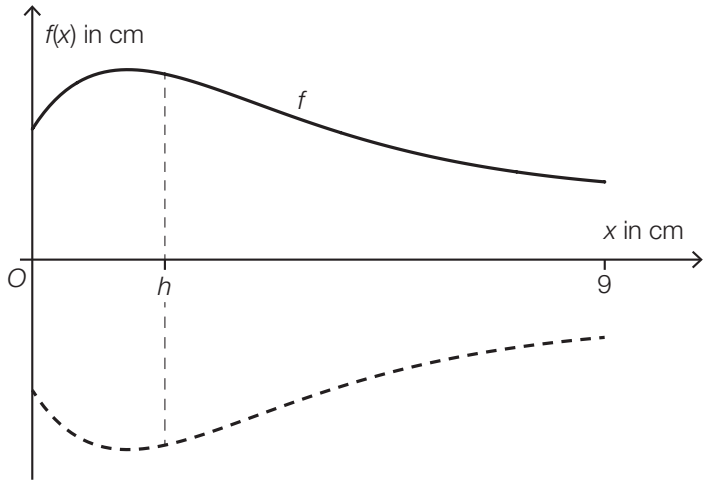
Obstfliegen können mithilfe von Glasgefäßen eingefangen werden (siehe nebenstehende Abbildung).
Die Gefäße werden bis zu einer bestimmten Höhe mit einer Flüssigkeit befüllt, die die Obstfliegen anlocken soll.



Bildquelle: BMBWF

* ehemalige Klausuraufgabe

a) Die Obstfliegenfalle kann durch Rotation des Graphen der Funktion f um die x-Achse modelliert werden (siehe nachstehende Abbildung).



Für die Funktion f gilt:

$f(x) = 1 + 2{,}7 \cdot (x + 0{,}5) \cdot e^{-\frac{2 \cdot x + 1}{4}}$ für $0 \leq x \leq 9$

x, $f(x)$ ... Koordinaten in cm

Die Obstfliegenfalle wird mit 50 cm³ Flüssigkeit befüllt.

In einem Abstand h vom Boden der Obstfliegenfalle soll eine Markierung für diese Flüssigkeitsmenge angebracht werden (siehe obige Abbildung).
Mit der nachstehenden Gleichung soll dieser Abstand h berechnet werden.

$$\pi \cdot \int_{0}^{\square} (f(x))^2 \, dx = \square$$

1) Vervollständigen Sie die obige Gleichung durch Eintragen in die dafür vorgesehenen Kästchen.
2) Berechnen Sie h.

b) Die äußere Begrenzungslinie einer anderen, zur Seite gekippten Obstfliegenfalle soll durch eine Polynomfunktion 5. Grades p mit $p(x) = a \cdot x^5 + b \cdot x^4 + c \cdot x^3 + d \cdot x^2 + e \cdot x + f$ modelliert werden.

Die lokalen Extrempunkte von p haben die Koordinaten (1,5 | 3) und (9 | 1).

1) Erstellen Sie alle Gleichungen zur Berechnung der Koeffizienten der Funktion p, die sich aus diesen Informationen ergeben.
2) Begründen Sie, warum die Koeffizienten der Funktion p mithilfe dieser Gleichungen nicht eindeutig bestimmt werden können.

Möglicher Lösungsweg

a1) $\pi \cdot \int_0^{\boxed{h}} (f(x))^2 \, dx = \boxed{50}$

a2) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$h = 2{,}04\ldots$

b1) $p'(x) = 5 \cdot a \cdot x^4 + 4 \cdot b \cdot x^3 + 3 \cdot c \cdot x^2 + 2 \cdot d \cdot x + e$

I: $p(1{,}5) = 3$
II: $p(9) = 1$
III: $p'(1{,}5) = 0$
IV: $p'(9) = 0$

oder:

I: $7{,}59375 \cdot a + 5{,}0625 \cdot b + 3{,}375 \cdot c + 2{,}25 \cdot d + 1{,}5 \cdot e + f = 3$
II: $59\,049 \cdot a + 6\,561 \cdot b + 729 \cdot c + 81 \cdot d + 9 \cdot e + f = 1$
III: $25{,}3125 \cdot a + 13{,}5 \cdot b + 6{,}75 \cdot c + 3 \cdot d + e = 0$
IV: $32\,805 \cdot a + 2\,916 \cdot b + 243 \cdot c + 18 \cdot d + e = 0$

b2) Zur Berechnung der 6 Koeffizienten der Funktion p wären 6 Gleichungen notwendig.

Lösungsschlüssel

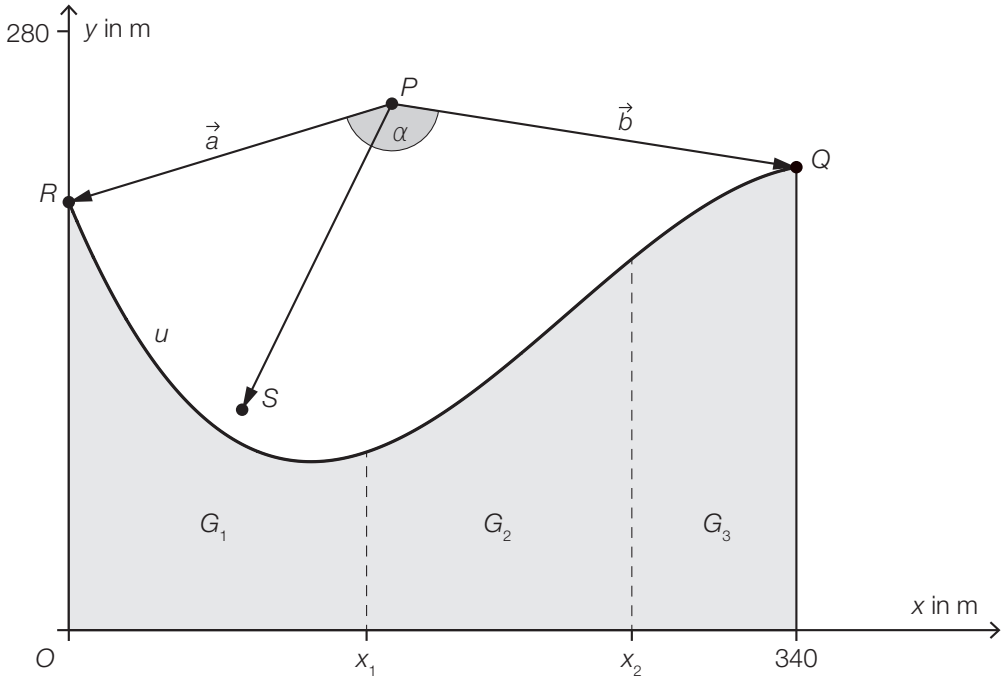
a1) 1 × A: für das richtige Vervollständigen der Gleichung
a2) 1 × B: für das richtige Berechnen von h
b1) 1 × A1: für das richtige Erstellen der Gleichungen mithilfe der Punkte
1 × A2: für das richtige Erstellen der Gleichungen mithilfe der Extremstellen
b2) 1 × D: für das richtige Begründen

Grundstück am See*

Aufgabennummer: B_301

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Drei Geschwister erwerben ein Grundstück am See. Sie unterteilen das Grundstück in die 3 Grundstücke G_1, G_2 und G_3 (siehe nachstehende Abbildung).



Die Uferbegrenzungslinie wird näherungsweise durch den Graphen der Funktion u beschrieben.

* ehemalige Klausuraufgabe

a) Jemand fotografiert von einem Boot im Punkt P aus das Ufer des Grundstücks. Damit die Uferbegrenzungslinie zwischen den Punkten R und Q auf dem Foto ist, muss das Objektiv den Winkel α erfassen können.

1) Stellen Sie mithilfe von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eine Formel zur Berechnung des Winkels α auf.

$\alpha =$ _____

Das Boot fährt geradlinig mit einer konstanten Geschwindigkeit v (in m/s) vom Punkt P zum Punkt S.

2) Beschreiben Sie, was mit dem nachstehenden Ausdruck im gegebenen Sachzusammenhang berechnet wird. Geben Sie dabei die zugehörige Einheit an.

$$\frac{|\overrightarrow{PS}|}{v}$$

b) Das gesamte Grundstück besteht aus den 3 flächengleichen Grundstücken G_1, G_2 und G_3 (siehe obige Abbildung).

Für die Funktion u gilt:

$u(x) = -2 \cdot 10^{-5} \cdot x^3 + 1{,}4 \cdot 10^{-2} \cdot x^2 - 2{,}4 \cdot x + 200$ mit $0 \le x \le 340$

x, $u(x)$ ... Koordinaten in m

1) Berechnen Sie den Flächeninhalt des gesamten Grundstücks.

Die Stelle x_1 markiert die Grenze zwischen den Grundstücken G_1 und G_2.

2) Berechnen Sie die Stelle x_1.

3) Kreuzen Sie den zutreffenden Ausdruck zur Berechnung des Umfangs des Grundstücks G_2 an. *[1 aus 5]*

$x_2 - x_1 + u(x_1) + u(x_2) + \int_0^{x_1} \sqrt{1 + (u'(x))^2}\,dx$	☐
$u(x_2) - u(x_1) + x_1 + x_2 + \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (u'(x))^2}\,dx$	☐
$x_2 - x_1 + u(x_1) + u(x_2) + \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (u'(x))^2}\,dx$	☐
$x_2 - x_1 + u(x_1) + u(x_2) + \int_0^{x_2} \sqrt{1 + (u'(x))^2}\,dx$	☐
$x_2 - x_1 + u(x_1) - u(x_2) + \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (u'(x))^2}\,dx$	☐

c) Beim Erwerb eines Grundstücks muss aufgrund der aktuellen Gesetzeslage Grunderwerbsteuer bezahlt werden. Die Höhe dieser Steuer richtet sich nach dem Grundstückswert.

Der Grundstückswert für das Grundstück am See beträgt € 1.640.000.
Die Grunderwerbsteuer wird folgendermaßen aus dem Grundstückswert errechnet:

- 0,5 % für die ersten € 250.000
- 2 % für die nächsten € 150.000
- darüber hinaus 3,5 % des Grundstückswerts, d. h., nur die Beträge über € 400.000 sind mit 3,5 % zu versteuern

1) Berechnen Sie die Grunderwerbsteuer für dieses Grundstück.

Möglicher Lösungsweg

a1) $\alpha = \arccos\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right)$

a2) Mit diesem Ausdruck wird die Fahrzeit vom Punkt P zum Punkt S in Sekunden berechnet.

b1) $\int_0^{340} u(x)\,dx = 45\,881{,}8\ldots$

Das Grundstück hat einen Flächeninhalt von rund 45 882 m².

b2) $\frac{45\,881{,}8\ldots}{3} = \int_0^{x_1} u(x)\,dx$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$(x_1)_1 = 139{,}1\ldots$
$((x_1)_2 = 646{,}4\ldots)$

b3)

$x_2 - x_1 + u(x_1) + u(x_2) + \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (u'(x))^2}\,dx$	☒

c1) $250\,000 \cdot 0{,}005 + 150\,000 \cdot 0{,}02 + (1\,640\,000 - 400\,000) \cdot 0{,}035 = 47\,650$

Die Grunderwerbsteuer für dieses Grundstück beträgt € 47.650.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Formel
a2) 1 × C: für das richtige Beschreiben im gegebenen Sachzusammenhang unter Angabe der zugehörigen Einheit
b1) 1 × B1: für das richtige Berechnen des Flächeninhalts des gesamten Grundstücks
b2) 1 × B2: für das richtige Berechnen von x_1
b3) 1 × C: für das richtige Ankreuzen
c1) 1 × B: für das richtige Berechnen der Grunderwerbsteuer

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

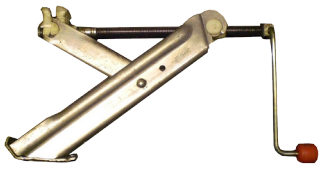
Wagenheber*

Aufgabennummer: B_299

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

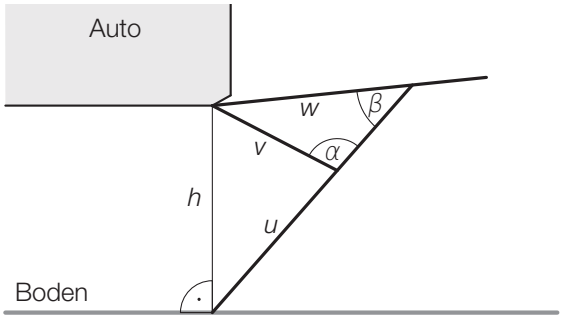
Ein Wagenheber ist ein Hilfsmittel, um ein Auto anzuheben.

a) Eine mögliche Bauart eines Wagenhebers ist im nebenstehenden Bild dargestellt.



Bildquelle: Bukk – own work, public domain, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:STORZ_Wagenheber.jpg [04.08.2020] (adaptiert).

Die nebenstehende Abbildung zeigt eine schematische – nicht maßstabgetreue – Darstellung dieses Wagenhebers.



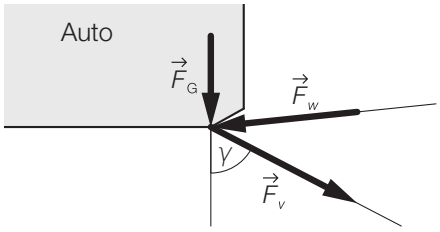
1) Erstellen Sie mithilfe von u, v und α eine Formel zur Berechnung der Höhe h.

$h =$ _____

Es gilt: $v = 20$ cm, $w = 30$ cm, $\beta = 41°$

2) Berechnen Sie den stumpfen Winkel α.

Die Gewichtskraft $\vec{F}_G$ kann in die Kräfte $\vec{F}_w$ und $\vec{F}_v$ zerlegt werden (siehe nebenstehende nicht maßstabgetreue Abbildung).



Es gilt (alle Angaben in Kilonewton):

$\vec{F}_G = \begin{pmatrix} 0 \\ -0{,}75 \end{pmatrix}$ und $\vec{F}_w = \begin{pmatrix} -1{,}18 \\ -0{,}12 \end{pmatrix}$

3) Ermitteln Sie die Kraft $\vec{F}_v$.

4) Berechnen Sie den Winkel γ.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Ein Unternehmen verkauft Wagenheber eines bestimmten Modells. Der Erlös kann in Abhängigkeit von der verkauften Menge x näherungsweise durch die quadratische Erlösfunktion E beschrieben werden (siehe nachstehende Abbildung).



Die Fixkosten dieser Produktion betragen 100 GE.
Die obere Gewinngrenze beträgt 50 ME.

1) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den Graphen der linearen Kostenfunktion K ein.

2) Lesen Sie aus der obigen Abbildung den maximalen Gewinn ab.

Möglicher Lösungsweg

a1) $h = \sqrt{u^2 + v^2 - 2 \cdot u \cdot v \cdot \cos(180° - \alpha)}$ *oder* $h = \sqrt{u^2 + v^2 + 2 \cdot u \cdot v \cdot \cos(\alpha)}$

a2) $\frac{w}{\sin(\alpha)} = \frac{v}{\sin(\beta)} \Rightarrow \sin(\alpha) = \frac{w \cdot \sin(\beta)}{v} = \frac{30 \cdot \sin(41°)}{20}$

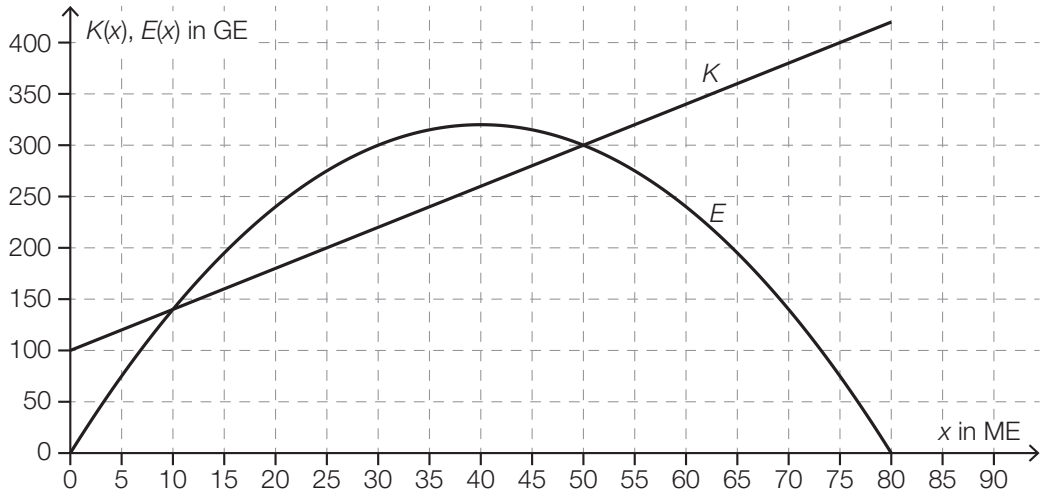
$(\alpha_1 = 79{,}7...°)$ $\alpha_2 = 100{,}2...°$

Für die Punktevergabe ist nur die Angabe des stumpfen Winkels erforderlich.

a3) $\vec{F}_v = \vec{F}_G - \vec{F}_w = \begin{pmatrix} 0 \\ -0{,}75 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1{,}18 \\ -0{,}12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}18 \\ -0{,}63 \end{pmatrix}$

a4) $\gamma = \arctan\left(\frac{1{,}18}{0{,}63}\right) = 61{,}9...°$

b1)



b2) Der maximale Gewinn beträgt 80 GE.
Toleranzbereich: [70; 90]

Lösungsschlüssel

a1) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel
a2) 1 × B1: für das richtige Berechnen des stumpfen Winkels α
a3) 1 × B2: für das richtige Ermitteln der Kraft $\vec{F}_v$
a4) 1 × B3: für das richtige Berechnen des Winkels γ
b1) 1 × A: für das richtige Einzeichnen des Graphen der Kostenfunktion
b2) 1 × C: für das richtige Ablesen des maximalen Gewinns (Toleranzbereich: [70; 90])

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Schlafdauer*

Aufgabennummer: B_492

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Es wurden verschiedene Untersuchungen zur durchschnittlichen täglichen Schlafdauer unterschiedlicher Personengruppen durchgeführt.

a) Das Ergebnis einer Befragung von 50 Personen zur Schlafdauer ist in der nachstehenden Tabelle angegeben.

Schlafdauer in Stunden	6	7	8	9	10
Anzahl der Personen	3	16	20	10	1

1) Berechnen Sie das arithmetische Mittel der Schlafdauer dieser 50 Personen.

Bei 9 Personen wurden die Schlafdauer und die Fernsehzeit erhoben:

Schlafdauer in Stunden	6	7	7	8	8	9	9	10	10
Fernsehzeit in Stunden	4	4	2	3	3	2	2	1	2

Die Fernsehzeit soll in Abhängigkeit von der Schlafdauer beschrieben werden.

2) Ermitteln Sie eine Gleichung der zugehörigen linearen Regressionsfunktion.

3) Interpretieren Sie das Vorzeichen der Steigung der Regressionsfunktion im gegebenen Sachzusammenhang.

4) Berechnen Sie gemäß diesem Modell die Fernsehzeit bei einer Schlafdauer von 7,5 h.

b) Die durchschnittliche tägliche Schlafdauer X von älteren Personen ist annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 364$ min und der Standardabweichung $\sigma = 50$ min.

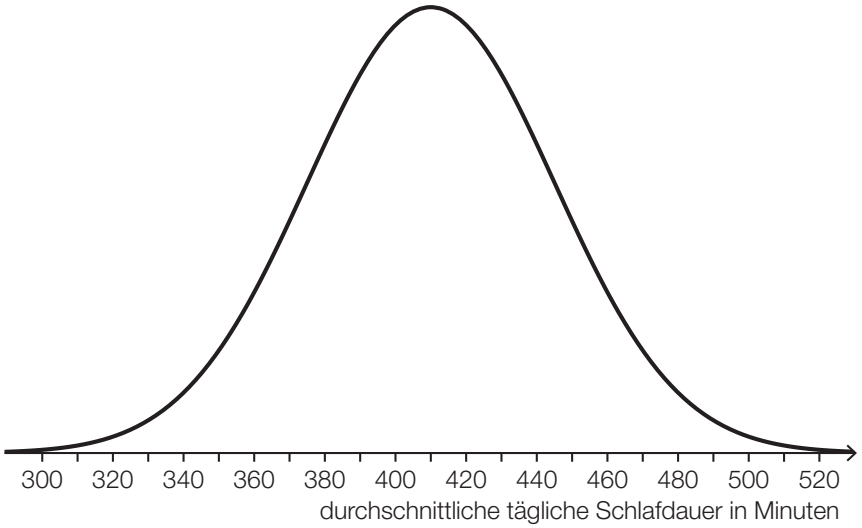
1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte ältere Person eine durchschnittliche tägliche Schlafdauer zwischen 300 min und 480 min hat.

2) Tragen Sie in der nachstehenden Gleichung die fehlende Zahl in das dafür vorgesehene Kästchen ein.

$P(X \geq 400) = P\left(X \leq \square\right)$

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Für die Altersgruppe von 19 bis 39 Jahren ist die durchschnittliche tägliche Schlafdauer annähernd normalverteilt. Die zugehörige Dichtefunktion ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



1) Lesen Sie aus der obigen Abbildung den Erwartungswert μ ab.

μ = _____ min

Für eine andere Altersgruppe beträgt der Erwartungswert 399 min. Die Standardabweichung ist die gleiche wie in der Altersgruppe von 19 bis 39 Jahren.

2) Beschreiben Sie, wie sich der Graph der Dichtefunktion für diese Altersgruppe vom oben abgebildeten Graphen unterscheidet.

Möglicher Lösungsweg

a1) Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$\overline{x} = 7{,}8$ h

a2) Ermittlung mittels Technologieeinsatz:
$f(x) = -0{,}5857 \cdot x + 7{,}3714$ *(Koeffizienten gerundet)*
x … Schlafdauer in Stunden
$f(x)$ … Fernsehzeit bei der Schlafdauer x in Stunden

a3) Wird die Schlafdauer erhöht, so sinkt die Fernsehzeit.

a4) $f(7{,}5) = 2{,}9...$

Bei einer Schlafdauer von 7,5 h beträgt die Fernsehzeit gemäß diesem Modell rund 3 h.

b1) Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$P(300 < X < 480) = 0{,}889...$
Die Wahrscheinlichkeit beträgt rund 89 %.

b2) $P(X \geq 400) = P\left(X \leq \boxed{328}\right)$

c1) $\mu = 410$ min
Toleranzbereich: [405; 415]

c2) Der Graph der zugehörigen Dichtefunktion ist im Vergleich zum abgebildeten Graphen nach links verschoben.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × B1: für das richtige Berechnen des arithmetischen Mittels
a2) 1 × B2: für das richtige Ermitteln der Gleichung der linearen Regressionsfunktion
a3) 1 × C: für das richtige Interpretieren des Vorzeichens der Steigung im gegebenen Sachzusammenhang
a4) 1 × B3: für das richtige Berechnen der Fernsehzeit
b1) 1 × B: für das richtige Berechnen der Wahrscheinlichkeit
b2) 1 × A: für das richtige Eintragen der fehlenden Zahl
c1) 1 × C1: für das richtige Ablesen des Erwartungswerts (Toleranzbereich: [405; 415])
c2) 1 × C2: für das richtige Beschreiben

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Münzen (2)*

Aufgabennummer: B_493

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Beim Werfen einer fairen Münze treten die beiden Ereignisse „Kopf“ und „Zahl“ jeweils mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auf.

Agnes, Bettina und Celina spielen ein Spiel mit einer fairen Münze.
Agnes wirft die Münze. Zeigt die Münze Kopf, dann gewinnt Agnes und das Spiel ist zu Ende. Zeigt die Münze Zahl, dann ist Bettina an der Reihe.
Bettina wirft die Münze. Zeigt die Münze Kopf, dann gewinnt Bettina und das Spiel ist zu Ende. Zeigt die Münze Zahl, ist Celina an der Reihe.
Celina wirft die Münze. Zeigt die Münze Kopf, dann gewinnt Celina und das Spiel ist zu Ende. Zeigt die Münze Zahl, ist Runde 1 beendet und Agnes beginnt Runde 2.
Dieses Spiel wird auf die gleiche Art fortgesetzt.

In der unten stehenden Tabelle sind die Gewinnwahrscheinlichkeiten für die ersten 3 Runden teilweise eingetragen.

1) Vervollständigen Sie diese Tabelle durch Eintragen der fehlenden Gewinnwahrscheinlichkeiten.

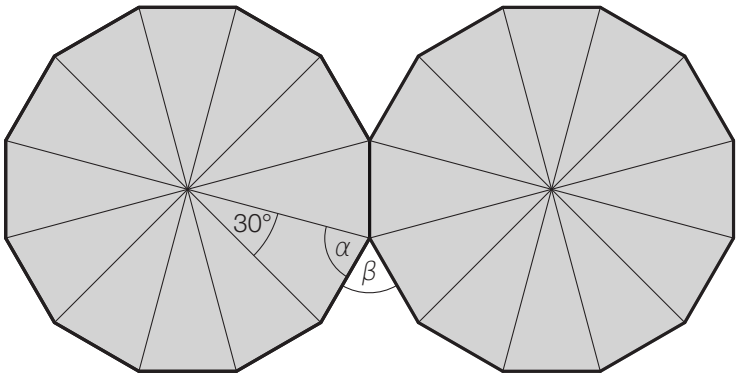
	Agnes gewinnt das Spiel in dieser Runde	Bettina gewinnt das Spiel in dieser Runde	Celina gewinnt das Spiel in dieser Runde
Runde 1			$\frac{1}{8}$
Runde 2		$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$
Runde 3	$\frac{1}{128}$		$\frac{1}{512}$

Die Wahrscheinlichkeit, dass Celina in Runde *n* gewinnt, lässt sich durch eine geometrische Folge modellieren.

2) Stellen Sie ein explizites Bildungsgesetz dieser Folge auf.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Die australische 50-Cent-Münze besteht – von oben betrachtet – aus 12 gleich großen gleichschenkeligen Dreiecken.
Legt man 2 solche Münzen aneinander, ergibt sich folgende geometrische Situation:



1) Ermitteln Sie die Winkel α und β.

c) In einer Geldbörse sind 5 Ein-Euro-Münzen und 7 Zwei-Euro-Münzen. Dorian zieht nacheinander und ohne Zurücklegen 2 zufällig ausgewählte Münzen.

Die Zufallsvariable X gibt diejenigen Geldbeträge an, die Dorian erhalten kann.
$P(X = x_i)$ ist die Wahrscheinlichkeit, genau den Geldbetrag x_i zu erhalten.

1) Vervollständigen Sie die nachstehende Tabelle für das oben beschriebene Zufallsexperiment.

x_i			
$P(X = x_i)$			

2) Berechnen Sie den Erwartungswert von X.

Möglicher Lösungsweg

a1)

	Agnes gewinnt das Spiel in dieser Runde	Bettina gewinnt das Spiel in dieser Runde	Celina gewinnt das Spiel in dieser Runde
Runde 1	$\mathbf{\frac{1}{2}}$	$\mathbf{\frac{1}{4}}$	$\frac{1}{8}$
Runde 2	$\mathbf{\frac{1}{16}}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$
Runde 3	$\frac{1}{128}$	$\mathbf{\frac{1}{256}}$	$\frac{1}{512}$

a2) $c_n = c_1 \cdot q^{n-1}$

c_n ... Wahrscheinlichkeit, dass Celina in Runde n gewinnt

$q = \frac{1}{64} : \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$

$c_n = \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{n-1}$ *oder* $c_n = \left(\frac{1}{8}\right)^n$

b1) $\alpha = \frac{180° - 30°}{2} = 75°$

$\beta = 360° - 4 \cdot 75° = 60°$

c1)

x_i	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} = \frac{5}{33}$	$\frac{5}{12} \cdot \frac{7}{11} \cdot 2 = \frac{35}{66}$	$\frac{7}{12} \cdot \frac{6}{11} = \frac{7}{22}$

c2) $E(X) = 2 \cdot \frac{5}{33} + 3 \cdot \frac{35}{66} + 4 \cdot \frac{7}{22} = \frac{19}{6} = 3{,}166...$

Der Erwartungswert beträgt rund € 3,17.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × A1: für das richtige Vervollständigen der Tabelle
a2) 1 × A2: für das richtige Aufstellen des expliziten Bildungsgesetzes
b1) 1 × B: für das richtige Ermitteln der Winkel α und β
c1) 1 × A: für das richtige Vervollständigen der Tabelle
c2) 1 × B: für das richtige Berechnen des Erwartungswerts

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Fitnessgymnastik*

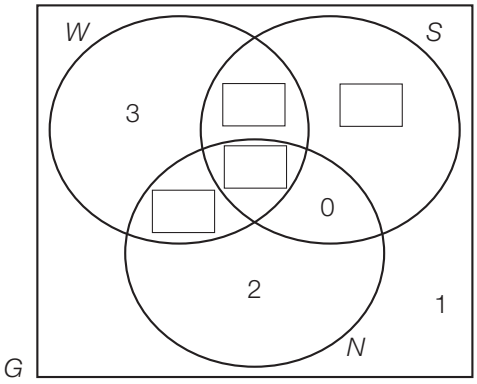
Aufgabennummer: B_494

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) An einem Fitnessgymnastik-Kurs nehmen weibliche und männliche Personen unterschiedlichen Alters teil.

W ... Menge der weiblichen Personen
S ... Menge der Seniorinnen und Senioren
N ... Menge der neu eingeschriebenen Personen
G ... Menge aller teilnehmenden Personen

Insgesamt nehmen am Kurs 20 Personen teil.
Es gibt keine neu eingeschriebenen Seniorinnen oder Senioren.
Unter den insgesamt 15 weiblichen Personen sind 9 Seniorinnen. 3 weibliche Personen sind neu eingeschrieben.
Unter den insgesamt 5 männlichen Personen sind 2 Senioren. 2 männliche Personen sind neu eingeschrieben.



Im obigen Venn-Diagramm ist bereits die Zahl 1 eingetragen.

1) Beschreiben Sie die Bedeutung dieser Zahl im gegebenen Sachzusammenhang.

2) Vervollständigen Sie das obige Venn-Diagramm durch Eintragen der richtigen Anzahlen.

3) Kennzeichnen Sie im obigen Venn-Diagramm die Menge $(W \cup S) \setminus N$.

4) Kreuzen Sie den zutreffenden Zusammenhang an. *[1 aus 5]*

w ... Prozentsatz der neu eingeschriebenen Personen unter den weiblichen Personen
m ... Prozentsatz der neu eingeschriebenen Personen unter den männlichen Personen
k ... Prozentsatz der neu eingeschriebenen Personen unter allen teilnehmenden Personen

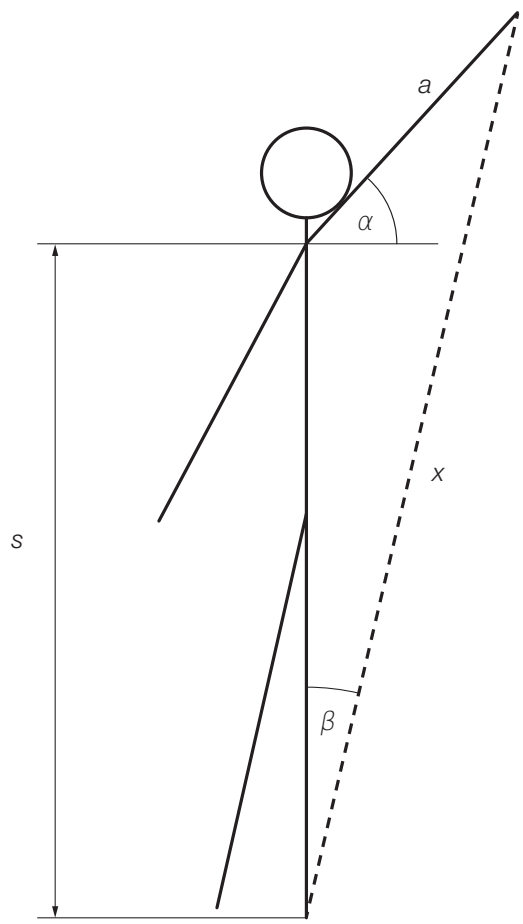
$w = 1{,}5 \cdot k$	☐
$m = 2 \cdot k$	☐
$k = 2 \cdot w$	☐
$k = 1{,}5 \cdot m$	☐
$m = 2 \cdot w$	☐

* ehemalige Klausuraufgabe

b) In einem Kurs werden dehnbare Fitnessbänder benützt. Bei einer Übung wird ein Ende des Fitnessbands mit einem Fuß fixiert. Das andere Ende wird mit dem gestreckten Arm nach oben gezogen. (Siehe unten stehende vereinfachte Abbildung.)

1) Zeichnen Sie in dieser Abbildung denjenigen Winkel φ ein, für den gilt:

$$\sin(\varphi) = \frac{x \cdot \sin(\beta)}{a}$$



a ... Armlänge
s ... Schulterhöhe
x ... Länge des gedehnten Fitnessbands

2) Erstellen Sie mithilfe von *a*, *s* und α eine Formel zur Berechnung von *x*.

x = _____

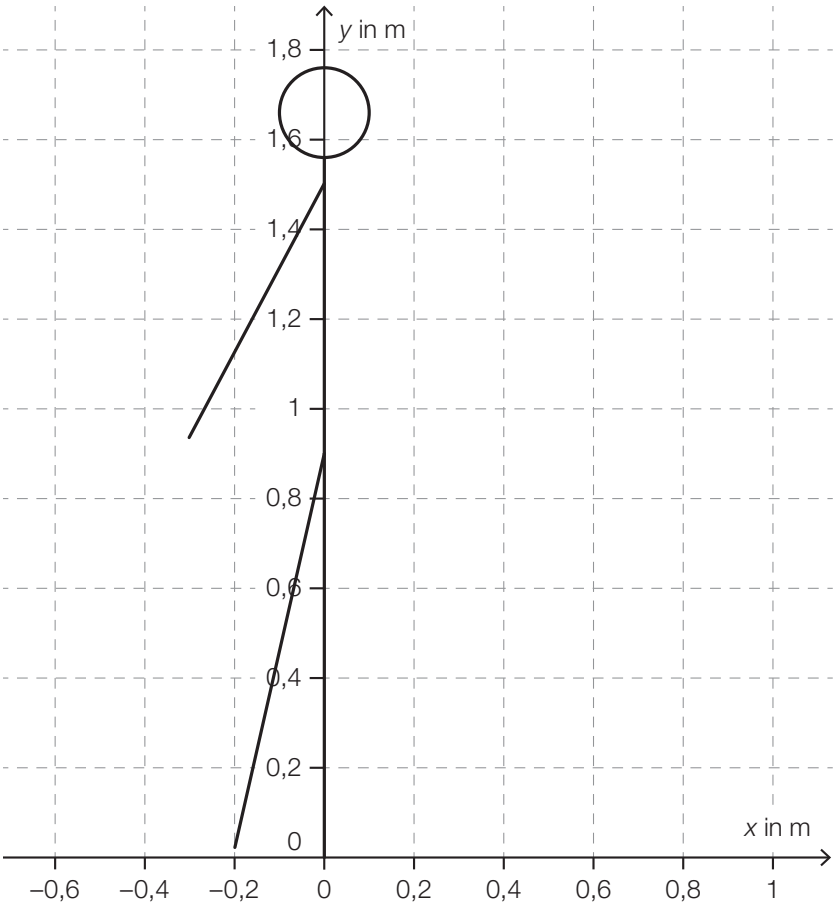
Für eine bestimmte Person gilt: $a = 0{,}7$ m, $s = 1{,}5$ m, $\alpha = 48°$

3) Berechnen Sie *x* für diese Person.

c) Bei einer Übung wird ein Ende eines dehnbaren Fitnessbands mit dem Fuß fixiert (Koordinatenursprung in der unten stehenden Abbildung). Das andere Ende wird mit dem in der Abbildung nicht dargestellten Arm gehalten.

Zu Beginn der Übung ist das Fitnessband ungedehnt und kann durch den Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 1 \end{pmatrix}$ beschrieben werden (Maße in Metern).

1) Zeichnen Sie in der nachstehenden Abbildung den Vektor $\vec{b}$ als Pfeil ausgehend vom Koordinatenursprung ein.



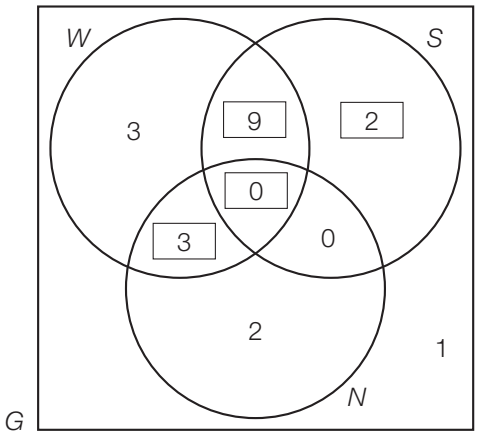
2) Berechnen Sie den Winkel, den der Vektor $\vec{b}$ mit der y-Achse einschließt.

3) Berechnen Sie die Länge des ungedehnten Fitnessbands. Runden Sie das Ergebnis auf ganze Zentimeter.

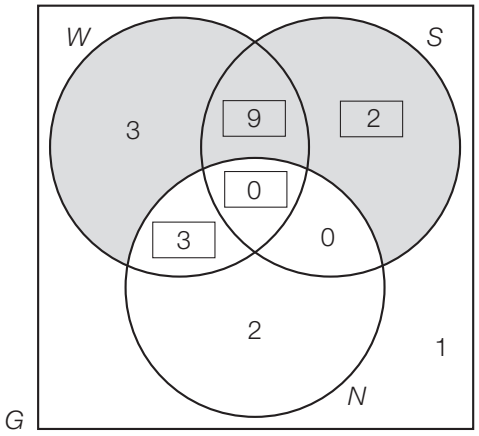
Möglicher Lösungsweg

a1) Es gibt 1 männliche Person, die weder zu den Senioren gehört noch neu eingetragen ist.

a2)



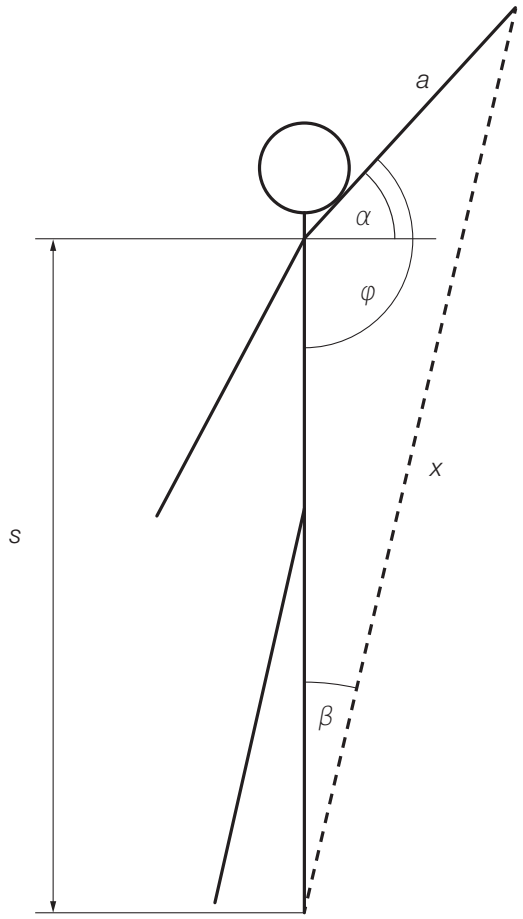
a3)



a4)

$m = 2 \cdot w$	☒

b1)



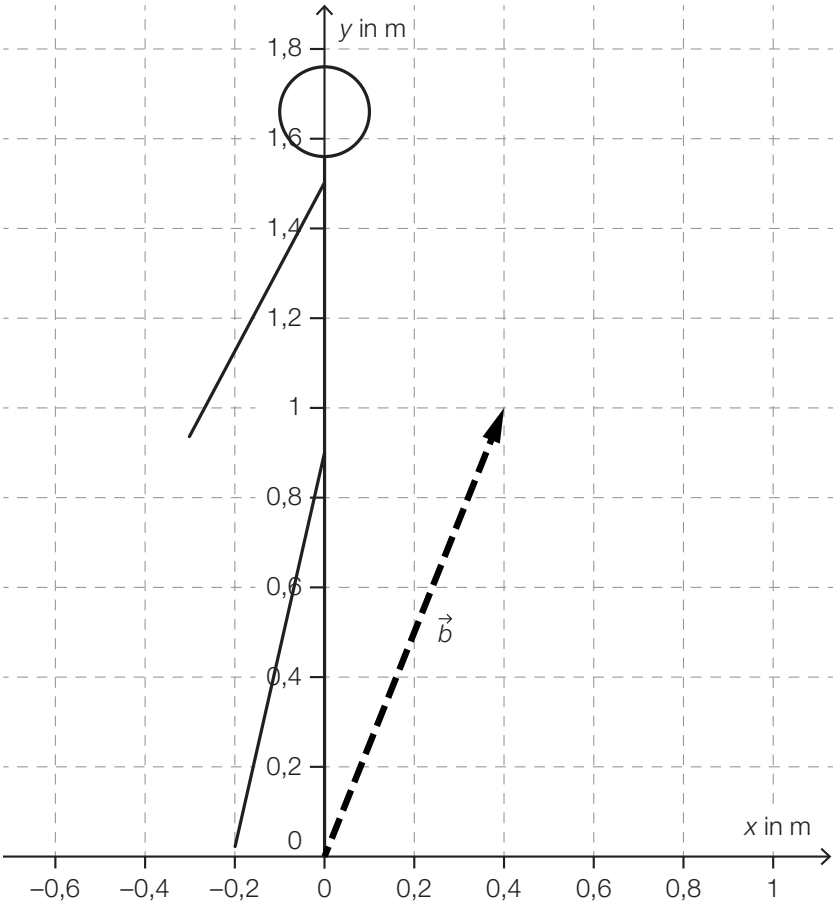
b2) $x = \sqrt{a^2 + s^2 - 2 \cdot a \cdot s \cdot \cos(90° + \alpha)}$ *oder* $x = \sqrt{a^2 + s^2 + 2 \cdot a \cdot s \cdot \sin(\alpha)}$

Auch eine Verwendung des richtig eingezeichneten Winkels φ in der Formel ist als richtig zu werten.

b3) $x = \sqrt{0{,}7^2 + 1{,}5^2 - 2 \cdot 0{,}7 \cdot 1{,}5 \cdot \cos(90° + 48°)} = 2{,}07...$

Die Länge des gedehnten Fitnessbands beträgt rund 2,1 m.

c1)



c2) $\cos(\gamma) = \dfrac{\begin{pmatrix}0{,}4\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}{\sqrt{0{,}4^2 + 1^2} \cdot 1} \quad \Rightarrow \quad \gamma = 21{,}8...°$

oder:

$\tan(\gamma) = 0{,}4 \quad \Rightarrow \quad \gamma = 21{,}8...°$

Der Winkel beträgt rund 22°.

c3) $\sqrt{40^2 + 100^2} = 107{,}7...$

Die Länge des ungedehnten Fitnessbands beträgt rund 108 cm.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × C1: für das richtige Beschreiben im gegebenen Sachzusammenhang
a2) 1 × A: für das richtige Vervollständigen des Venn-Diagramms
a3) 1 × C2: für das richtige Kennzeichnen der Menge $(W \cup S) \setminus N$
a4) 1 × C3: für das richtige Ankreuzen
b1) 1 × C: für das richtige Einzeichnen des Winkels φ
b2) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel
b3) 1 × B: für das richtige Berechnen von x
c1) 1 × A: für das richtige Einzeichnen des Vektors
c2) 1 × B1: für das richtige Berechnen des Winkels
c3) 1 × B2: für das richtige Berechnen der Länge auf ganze Zentimeter gerundet

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Seifenherstellung*

Aufgabennummer: B_491

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

In einem Betrieb werden Seifen hergestellt und verpackt. Zur Herstellung von Seife werden die Rohstoffe *Sheabutter* (R_1), *verschiedene Öle* (R_2) und *Natronlauge* (R_3) verwendet.

a) In einer Produktionsschiene werden die beiden Seifen S_1 und S_2 hergestellt.

1. Produktionsstufe:
Für 1 ME von S_1 benötigt man 35 ME von R_1, 80 ME von R_2 und 15 ME von R_3.
Für 1 ME von S_2 benötigt man 50 ME von R_2 und 6 ME von R_3.

2. Produktionsstufe:
Beide Seifen werden in den 2 unterschiedlichen Packungen P_1 und P_2 zum Kauf angeboten.
In 1 Packung P_1 befinden sich 2 ME von S_1 und 1 ME von S_2.
In 1 Packung P_2 befinden sich 2 ME von S_1 und 3 ME von S_2.

1) Veranschaulichen Sie die Produktionsverflechtung von den Rohstoffen bis zu den Packungen als Gozinto-Graph.



2) Erstellen Sie die beiden Matrizen, die die einzelnen Produktionsstufen beschreiben.

3) Ermitteln Sie die Matrix $\boldsymbol{A}$, die den Mengenbedarf an Rohstoffen für die Zusammenstellung der Packungen beschreibt.

Ein Kunde bestellt 20 Packungen P_1 und 30 Packungen P_2.

4) Ermitteln Sie den Mengenbedarf an Rohstoffen für diese Bestellung.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) In einer anderen Produktionsschiene werden aus den 3 Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 die Seifen S_3 und S_4 hergestellt. Die Seifen werden in Form einer Geschenkpackung P verkauft.

Die Produktionsverflechtung wird durch die nachstehende Tabelle beschrieben. Die eingetragenen Werte entsprechen den ME im Produktionsprozess.

	R_1	R_2	R_3	S_3	S_4	P
R_1	0	0	0	15	10	0
R_2	0	0	0	75	52	0
R_3	0	0	0	9,6	8,5	0
S_3	0	0	0	0	0	2
S_4	0	0	0	0	0	2
P	0	0	0	0	0	0

Die Summe der Einträge in der 3. Zeile beträgt 18,1.

1) Interpretieren Sie den Wert 18,1 im Zusammenhang mit der Produktion der beiden Seifen.

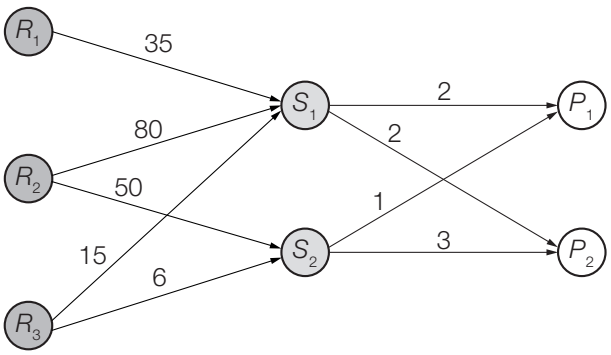
2) Lesen Sie aus der obigen Tabelle ab, wie viele ME Seife sich in einer Geschenkpackung befinden.

Im Lager befinden sich 1 260 ME von R_1 und 6 340 ME von R_2.

3) Überprüfen Sie nachweislich, ob bei diesem Lagerstand jeweils 50 ME von den beiden Seifen S_3 und S_4 hergestellt werden können.

Möglicher Lösungsweg

a1)



a2) Matrix für 1. Produktionsstufe: $\begin{pmatrix} 35 & 0 \\ 80 & 50 \\ 15 & 6 \end{pmatrix}$

Matrix für 2. Produktionsstufe: $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

a3) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 35 & 0 \\ 80 & 50 \\ 15 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70 & 70 \\ 210 & 310 \\ 36 & 48 \end{pmatrix}$

a4) $\begin{pmatrix} 70 & 70 \\ 210 & 310 \\ 36 & 48 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\,500 \\ 13\,500 \\ 2\,160 \end{pmatrix}$

Für diese Bestellung benötigt man 3 500 ME von R_1, 13 500 ME von R_2 und 2 160 ME von R_3.

b1) Für 1 ME von S_3 und 1 ME von S_4 benötigt man insgesamt 18,1 ME von R_3 (Natronlauge).

b2) In einer Geschenkpackung befinden sich 4 ME Seife.

b3) Rohstoffbedarf R_1: $15 \cdot 50 + 10 \cdot 50 = 1\,250$
Rohstoffbedarf R_2: $75 \cdot 50 + 52 \cdot 50 = 6\,350 > 6\,340$
Nein, diese Mengen können nicht hergestellt werden, da von R_2 zu wenig auf Lager ist.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × A1: für das richtige Veranschaulichen als Gozinto-Graph
a2) 1 × A2: für das richtige Erstellen der beiden Matrizen
a3) 1 × B1: für das richtige Ermitteln der Matrix ***A***
a4) 1 × B2: für das richtige Ermitteln des Mengenbedarfs
b1) 1 × C1: für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang
b2) 1 × C2: für das richtige Ablesen
b3) 1 × D: für das richtige nachweisliche Überprüfen

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Obsthändler*

Aufgabennummer: B_489

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

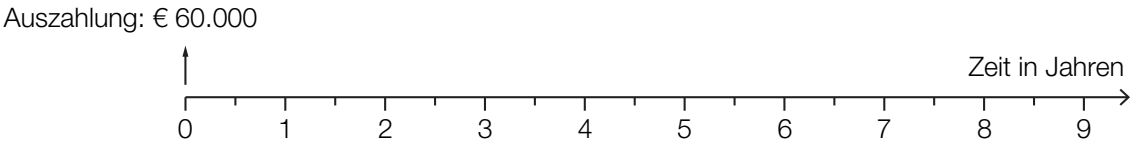
Ein Obsthändler plant die Renovierung seiner Geschäftsräume.

a) Die Renovierung soll durch einen Kredit in Höhe von € 60.000 finanziert werden.

Das Angebot einer Bank sieht folgende Rückzahlungen vor:

- eine Einmalzahlung in Höhe von € 15.000 am Ende des 1. Jahres
- eine weitere Einmalzahlung in Höhe von € 20.000 am Ende des 3. Jahres
- 6 Halbjahresraten in Höhe von jeweils *R*, die erste Rate ist am Ende des 4. Jahres fällig

1) Veranschaulichen Sie diese Rückzahlungen auf der nachstehenden Zeitachse.



Rückzahlungen:

2) Berechnen Sie die Ratenhöhe *R* bei einem Semesterzinssatz von 3 % p. s.

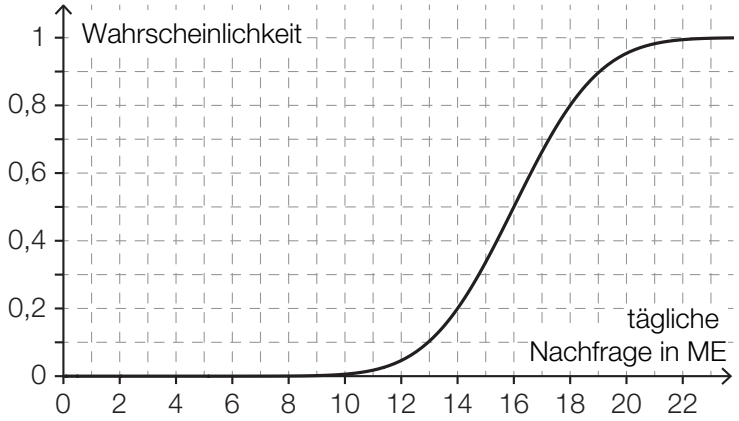
b) Der Obsthändler überlegt, die Renovierung erst in 2 Jahren durchzuführen, um bis dahin Geld anzusparen. Er geht davon aus, dass er monatlich nachschüssig € 2.400 auf ein Konto einzahlen könnte. Dadurch möchte er innerhalb von 2 Jahren € 60.000 ansparen.

1) Berechnen Sie denjenigen effektiven Jahreszinssatz *i*, bei dem der Obsthändler sein Sparziel genau erreichen würde.

2) Begründen Sie ohne Berechnung, warum der zugehörige effektive Jahreszinssatz niedriger ist, wenn die monatlichen Einzahlungen vorschüssig erfolgen.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Die tägliche Nachfrage X nach einer bestimmten Obstsorte ist bei diesem Obsthändler annähernd normalverteilt. Der Graph der zugehörigen Verteilungsfunktion ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



1) Lesen Sie aus der Abbildung den Erwartungswert μ und die Wahrscheinlichkeit $P(X \leq 14)$ ab.

$\mu =$ _____ ME

$P(X \leq 14) =$ _____

2) Ermitteln Sie mithilfe der abgelesenen Werte die Standardabweichung von X.

Der Obsthändler möchte herausfinden, welche Menge dieser Obstsorte er lagern sollte (Bestandsmenge). Zur Ermittlung der optimalen Bestandsmenge kann das sogenannte *Zeitungsjungen-Modell* verwendet werden.
Laut diesem Modell ist die Bestandsmenge q dann optimal, wenn Folgendes gilt:
Die Wahrscheinlichkeit, dass die tägliche Nachfrage höchstens q ist, beträgt $\frac{p-c}{p}$, also:

$P(X \leq q) = \frac{p-c}{p}$

q … optimale Bestandsmenge in ME
c … Einkaufspreis in GE/ME
p … Verkaufspreis in GE/ME

3) Ermitteln Sie mithilfe der obigen Abbildung für $c = 2$ GE/ME und $p = 5$ GE/ME die zugehörige optimale Bestandsmenge.

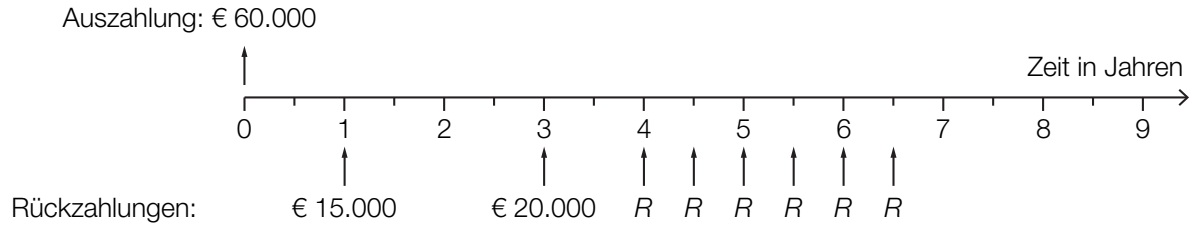
Man betrachtet den Ausdruck $\frac{p-c}{p}$ mit $p \neq 0$.

4) Kreuzen Sie die auf diesen Ausdruck zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]*

Wenn man für p und c die gleiche positive Zahl einsetzt, ist der Ausdruck $\frac{p-c}{p}$ nicht definiert.	☐
Der Ausdruck $\frac{p-c}{p}$ kann auch in der Form $p - c : p$ angeschrieben werden.	☐
Wenn sowohl p als auch c verdoppelt werden, bleibt der Wert des Ausdrucks $\frac{p-c}{p}$ unverändert.	☐
Wenn p das Doppelte von c ist, dann hat der Ausdruck $\frac{p-c}{p}$ den Wert $\frac{1}{3}$.	☐
Der Ausdruck $\frac{p-c}{p}$ kann für $p \neq 1$ zu $1 - c$ vereinfacht werden.	☐

Möglicher Lösungsweg

a1)



a2) $60\,000 = \frac{15\,000}{1{,}03^2} + \frac{20\,000}{1{,}03^6} + R \cdot \frac{1{,}03^6 - 1}{0{,}03} \cdot \frac{1}{1{,}03^{13}} \quad \Rightarrow \quad R = 6\,609{,}203...$

Die Ratenhöhe beträgt € 6.609,20.

b1) q_{12} ... monatlicher Aufzinsungsfaktor

$$60\,000 = 2\,400 \cdot \frac{q_{12}^{24} - 1}{q_{12} - 1}$$

Berechnung mittels Technologieeinsatz: $q_{12} = 1{,}00353...$

$i = q_{12}^{12} - 1 = 0{,}04319...$

Der effektive Jahreszinssatz beträgt rund 4,32 %.

b2) Im Falle vorschüssiger Einzahlungen wird jede Einzahlung 1 Monat länger verzinst. Da der Endwert gleich hoch ist, muss im Vergleich zu nachschüssigen Einzahlungen der zugehörige effektive Jahreszinssatz niedriger sein.

c1) $\mu = 16$ ME
$P(X \leq 14) = 0{,}2$

c2) Berechnung mittels Technologieeinsatz: $\sigma = 2{,}376...$
Die Standardabweichung beträgt rund 2,38 ME.

c3) $\frac{5-2}{5} = 0{,}6$

Ablesen derjenigen Menge q, für die gilt: $P(X \leq q) = 0{,}6$
$q \approx 16{,}6$ ME
Toleranzbereich: [16,4; 16,8]

c4)

Wenn sowohl p als auch c verdoppelt werden, bleibt der Wert des Ausdrucks $\frac{p-c}{p}$ unverändert.	☒

Lösungsschlüssel

a1) 1 × A1: für das richtige Veranschaulichen der Rückzahlungen
a2) 1 × A2: für den richtigen Ansatz
1 × B: für das richtige Berechnen der Ratenhöhe
b1) 1 × B: für das richtige Berechnen des effektiven Jahreszinssatzes
b2) 1 × D: für das richtige Begründen
c1) 1 × C1: für das richtige Ablesen des Erwartungswerts und der Wahrscheinlichkeit
c2) 1 × B: für das richtige Ermitteln der Standardabweichung
c3) 1 × C2: für das richtige Ermitteln der optimalen Bestandsmenge
(Toleranzbereich: [16,4; 16,8])
c4) 1 × C3: für das richtige Ankreuzen

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

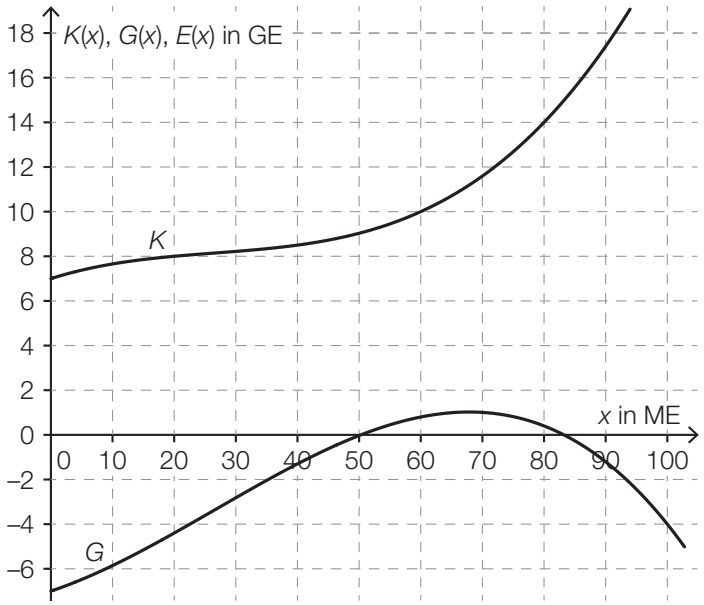
Produktion von CD-Rohlingen und DVD-Rohlingen*

Aufgabennummer: B_490

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Unbeschriebene CDs und DVDs werden als *Rohlinge* bezeichnet.

a) In der nachstehenden Abbildung sind der Graph der Kostenfunktion K und der Graph der Gewinnfunktion G für die Produktion von CD-Rohlingen dargestellt.



1) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den Graphen der zugehörigen linearen Erlösfunktion E ein.

2) Ermitteln Sie den Preis, zu dem die CD-Rohlinge verkauft werden.

3) Lesen Sie aus der obigen Abbildung den maximalen Gewinn G_{max} ab.

$G_{max} \approx$ _____ GE

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Für bestimmte hochwertige DVD-Rohlinge ist das Unternehmen Monopolist.

Für die Preisfunktion der Nachfrage p_N gilt:

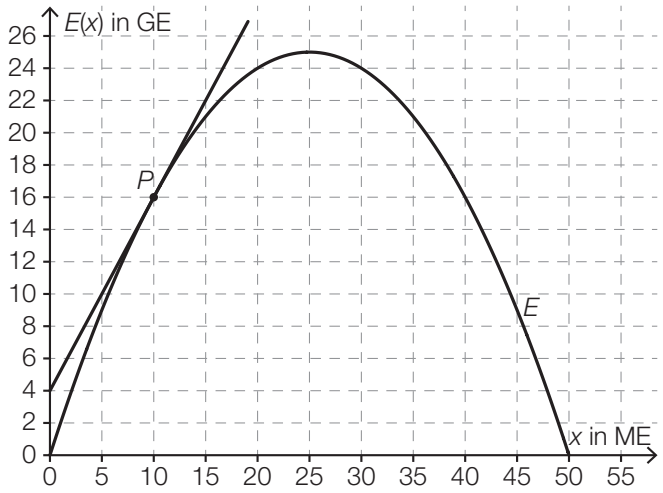
$p_N(x) = a \cdot x + b$

x ... nachgefragte Menge in ME
$p_N(x)$ ... Preis bei der nachgefragten Menge x in GE/ME

1) Kreuzen Sie denjenigen Ausdruck an, der die Sättigungsmenge angibt. *[1 aus 5]]*

$\frac{a}{b}$	☐
$\frac{b}{a}$	☐
$-\frac{a}{b}$	☐
$-\frac{b}{a}$	☐
$-b - a$	☐

c) In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Erlösfunktion E für spezielle DVD-Rohlinge dargestellt. Zusätzlich ist die Tangente an den Graphen von E in einem Punkt P eingezeichnet.



1) Bestimmen Sie mithilfe der obigen Abbildung die Steigung k der Tangente.

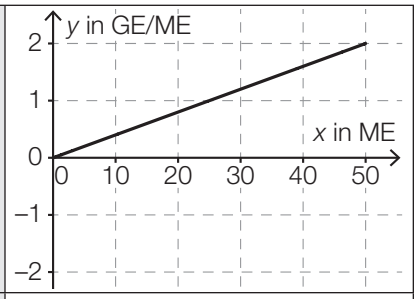
$k =$ _____ GE/ME

2) Interpretieren Sie den Wert der Steigung der Tangente im gegebenen Sachzusammenhang.

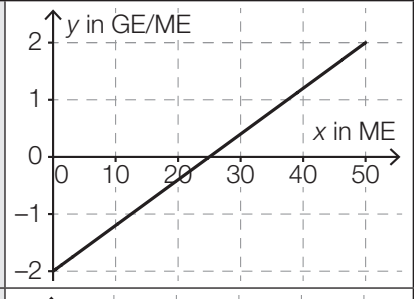
3) Ordnen Sie den beiden Funktionen jeweils den zugehörigen Graphen aus A bis D zu.
[2 zu 4]

Grenzerlösfunktion E'	
Preisfunktion der Nachfrage p_N	

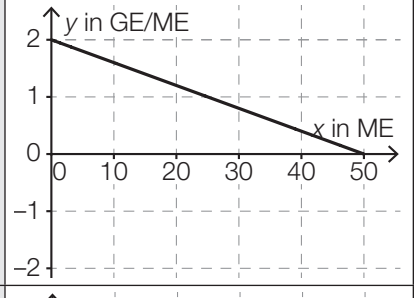
A



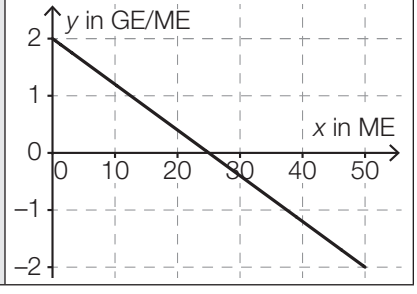
B



C

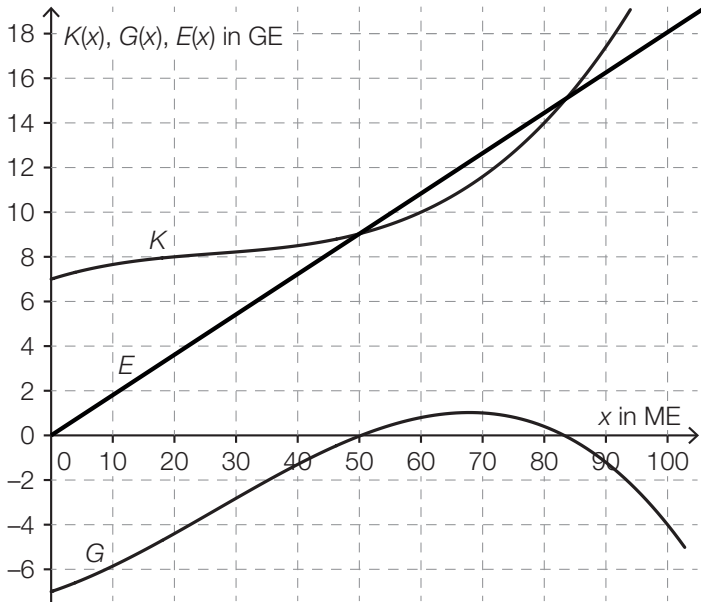


D



Möglicher Lösungsweg

a1)



a2) $p = \frac{E(100)}{100} = \frac{18}{100} = 0{,}18$

Der Preis beträgt 0,18 GE/ME.

Toleranzbereich: [0,16; 0,20]

a3) $G_{max} \approx 1$ GE

Toleranzbereich: [0,8; 1,2]

b1)

$-\frac{b}{a}$	☒

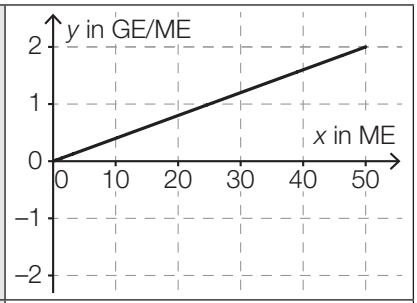
c1) $k = 1{,}2$ GE/ME

c2) Wird bei einem Absatz von 10 ME der Absatz um 1 ME erhöht, dann steigt der Erlös um rund 1,2 GE.

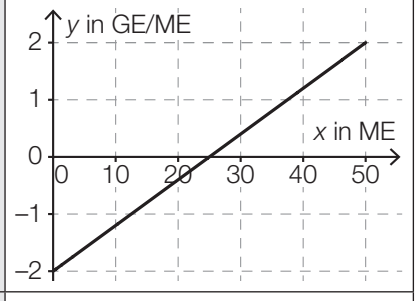
c3)

Grenzerlösfunktion E'	D
Preisfunktion der Nachfrage p_N	C

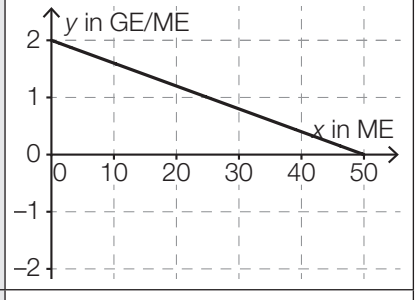
A



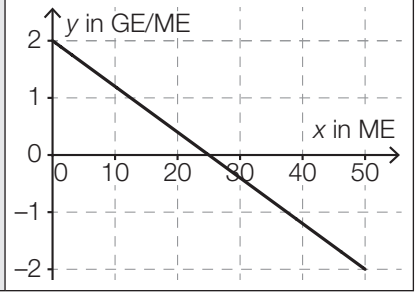
B



C



D



Lösungsschlüssel

a1) 1 × B1: für das richtige Einzeichnen des Graphen der Erlösfunktion
a2) 1 × B2: für das richtige Ermitteln des Preises (Toleranzbereich: [0,16; 0,20])
a3) 1 × C: für das richtige Ablesen des maximalen Gewinns (Toleranzbereich: [0,8; 1,2])
b1) 1 × C: für das richtige Ankreuzen
c1) 1 × C1: für das richtige Bestimmen der Steigung
c2) 1 × C2: für das richtige Interpretieren des Wertes der Steigung im gegebenen Sachzusammenhang
c3) 1 × C3: für das richtige Zuordnen

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Pflanzenwachstum*

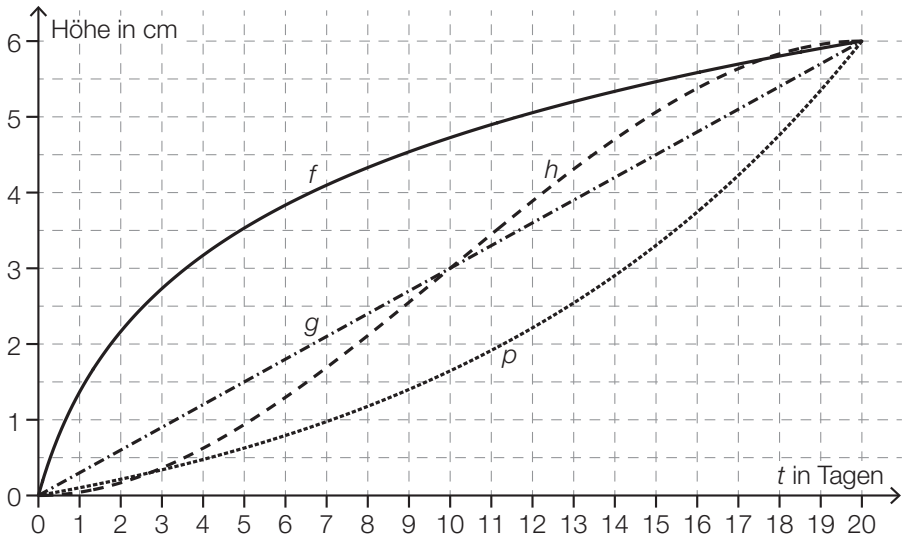
Aufgabennummer: A_292

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Die Entwicklung der Höhe von vier verschiedenen Pflanzen wurde über einen Zeitraum von 20 Tagen beobachtet und lässt sich jeweils näherungsweise durch die Funktion f, g, h bzw. p beschreiben.

t ... Zeit ab Beobachtungsbeginn in Tagen
$f(t)$, $g(t)$, $h(t)$, $p(t)$ ... Höhe der entsprechenden Pflanze zur Zeit t in cm

Die nachstehende Abbildung zeigt die Graphen dieser vier Funktionen.



Zur Zeit $t = 20$ sind diese vier Pflanzen gleich hoch.

1) Ermitteln Sie mithilfe der obigen Abbildung die mittlere Änderungsrate der Höhe in Zentimetern pro Tag im Zeitintervall [0; 20].

2) Ordnen Sie den beiden Aussagen jeweils die entsprechende Funktion aus A bis D zu. *[2 zu 4]*

Im Zeitintervall [0; 20] ist die 1. Ableitung streng monoton steigend.	
Im Zeitintervall [0; 20] ist die 2. Ableitung immer negativ.	

A	f
B	g
C	h
D	p

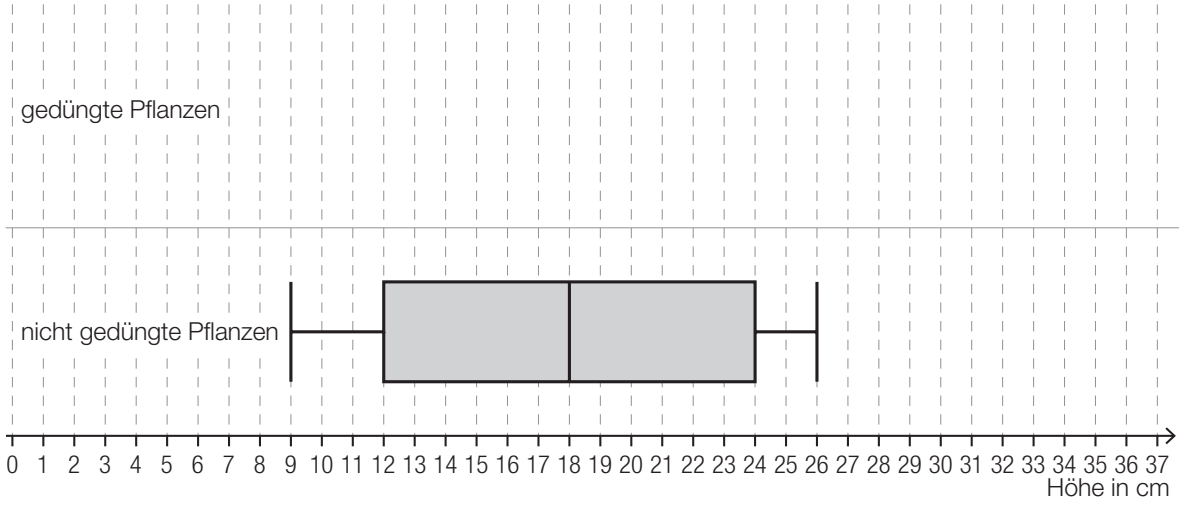
* ehemalige Klausuraufgabe

b) Die Höhe der Pflanzen einer bestimmten Pflanzenart wird untersucht, wobei einige der Pflanzen regelmäßig gedüngt werden und die anderen nicht. Nach einer bestimmten Zeit werden die Höhen aller beobachteten Pflanzen gemessen.

Der Boxplot für die Höhen der nicht gedüngten Pflanzen ist im unten stehenden Diagramm dargestellt.

Für die Höhen der gedüngten Pflanzen gilt:
Minimum: 19 cm
1. Quartil: 21 cm
Median: 25 cm
Interquartilsabstand: 6 cm
Spannweite: 16 cm

1) Zeichnen Sie im nachstehenden Diagramm den Boxplot für die Höhen der gedüngten Pflanzen ein.



Aus dem Boxplot für die Höhen der nicht gedüngten Pflanzen kann Folgendes abgelesen werden:
Mindestens ein Viertel der Pflanzen hat eine Höhe kleiner als oder gleich einem Wert *a*, und zugleich haben mindestens drei Viertel der Pflanzen eine Höhe größer als oder gleich diesem Wert *a*.

2) Geben Sie diesen Wert *a* an.

a = _____ cm

c) Die Höhe einer bestimmten Pflanze wird täglich zu Mittag gemessen. Zu Beobachtungsbeginn hat die Pflanze die Höhe H_0. Sie wächst um 0,5 % pro Tag bezogen auf die Höhe des jeweils vorangegangenen Tages.

1) Erstellen Sie mithilfe von H_0 eine Formel zur Berechnung der Höhe H dieser Pflanze 10 Tage nach Beobachtungsbeginn.

$H =$ _____

Möglicher Lösungsweg

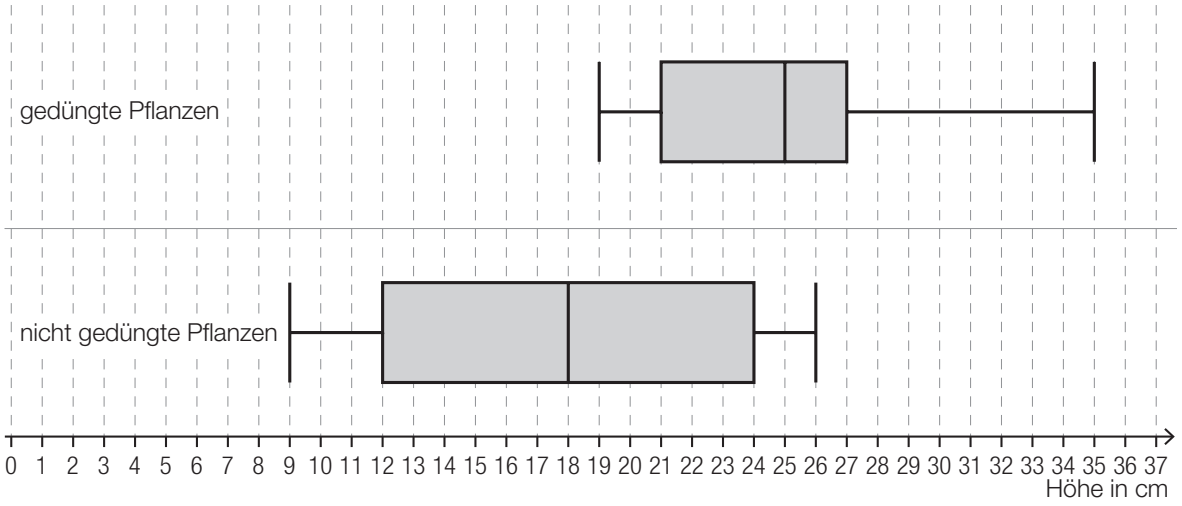
a1) mittlere Änderungsrate der Höhe in Zentimetern pro Tag: $\frac{6}{20} = 0{,}3$

a2)

Im Zeitintervall [0; 20] ist die 1. Ableitung streng monoton steigend.	D
Im Zeitintervall [0; 20] ist die 2. Ableitung immer negativ.	A

A	*f*
B	*g*
C	*h*
D	*p*

b1)



b2) $a = 12$ cm

c1) $H = H_0 \cdot 1{,}005^{10}$

oder:

$H = H_0 \cdot 1{,}0511...$

Lösungsschlüssel

a1) 1 x B: für das richtige Ermitteln der mittleren Änderungsrate
a2) 1 x C: für das richtige Zuordnen
b1) 1 x A: für das richtige Einzeichnen des Boxplots
b2) 1 x C: für das richtige Angeben des Wertes
c1) 1 x A: für das richtige Erstellen der Formel

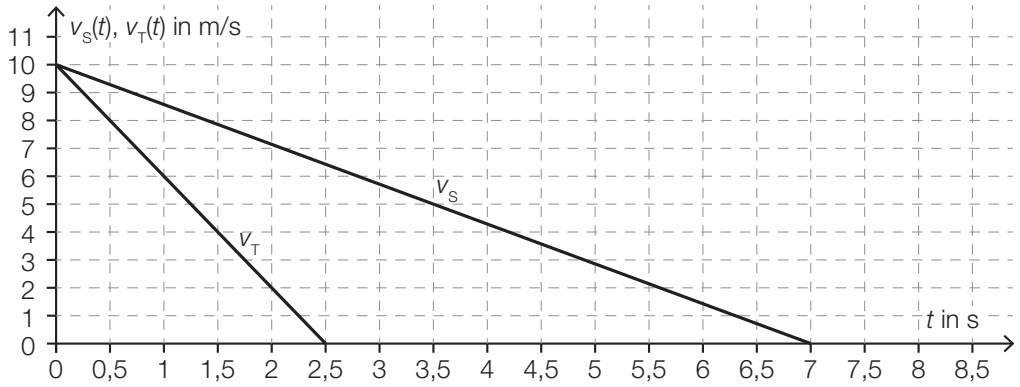
Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Winterliche Fahrbahnverhältnisse im Straßenverkehr*

Aufgabennummer: A_143

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Die Bremswege eines PKW auf schneebedeckter sowie auf trockener Fahrbahn werden miteinander verglichen.
Das nachstehende Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm zeigt modellhaft den zeitlichen Verlauf der Geschwindigkeit v_S auf schneebedeckter Fahrbahn sowie den zeitlichen Verlauf der Geschwindigkeit v_T auf trockener Fahrbahn vom Reagieren der Bremse bis zum Stillstand des PKW.



1) Ermitteln Sie mithilfe des obigen Diagramms die (negative) Beschleunigung auf schneebedeckter Fahrbahn.

Der Bremsweg ist diejenige Strecke, die der PKW vom Reagieren der Bremse ($t = 0$) bis zum Stillstand zurücklegt.

2) Veranschaulichen Sie im obigen Diagramm den Bremsweg auf trockener Fahrbahn.

3) Ermitteln Sie mithilfe des obigen Diagramms die Differenz zwischen dem Bremsweg auf schneebedeckter Fahrbahn und dem Bremsweg auf trockener Fahrbahn.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Auf einer geraden Teststrecke werden mit zwei PKWs Bremsversuche durchgeführt. Die beiden PKWs fahren dabei in die gleiche Richtung. Während der ersten 5 s des Bremsvorgangs werden die Abstände der beiden PKWs zu einer Markierungslinie gemessen. Diese Abstände können näherungsweise durch die nachstehenden Funktionen beschrieben werden.

$s_A(t) = -2 \cdot t^2 + 20 \cdot t + 12$
$s_B(t) = -2 \cdot t^2 + 24 \cdot t$

t ... Zeit in s
$s_A(t)$ ... Abstand des PKW *A* zur Markierungslinie zur Zeit t in m
$s_B(t)$ ... Abstand des PKW *B* zur Markierungslinie zur Zeit t in m

1) Berechnen Sie den Abstand des PKW *A* zur Markierungslinie zur Zeit $t = 2$.

2) Zeigen Sie, dass PKW *A* zur Zeit $t = 3$ langsamer als PKW *B* fährt.

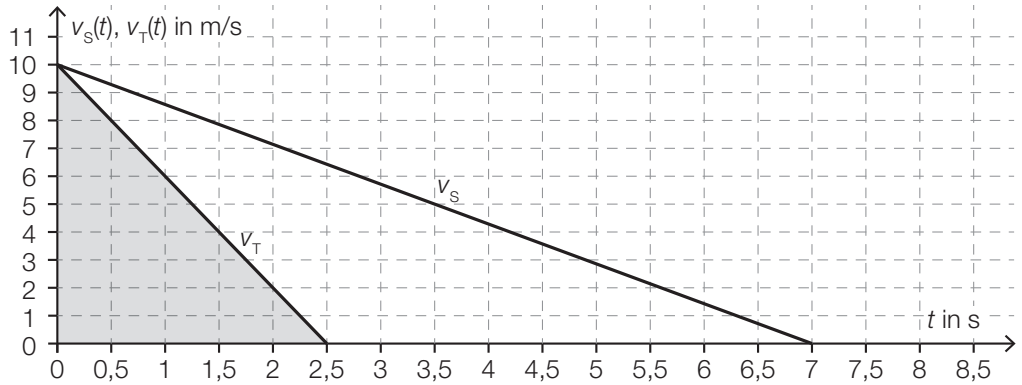
Möglicher Lösungsweg

a1) $\frac{\Delta v_S(t)}{\Delta t} = \frac{-10}{7} = -1{,}428...$

Die Beschleunigung beträgt rund –1,43 m/s^2.

Wird der Betrag der Beschleunigung angegeben, so ist dies ebenfalls als richtig zu werten.

a2)



a3) Bremsweg auf schneebedeckter Fahrbahn in m: $\frac{10 \cdot 7}{2} = 35$

Bremsweg auf trockener Fahrbahn in m: $\frac{10 \cdot 2{,}5}{2} = 12{,}5$

$35 - 12{,}5 = 22{,}5$

Die Differenz zwischen dem Bremsweg auf schneebedeckter Fahrbahn und dem Bremsweg auf trockener Fahrbahn beträgt 22,5 m.

b1) $s_A(2) = 44$

Der Abstand des PKW *A* zur Markierungslinie zur Zeit $t = 2$ beträgt 44 m.

b2) $s_A'(3) = 8$
$s_B'(3) = 12$

oder:

$s_A'(t) = -4 \cdot t + 20$
$s_B'(t) = -4 \cdot t + 24$
$s_A'(t) < s_B'(t)$

PKW *A* fährt zur Zeit $t = 3$ langsamer als PKW *B*.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × C: für das richtige Ermitteln der Beschleunigung auf schneebedeckter Fahrbahn
(Wird der Betrag der Beschleunigung angegeben, so ist dies ebenfalls als richtig zu werten.)

a2) 1 × A: für das richtige Veranschaulichen des Bremswegs auf trockener Fahrbahn

a3) 1 × B: für das richtige Ermitteln der Differenz der Bremswege

b1) 1 × B: für das richtige Berechnen des Abstands

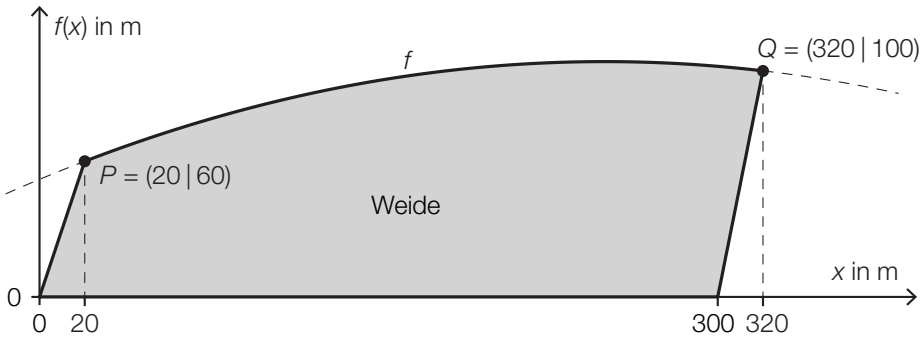
b2) 1 × D: für das richtige Zeigen

Kühe auf der Weide*

Aufgabennummer: A_141

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) In der nachstehenden Abbildung ist eine Weide modellhaft dargestellt. Die obere Begrenzungslinie kann mithilfe einer Funktion f beschrieben werden. Die anderen drei Begrenzungslinien verlaufen geradlinig.



1) Erstellen Sie mithilfe von f eine Formel zur Berechnung des Flächeninhalts A dieser Weide.

$A =$ _____

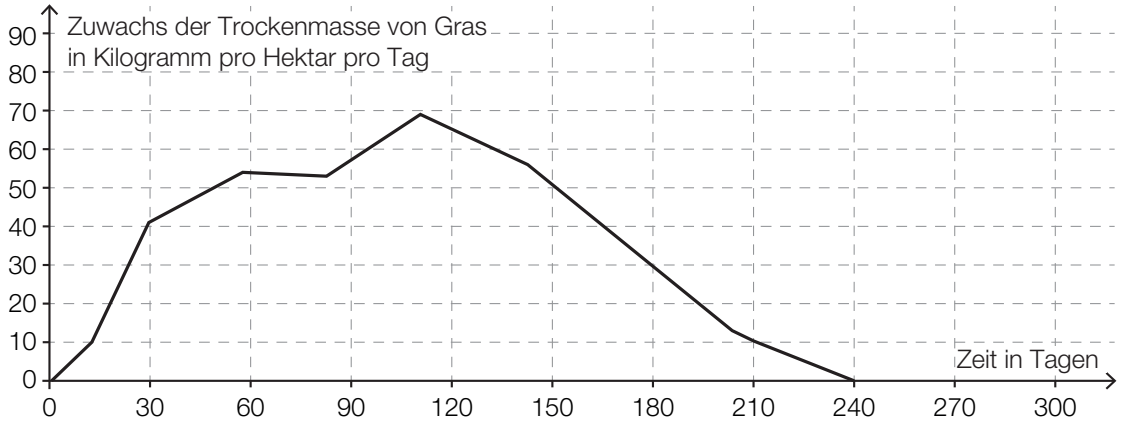
Für die Funktion f gilt: $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + 52$

2) Erstellen Sie unter Verwendung der in der obigen Abbildung angegebenen Koordinaten ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten a und b.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Um zu ermitteln, wie viele Kühe auf einer Weide gehalten werden können, ist der Zuwachs der Trockenmasse von Gras auf dieser Weide von Bedeutung.

Für eine bestimmte Weide wurde auf Basis mehrjähriger Messungen der nachstehend dargestellte Graph erstellt.



1 Hektar (ha) = 10 000 m^2

1) Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen des jeweils richtigen Satzteils so, dass eine korrekte Aussage entsteht. *[Lückentext]*

Im Zeitintervall [0; 240] liefert diese Weide rund _____ ① _____ ② _____ Trockenmasse von Gras.

①	
90	☐
900	☐
9 000	☐

②	
kg/m^2	☐
kg/ha	☐
t/ha	☐

c) Die Körpergröße von Rindern wird durch die sogenannte *Widerristhöhe* beschrieben.

Eine Landwirtin züchtet eine Rinderrasse, für die die Widerristhöhe in Abhängigkeit vom Alter modellhaft durch die Funktion h beschrieben wird.

$h(t) = 0{,}0024 \cdot t^3 - 0{,}19 \cdot t^2 + 5{,}73 \cdot t + 73$ mit $1 \leq t \leq 24$

t … Alter in Monaten
$h(t)$ … Widerristhöhe eines Rindes im Alter t in cm

1) Berechnen Sie das Alter, in dem gemäß diesem Modell eine Widerristhöhe von 115 cm erreicht wird.

2) Weisen Sie mithilfe der 2. Ableitung von h nach, dass der Graph von h im gesamten Definitionsbereich [1; 24] negativ gekrümmt ist.

Es gilt: $h'(12) \approx 2{,}2$

3) Interpretieren Sie den Wert 2,2 im gegebenen Sachzusammenhang. Geben Sie dabei die zugehörige Einheit an.

Möglicher Lösungsweg

a1) $A = \frac{60 \cdot 20}{2} + \int_{20}^{320} f(x)\,dx - \frac{100 \cdot 20}{2}$ *oder* $A = \int_{20}^{320} f(x)\,dx - 400$

a2) I: $f(20) = 60$
II: $f(320) = 100$

oder:

I: $a \cdot 20^2 + b \cdot 20 + 52 = 60$
II: $a \cdot 320^2 + b \cdot 320 + 52 = 100$

b1)

①	
9000	☒

②	
kg/ha	☒

c1) $h(t) = 115$

oder:

$0{,}0024 \cdot t^3 - 0{,}19 \cdot t^2 + 5{,}73 \cdot t + 73 = 115$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$t = 10{,}50...$

Im Alter von rund 10,5 Monaten wird gemäß diesem Modell eine Widerristhöhe von 115 cm erreicht.

c2) $h''(t) = 0{,}0144 \cdot t - 0{,}38$

h'' ist eine steigende lineare Funktion mit der Nullstelle $t_0 = 26{,}38...$
Für alle $t < t_0$ ist $h''(t)$ negativ. Der Graph von h ist daher für alle $t < t_0$ (und somit insbesondere für alle $t \in [1; 24]$) negativ gekrümmt.

c3) Die Widerristhöhe nimmt im Alter von 12 Monaten um rund 2,2 cm/Monat zu.

Lösungsschlüssel

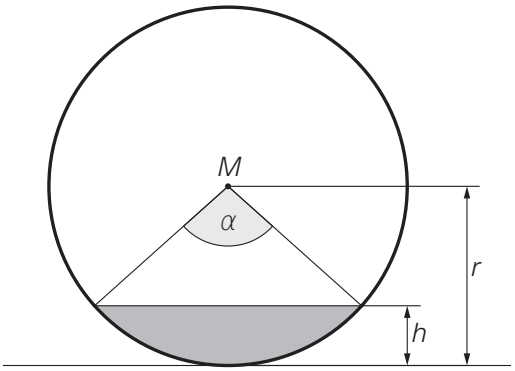
a1) 1 × A1: für das richtige Erstellen der Formel
a2) 1 × A2: für das richtige Erstellen des Gleichungssystems
b1) 1 × C: für das richtige Ergänzen der beiden Textlücken
c1) 1 × B: für das richtige Berechnen des Alters
c2) 1 × D: für das richtige Nachweisen mithilfe der 2. Ableitung von h
c3) 1 × C: für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang unter Angabe der zugehörigen Einheit

Rund um die Heizung*

Aufgabennummer: A_140

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Die nachstehende Abbildung zeigt einen waagrecht gelagerten, zylinderförmigen Öltank in der Ansicht von vorne. Der Punkt M ist der Mittelpunkt des dargestellten Kreises mit dem Radius r.



horizontaler Boden

1) Erstellen Sie mithilfe von r und α eine Formel zur Berechnung der Füllhöhe h.

$h =$ _____

Für das Volumen V eines 2 m langen Öltanks gilt:

$V = r^2 \cdot \pi \cdot 2$

2) Berechnen Sie, um wie viel Prozent das Volumen größer wäre, wenn der Radius um 20 % größer wäre.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Eine Heizung beginnt um 15 Uhr, einen Wohnraum zu erwärmen. Ab diesem Zeitpunkt kann die Raumtemperatur durch die Funktion T beschrieben werden.

$T(t) = 24 - 6 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$

t ... Heizdauer in h mit $t = 0$ für 15 Uhr
$T(t)$ ... Raumtemperatur nach der Heizdauer t in °C

1) Bestimmen Sie die Raumtemperatur um 15 Uhr.

Um 16 Uhr beträgt die Raumtemperatur 21 °C.

2) Berechnen Sie den Parameter λ.

Möglicher Lösungsweg

a1) $h = r - r \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

a2) $V_{neu} = (1{,}2 \cdot r)^2 \cdot \pi \cdot 2 = 1{,}44 \cdot r^2 \cdot \pi \cdot 2 = 1{,}44 \cdot V$

Das Volumen wäre um 44 % größer.

b1) $T(0) = 18$

Um 15 Uhr beträgt die Raumtemperatur 18 °C.

b2) $T(1) = 21$ *oder* $24 - 6 \cdot e^{-\lambda \cdot 1} = 21$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$\lambda = \ln(2) = 0{,}693...$

Lösungsschlüssel

a1) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel
a2) 1 × B: für das richtige Berechnen des Prozentsatzes
b1) 1 × B1: für das richtige Bestimmen der Raumtemperatur
b2) 1 × B2: für das richtige Berechnen des Parameters λ

Fahrscheine*

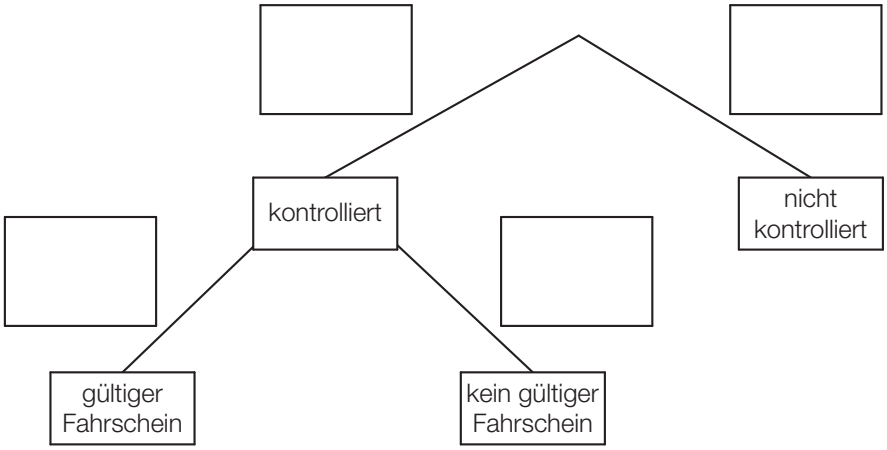
Aufgabennummer: A_133

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Im Jahr 2016 wurden von den Wiener Linien insgesamt 954,2 Millionen Fahrgäste transportiert. Bei 6,6 Millionen Fahrgästen wurden die Fahrscheine kontrolliert.
1,7 % dieser 6,6 Millionen Fahrgäste hatten keinen gültigen Fahrschein.

Das unten stehende Baumdiagramm soll den obigen Zusammenhang veranschaulichen.

1) Tragen Sie in diesem Baumdiagramm die fehlenden Wahrscheinlichkeiten ein.



In einem einfachen Modell geht man davon aus, dass diese Wahrscheinlichkeiten auch in den nachfolgenden Jahren gleich bleiben.

2) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Fahrgast kontrolliert wird und keinen gültigen Fahrschein hat.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Erfahrungsgemäß wird man bei einer Fahrt mit einer bestimmten U-Bahn-Linie mit einer Wahrscheinlichkeit von 2,5 % kontrolliert.

Eine Person fährt 300-mal mit dieser U-Bahn-Linie.

1) Ordnen Sie den beiden Wahrscheinlichkeiten jeweils das entsprechende Ereignis aus A bis D zu. *[2 zu 4]*

$\binom{300}{2} \cdot 0{,}975^{298} \cdot 0{,}025^{2}$	
$1 - \binom{300}{1} \cdot 0{,}975^{299} \cdot 0{,}025^{1} - \binom{300}{0} \cdot 0{,}975^{300} \cdot 0{,}025^{0}$	

A	Die Person wird genau 2-mal kontrolliert.
B	Die Person wird genau 2-mal nicht kontrolliert.
C	Die Person wird mindestens 2-mal nicht kontrolliert.
D	Die Person wird mindestens 2-mal kontrolliert.

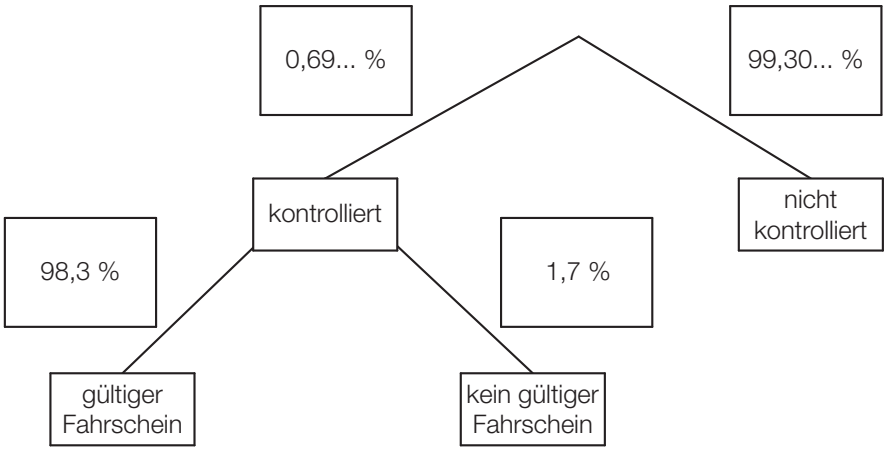
c) Für ein öffentliches Verkehrsmittel wurden an einem Tag 150 000 Fahrscheine verkauft.
Ein Vollpreisfahrschein kostet € 2,60, ein ermäßigter Fahrschein € 1,20.
Durch den Verkauf von x Vollpreisfahrscheinen und y ermäßigten Fahrscheinen wurden an diesem Tag insgesamt € 337.500 eingenommen.

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung von x und y.

2) Berechnen Sie x und y.

Möglicher Lösungsweg

a1)



a2) P(„kontrolliert und kein gültiger Fahrschein“) = 0,0069... · 0,017 = 0,00011...

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Fahrgast kontrolliert wird und keinen gültigen Fahrschein hat, beträgt rund 0,01 %.

b1)

$\binom{300}{2} \cdot 0{,}975^{298} \cdot 0{,}025^{2}$	A
$1 - \binom{300}{1} \cdot 0{,}975^{299} \cdot 0{,}025^{1} - \binom{300}{0} \cdot 0{,}975^{300} \cdot 0{,}025^{0}$	D

A	Die Person wird genau 2-mal kontrolliert.
B	
C	
D	Die Person wird mindestens 2-mal kontrolliert.

c1) I: $x + y = 150\,000$
II: $2{,}6 \cdot x + 1{,}2 \cdot y = 337\,500$

c2) Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$x = 112\,500$
$y = 37\,500$

Lösungsschlüssel

a1) 1 x A: für das richtige Eintragen der Wahrscheinlichkeiten im Baumdiagramm
a2) 1 x B: für das richtige Berechnen der Wahrscheinlichkeit
b1) 1 x C: für das richtige Zuordnen
c1) 1 x A: für das richtige Erstellen des Gleichungssystems
c2) 1 x B: für das richtige Berechnen von x und y

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Münzen (1)*

Aufgabennummer: A_276

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Susi und Markus spielen mit fairen Münzen. Beim Werfen einer fairen Münze treten die beiden Ereignisse „Kopf“ und „Zahl“ jeweils mit gleicher Wahrscheinlichkeit auf.

a) Susi hat eine Schachtel mit 3 Ein-Euro-Münzen und 5 Zwei-Euro-Münzen.
Markus hat eine Schachtel mit 2 Ein-Euro-Münzen und 3 Zwei-Euro-Münzen.
Beide ziehen aus ihrer Schachtel zufällig jeweils 1 Münze.

1) Geben Sie diejenigen Möglichkeiten an, die zu einem Gesamtwert von € 3 führen (bei Susi und Markus zusammen).

2) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass durch die beiden Ziehungen ein Gesamtwert von € 3 erzielt wird.

b) Markus will eine Zwei-Euro-Münze 10-mal werfen.
Susi stellt die Frage: „Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhalten wir mindestens 3-mal ‚Zahl‘?“

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei 10 Würfen mindestens 3-mal „Zahl“ geworfen wird.

c) Susi und Markus beschäftigen sich mit der Wahrscheinlichkeit, mit der „Zahl“ beim wiederholten Werfen einer Münze auftritt. Dabei stoßen sie auf folgende Gleichung:

$P(X \geq 1) = 1 - 0{,}5^n = 0{,}9375$

X ... Anzahl der Würfe mit dem Ergebnis „Zahl“

1) Berechnen Sie n.

2) Interpretieren Sie die Bedeutung der Zahl n in diesem Zusammenhang.

* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

a1) Die Möglichkeit, dass die Summe der gezogenen Münzen 3 Euro beträgt, besteht nur, wenn man entweder aus Susis Box 1 Ein-Euro-Münze und aus Markus' Box 1 Zwei-Euro-Münze zieht oder aus Susis Box 1 Zwei-Euro-Münze und aus Markus' Box 1 Ein-Euro-Münze zieht.

a2) $P(S = 1 \text{ und } M = 2) = \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{5}$

$P(S = 2 \text{ und } M = 1) = \frac{5}{8} \cdot \frac{2}{5}$

Die Summe dieser Wahrscheinlichkeiten ist die gesuchte Lösung:

$\frac{9}{40} + \frac{10}{40} = \frac{19}{40} = 47{,}5\ \%$

b1) Berechnung der Wahrscheinlichkeit mithilfe der Binomialverteilung: $n = 10$ und $p = 0{,}5$

$P(X \geq 3) = 0{,}9453... \approx 94{,}5\ \%$

c1) $n = \frac{\ln(0{,}0625)}{\ln(0{,}5)} = 4$

c2) n gibt an, wie oft man die Münze werfen muss, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von 93,75 % mindestens 1-mal „Zahl" geworfen wird.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × A: für das richtige Angeben der beiden Möglichkeiten
a2) 1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit

b1) 1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit

c1) 1 × B: für die richtige Berechnung von n
c2) 1 × C: für die richtige Interpretation von n

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Vergnügungspark (1)*

Aufgabennummer: A_208

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Ein kürzlich eröffneter Vergnügungspark ist ein beliebtes Ausflugsziel in der Region.

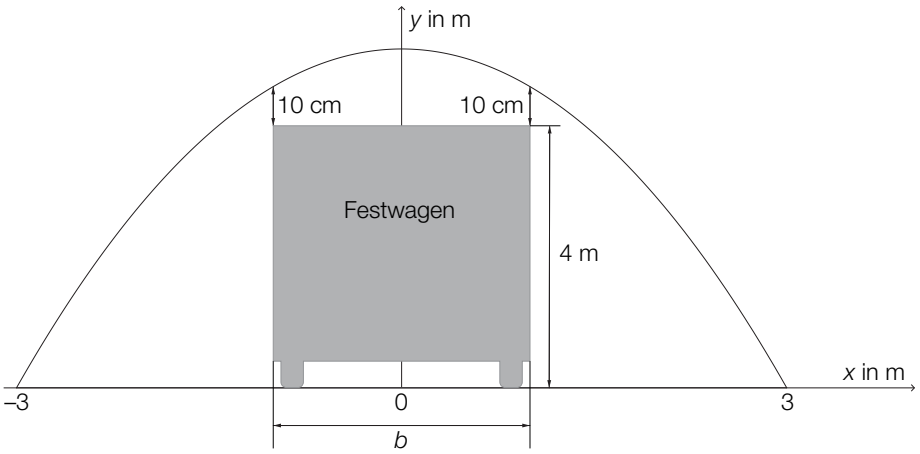
a) Beim Eingang zum Vergnügnungspark steht ein Torbogen. Dieser wird durch einen Teil des Graphen der Funktion mit folgender Gleichung beschrieben:

$y = 9 - x^2$

x, y ... Koordinaten in Metern (m)

Dabei wird der ebene Boden durch die x-Achse beschrieben.

Bei einer Parade muss ein 4 Meter hoher Festwagen durch den Torbogen geschoben werden. Nach oben hin muss ein senkrechter Minimalabstand von 10 cm eingehalten werden (siehe Skizze – nicht maßstabgetreu).



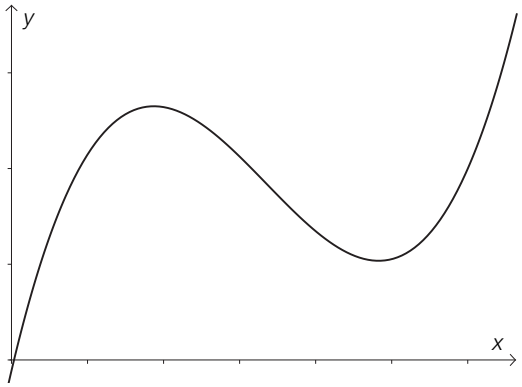
– Berechnen Sie, welche Breite b der Festwagen maximal haben darf.

Vor der Parade wird das Tor mit einer Folie verschlossen.

– Berechnen Sie den Flächeninhalt der dazu benötigten Folie.

* ehemalige Klausuraufgabe

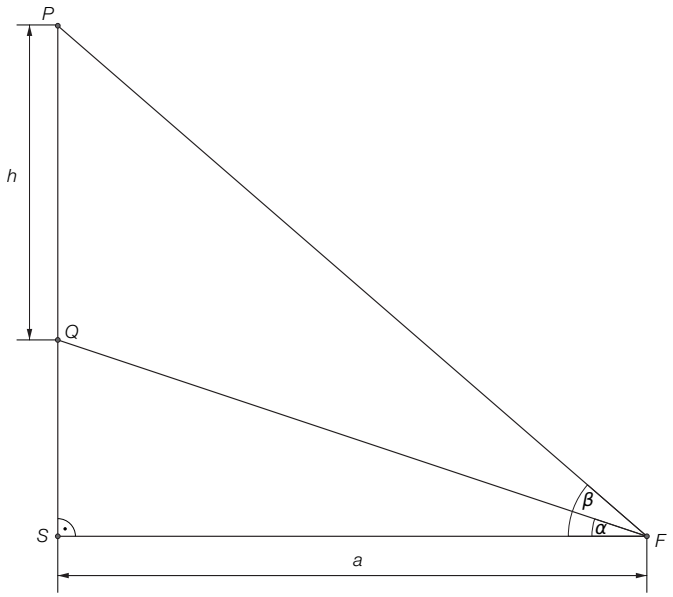
b) Eine der Hauptattraktionen ist die Hochschaubahn. Ein Teilstück kann durch die Polynomfunktion modelliert werden, deren Graph in der folgenden Abbildung zu sehen ist:



– Erklären Sie, welchen Grad diese Polynomfunktion mindestens haben muss.

c) Im Vergnügungspark gibt es ein Kino.

Fiona sitzt *a* Meter von der Leinwand entfernt (Punkt *F*). Der Höhenwinkel zum unteren Ende der Leinwand (Punkt *Q*) wird mit α bezeichnet, der Höhenwinkel zum oberen Ende der Leinwand (Punkt *P*) wird mit β bezeichnet.



– Erstellen Sie eine Formel für die Berechnung der Höhe *h* der Leinwand aus *a*, α und β.

$h =$ _____

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $4{,}1 = 9 - x^2$
$x^2 = 4{,}9$
$x = \pm 2{,}213\ldots$

Der Festwagen darf rund 4,42 m breit sein.

$\int_{-3}^{3} (9 - x^2)\mathrm{d}x = 36$

Der Flächeninhalt der benötigten Folie beträgt 36 m^2.

b) Diese Polynomfunktion hat im dargestellten Intervall 2 lokale Extremstellen. Somit muss die 1. Ableitung dieser Funktion 2 Nullstellen haben, also mindestens eine Polynomfunktion 2. Grades sein. Somit muss die gegebene Polynomfunktion mindestens Grad 3 haben.

oder:

Eine Gerade parallel zur x-Achse hat 3 Schnittpunkte mit dem Graphen der Funktion. Somit muss die gegebene Polynomfunktion mindestens Grad 3 haben.

c) rechtwinkeliges Dreieck FPS: $\tan(\beta) = \frac{\overline{SP}}{a} \Rightarrow \overline{SP} = a \cdot \tan(\beta)$

rechtwinkeliges Dreieck FQS: $\tan(\alpha) = \frac{\overline{SQ}}{a} \Rightarrow \overline{SQ} = a \cdot \tan(\alpha)$

$h = \overline{SP} - \overline{SQ}$
$h = a \cdot \tan(\beta) - a \cdot \tan(\alpha) = a \cdot (\tan(\beta) - \tan(\alpha))$

Lösungsschlüssel

a) 1 × B1: für die richtige Berechnung der Breite b
1 × B2: für die richtige Berechnung des Flächeninhalts

b) 1 × D: für eine richtige Erklärung

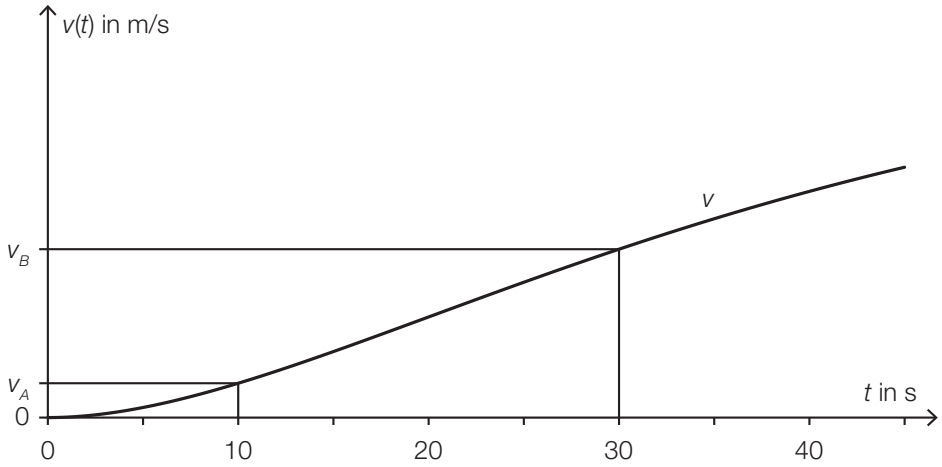
c) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel

Straßenbahn (3)*

Aufgabennummer: A_123

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Eine Straßenbahn fährt von einer Haltestelle los. Ihr Geschwindigkeitsverlauf für die ersten 45 Sekunden ist im nachstehenden Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm dargestellt.



t ... Zeit in s
$v(t)$ ... Geschwindigkeit zur Zeit t in m/s

Die Geschwindigkeit der Straßenbahn nimmt im Zeitintervall [10; 30] linear zu.

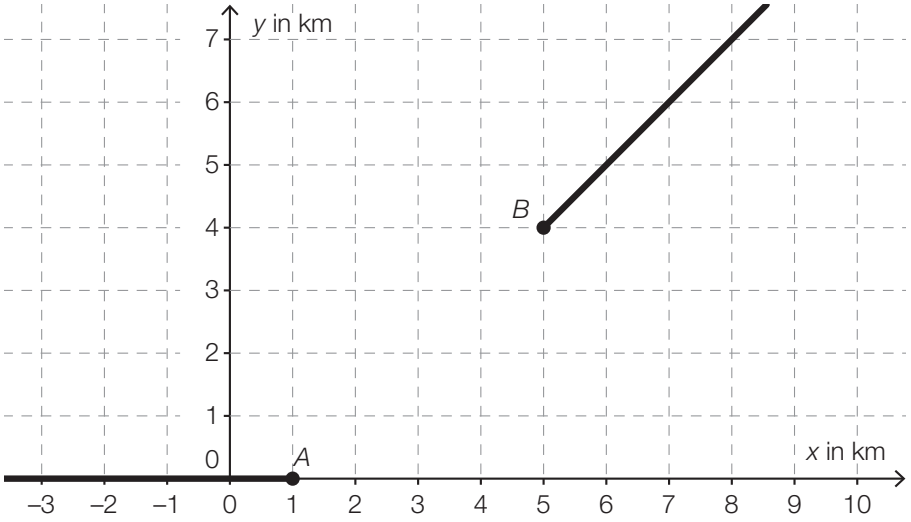
1) Interpretieren Sie die Bedeutung der Steigung dieser linearen Funktion im gegebenen Sachzusammenhang.

2) Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung der Geschwindigkeit der Straßenbahn 15 Sekunden nach Beginn der Fahrt aus v_A und v_B.

$v(15) =$ _____

* ehemalige Klausuraufgabe

b) In der nachstehenden Abbildung sind 2 geradlinige Gleise, die im Punkt A bzw. im Punkt B enden, modellhaft in der Ansicht von oben dargestellt.



Diese Gleise sollen durch ein Gleisstück knickfrei verbunden werden. „Knickfrei“ bedeutet, dass die entsprechenden Funktionen an den Stellen, an denen sie zusammenstoßen, den gleichen Funktionswert und die gleiche Steigung haben.

Diese Gleisverbindung soll durch eine Polynomfunktion g mit
$g(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ modelliert werden (x, $g(x)$ in km).

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten der Funktion g.

Möglicher Lösungsweg

a1) Die Steigung der linearen Funktion entspricht der Beschleunigung der Straßenbahn im betrachteten Zeitintervall.

a2) $v(15) = v_A + \frac{v_B - v_A}{4}$

b1) $g'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x + c$

$g(1) = 0$
$g(5) = 4$
$g'(1) = 0$
$g'(5) = 1$

oder:

$a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d = 0$
$a \cdot 5^3 + b \cdot 5^2 + c \cdot 5 + d = 4$
$3 \cdot a \cdot 1^2 + 2 \cdot b \cdot 1 + c = 0$
$3 \cdot a \cdot 5^2 + 2 \cdot b \cdot 5 + c = 1$

Lösungsschlüssel

a1) 1 × C: für die richtige Interpretation im gegebenen Sachzusammenhang
a2) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel für $v(15)$
b1) 1 × A1: für das richtige Erstellen der beiden Gleichungen mithilfe der Koordinaten der Punkte
1 × A2: für das richtige Erstellen der beiden Gleichungen mithilfe der 1. Ableitung

Kfz-Bestand (2)*

Aufgabennummer: B_302

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Die nachstehende Tabelle gibt den Kraftfahrzeug-Bestand (Kfz-Bestand) in Österreich für ausgewählte Jahre im Zeitraum von 1992 bis 2012 jeweils zum Jahresende an.

Ende des Jahres ...	Kfz-Bestand in Millionen
1992	4,5
1997	5,2
2002	5,4
2007	5,8
2012	6,3

Datenquelle: Statistik Austria (Hrsg.): *Statistisches Jahrbuch Österreichs 2015*. Wien: Verlag Österreich 2014, S. 446.

a) Die zeitliche Entwicklung des Kfz-Bestands soll mit den Daten der obigen Tabelle durch eine lineare Regressionsfunktion K beschrieben werden.

1) Ermitteln Sie eine Gleichung dieser linearen Regressionsfunktion. Wählen Sie $t = 0$ für das Ende des Jahres 1992.

2) Interpretieren Sie den Wert der Steigung dieser Funktion im gegebenen Sachzusammenhang.

3) Berechnen Sie, nach welcher Zeit gemäß diesem Modell mit einem Kfz-Bestand von 8 Millionen zu rechnen ist.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Um die zeitliche Entwicklung des Kfz-Bestands mit einem anderen mathematischen Modell zu beschreiben, wurden, ausgehend von den Daten der obigen Tabelle, die nachstehenden Berechnungen durchgeführt.

$\sqrt[20]{\frac{6{,}3}{4{,}5}} = 1{,}0169...$

$1{,}0169... - 1 = 0{,}0169... \approx 1{,}7\ \%$

1) Interpretieren Sie die Bedeutung der berechneten Zahl 1,7 % im gegebenen Sachzusammenhang.

Jemand berechnet weiters:

$2 = 1{,}0169...^{t}$

$t = \frac{\ln(2)}{\ln(1{,}0169...)} = 41{,}20... \approx 41{,}2$

2) Interpretieren Sie die Bedeutung der berechneten Zahl 41,2 im gegebenen Sachzusammenhang.

Möglicher Lösungsweg

a1) Ermittlung mittels Technologieeinsatz:

$K(t) = 0{,}084 \cdot t + 4{,}6$

t ... Zeit in Jahren, $t = 0$ für das Ende des Jahres 1992
$K(t)$ ... Kfz-Bestand zur Zeit t in Millionen

a2) Gemäß diesem Modell nimmt der Kfz-Bestand um 84 000 Kraftfahrzeuge pro Jahr zu.

a3) $K(t) = 8$ *oder* $0{,}084 \cdot t + 4{,}6 = 8$
$t = 40{,}47...$

Gemäß diesem Modell ist nach etwa 40,5 Jahren mit einem Kfz-Bestand von 8 Millionen zu rechnen.

Die Lösung kann entweder als Zeit nach Ende des Jahres 1992 oder als Kalenderjahr angegeben werden.

b1) Gemäß diesem Modell nimmt der Kfz-Bestand pro Jahr um rund 1,7 % zu.

b2) Gemäß diesem Modell verdoppelt sich der Kfz-Bestand nach (jeweils) rund 41,2 Jahren.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × B1: für das richtige Ermitteln der Gleichung der linearen Regressionsfunktion
a2) 1 × C: für die richtige Interpretation des Wertes der Steigung im gegebenen Sachzusammenhang
a3) 1 × B2: für die richtige Berechnung derjenigen Zeit, nach der mit einem Kfz-Bestand von 8 Millionen zu rechnen ist
b1) 1 × C1: für die richtige Interpretation der Zahl 1,7 % im gegebenen Sachzusammenhang
b2) 1 × C2: für die richtige Interpretation der Zahl 41,2 im gegebenen Sachzusammenhang

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Käseproduktion*

Aufgabennummer: B_468

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Der Produktionsleiter einer kleinen Käserei hat für eine bestimmte Käsesorte die täglichen Produktionskosten genauer untersucht.

a) Für die der Kostenfunktion K zugehörigen Grenzkostenfunktion K' gilt:

$K'(x) = 0{,}03 \cdot x^2 - 0{,}5 \cdot x + 5$

x … Produktionsmenge in kg
$K'(x)$ … Grenzkosten bei der Produktionsmenge x in €/kg

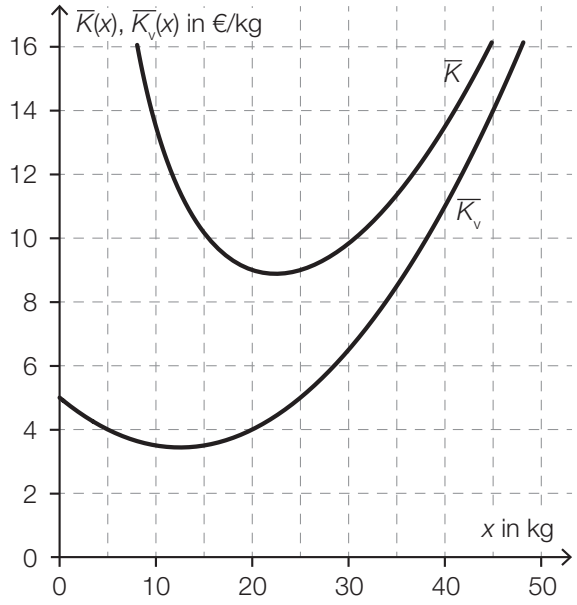
Bei einer Produktionsmenge von 5 kg entstehen Gesamtkosten von € 120.

1) Erstellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Kostenfunktion K.
2) Berechnen Sie die Kostenkehre.
3) Interpretieren Sie das Ergebnis der nachstehenden Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang.

$$\frac{K(10) - K(5)}{10 - 5} = 3$$

* ehemalige Klausuraufgabe

b) In der nachstehenden Abbildung sind die Graphen der Stückkostenfunktion $\overline{K}$ und der variablen Stückkostenfunktion $\overline{K_v}$ dargestellt.



1) Lesen Sie aus der obigen Abbildung das Betriebsoptimum ab. Geben Sie die zugehörige Einheit an.

2) Lesen Sie aus der obigen Abbildung die kurzfristige Preisuntergrenze ab. Geben Sie die zugehörige Einheit an.

c) Der Gewinn kann durch eine Polynomfunktion G beschrieben werden.

$G(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$

x ... Absatzmenge in kg
$G(x)$ ... Gewinn bei der Absatzmenge x in €

Bei einer Absatzmenge von 5 kg werden € 35 Verlust erzielt.
Bei einer Absatzmenge von 25 kg beträgt der Gewinn € 200.
Der maximale Gewinn wird bei einer Absatzmenge von 30 kg erzielt und beträgt € 215.

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem, mit dem die Koeffizienten von G ermittelt werden können.

2) Berechnen Sie diese Koeffizienten.

Möglicher Lösungsweg

a1) $K(x) = \int (0{,}03 \cdot x^2 - 0{,}5 \cdot x + 5)\,dx = 0{,}01 \cdot x^3 - 0{,}25 \cdot x^2 + 5 \cdot x + F$

$K(5) = 120$ *oder* $0{,}01 \cdot 5^3 - 0{,}25 \cdot 5^2 + 5 \cdot 5 + F = 120 \quad \Rightarrow \quad F = 100$

$K(x) = 0{,}01 \cdot x^3 - 0{,}25 \cdot x^2 + 5 \cdot x + 100$

x ... Produktionsmenge in kg
$K(x)$ ... Kosten bei der Produktionsmenge x in €

a2) $K''(x) = 0{,}06 \cdot x - 0{,}5$

$K''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 8{,}33...$

Die Kostenkehre liegt bei rund 8,3 kg.

a3) Wird die Produktion von 5 kg auf 10 kg gesteigert, so nehmen die Gesamtkosten um durchschnittlich € 3 pro kg zu.

b1) Betriebsoptimum: 22 kg
Toleranzbereich: [21 kg; 23 kg]

b2) kurzfristige Preisuntergrenze: 3,40 €/kg
Toleranzbereich: [3,10 €/kg; 3,70 €/kg]

c1) $G(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$
$G'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x + c$

I: $G(5) = -35$
II: $G(25) = 200$
III: $G(30) = 215$
IV: $G'(30) = 0$

oder:

I: $5^3 \cdot a + 5^2 \cdot b + 5 \cdot c + d = -35$
II: $25^3 \cdot a + 25^2 \cdot b + 25 \cdot c + d = 200$
III: $30^3 \cdot a + 30^2 \cdot b + 30 \cdot c + d = 215$
IV: $3 \cdot 30^2 \cdot a + 2 \cdot 30 \cdot b + c = 0$

c2) Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$a = -0{,}01$; $b = 0{,}25$; $c = 12$; $d = -100$

Lösungsschlüssel

a1) 1 × A: für das richtige Erstellen der Gleichung der Kostenfunktion (mit Integrationskonstante)
a2) 1 × B: für die richtige Berechnung der Kostenkehre
a3) 1 × C: für die richtige Interpretation im gegebenen Sachzusammenhang
b1) 1 × C1: für das richtige Ablesen des Betriebsoptimums im Toleranzbereich [21 kg; 23 kg] mit der Angabe der richtigen Einheit
b2) 1 × C2: für das richtige Ablesen der kurzfristigen Preisuntergrenze im Toleranzbereich [3,10 €/kg; 3,70 €/kg] mit der Angabe der richtigen Einheit
c1) 1 × A1: für das richtige Erstellen der Gleichungen mithilfe der Informationen zum Gewinn bei den Absatzmengen 5 kg, 25 kg und 30 kg
1 × A2: für das richtige Erstellen der Gleichung mithilfe der Ableitungsfunktion G'
c2) 1 × B: für die richtige Berechnung der Koeffizienten

Kfz-Bestand (1)*

Aufgabennummer: B_300

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Die nachstehende Tabelle gibt den Kraftfahrzeug-Bestand (Kfz-Bestand) in Österreich für ausgewählte Jahre im Zeitraum von 1992 bis 2012 jeweils zum Jahresende an.

Ende des Jahres ...	Kfz-Bestand in Millionen
1992	4,5
1997	5,2
2002	5,4
2007	5,8
2012	6,3

Datenquelle: Statistik Austria (Hrsg.): *Statistisches Jahrbuch Österreichs 2015*. Wien: Verlag Österreich 2014, S. 446.

a) Die zeitliche Entwicklung des Kfz-Bestands soll mit den Daten der obigen Tabelle durch eine lineare Regressionsfunktion K beschrieben werden.

1) Ermitteln Sie eine Gleichung dieser linearen Regressionsfunktion. Wählen Sie $t = 0$ für das Ende des Jahres 1992.

2) Interpretieren Sie den Wert der Steigung dieser Funktion im gegebenen Sachzusammenhang.

3) Berechnen Sie, nach welcher Zeit gemäß diesem Modell mit einem Kfz-Bestand von 8 Millionen zu rechnen ist.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Um die zeitliche Entwicklung des Kfz-Bestands mit einem anderen mathematischen Modell zu beschreiben, wurden, ausgehend von den Daten der obigen Tabelle, die nachstehenden Berechnungen durchgeführt.

$\sqrt[20]{\frac{6{,}3}{4{,}5}} = 1{,}0169...$

$1{,}0169... - 1 = 0{,}0169... \approx 1{,}7\ \%$

1) Interpretieren Sie die Bedeutung der berechneten Zahl 1,7 % im gegebenen Sachzusammenhang.

Jemand berechnet weiters:

$2 = 1{,}0169...^{t}$

$t = \frac{\ln(2)}{\ln(1{,}0169...)} = 41{,}20... \approx 41{,}2$

2) Interpretieren Sie die Bedeutung der berechneten Zahl 41,2 im gegebenen Sachzusammenhang.

c) Der Kfz-Bestand kann nicht unbeschränkt wachsen.

Die zeitliche Entwicklung des Kfz-Bestands kann in einem Modell beschränkten Wachstums durch die Funktion K_B beschrieben werden:

$K_B(t) = 9 - b \cdot e^{-\lambda \cdot t}$

t ... Zeit in Jahren, $t = 0$ für das Ende des Jahres 1992
$K_B(t)$ ... Kfz-Bestand zur Zeit t in Millionen

Der Graph der Funktion K_B soll durch die Datenpunkte für die Jahre 1992 und 2012 verlaufen.

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem, mit dem die Parameter b und λ der Funktion K_B ermittelt werden können.
2) Ermitteln Sie die Parameter b und λ.
3) Ermitteln Sie mithilfe dieses Modells eine Prognose für den Kfz-Bestand am Ende des Jahres 2020.

d) In einem logistischen Modell wird die zeitliche Entwicklung des Kfz-Bestands durch die Funktion K_L beschrieben:

$$K_L(t) = \frac{22{,}5}{3 + 2 \cdot e^{-0{,}06264 \cdot t}}$$

t ... Zeit in Jahren, $t = 0$ für das Ende des Jahres 1992
$K_L(t)$ ... Kfz-Bestand zur Zeit t in Millionen

1) Argumentieren Sie mathematisch, dass sich der Kfz-Bestand gemäß diesem Modell langfristig dem Wert 7,5 Millionen annähert.

Möglicher Lösungsweg

a1) Ermittlung mittels Technologieeinsatz:

$K(t) = 0{,}084 \cdot t + 4{,}6$

t ... Zeit in Jahren, $t = 0$ für das Ende des Jahres 1992
$K(t)$ ... Kfz-Bestand zur Zeit t in Millionen

a2) Gemäß diesem Modell nimmt der Kfz-Bestand um 84 000 Kraftfahrzeuge pro Jahr zu.

a3) $K(t) = 8$ *oder* $0{,}084 \cdot t + 4{,}6 = 8$
$t = 40{,}47...$

Gemäß diesem Modell ist nach etwa 40,5 Jahren mit einem Kfz-Bestand von 8 Millionen zu rechnen.

Die Lösung kann entweder als Zeit nach Ende des Jahres 1992 oder als Kalenderjahr angegeben werden.

b1) Gemäß diesem Modell nimmt der Kfz-Bestand pro Jahr um rund 1,7 % zu.

b2) Gemäß diesem Modell verdoppelt sich der Kfz-Bestand nach (jeweils) rund 41,2 Jahren.

c1) $K_B(0) = 4{,}5$
$K_B(20) = 6{,}3$

oder:

$9 - b = 4{,}5$
$9 - b \cdot e^{-\lambda \cdot 20} = 6{,}3$

c2) $b = 9 - 4{,}5 = 4{,}5$
$\lambda = \dfrac{\ln(4{,}5) - \ln(2{,}7)}{20} = 0{,}025541...$

c3) $K_B(28) = 6{,}79...$

Gemäß diesem Modell beträgt der Kfz-Bestand am Ende des Jahres 2020 rund 6,8 Millionen.

d1) Mit beliebig groß werdendem t geht $e^{-0{,}06264 \cdot t}$ gegen null, der Nenner also gegen 3 und damit der Funktionswert gegen 7,5.

Lösungsschlüssel

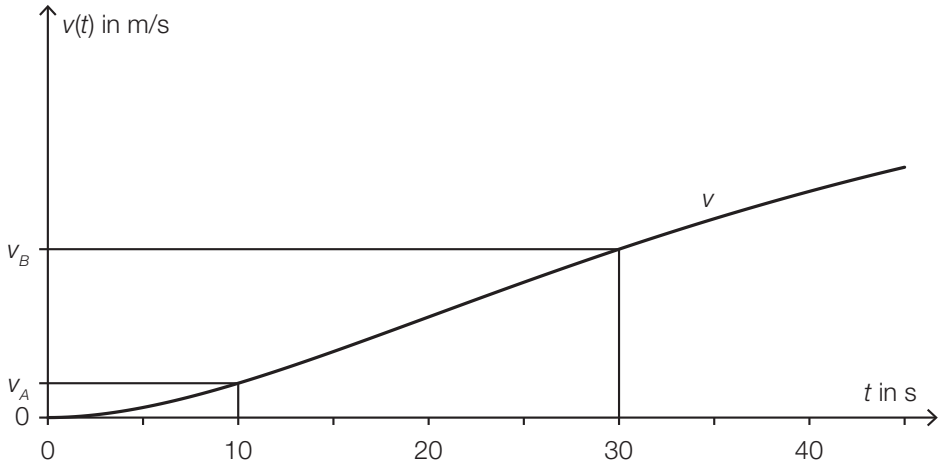
a1) 1 × B1: für das richtige Ermitteln der Gleichung der linearen Regressionsfunktion
a2) 1 × C: für die richtige Interpretation des Wertes der Steigung im gegebenen Sachzusammenhang
a3) 1 × B2: für die richtige Berechnung derjenigen Zeit, nach der mit einem Kfz-Bestand von 8 Millionen zu rechnen ist
b1) 1 × C1: für die richtige Interpretation der Zahl 1,7 % im gegebenen Sachzusammenhang
b2) 1 × C2: für die richtige Interpretation der Zahl 41,2 im gegebenen Sachzusammenhang
c1) 1 × A: für das richtige Erstellen des Gleichungssystems
c2) 1 × B1: für das richtige Ermitteln der Parameter b und λ
c3) 1 × B2: für das richtige Ermitteln der Prognose für den Kfz-Bestand am Ende des Jahres 2020
d1) 1 × D: für die richtige mathematische Argumentation

Straßenbahn (2)*

Aufgabennummer: B_298

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Eine Straßenbahn fährt von einer Haltestelle los. Ihr Geschwindigkeitsverlauf für die ersten 45 Sekunden ist im nachstehenden Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm dargestellt.



t ... Zeit in s
$v(t)$ ... Geschwindigkeit zur Zeit t in m/s

Die Geschwindigkeit der Straßenbahn nimmt im Zeitintervall [10; 30] linear zu.

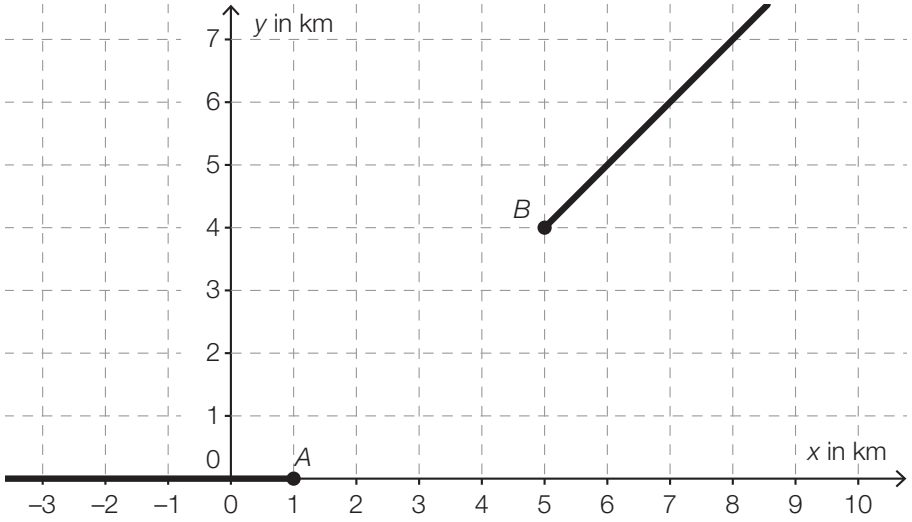
1) Interpretieren Sie die Bedeutung der Steigung dieser linearen Funktion im gegebenen Sachzusammenhang.

2) Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung der Geschwindigkeit der Straßenbahn 15 Sekunden nach Beginn der Fahrt aus v_A und v_B.

$v(15) =$ _____

* ehemalige Klausuraufgabe

b) In der nachstehenden Abbildung sind 2 geradlinige Gleise, die im Punkt A bzw. im Punkt B enden, modellhaft in der Ansicht von oben dargestellt.



Diese Gleise sollen durch ein Gleisstück knickfrei verbunden werden. „Knickfrei“ bedeutet, dass die entsprechenden Funktionen an den Stellen, an denen sie zusammenstoßen, den gleichen Funktionswert und die gleiche Steigung haben.

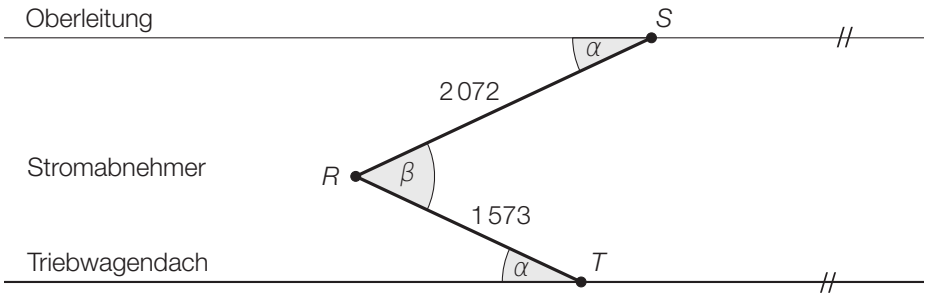
Diese Gleisverbindung soll durch eine Polynomfunktion g mit
$g(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ modelliert werden (x, $g(x)$ in km).

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten der Funktion g.

Mithilfe dieses Gleichungssystems erhält man: $g(x) = -\frac{1}{16} \cdot x^3 + \frac{11}{16} \cdot x^2 - \frac{19}{16} \cdot x + \frac{9}{16}$

2) Berechnen Sie die Länge dieser Gleisverbindung zwischen den Punkten A und B.

c) Straßenbahnen sind mit einem Stromabnehmer, der am Triebwagendach montiert ist, ausgestattet. Die nachstehende Abbildung zeigt einen Stromabnehmer mit den entsprechenden Maßangaben in Millimetern.
Es gilt: $\alpha = 25{,}1°$



1) Berechnen Sie den Winkel β.

2) Berechnen Sie den Abstand $\overline{TS}$.

Möglicher Lösungsweg

a1) Die Steigung der linearen Funktion entspricht der Beschleunigung der Straßenbahn im betrachteten Zeitintervall.

a2) $v(15) = v_A + \frac{v_B - v_A}{4}$

b1) $g'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x + c$

$g(1) = 0$
$g(5) = 4$
$g'(1) = 0$
$g'(5) = 1$

oder:

$a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d = 0$
$a \cdot 5^3 + b \cdot 5^2 + c \cdot 5 + d = 4$
$3 \cdot a \cdot 1^2 + 2 \cdot b \cdot 1 + c = 0$
$3 \cdot a \cdot 5^2 + 2 \cdot b \cdot 5 + c = 1$

b2) $\int_1^5 \sqrt{1 + (g'(x))^2}\,dx = 5{,}778...$
Die Länge dieser Gleisverbindung beträgt rund 5,78 km.

c1) $\beta = 2 \cdot \alpha = 50{,}2°$

c2) $\overline{TS} = \sqrt{2072^2 + 1573^2 - 2 \cdot 2072 \cdot 1573 \cdot \cos(50{,}2°)} = 1610{,}8...$
Der Abstand $\overline{TS}$ beträgt rund 1611 mm.

Lösungsschlüssel

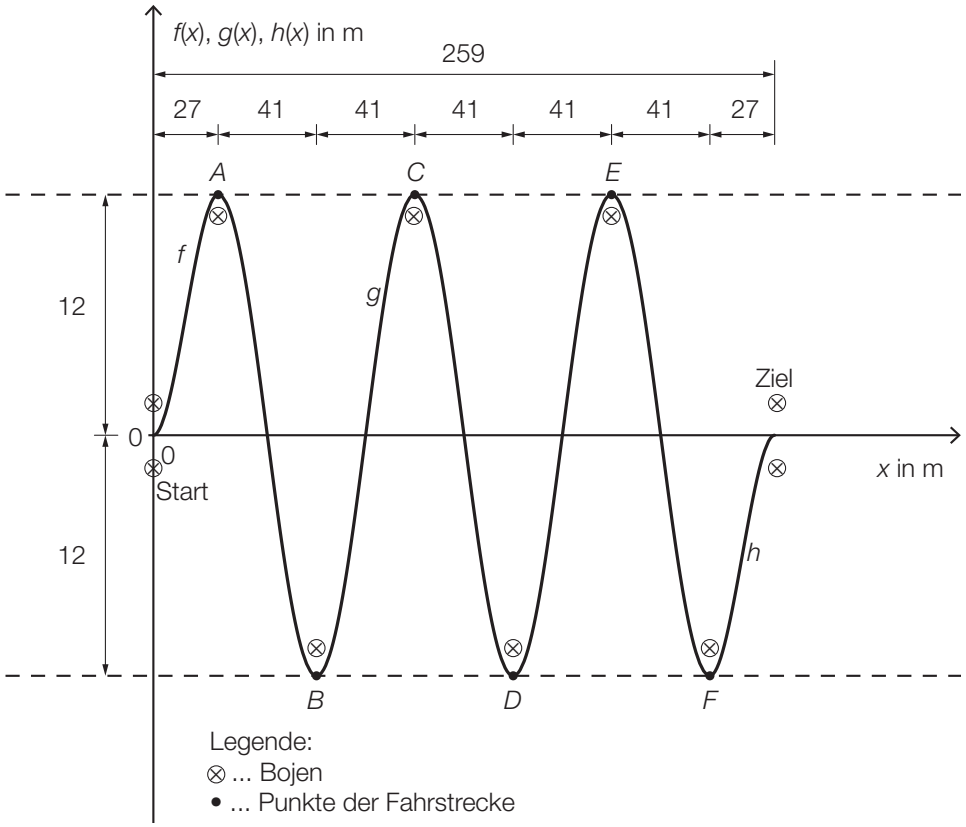
a1) 1 × C: für die richtige Interpretation im gegebenen Sachzusammenhang
a2) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel für $v(15)$
b1) 1 × A1: für das richtige Erstellen der beiden Gleichungen mithilfe der Koordinaten der Punkte
1 × A2: für das richtige Erstellen der beiden Gleichungen mithilfe der 1. Ableitung
b2) 1 × B: für die richtige Berechnung der Länge der Gleisverbindung zwischen den Punkten A und B
c1) 1 × B1: für die richtige Berechnung des Winkels β
c2) 1 × B2: für die richtige Berechnung des Abstands $\overline{TS}$

Wasserski-Wettbewerb (2)*

Aufgabennummer: B_471

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Bei einem Wasserski-Wettbewerb muss ein Slalom um 6 Bojen gefahren werden (siehe nachstehende Abbildung).



In einem vereinfachten Modell kann die Bahn einer Wasserskifahrerin abschnittsweise durch die Graphen dreier Funktionen beschrieben werden:

Funktion f ... vom Start bis zum Punkt A
Funktion g ... vom Punkt A bis zum Punkt F
Funktion h ... vom Punkt F bis ins Ziel
x, $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ ... Koordinaten in m

* ehemalige Klausuraufgabe

a) Für die gesamte Fahrt benötigt die Wasserskifahrerin 30 s.

1) Beschreiben Sie, was mit dem nachstehenden Ausdruck im gegebenen Sachzusammenhang berechnet wird. Geben Sie dabei die zugehörige Einheit an.

$$\frac{\int_0^{27} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx + \int_{27}^{232} \sqrt{1 + (g'(x))^2}\,dx + \int_{232}^{259} \sqrt{1 + (h'(x))^2}\,dx}{30}$$

b) Die Bahn der Wasserskifahrerin zwischen den Punkten A und F kann mithilfe des Graphen der Funktion g beschrieben werden.

Es gilt: $g(x) = a \cdot \sin(b \cdot x + c)$

1) Bestimmen Sie die Parameter a, b und c.

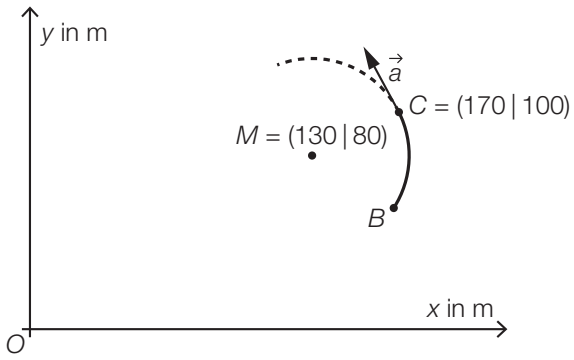
c) Die Bahn der Wasserskifahrerin vom Start bis zum Punkt A kann durch den Graphen der Funktion f mit $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2$ beschrieben werden.
Der Graph der Funktion h entsteht durch Verschiebung des Graphen von f um 232 m nach rechts und um 12 m nach unten.

1) Kreuzen Sie die zutreffende Funktionsgleichung der Funktion h an. *[1 aus 5]*

$h(x) = a \cdot (x - 232)^3 + b \cdot (x - 232)^2 + 12$	☐
$h(x) = a \cdot (x + 12)^3 + b \cdot (x + 12)^2 - 232$	☐
$h(x) = a \cdot (x - 12)^3 + b \cdot (x - 12)^2 + 232$	☐
$h(x) = a \cdot (x + 232)^3 + b \cdot (x + 232)^2 - 12$	☐
$h(x) = a \cdot (x - 232)^3 + b \cdot (x - 232)^2 - 12$	☐

d) Für das Publikum gibt es in der Pause die Möglichkeit, sich in einem Reifen hinter einem Motorboot durch das Wasser ziehen zu lassen. Bei einer wilden Fahrt kann es vorkommen, dass man aus dem Reifen geschleudert wird und ins Wasser fällt.

Die nachstehende Abbildung zeigt einen kurzen Ausschnitt des Weges eines Reifens bei einer solchen Fahrt. Vom Punkt B zum Punkt C ist dieser kreisförmig mit dem Mittelpunkt M. Im Punkt C wird der „Reifenfahrer“ in der durch den Vektor $\vec{a}$ angegebenen tangentialen Richtung aus dem Reifen geschleudert.



1) Begründen Sie, warum $\vec{a} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$ ist.

Der „Reifenfahrer“ fällt in einer Entfernung von 2 m vom Punkt C ins Wasser.

2) Berechnen Sie die Koordinaten desjenigen Punktes, in dem der „Reifenfahrer“ ins Wasser fällt.

Möglicher Lösungsweg

a1) Es wird die mittlere Geschwindigkeit der Wasserskifahrerin in m/s berechnet.

b1) $a = 12$

$b = \frac{2 \cdot \pi}{82} = \frac{\pi}{41}$

Bestimmen von c durch Einsetzen:
$g(x) = 12 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{41} \cdot x + c\right)$
$g(27) = 12$

$\Rightarrow \quad c = \frac{-13 \cdot \pi}{82} = -0{,}498...$

Jeder Wert $c = -0{,}498... + 2 \cdot k \cdot \pi$ *mit* $k \in \mathbb{Z}$ *ist als richtig zu werten.*

c1)

[...]	
[...]	
[...]	
[...]	
$h(x) = a \cdot (x - 232)^3 + b \cdot (x - 232)^2 - 12$	☒

d1) Da die Tangente normal auf den Radius steht, ist das Skalarprodukt 0.

d2) $\overrightarrow{MC} = \begin{pmatrix} 40 \\ 20 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 170 \\ 100 \end{pmatrix} + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 169{,}1... \\ 101{,}7... \end{pmatrix}$

Der Reifenfahrer fällt ungefähr im Punkt (169 | 102) ins Wasser.

Lösungsschlüssel

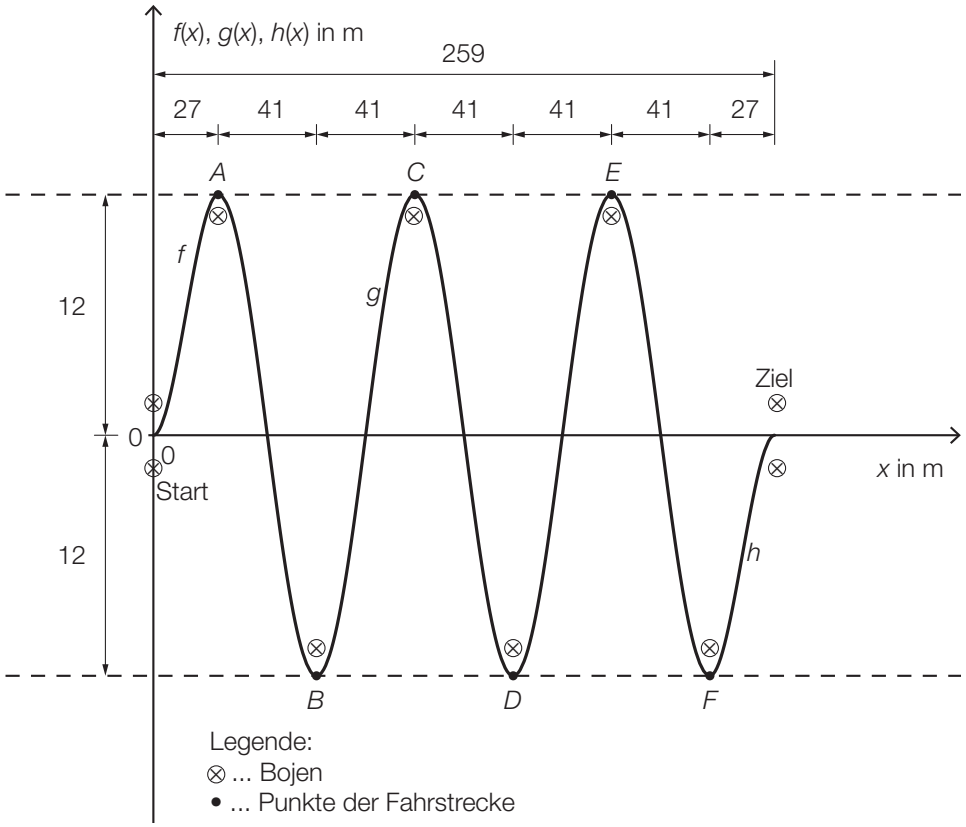
a1) 1 × C: für die richtige Beschreibung im gegebenen Sachzusammenhang unter Angabe der entsprechenden Einheit
b1) 1 × C: für das richtige Ablesen des Parameters a
1 × B1: für das richtige Bestimmen des Parameters b
1 × B2: für das richtige Bestimmen des Parameters c
c1) 1 × C: für das richtige Ankreuzen
d1) 1 × D: für die richtige Begründung
d2) 1 × B: für die richtige Berechnung der Koordinaten

Wasserski-Wettbewerb (1)*

Aufgabennummer: B_470

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Bei einem Wasserski-Wettbewerb muss ein Slalom um 6 Bojen gefahren werden (siehe nachstehende Abbildung).



In einem vereinfachten Modell kann die Bahn einer Wasserskifahrerin abschnittsweise durch die Graphen dreier Funktionen beschrieben werden:

Funktion f ... vom Start bis zum Punkt A
Funktion g ... vom Punkt A bis zum Punkt F
Funktion h ... vom Punkt F bis ins Ziel
x, $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ ... Koordinaten in m

* ehemalige Klausuraufgabe

a) Für die gesamte Fahrt benötigt die Wasserskifahrerin 30 s.

1) Beschreiben Sie, was mit dem nachstehenden Ausdruck im gegebenen Sachzusammenhang berechnet wird. Geben Sie dabei die zugehörige Einheit an.

$$\frac{\int_0^{27} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx + \int_{27}^{232} \sqrt{1 + (g'(x))^2}\,dx + \int_{232}^{259} \sqrt{1 + (h'(x))^2}\,dx}{30}$$

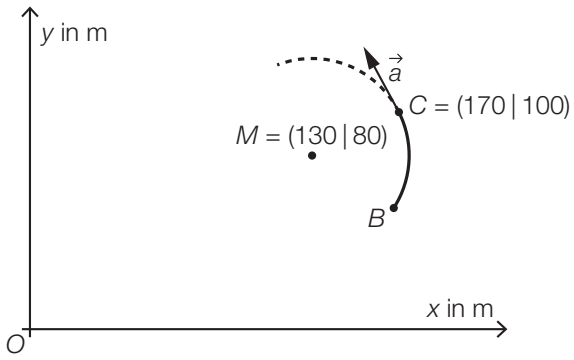
b) Die Bahn der Wasserskifahrerin vom Start bis zum Punkt A kann durch den Graphen der Funktion f mit $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2$ beschrieben werden.
Der Graph der Funktion h entsteht durch Verschiebung des Graphen von f um 232 m nach rechts und um 12 m nach unten.

1) Kreuzen Sie die zutreffende Funktionsgleichung der Funktion h an. *[1 aus 5]*

$h(x) = a \cdot (x - 232)^3 + b \cdot (x - 232)^2 + 12$	☐
$h(x) = a \cdot (x + 12)^3 + b \cdot (x + 12)^2 - 232$	☐
$h(x) = a \cdot (x - 12)^3 + b \cdot (x - 12)^2 + 232$	☐
$h(x) = a \cdot (x + 232)^3 + b \cdot (x + 232)^2 - 12$	☐
$h(x) = a \cdot (x - 232)^3 + b \cdot (x - 232)^2 - 12$	☐

c) Für das Publikum gibt es in der Pause die Möglichkeit, sich in einem Reifen hinter einem Motorboot durch das Wasser ziehen zu lassen. Bei einer wilden Fahrt kann es vorkommen, dass man aus dem Reifen geschleudert wird und ins Wasser fällt.

Die nachstehende Abbildung zeigt einen kurzen Ausschnitt des Weges eines Reifens bei einer solchen Fahrt. Vom Punkt B zum Punkt C ist dieser kreisförmig mit dem Mittelpunkt M. Im Punkt C wird der „Reifenfahrer“ in der durch den Vektor $\vec{a}$ angegebenen tangentialen Richtung aus dem Reifen geschleudert.



1) Begründen Sie, warum $\vec{a} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$ ist.

Der „Reifenfahrer“ fällt in einer Entfernung von 2 m vom Punkt C ins Wasser.

2) Berechnen Sie die Koordinaten desjenigen Punktes, in dem der „Reifenfahrer“ ins Wasser fällt.

Möglicher Lösungsweg

a1) Es wird die mittlere Geschwindigkeit der Wasserskifahrerin in m/s berechnet.

b1)

[...]	
[...]	
[...]	
[...]	
$h(x) = a \cdot (x - 232)^3 + b \cdot (x - 232)^2 - 12$	☒

c1) Da die Tangente normal auf den Radius steht, ist das Skalarprodukt 0.

c2) $\overrightarrow{MC} = \begin{pmatrix} 40 \\ 20 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 170 \\ 100 \end{pmatrix} + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 169{,}1... \\ 101{,}7... \end{pmatrix}$

Der Reifenfahrer fällt ungefähr im Punkt (169 | 102) ins Wasser.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × C: für die richtige Beschreibung im gegebenen Sachzusammenhang unter Angabe der entsprechenden Einheit

b1) 1 × C: für das richtige Ankreuzen

c1) 1 × D: für die richtige Begründung

c2) 1 × B: für die richtige Berechnung der Koordinaten

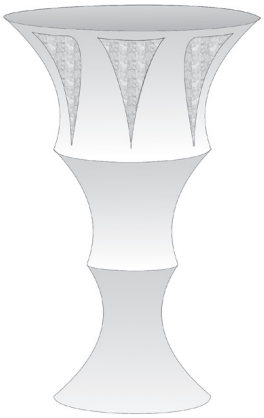
Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Kunstvolle Becher*

Aufgabennummer: B_472

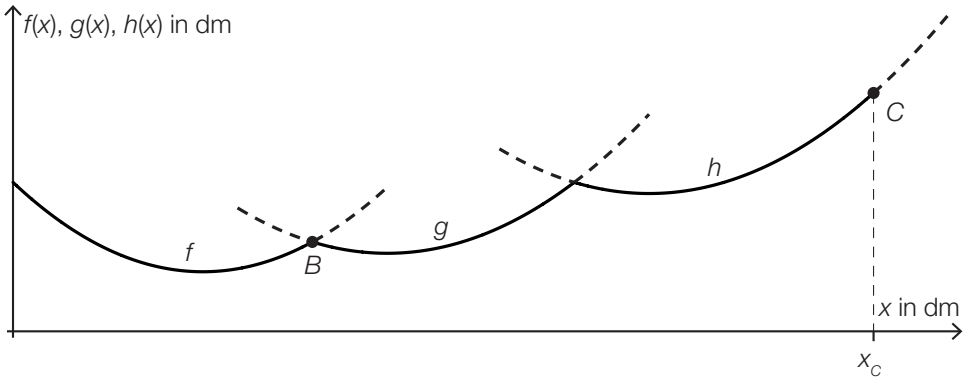
Technologieeinsatz:	möglich ☐	erforderlich ☒

Bei einer Ausgrabung wurden antike Becher gefunden.
Eine Künstlerin wird anlässlich dieses Fundes damit beauftragt, eine becherförmige Skulptur zu entwerfen.



* ehemalige Klausuraufgabe

a) Die äußere Begrenzungslinie der becherförmigen Skulptur kann abschnittsweise durch die quadratischen Funktionen f, g und h modelliert werden:



Es wird folgende Berechnung durchgeführt:
$\gamma = 90° - \arctan(h'(x_C))$

1) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den Winkel γ ein.

Für die Funktionen f und g gilt:
$f(x) = 0{,}117 \cdot x^2 - 1{,}18 \cdot x + 5$
$g(x) = 0{,}0952 \cdot x^2 - 1{,}9 \cdot x + 12{,}1$

x, $f(x)$, $g(x)$ ... Koordinaten in dm

f und g schneiden einander im Punkt B.

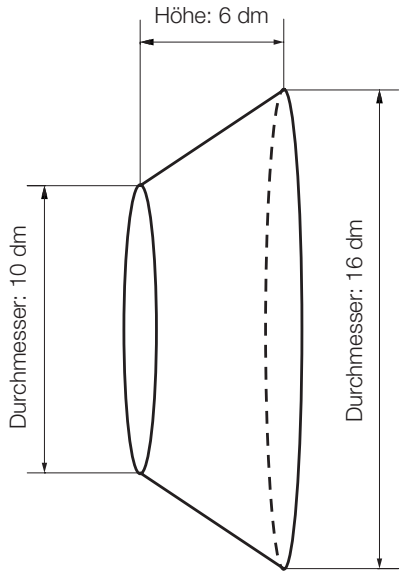
2) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts B.

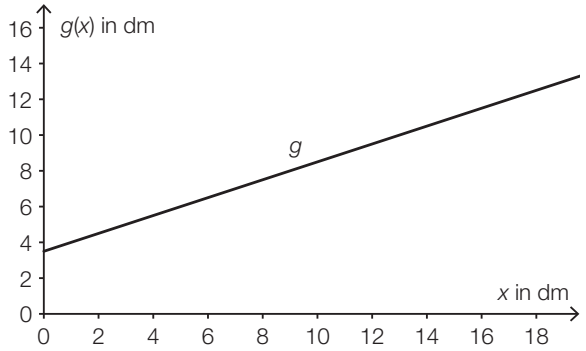
3) Berechnen Sie den Schnittwinkel von f und g im Schnittpunkt B.

Für einen alternativen Entwurf sollen die dargestellten Graphen entlang der vertikalen Achse verschoben werden.

4) Geben Sie an, wie sich eine solche Verschiebung auf die Koeffizienten von f auswirkt.

b) Der Sockel, auf dem die Skulptur montiert werden soll, hat die Form eines Kegelstumpfs (siehe nachstehende nicht maßstabgetreue Abbildung):





Dieser Kegelstumpf kann als Rotationskörper mithilfe der Funktion g beschrieben werden:

$g(x) = \frac{1}{2} \cdot x + \frac{7}{2}$

x, $g(x)$ ... Koordinaten in dm

1) Kreuzen Sie diejenige Formel an, mit deren Hilfe man das Volumen des dargestellten Kegelstumpfs berechnen kann. *[1 aus 5]*

$V = \pi \cdot \int_0^6 (g(x))^2 \, dx$	☐
$V = \pi \cdot \int_3^9 (g(x))^2 \, dx$	☐
$V = \pi \cdot \int_3^6 (g(x))^2 \, dx$	☐
$V = \pi \cdot \int_{10}^{16} (g(x))^2 \, dx$	☐
$V = \pi \cdot \int_5^8 (g(x))^2 \, dx$	☐

c) Die Skulptur wird aus einer Legierung hergestellt, die aus Aluminium, Silizium und einer kleinen Menge Magnesium besteht.

Die Dichte von Aluminium beträgt 2,70 g/cm^3.

1) Geben Sie die Dichte ϱ von Aluminium in der Einheit kg/m^3 an.

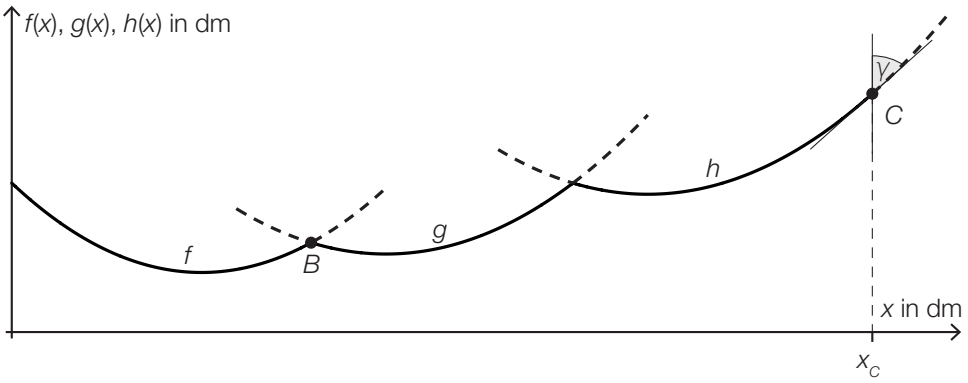
ϱ = _____ kg/m^3

Der Radius eines Magnesium-Atoms beträgt $1{,}5 \cdot 10^{-10}$ m. Ein Silizium-Atom hat einen um 0,04 nm kleineren Radius.

2) Berechnen Sie den Radius eines Silizium-Atoms in Nanometern.

Möglicher Lösungsweg

a1)



a2) $f(x) = g(x)$

oder:

$0{,}0952 \cdot x^2 - 1{,}9 \cdot x + 12{,}1 = 0{,}117 \cdot x^2 - 1{,}18 \cdot x + 5$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
($x_1 = -40{,}975...$)
$x_2 = 7{,}948... \approx 7{,}95$
$f(x_2) = 3{,}012... \approx 3{,}01$
$B \approx (7{,}95 \mid 3{,}01)$

a3) $g'(7{,}948...) = -0{,}386...$
$f'(7{,}948...) = 0{,}679...$

Berechnung des Schnittwinkels:
$\arctan(0{,}679...) + |\arctan(-0{,}386...)| = 55{,}350...° \approx 55{,}4°$

Auch eine Berechnung des zugehörigen Supplementärwinkels (124,6°) ist als richtig zu werten.

a4) Es ändert sich nur der Koeffizient 5 der Funktion *f*.

b1)

[...]	
$V = \pi \cdot \int_3^9 (g(x))^2 \, dx$	☒
[...]	
[...]	
[...]	

c1) $\varrho = 2\,700 \text{ kg/m}^3$

c2) $1{,}5 \cdot 10^{-10} \text{ m} = 0{,}15 \text{ nm}$
$0{,}15 \text{ nm} - 0{,}04 \text{ nm} = 0{,}11 \text{ nm}$
Der Radius eines Silizium-Atoms beträgt 0,11 nm.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × C1: für das richtige Einzeichnen des Winkels γ
a2) 1 × B1: für die richtige Berechnung der Koordinaten von B
a3) 1 × B2: für die richtige Berechnung des Schnittwinkels (Auch eine Berechnung des zugehörigen Supplementärwinkels (124,6°) ist als richtig zu werten.)
a4) 1 × C2: für die richtige Angabe zur Auswirkung auf die Koeffizienten
b1) 1 × C: für das richtige Ankreuzen
c1) 1 × A: für das richtige Angeben der Dichte in kg/m^3
c2) 1 × B: für die richtige Berechnung des Radius eines Silizium-Atoms in Nanometern

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Kredit und Sparbuch*

Aufgabennummer: B_469

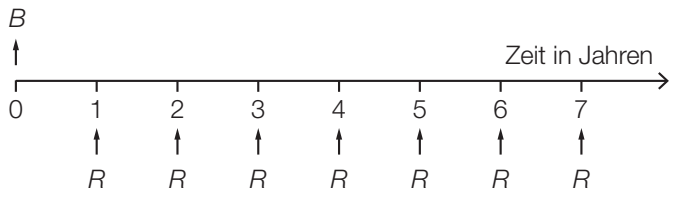
Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Die Begriffe *Kredit* und *Sparbuch* werden in dieser Aufgabe in vereinfachter Form ohne Berücksichtigung von Gebühren oder Steuern verwendet.

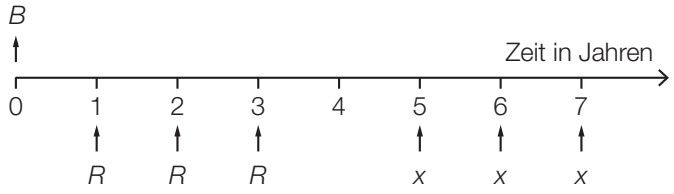
a) Die unten stehenden Zeitachsen beschreiben die Rückzahlungen von 2 Krediten, die nach 7 Jahren vollständig getilgt sind.

Bei beiden Krediten sind der Zinssatz, die Kredithöhe B und die Ratenhöhe R jeweils gleich hoch.

Kredit 1:



Kredit 2:



1) Argumentieren Sie, dass die Ratenhöhe x höher sein muss als die Ratenhöhe R.

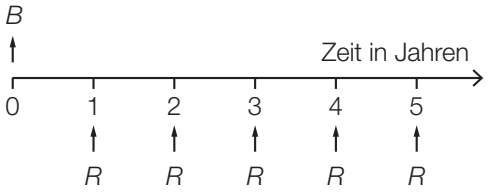
Die Kredithöhe B beträgt € 10.000. Der Zinssatz beträgt 3 % p. a.

2) Berechnen Sie die Ratenhöhe R.

3) Berechnen Sie für Kredit 2 die Höhe der Restschuld zum Zeitpunkt $t = 4$ Jahre.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Ein Kredit in der Höhe B wird mit einem Jahreszinssatz i verzinst.
Die Höhe der jährlichen Rate beträgt R.



Nachdem die erste Rate R zurückgezahlt wurde, beträgt die Restschuld B_1.

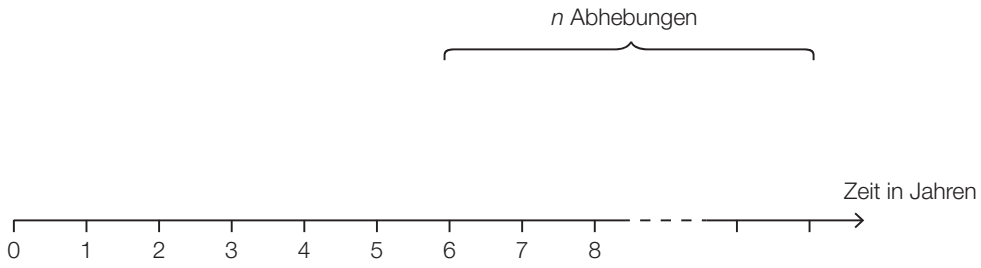
1) Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung von B_1 aus B, R und i.

$B_1 =$ _____

c) Jemand zahlt in 4 aufeinanderfolgenden Jahren jeweils zu Jahresbeginn einen Betrag in Höhe von € 300 auf ein Sparbuch ein. Der Zinssatz beträgt 1,5 % p. a.

Beginnend 3 Jahre nach der letzten Einzahlung wird jeweils jährlich ein Betrag in Höhe von € 150 abgehoben.
Insgesamt finden n Abhebungen statt. Die letzte Abhebung setzt sich dabei aus den € 150 und einem Restbetrag x mit $€\ 0 < x < €\ 150$ zusammen.

1) Vervollständigen Sie die nachstehende Zeitachse so, dass sie den beschriebenen Sachverhalt wiedergibt.



Es wird folgende Berechnung durchgeführt:

$K = 300 \cdot 1{,}015^6 + 300 \cdot 1{,}015^5 + 300 \cdot 1{,}015^4 + 300 \cdot 1{,}015^3 \approx 1\,283{,}33$

2) Beschreiben Sie die Bedeutung von K im gegebenen Sachzusammenhang.

3) Berechnen Sie die Anzahl n der Abhebungen.

Möglicher Lösungsweg

a1) Bei Kredit 2 wird eine Ratenzahlung ausgesetzt, dadurch muss die verbleibende Ratenhöhe x größer sein als die ursprüngliche Ratenhöhe R.

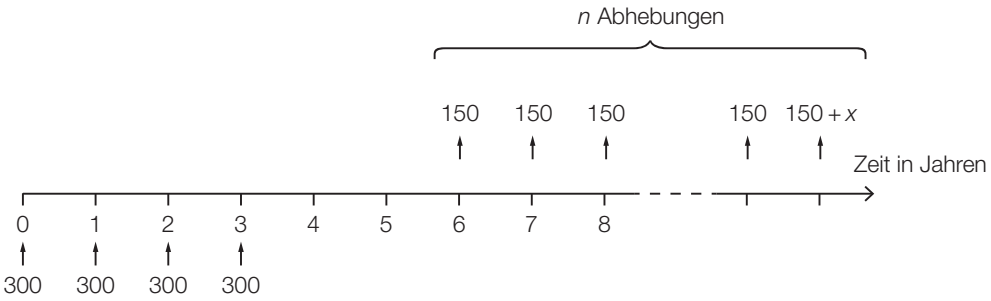
a2) $10\,000 = R \cdot \frac{1{,}03^7 - 1}{0{,}03} \cdot \frac{1}{1{,}03^7}$
$R = 1\,605{,}063...$
Die Ratenhöhe R beträgt € 1.605,06.

a3) $10\,000 \cdot 1{,}03^4 - 1\,605{,}06 \cdot 1{,}03^3 - 1\,605{,}06 \cdot 1{,}03^2 - 1\,605{,}06 \cdot 1{,}03 = 6\,145{,}175...$
Die Höhe der Restschuld zum Zeitpunkt 4 beträgt € 6.145,18.

Wird bei der Berechnung der Höhe der Restschuld die ungerundete Ratenhöhe verwendet, so ist dies ebenfalls als richtig zu werten.

b1) $B_1 = B \cdot (1 + i) - R$

c1)



c2) K ist das angesparte Kapital nach 6 Jahren.

c3) $1\,283{,}33 = 150 \cdot \frac{1{,}015^n - 1}{0{,}015} \cdot \frac{1}{1{,}015^{n-1}}$

Lösung mittels Technologieeinsatz: $n = 9{,}0...$
Es finden 9 Abhebungen statt.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × D: für die richtige Argumentation
a2) 1 × B1: für die richtige Berechnung der Ratenhöhe R
a3) 1 × B2: für die richtige Berechnung der Höhe der Restschuld zum Zeitpunkt $t = 4$ Jahre
b1) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel zur Berechnung von B_1
c1) 1 × A: für das richtige Vervollständigen der Zeitachse
c2) 1 × C: für die richtige Beschreibung im gegebenen Sachzusammenhang
c3) 1 × B: für die richtige Berechnung von n

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Wasseräquivalent einer Schneedecke*

Aufgabennummer: B_473

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Das Wasseräquivalent *W* einer Schneedecke gibt diejenige Höhe an, bis zu der das Wasser steht, wenn die Schneedecke schmilzt. Dabei wird vorausgesetzt, dass das Wasser nicht abfließen kann und das Wasser und die Schneedecke gleich große Flächen bedecken.

a) Das Wasseräquivalent *W* einer Schneedecke kann mithilfe folgender Formel berechnet werden:

$$W = \frac{m}{\varrho_{\text{Wasser}} \cdot A}$$

m ... Masse des Schnees (bzw. Masse des Wassers) in kg
ϱ_{Wasser} ... Dichte des Wassers in kg/m^3
A ... Flächeninhalt der schneebedeckten Fläche in m^2

1) Zeigen Sie, dass das Wasseräquivalent mit der obigen Formel in der Längeneinheit Meter ermittelt wird.

b) Die von der Erde abgestrahlte Gammastrahlung wird beim Durchgang durch eine Schneedecke abgeschwächt. Die Abschwächung hängt vom Wasseräquivalent der Schneedecke ab.

Die Funktion E beschreibt die Intensität der abgeschwächten Gammastrahlung in Abhängigkeit vom Wasseräquivalent W der Schneedecke. Die 1. Ableitung $\frac{dE}{dW}$ ist direkt proportional zu $-E$. Die zugehörige Proportionalitätskonstante $k > 0$ wird als Absorptionskoeffizient bezeichnet.

1) Stellen Sie die zugehörige Differenzialgleichung auf.

2) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieser Differenzialgleichung.

* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

a1) Durch das Einsetzen der Einheiten folgt:

$$\frac{\text{kg}}{\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \text{m}^2} = \text{m}$$

b1) $\frac{dE}{dW} = -k \cdot E$

b2) Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$E(W) = C \cdot e^{-k \cdot W}$

oder:

$$\frac{E'}{E} = -k$$

$$\int \frac{E'}{E} dW = \int -k \, dW$$

$$\ln|E(W)| = -k \cdot W + C_1$$

$$E(W) = C \cdot e^{-k \cdot W}$$

Lösungsschlüssel

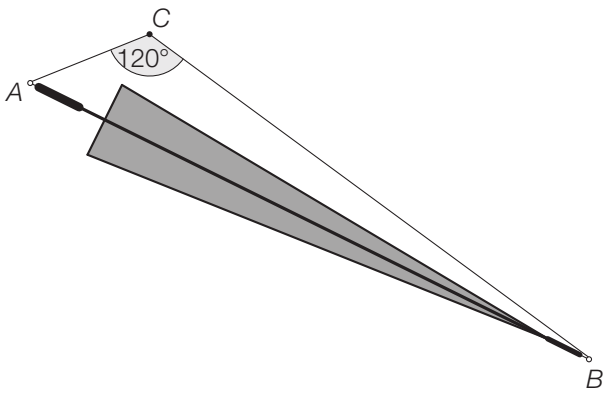
a1) 1 × D: für den richtigen Nachweis
b1) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Differenzialgleichung
b2) 1 × B: für das richtige Bestimmen der allgemeinen Lösung

Regenschirm*

Aufgabennummer: B_181

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) An den Enden eines Regenschirms ist eine 110 cm lange Schnur befestigt. Der Schirm ist so an einen Haken C gehängt, dass die beiden Schnurabschnitte einen Winkel von 120° einschließen. Der Punkt A ist 25 cm weit vom Haken C entfernt. (Siehe nachstehende nicht maßstabgetreue Skizze.)



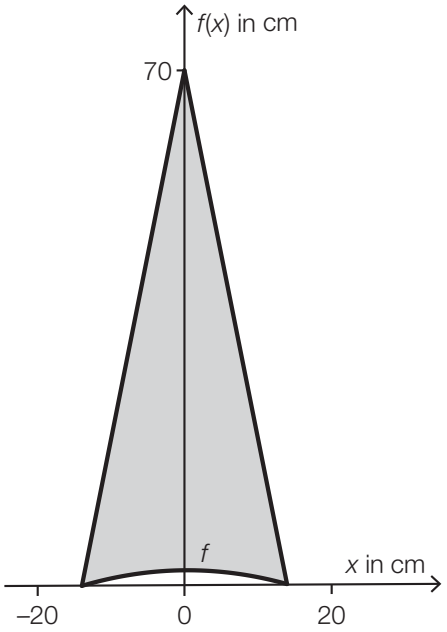
1) Berechnen Sie die Länge $\overline{AB}$ des Regenschirms.

Derselbe Regenschirm wird nun so aufgehängt, dass die beiden Schnurabschnitte einen rechten Winkel einschließen. Dadurch ändert sich die Länge der Schnurabschnitte.

2) Berechnen Sie, welche Entfernungen der Punkt A in diesem Fall vom Haken C haben kann.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Die Bespannung des Regenschirms besteht aus Flächenteilen, die jeweils durch 2 Geraden und den Graphen der Funktion f begrenzt werden (siehe nachstehende Abbildung).



Für die Funktion f gilt:

$f(x) = -\frac{1}{98} \cdot x^2 + 2$

x, $f(x)$ ... Koordinaten in cm

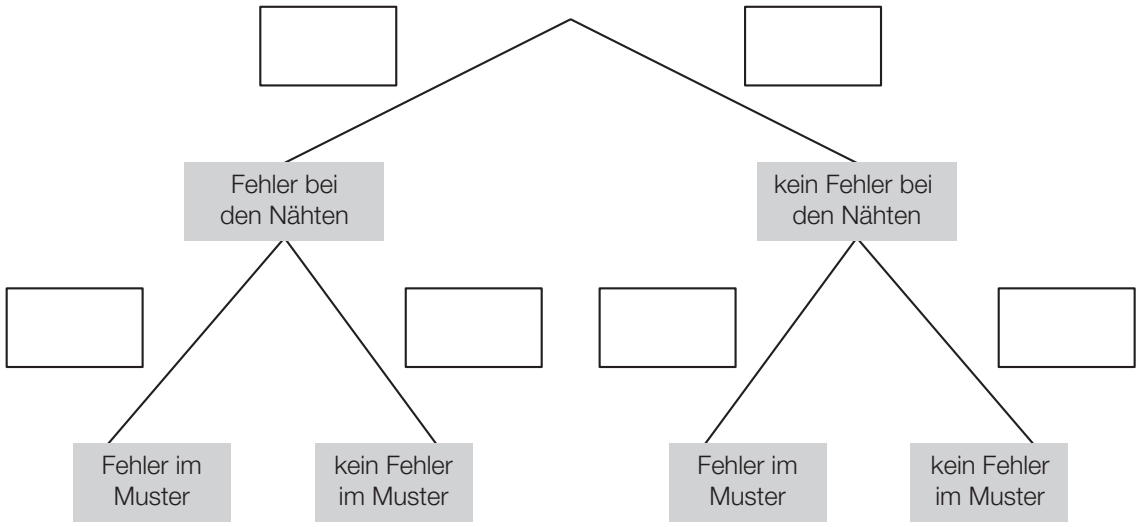
1) Berechnen Sie den Flächeninhalt des grau markierten Flächenteils.

c) Für einen Kunsthandwerksmarkt werden Regenschirme angefertigt.

Bei der Herstellung der Regenschirme treten unabhängig voneinander 2 Arten von Fehlern auf. Man weiß aus Erfahrung:

- Bei durchschnittlich 1 von 5 Regenschirmen treten Fehler bei den Nähten auf.
- Bei durchschnittlich 30 % der Regenschirme treten Fehler im Muster auf.

1) Ergänzen Sie die Wahrscheinlichkeiten im nachstehenden Baumdiagramm.



Regenschirme, die beide Fehler aufweisen („III. Wahl“), werden um € 2 pro Stück verkauft.
Regenschirme, die nur einen von beiden Fehlern aufweisen („II. Wahl“), werden um € 15 pro Stück verkauft.
Regenschirme, die keinen Fehler aufweisen („I. Wahl“), werden um € 30 pro Stück verkauft.

2) Vervollständigen Sie die nachstehende Tabelle.

	I. Wahl	II. Wahl	III. Wahl
Einnahmen pro Regenschirm in Euro	30	15	2
Wahrscheinlichkeit			

3) Berechnen Sie den Erwartungswert für die Einnahmen pro verkauftem Regenschirm.

Möglicher Lösungsweg

a1) $\overline{AB} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BC} \cdot \cos(120°)} = \sqrt{25^2 + 85^2 - 2 \cdot 25 \cdot 85 \cdot \cos(120°)} = 99{,}8...$

Der Regenschirm ist rund 100 cm lang.

a2) x ... neue Streckenlänge $\overline{AC}$

$x^2 + (110 - x)^2 = \overline{AB}^2$

Lösung mittels Technologieeinsatz:

$x_1 = 10{,}69\ldots$

$x_2 = 99{,}30\ldots$

Der Punkt A ist nun rund 10,7 cm oder rund 99,3 cm vom Haken C entfernt.

b1) Berechnung der Nullstellen:

$f(x) = 0$ *oder* $-\frac{1}{98} \cdot x^2 + 2 = 0$

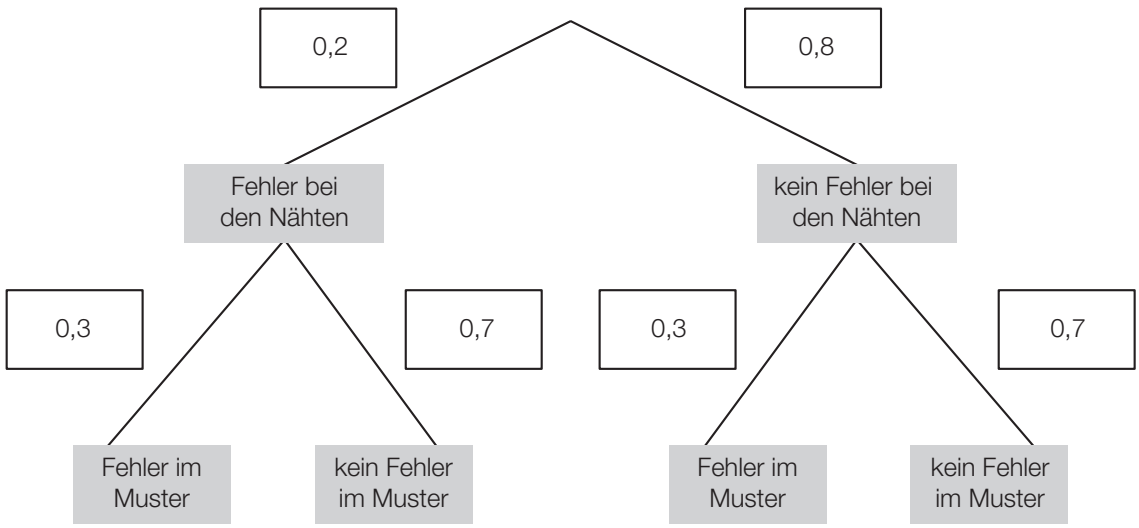
$x_{1,2} = \pm 14$

Berechnung des Flächeninhalts:

$A = 70 \cdot 14 - \int_{-14}^{14} f(x)\,dx = 942{,}66...$

Der Flächeninhalt beträgt rund 942,7 cm^2.

c1)



c2)

	I. Wahl	II. Wahl	III. Wahl
Einnahmen pro Regenschirm in Euro	30	15	2
Wahrscheinlichkeit	$0{,}8 \cdot 0{,}7 = 0{,}56$	$0{,}2 \cdot 0{,}7 + 0{,}8 \cdot 0{,}3 = 0{,}38$	$0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}06$

c3) $30 \cdot 0{,}56 + 15 \cdot 0{,}38 + 2 \cdot 0{,}06 = 22{,}62$
Der Erwartungswert für die Einnahmen pro verkauftem Regenschirm beträgt € 22,62.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × B1: für die richtige Berechnung der Streckenlänge $\overline{AB}$
a2) 1 × A: für den richtigen Ansatz
1 × B2: für die richtige Berechnung der Entfernungen, die der Punkt *A* in diesem Fall vom Haken *C* haben kann
b1) 1 × A: für den richtigen Ansatz
1 × B: für die richtige Berechnung des Flächeninhalts
c1) 1 × A1: für das richtige Ergänzen der Wahrscheinlichkeiten im Baumdiagramm
c2) 1 × A2: für das richtige Vervollständigen der Tabelle
c3) 1 × B: für die richtige Berechnung des Erwartungswerts

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Roborowski-Zwerghamster*

Aufgabennummer: B_177

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Die durchschnittliche Körpermasse von Zwerghamstern wird bei der Geburt mit 1,2 g angegeben, nach 1 Woche mit 4,3 g, nach 2 Wochen mit 8,7 g, nach 3 Wochen mit 12,5 g und nach 4 Wochen mit 14,2 g.

Die zeitliche Entwicklung der durchschnittlichen Körpermasse von Zwerghamstern soll für die ersten 4 Lebenswochen näherungsweise durch eine Polynomfunktion 3. Grades f beschrieben werden.

1) Ermitteln Sie mithilfe von Regression eine Gleichung dieser Polynomfunktion 3. Grades f. Wählen Sie $t = 0$ für den Zeitpunkt der Geburt.

Zur Zeit t_1 gilt: $f''(t_1) = 0$ und $f'(t_1) > 0$

2) Interpretieren Sie die Bedeutung der Stelle t_1 im gegebenen Sachzusammenhang.

3,5 Wochen nach der Geburt hat ein Zwerghamster 62 % der durchschnittlichen Körpermasse eines ausgewachsenen Zwerghamsters.

3) Bestimmen Sie mithilfe der Funktion f, welche durchschnittliche Körpermasse ein ausgewachsener Zwerghamster gemäß diesem Modell hat.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Die täglich aufgenommene Nahrungsmenge eines ausgewachsenen Zwerghamsters hängt von seiner Körpermasse ab.

Die folgende Formel gibt näherungsweise den Zusammenhang zwischen der täglich aufgenommenen Nahrungsmenge N und der Körpermasse M an:

$N = 1{,}422 \cdot \ln(M) - 1{,}78$

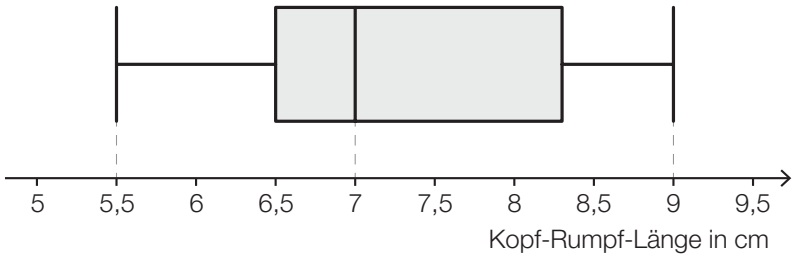
N … täglich aufgenommene Nahrungsmenge in g
M … Körpermasse in g

1) Berechnen Sie die täglich aufgenommene Nahrungsmenge bei einer Körpermasse von 30 g.

2) Formen Sie die Formel nach M um.

$M =$ _____

c) Im nachstehenden Boxplot sind die Kopf-Rumpf-Längen einer Zwerghamsterpopulation dargestellt.



1) Ermitteln Sie die Spannweite.

Jemand behauptet: „Es gibt in dieser Zwerghamsterpopulation mindestens 1 Zwerghamster mit einer Kopf-Rumpf-Länge von 7 cm.“

2) Argumentieren Sie, dass diese Behauptung nicht zwingend richtig sein muss.

Möglicher Lösungsweg

a1) Ermittlung mittels Technologieeinsatz:

$f(t) = -0{,}28 \cdot t^3 + 1{,}46 \cdot t^2 + 1{,}95 \cdot t + 1{,}19$ *(Koeffizienten gerundet)*

t ... Zeit in Wochen
$f(t)$ ... durchschnittliche Körpermasse zur Zeit t in g

a2) Zur Zeit t_1 tritt die größte Zunahme der durchschnittlichen Körpermasse auf.

a3) $f(3{,}5) = 13{,}73...$
$\frac{13{,}73...}{0{,}62} = 22{,}15...$
Ein ausgewachsener Zwerghamster hat gemäß diesem Modell eine durchschnittliche Körpermasse von rund 22,2 g.

b1) $N = 1{,}422 \cdot \ln(30) - 1{,}78 = 3{,}05...$
Ein 30 g schwerer Zwerghamster nimmt täglich rund 3,1 g Futter auf.

b2) $N + 1{,}78 = 1{,}422 \cdot \ln(M)$
$\frac{N + 1{,}78}{1{,}422} = \ln(M)$
$M = e^{\frac{N+1{,}78}{1{,}422}}$

c1) $9 - 5{,}5 = 3{,}5$
Die Spannweite beträgt 3,5 cm.

c2) Wenn es sich bei dieser Zwerghamsterpopulation um eine gerade Anzahl an Zwerghamstern handelt, so wird der Median (7 cm) als arithmetisches Mittel der beiden mittleren Werte (einer geordneten Liste) berechnet und muss somit nicht bei einem der Zwerghamster auftreten.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × B1: für das richtige Ermitteln der Gleichung der kubischen Regressionsfunktion
a2) 1 × C: für die richtige Interpretation im gegebenen Sachzusammenhang
a3) 1 × B2: für das richtige Bestimmen der durchschnittlichen Körpermasse eines ausgewachsenen Zwerghamsters
b1) 1 × B1: für die richtige Berechnung der täglich aufgenommenen Nahrungsmenge
b2) 1 × B2: für das richtige Umformen der Formel
c1) 1 x C: für das richtige Ermitteln der Spannweite
c2) 1 x D: für die richtige Argumentation

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Sozialausgaben (1)*

Aufgabennummer: B_481

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Sozialausgaben sind Geldleistungen, die der Staat Personen in bestimmten Lebenslagen zur Verfügung stellt.

Die Sozialausgaben in Österreich für ausgewählte Jahre im Zeitraum von 1990 bis 2015 sind in der nachstehenden Tabelle angegeben (Werte gerundet).

Jahr	Sozialausgaben in Milliarden Euro
1990	35,5
1995	51,0
2000	59,8
2005	71,2
2010	87,8
2015	102,5

Datenquelle: Statistik Austria (Hrsg.): *Statistisches Jahrbuch Österreichs 2017.* Wien: Verlag Österreich 2016, S. 224.

a) Die Sozialausgaben sollen in Abhängigkeit von der Zeit t in Jahren ab 1990 näherungsweise durch eine lineare Funktion beschrieben werden.

1) Ermitteln Sie eine Gleichung der zugehörigen linearen Regressionsfunktion S_1. Wählen Sie $t = 0$ für das Jahr 1990.

2) Interpretieren Sie den Wert der Steigung von S_1 im gegebenen Sachzusammenhang.

3) Ermitteln Sie mithilfe von S_1 eine Prognose für die Sozialausgaben im Jahr 2020.

* ehemalige Klausuraufgabe

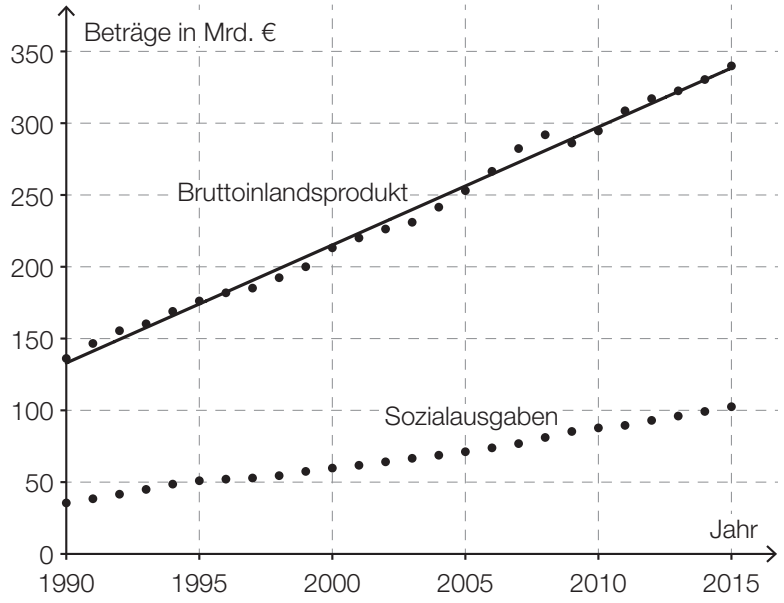
b) Eine Sozialwissenschaftlerin geht von der Annahme aus, dass die Sozialausgaben in Österreich seit dem Jahr 2015 jährlich um 2,5 % bezogen auf das jeweilige Vorjahr steigen.

Dieses Modell soll durch eine Funktion S_2 beschrieben werden.

t ... Zeit ab 2015 in Jahren
$S_2(t)$ ... Sozialausgaben zur Zeit t in Milliarden Euro

1) Erstellen Sie eine Gleichung der Funktion S_2.
Wählen Sie $t = 0$ für das Jahr 2015.

c) In der nachstehenden Abbildung sind das Bruttoinlandsprodukt und die Sozialausgaben Österreichs für den Zeitraum von 1990 bis 2015 dargestellt.
Weiters ist die Regressionsgerade für das Bruttoinlandsprodukt für diesen Zeitraum eingezeichnet.

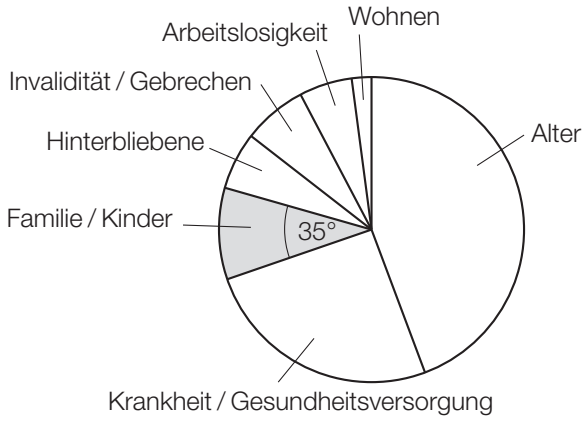


1) Ermitteln Sie den Wert der Steigung der Regressionsgeraden für das Bruttoinlandsprodukt.

Die Sozialquote ist das Verhältnis der Sozialausgaben zum Bruttoinlandsprodukt.

2) Ermitteln Sie die Sozialquote für das Jahr 2015.

d) Die Verteilung der Sozialausgaben von insgesamt 102,5 Milliarden Euro für das Jahr 2015 ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt. Der Bereich „Familie / Kinder“ ist markiert.



1) Ermitteln Sie den Betrag, der im Jahr 2015 für den Bereich „Familie / Kinder“ ausgegeben worden ist.

Möglicher Lösungsweg

a1) Ermittlung mittels Technologieeinsatz:

$S_1(t) = 2{,}61 \cdot t + 35{,}3$ *(Koeffizienten gerundet)*

t ... Zeit in Jahren ($t = 0$ für das Jahr 1990)
$S_1(t)$ ... Sozialausgaben zur Zeit t in Milliarden Euro

a2) Gemäß diesem Modell steigen die Sozialausgaben um rund 2,61 Milliarden Euro pro Jahr.

a3) $S_1(30) = 2{,}61 \cdot 30 + 35{,}3 = 113{,}64...$
Für das Jahr 2020 sind Sozialausgaben in Höhe von rund 113,6 Milliarden Euro zu erwarten.

b1) $S_2(t) = 102{,}5 \cdot 1{,}025^t$

c1) Steigung $k \approx \frac{340 - 140}{25} = 8$
Toleranzbereich: [7; 9]

c2) Sozialquote für 2015: $\frac{102{,}5}{340} = 0{,}301...$
Toleranzbereich: [0,285; 0,320]

d1) $102{,}5 \cdot \frac{35°}{360°} = 9{,}9...$
Für den Bereich „Familie/Kinder“ sind im Jahr 2015 rund 10 Mrd. Euro ausgegeben worden.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × B1: für das richtige Ermitteln der Gleichung der Regressionsfunktion
a2) 1 × C: für das richtige Interpretieren des Wertes der Steigung der Regressionsfunktion im gegebenen Sachzusammenhang
a3) 1 × B2: für das richtige Ermitteln der Prognose
b1) 1 × A: für das richtige Erstellen der Funktionsgleichung
c1) 1 × A: für das richtige Ermitteln des Wertes der Steigung (Toleranzbereich: [7; 9])
c2) 1 × B: für das richtige Ermitteln der Sozialquote (Toleranzbereich: [0,285; 0,320])
d1) 1 × B: für das richtige Ermitteln des Betrags

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Sozialausgaben (2)*

Aufgabennummer: B_482

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Sozialausgaben sind Geldleistungen, die der Staat Personen in bestimmten Lebenslagen zur Verfügung stellt.

Die Sozialausgaben in Österreich für ausgewählte Jahre im Zeitraum von 1990 bis 2015 sind in der nachstehenden Tabelle angegeben (Werte gerundet).

Jahr	Sozialausgaben in Milliarden Euro
1990	35,5
1995	51,0
2000	59,8
2005	71,2
2010	87,8
2015	102,5

Datenquelle: Statistik Austria (Hrsg.): *Statistisches Jahrbuch Österreichs 2017.* Wien: Verlag Österreich 2016, S. 224.

a) Die Sozialausgaben sollen in Abhängigkeit von der Zeit t in Jahren ab 1990 näherungsweise durch eine lineare Funktion beschrieben werden.

1) Ermitteln Sie eine Gleichung der zugehörigen linearen Regressionsfunktion S_1.
Wählen Sie $t = 0$ für das Jahr 1990.

2) Interpretieren Sie den Wert der Steigung von S_1 im gegebenen Sachzusammenhang.

3) Ermitteln Sie mithilfe von S_1 eine Prognose für die Sozialausgaben im Jahr 2020.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) 1) Interpretieren Sie das Ergebnis der nachstehenden Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang:

$$\sqrt[5]{\frac{87{,}8}{71{,}2}} - 1 \approx 0{,}043$$

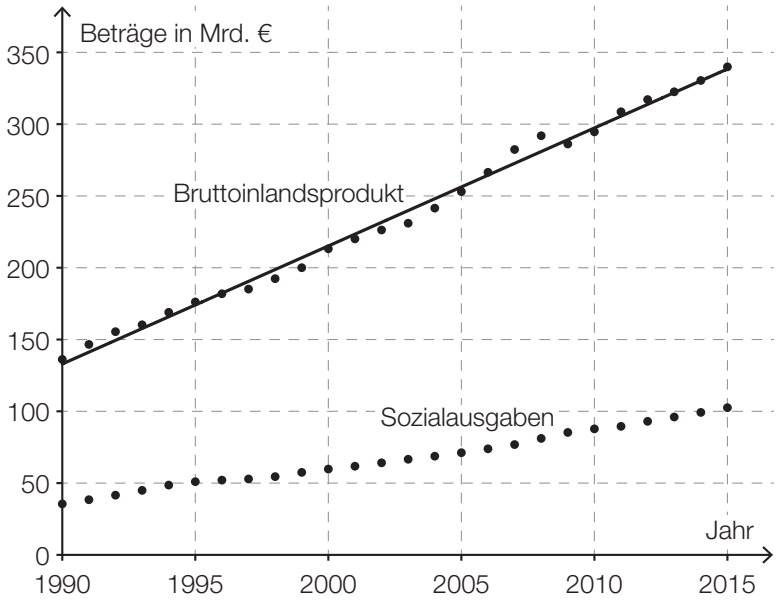
Eine Sozialwissenschaftlerin geht von der Annahme aus, dass die Sozialausgaben in Österreich seit dem Jahr 2015 jährlich um 2,5 % bezogen auf das jeweilige Vorjahr steigen.

Dieses Modell soll durch eine Funktion S_2 beschrieben werden.

t ... Zeit ab 2015 in Jahren
$S_2(t)$ ... Sozialausgaben zur Zeit t in Milliarden Euro

2) Erstellen Sie eine Gleichung der Funktion S_2.
Wählen Sie $t = 0$ für das Jahr 2015.

c) In der nachstehenden Abbildung sind das Bruttoinlandsprodukt und die Sozialausgaben Österreichs für den Zeitraum von 1990 bis 2015 dargestellt.
Weiters ist die Regressionsgerade für das Bruttoinlandsprodukt für diesen Zeitraum eingezeichnet.

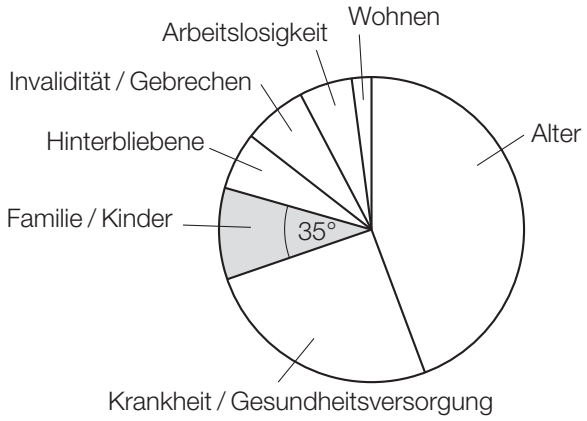


1) Ermitteln Sie den Wert der Steigung der Regressionsgeraden für das Bruttoinlandsprodukt.

Die Sozialquote ist das Verhältnis der Sozialausgaben zum Bruttoinlandsprodukt.

2) Ermitteln Sie die Sozialquote für das Jahr 2015.

d) Die Verteilung der Sozialausgaben von insgesamt 102,5 Milliarden Euro für das Jahr 2015 ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt. Der Bereich „Familie / Kinder“ ist markiert.



1) Ermitteln Sie den Betrag, der im Jahr 2015 für den Bereich „Familie / Kinder“ ausgegeben worden ist.

Möglicher Lösungsweg

a1) Ermittlung mittels Technologieeinsatz:

$S_1(t) = 2{,}61 \cdot t + 35{,}3$ *(Koeffizienten gerundet)*

t ... Zeit in Jahren ($t = 0$ für das Jahr 1990)
$S_1(t)$ ... Sozialausgaben zur Zeit t in Milliarden Euro

a2) Gemäß diesem Modell steigen die Sozialausgaben um rund 2,61 Milliarden Euro pro Jahr.

a3) $S_1(30) = 2{,}61 \cdot 30 + 35{,}3 = 113{,}64...$
Für das Jahr 2020 sind Sozialausgaben in Höhe von rund 113,6 Milliarden Euro zu erwarten.

b1) Im Zeitraum von 2005 bis 2010 stiegen die Sozialausgaben um durchschnittlich rund 4,3 % pro Jahr.

b2) $S_2(t) = 102{,}5 \cdot 1{,}025^t$

c1) Steigung $k \approx \frac{340 - 140}{25} = 8$
Toleranzbereich: [7; 9]

c2) Sozialquote für 2015: $\frac{102{,}5}{340} = 0{,}301...$
Toleranzbereich: [0,285; 0,320]

d1) $102{,}5 \cdot \frac{35°}{360°} = 9{,}9...$
Für den Bereich „Familie/Kinder“ sind im Jahr 2015 rund 10 Mrd. Euro ausgegeben worden.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × B1: für das richtige Ermitteln der Gleichung der Regressionsfunktion
a2) 1 × C: für das richtige Interpretieren des Wertes der Steigung der Regressionsfunktion im gegebenen Sachzusammenhang
a3) 1 × B2: für das richtige Ermitteln der Prognose
b1) 1 × C: für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang
b2) 1 × A: für das richtige Erstellen der Funktionsgleichung
c1) 1 × A: für das richtige Ermitteln des Wertes der Steigung (Toleranzbereich: [7; 9])
c2) 1 × B: für das richtige Ermitteln der Sozialquote (Toleranzbereich: [0,285; 0,320])
d1) 1 × B: für das richtige Ermitteln des Betrags

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

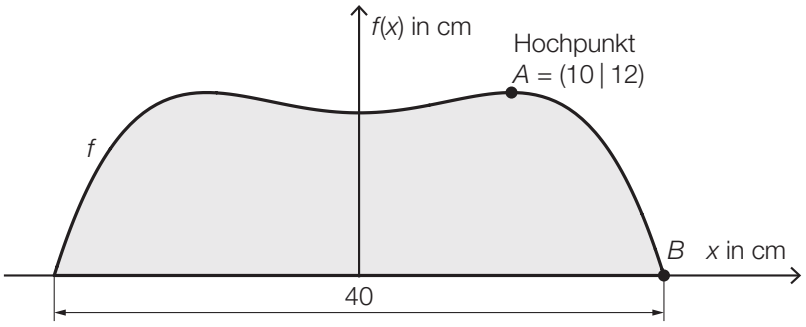
Stand-up-Paddling*

Aufgabennummer: B_480

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Stand-up-Paddling ist eine Wassersportart, bei der eine Person aufrecht auf einem Board steht und paddelt.

a) In der nachstehenden Abbildung ist der Umriss des hinteren Teils eines Boards von oben betrachtet dargestellt. Die Begrenzungslinie kann näherungsweise durch eine Funktion f mit $f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^2 + c$ beschrieben werden.

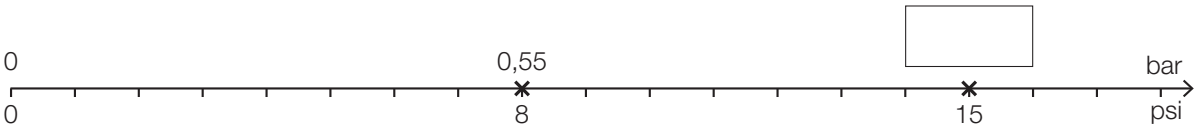


x, $f(x)$ ... Koordinaten in cm

1) Erstellen Sie mithilfe der Informationen zu A und B ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten a, b und c.

2) Berechnen Sie die Koeffizienten a, b und c.

b) Auf einer Luftpumpe für ein aufblasbares Board sind die folgenden zwei Einheiten für den Druck angegeben: pound-force per square inch (psi) und Bar (bar). Die nachstehende Skala zeigt den Zusammenhang zwischen den beiden Einheiten, wobei die Maßzahlen direkt proportional zueinander sind.



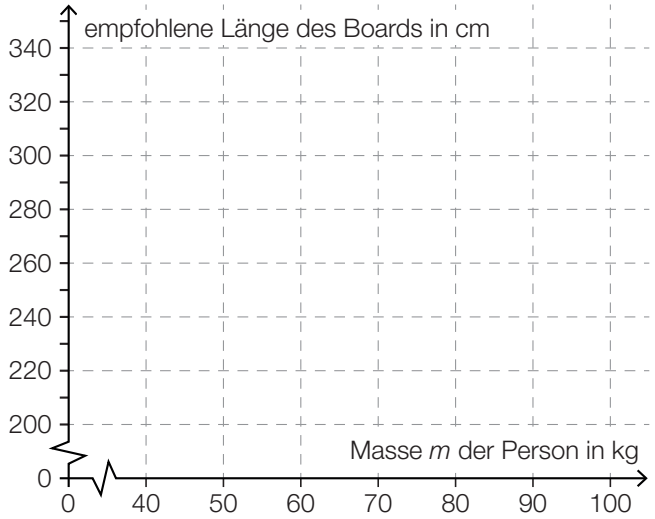
1) Vervollständigen Sie die obige Skala durch Eintragen des fehlenden Wertes.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Je nach Masse m der Person wird ein aufblasbares Board in einer der drei Größen S, M und L empfohlen.

	empfohlene Länge des Boards in cm	Masse m der Person in kg
Größe S	270	$m \leq 60$
Größe M	300	$60 < m < 80$
Größe L	320	$m \geq 80$

1) Veranschaulichen Sie im nachstehenden Koordinatensystem den Zusammenhang zwischen der Masse m der Person und der empfohlenen Länge des Boards.



Boards in diesen drei Größen werden in einem Sportgeschäft verkauft. Die Preise und Verkaufszahlen in den Monaten Juli und August sind der nachstehenden Tabelle zu entnehmen.

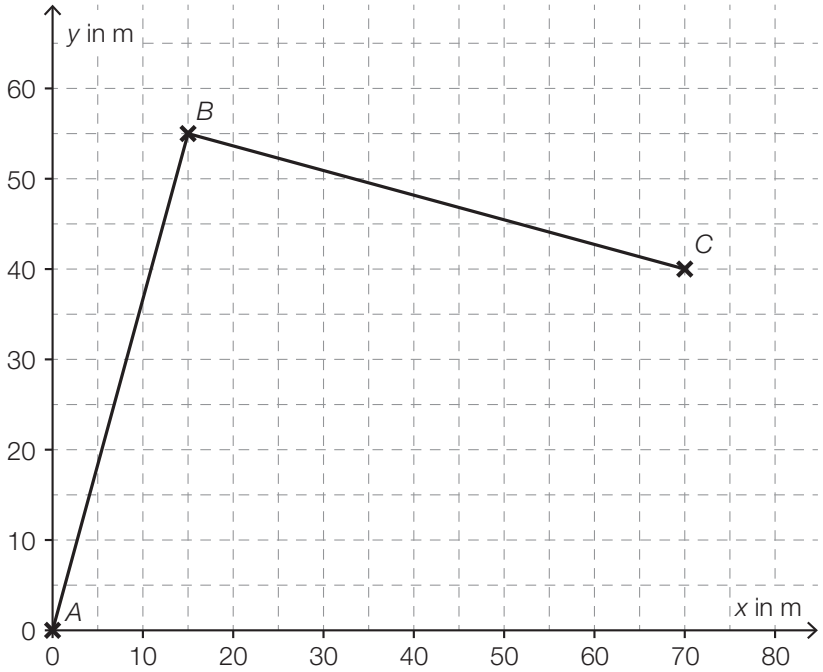
	Preis pro Board in €	Verkaufszahlen im Juli	Verkaufszahlen im August
Größe S	a	8	10
Größe M	b	20	13
Größe L	c	14	25

2) Ordnen Sie den beiden Ausdrücken jeweils die zutreffende Interpretation aus A bis D zu. *[2 zu 4]*

$a \cdot 18 + b \cdot 33 + c \cdot 39$	
$\frac{a \cdot 10 + b \cdot 13 + c \cdot 25}{48}$	

A	Der Ausdruck entspricht dem Anteil der Boards, die im August verkauft wurden, an der Gesamtzahl der verkauften Boards in den beiden Monaten.
B	Der Ausdruck entspricht den Gesamteinnahmen aus dem Verkauf dieser Boards in den beiden Monaten.
C	Der Ausdruck entspricht den durchschnittlichen Einnahmen pro Board im August.
D	Der Ausdruck entspricht den Gesamteinnahmen aus dem Verkauf dieser Boards im August.

d) In einem Hafen wurde eine Stand-up-Paddling-Trainingsstrecke mit Bojen markiert. Dabei muss man vom Start im Punkt A zum Punkt B und dann zum Punkt C paddeln (siehe nachstehende Abbildung).



1) Interpretieren Sie das Ergebnis der nachstehenden Berechnung geometrisch.
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

Möglicher Lösungsweg

a1) $f'(x) = 4 \cdot a \cdot x^3 + 2 \cdot b \cdot x$

I: $f(20) = 0$

II: $f(10) = 12$

III: $f'(10) = 0$

oder:

I: $a \cdot 20^4 + b \cdot 20^2 + c = 0$

II: $a \cdot 10^4 + b \cdot 10^2 + c = 12$

III: $4 \cdot a \cdot 10^3 + 2 \cdot b \cdot 10 = 0$

a2) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$a = -\frac{1}{7\,500} = -0{,}00013...$

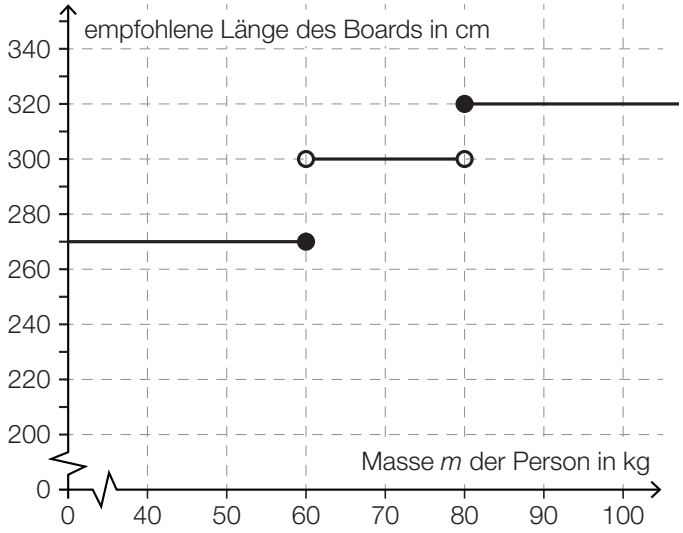
$b = \frac{2}{75} = 0{,}026...$

$c = \frac{32}{3} = 10{,}66...$

b1)



c1)



Die Darstellung an den Sprungstellen ist für die Bepunktung nicht relevant.

c2)

$a \cdot 18 + b \cdot 33 + c \cdot 39$	B
$\frac{a \cdot 10 + b \cdot 13 + c \cdot 25}{48}$	C

A	Der Ausdruck entspricht dem Anteil der Boards, die im August verkauft wurden, an der Gesamtzahl der verkauften Boards in den beiden Monaten.
B	Der Ausdruck entspricht den Gesamteinnahmen aus dem Verkauf dieser Boards in den beiden Monaten.
C	Der Ausdruck entspricht den durchschnittlichen Einnahmen pro Board im August.
D	Der Ausdruck entspricht den Gesamteinnahmen aus dem Verkauf dieser Boards im August.

d1) Die beiden Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BC}$ stehen normal aufeinander.

oder:

Die Richtungsänderung im Punkt B beträgt 90°.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × A1: für das richtige Erstellen der beiden Gleichungen mithilfe der Koordinaten der beiden Punkte
1 × A2: für das richtige Erstellen der Gleichung mithilfe der 1. Ableitung

a2) 1 × B: für das richtige Berechnen der Koeffizienten

b1) 1 × B: für das richtige Vervollständigen der Skala

c1) 1 × A: für das richtige Veranschaulichen

c2) 1 × C: für das richtige Zuordnen

d1) 1 × C: für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Weihnachtsmarkt*

Aufgabennummer: B_479

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Auf einem Weihnachtsmarkt werden Lebkuchensterne, Marmelade und Socken verkauft. Während des ersten Tages wurden 25 Personen bedient. Jede dieser Personen kaufte mindestens ein Produkt.

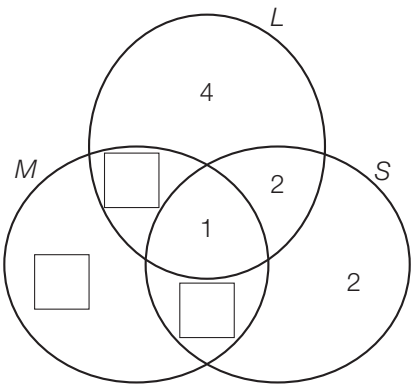
L ... Menge der Personen, die Lebkuchensterne kauften
M ... Menge der Personen, die Marmelade kauften
S ... Menge der Personen, die Socken kauften

6 Personen kauften sowohl Marmelade als auch Lebkuchensterne, aber keine Socken.
8 Personen kauften Socken.

1) Vervollständigen Sie das nachstehende Venn-Diagramm durch Eintragen der fehlenden Werte in die dafür vorgesehenen Kästchen.

2) Markieren Sie im nachstehenden Venn-Diagramm die Menge $(L \cap S) \setminus M$.

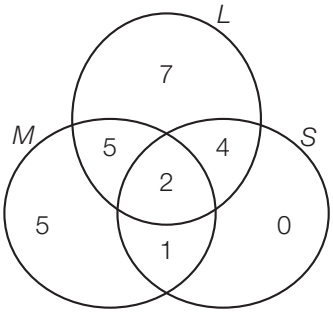
3) Beschreiben Sie die Menge $(L \cap S) \setminus M$ im gegebenen Sachzusammenhang.

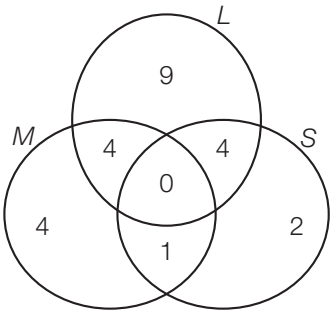


* ehemalige Klausuraufgabe

Auch für die folgenden Tage wurden Venn-Diagramme erstellt.

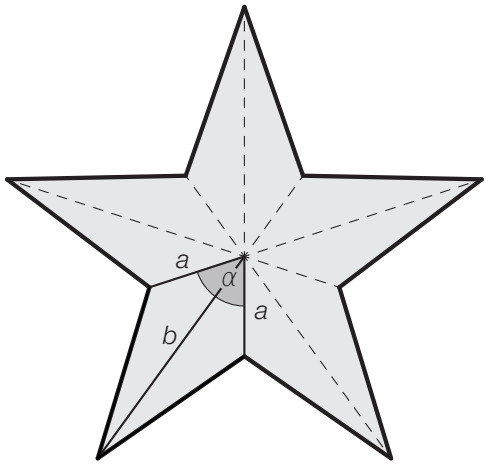
4) Ordnen Sie den beiden Venn-Diagrammen jeweils die passende Aussage aus A bis D zu. *[2 zu 4]*





A	Es gab mehr Personen, die genau 2 verschiedene Produkte kauften, als Personen, die nur Lebkuchensterne kauften.
B	Es gab gleich viele Personen, die sowohl Socken als auch Lebkuchensterne kauften, wie Personen, die nur Marmelade kauften.
C	Es gab mehr Personen, die alle 3 Produkte kauften, als Personen, die nur Marmelade kauften.
D	Es gab weniger Personen, die sowohl Lebkuchensterne als auch Socken kauften, als Personen, die sowohl Marmelade als auch Socken kauften.

b) In der nachstehenden Abbildung ist eine Ausstechform für Lebkuchensterne dargestellt. Es handelt sich dabei um einen regelmäßigen 5-zackigen Stern.



Zur Berechnung der Länge einer Strecke x wird folgender Ausdruck aufgestellt:

$x = \sqrt{a^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot a \cdot \cos(\alpha)}$

1) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung die Strecke x ein.

Für eine bestimmte Ausstechform gilt:

$a = 2$ cm
$b = 5$ cm
$\alpha = 72°$

2) Berechnen Sie den Flächeninhalt eines mit dieser Ausstechform ausgestochenen Lebkuchensterns.

c) Aus einem Teig werden mit einer Ausstechform Lebkuchenherzen ausgestochen. Der Flächeninhalt eines solchen Lebkuchenherzens beträgt A (in cm^2), die Dicke beträgt d (in cm).
N Lebkuchenherzen haben insgesamt ein Volumen V (in cm^3).



1) Erstellen Sie aus A, V und d eine Formel zur Berechnung von N.

$N =$ _____

d) Jemand beobachtete auf dem Weihnachtsmarkt das Kaufverhalten und bestimmte die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

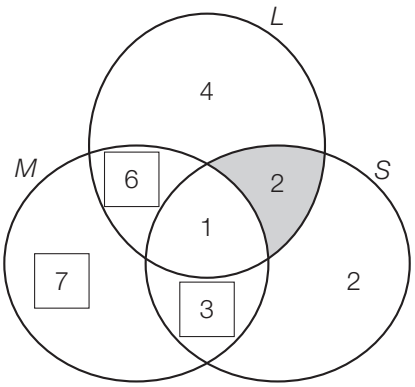
Anzahl *n* der Marmeladegläser	Wahrscheinlichkeit für den Kauf von *n* Marmeladegläsern pro Person
0	0,24
1	0,38
2	0,16
3	0,12
4	
≥ 5	0

1) Vervollständigen Sie die obige Tabelle durch Eintragen des fehlenden Wertes.

2) Berechnen Sie den Erwartungswert für die Anzahl der gekauften Marmeladegläser pro Person.

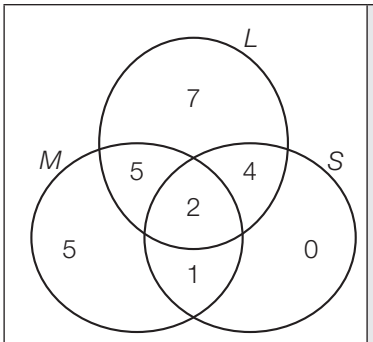
Möglicher Lösungsweg

a1 und a2)

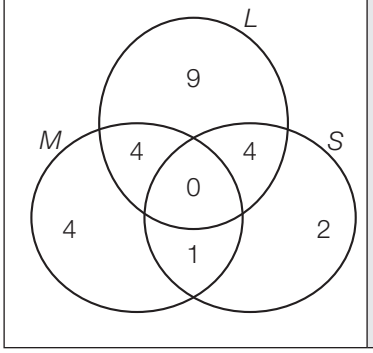


a3) $(L \cap S) \setminus M$ beschreibt die Menge aller Personen, die sowohl Lebkuchensterne als auch Socken, aber keine Marmelade kauften.

a4)



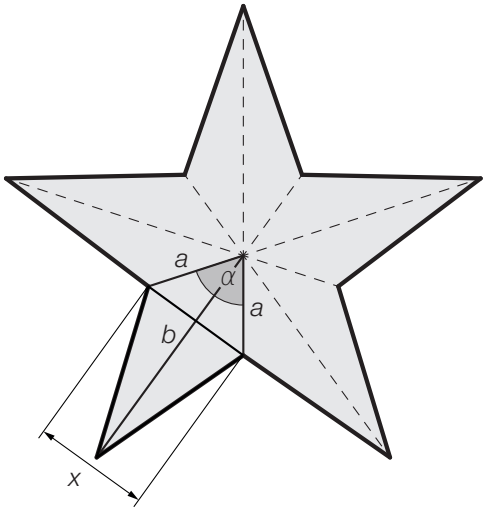
A



B

A	Es gab mehr Personen, die genau 2 verschiedene Produkte kauften, als Personen, die nur Lebkuchensterne kauften.
B	Es gab gleich viele Personen, die sowohl Socken als auch Lebkuchensterne kauften, wie Personen, die nur Marmelade kauften.
C	Es gab mehr Personen, die alle 3 Produkte kauften, als Personen, die nur Marmelade kauften.
D	Es gab weniger Personen, die sowohl Lebkuchensterne als auch Socken kauften, als Personen, die sowohl Marmelade als auch Socken kauften.

b1)



b2) $10 \cdot \frac{a \cdot b}{2} \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 10 \cdot \frac{2 \cdot 5}{2} \cdot \sin(36°) = 29{,}38...$

Der Flächeninhalt beträgt rund 29,4 cm².

c1) $N = \frac{V}{d \cdot A}$

d1)

Anzahl n der Marmeladegläser	Wahrscheinlichkeit für den Kauf von n Marmeladegläsern pro Person
0	0,24
1	0,38
2	0,16
3	0,12
4	**0,1**
≥ 5	0

d2) $0 \cdot 0{,}24 + 1 \cdot 0{,}38 + 2 \cdot 0{,}16 + 3 \cdot 0{,}12 + 4 \cdot 0{,}1 = 1{,}46$

Der Erwartungswert für die Anzahl der gekauften Marmeladegläser pro Person beträgt 1,46.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × A: für das richtige Vervollständigen des Venn-Diagramms
a2) 1 × C1: für das richtige Markieren
a3) 1 × C2: für das richtige Beschreiben im gegebenen Sachzusammenhang
a4) 1 × C3: für das richtige Zuordnen
b1) 1 × A: für das richtige Einzeichnen von x in einer beliebigen Zacke
b2) 1 × B: für das richtige Berechnen des Flächeninhalts
c1) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel
d1) 1 × A: für das richtige Vervollständigen der Tabelle
d2) 1 × B: für das richtige Berechnen des Erwartungswerts

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Parkgarage*

Aufgabennummer: B_485

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Eine Baugesellschaft errichtet eine Parkgarage.
Es wird eine Nutzungsdauer von 40 Jahren angenommen.
Die Baugesellschaft rechnet mit einem kalkulatorischen Zinssatz von 4 % p. a.

a) Die Baugesellschaft rechnet mit jährlich nachschüssigen Betriebskosten in Höhe von jeweils € 64.000.

1) Berechnen Sie den Barwert der Betriebskosten für die gesamte Nutzungsdauer.

b) Die Wartungskosten (in €) werden mit W_1 nach 10 Jahren, W_2 nach 20 Jahren und W_3 nach 30 Jahren veranschlagt.

1) Erstellen Sie mithilfe von W_1, W_2 und W_3 eine Formel zur Berechnung des Barwerts B der gesamten Wartungskosten.

$B =$ _____

W_1 und W_2 werden mit jeweils € 60.000 veranschlagt. Der Barwert B beträgt € 92.582,56.

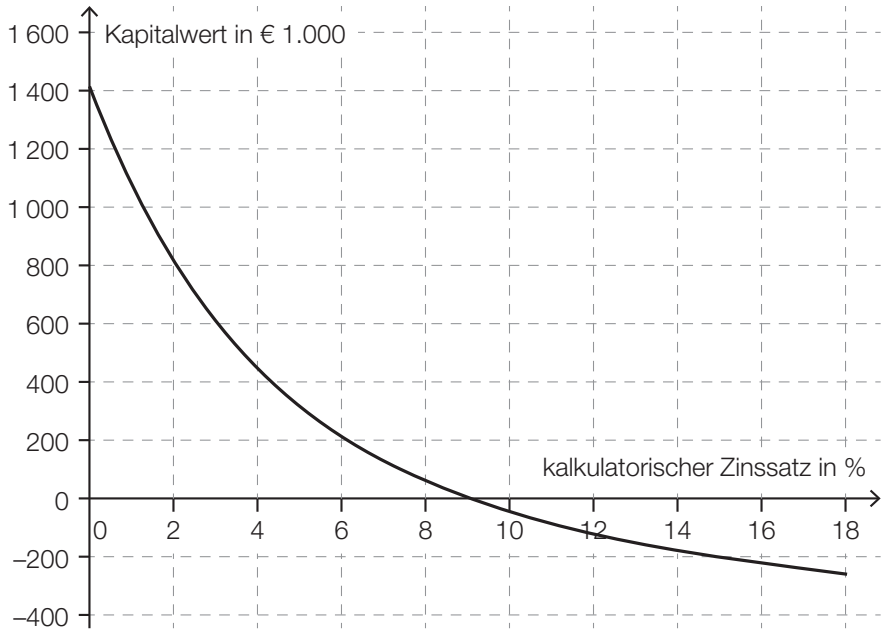
2) Berechnen Sie W_3.

c) Die monatliche Miete für einen Parkgaragenplatz wird mit € 105 veranschlagt.
Die Parkgarage verfügt über 120 Plätze.
Die Baugesellschaft rechnet mit monatlichen Mieteinnahmen in Höhe von € 10.080.
Der Auslastungsgrad gibt an, wie viel Prozent der Parkgaragenplätze vermietet sind.

1) Ermitteln Sie den Auslastungsgrad der Parkgarage, mit dem die Baugesellschaft rechnet.

* ehemalige Klausuraufgabe

d) In der nachstehenden Abbildung ist der Kapitalwert für die Parkgarage (in € 1.000) in Abhängigkeit vom kalkulatorischen Zinssatz (in Prozent) dargestellt:



1) Lesen Sie aus der obigen Abbildung den Kapitalwert für den kalkulatorischen Zinssatz 4 % ab. Geben Sie das Ergebnis in Euro an.

Kapitalwert: € _____

Die Baugesellschaft senkt die Anschaffungskosten für die Parkgarage um € 200.000.

2) Argumentieren Sie, dass der interne Zinssatz dadurch auf über 10 % steigt.

Möglicher Lösungsweg

a1) $B_{nach} = 64\,000 \cdot \frac{1{,}04^{40} - 1}{0{,}04} \cdot \frac{1}{1{,}04^{40}} = 1\,266\,737{,}528...$

Der Barwert der Betriebskosten beträgt € 1.266.737,53.

b1) $B = \frac{W_1}{1{,}04^{10}} + \frac{W_2}{1{,}04^{20}} + \frac{W_3}{1{,}04^{30}}$

b2) $92\,582{,}56 = \frac{60\,000}{1{,}04^{10}} + \frac{60\,000}{1{,}04^{20}} + \frac{W_3}{1{,}04^{30}} \quad \Rightarrow \quad W_3 = 79\,999{,}9...$

Die Wartungskosten W_3 betragen € 80.000.

c1) $105 \cdot 120 \cdot A = 10\,080 \quad \Rightarrow \quad A = 0{,}8$

Der Auslastungsgrad beträgt 80 %.

d1) Kapitalwert: € 450.000

Toleranzbereich: [€ 410.000; € 490.000]

d2) Werden die Anschaffungskosten für die Parkgarage um € 200.000 gesenkt, wird die Kapitalwertkurve um diesen Betrag nach oben verschoben. Dadurch wird der Kapitalwert für 10 % positiv, der interne Zinssatz ist dann höher als 10 %.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × B: für das richtige Berechnen des Barwerts
b1) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel
b2) 1 × B: für das richtige Berechnen von W_3
c1) 1 × B: für das richtige Ermitteln des Auslastungsgrads
d1) 1 × C: für das richtige Ablesen des Kapitalwerts in Euro
(Toleranzbereich: [€ 410.000; € 490.000])
d2) 1 × D: für das richtige Argumentieren

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Lagerhalle*

Aufgabennummer: B_484

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Für den Kauf einer Lagerhalle benötigt ein Unternehmen € 180.000. Es werden verschiedene Möglichkeiten für die Finanzierung überprüft.

a) Das Unternehmen konnte in den vergangenen Jahren Rücklagen bilden, die mit einem positiven jährlichen Zinssatz *i* verzinst werden:
Vor 4 Jahren konnte das Unternehmen € 50.000 zurücklegen, vor 3 Jahren konnte es € 70.000 zurücklegen.

Es soll derjenige Betrag *X* ermittelt werden, der für den Kauf der Lagerhalle heute noch fehlt.

1) Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung des Betrags *X*.

$X =$ _____

2) Berechnen Sie den Betrag *X* für den Zinssatz $i = 2{,}5\ \%$ p. a.

b) Das Unternehmen kann den Kauf der Lagerhalle mit einem Kredit in Höhe von € 180.000 finanzieren.

Der Kredit soll durch 40 nachschüssige Quartalsraten bei einem Zinssatz von 1 % p. q. getilgt werden.

1) Berechnen Sie die Höhe einer Quartalsrate.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Ein anderes Kreditangebot enthält Sonderkonditionen für die Jahre 1 und 2.

Diese Sonderkonditionen können dem Tilgungsplan entnommen werden:

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0	– – –	– – –	– – –	€ 180.000
1	€ 5.400	€ –5.400	€ 0	€ 185.400
2	€ 5.562			€ 180.000

1) Ermitteln Sie den Jahreszinssatz für dieses Kreditangebot.

2) Erklären Sie mithilfe der Einträge im Tilgungsplan, warum der Tilgungsanteil im Jahr 1 negativ ist.

3) Vervollständigen Sie die Zeile für das Jahr 2 im obigen Tilgungsplan.

Möglicher Lösungsweg

a1) $X = 180\,000 - 50\,000 \cdot (1 + i)^4 - 70\,000 \cdot (1 + i)^3$

a2) $X = 180\,000 - 50\,000 \cdot 1{,}025^4 - 70\,000 \cdot 1{,}025^3 = 49\,427{,}011...$
Es fehlt ein Betrag in Höhe von € 49.427,01.

b1) $180\,000 = R \cdot \frac{1{,}01^{40} - 1}{0{,}01} \cdot \frac{1}{1{,}01^{40}} \quad \Rightarrow \quad R = 5\,482{,}007...$
Die Höhe einer Quartalsrate beträgt € 5.482,01.

c1) $i = \frac{5\,400}{180\,000} = 0{,}03$
Der Jahreszinssatz beträgt 3 %.

c2) Das Unternehmen bezahlt im Jahr 1 nichts, die Annuität ist gleich null.
Da die Summe aus Zinsanteil und Tilgungsanteil gleich null ist, muss der Tilgungsanteil negativ sein.

c3)

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
2	€ 5.562	**€ 5.400**	**€ 10.962**	€ 180.000

Lösungsschlüssel

a1) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel
a2) 1 × B: für das richtige Berechnen des Betrags X
b1) 1 × B: für das richtige Berechnen der Höhe einer Quartalsrate
c1) 1 × B1: für das richtige Ermitteln des Jahreszinssatzes
c2) 1 × D: für das richtige Erklären
c3) 1 × B2: für das richtige Vervollständigen der Zeile für das Jahr 2

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Fruchtsaftproduktion*

Aufgabennummer: B_483

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein Unternehmen produziert den Fruchtsaft *Mangomix*.

a) Die Kosten bei der Produktion des Fruchtsafts *Mangomix* können durch eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion K beschrieben werden:

$K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + 105 \cdot x + 1215$

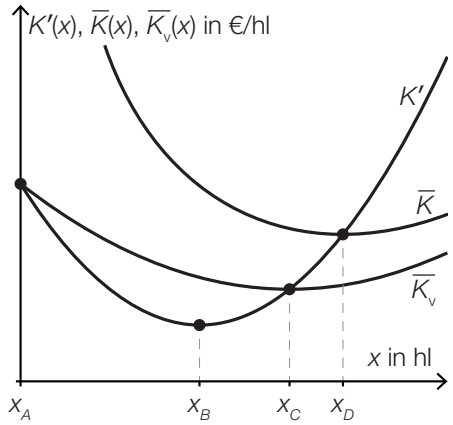
x ... Produktionsmenge in hl
$K(x)$ ... Kosten bei der Produktionsmenge x in €

Von der Kostenfunktion ist bekannt:
I: Die Grenzkosten bei einer Produktionsmenge von 25 hl betragen 30 €/hl.
II: $K''(25) = 0$

1) Erstellen Sie eine Gleichung, die die Bedingung I beschreibt.
2) Interpretieren Sie die Bedeutung der Zahl 25 in der Gleichung II im gegebenen Sachzusammenhang.
3) Berechnen Sie die Koeffizienten a und b.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) In der nachstehenden Abbildung sind die Graphen der Grenzkostenfunktion K', der Durchschnittskostenfunktion $\overline{K}$ und der variablen Durchschnittskostenfunktion $\overline{K_v}$ für den Fruchtsaft *Mangomix* dargestellt.
Vier Produktionsmengen, x_A bis x_D, sind auf der horizontalen Achse markiert.



1) Ordnen Sie den beiden Begriffen jeweils die zutreffende Produktionsmenge aus A bis D zu. *[2 zu 4]*

Kostenkehre	
Betriebsminimum	

A	Produktionsmenge x_A
B	Produktionsmenge x_B
C	Produktionsmenge x_C
D	Produktionsmenge x_D

c) Der Erlös beim Verkauf des Fruchtsafts *Mangomix* kann durch eine quadratische Funktion E beschrieben werden:

$E(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x$ mit $x \geq 0$

x ... Absatzmenge in hl
$E(x)$ ... Erlös bei der Absatzmenge x in €

1) Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen des jeweils richtigen Satzteils so, dass eine korrekte Aussage entsteht. *[Lückentext]*

Der Koeffizient a muss _____①_____ sein, weil der Graph von E _____②_____.

①	
positiv	☐
negativ	☐
gleich null	☐

②	
durch den Ursprung geht	☐
keinen Wendepunkt hat	☐
nach unten geöffnet ist	☐

2) Weisen Sie nach, dass der maximale Erlös bei der Absatzmenge $x_0 = -\frac{b}{2 \cdot a}$ erzielt wird.

d) Der Grenzgewinn für den Fruchtsaft *Mangomix* kann durch die Funktion G' beschrieben werden:

$G'(x) = -0{,}12 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 220$

x ... Absatzmenge in hl
$G'(x)$ ... Grenzgewinn bei der Absatzmenge x in €/hl

1) Ermitteln Sie diejenige Absatzmenge, bei der der maximale Gewinn erzielt wird.

Die Fixkosten betragen 1.215 €.

2) Erstellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Gewinnfunktion G unter Berücksichtigung der Fixkosten.

Es soll derjenige Bereich für die Absatzmenge ermittelt werden, in dem der Gewinn mindestens 1.000 € beträgt.

3) Ermitteln Sie diesen Bereich.

Möglicher Lösungsweg

a1) $K'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x + 105$

Gleichung: $K'(25) = 30$ *oder* $1\,875 \cdot a + 50 \cdot b + 105 = 30$

a2) Bei einer Produktionsmenge von 25 hl liegt die Kostenkehre.

oder:

Bei einer Produktionsmenge von 25 hl geht der Kostenverlauf von degressiv zu progressiv über.

a3) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$a = 0{,}04;\ b = -3$

b1)

Kostenkehre	B
Betriebsminimum	C

A	Produktionsmenge x_A
B	Produktionsmenge x_B
C	Produktionsmenge x_C
D	Produktionsmenge x_D

c1)

①	
negativ	☒

②	
nach unten geöffnet ist	☒

c2) $E'(x) = 2 \cdot a \cdot x + b$

$0 = 2 \cdot a \cdot x_0 + b$

$x_0 = -\frac{b}{2 \cdot a}$

oder:

Die Nullstellen der Erlösfunktion sind 0 und $-\frac{b}{a}$.

Die Stelle des Maximums liegt in der Mitte bei $-\frac{b}{2 \cdot a}$.

d1) $G'(x) = 0$ *oder* $-0{,}12 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 220 = 0$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$x_1 = 29{,}280...$ $(x_2 = -62{,}613...)$

Der maximale Gewinn wird bei einer Absatzmenge von rund 29,28 hl erzielt.

d2) $G(x) = \int (-0{,}12 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 220)\,dx = -0{,}04 \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 + 220 \cdot x + C$

Da $G(0) = -F$, gilt: $G(x) = -0{,}04 \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 + 220 \cdot x - 1215$

d3) $G(x) = 1000$ *oder* $-0{,}04 \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 + 220 \cdot x - 1215 = 1000$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$x_1 = 11{,}565...$ $x_2 = 44{,}950...$ $(x_3 = -106{,}516...)$

Im Bereich [11,57 hl; 44,95 hl] beträgt der Gewinn mindestens 1.000 €.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × A: für das richtige Erstellen der Gleichung
a2) 1 × C: für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang
a3) 1 × B: für das richtige Berechnen der Koeffizienten
b1) 1 × C: für das richtige Zuordnen
c1) 1 × C: für das richtige Ergänzen der beiden Textlücken
c2) 1 × D: für das richtige Nachweisen
d1) 1 × B1: für das richtige Ermitteln der Absatzmenge, bei der maximaler Gewinn erzielt wird
d2) 1 × A: für das richtige Erstellen der Gleichung der Gewinnfunktion unter Berücksichtigung der Fixkosten
d3) 1 × B2: für das richtige Ermitteln des Bereichs

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Hochstuhl für Kinder*

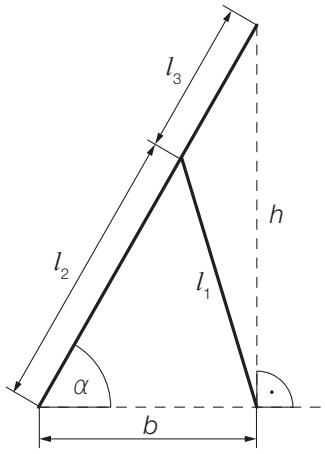
Aufgabennummer: B_476

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Das nebenstehende Bild zeigt einen Hochstuhl für Kleinkinder.



In der nachstehenden Abbildung sind Teile des Hochstuhls schematisch dargestellt.



1) Erstellen Sie mithilfe von l_1, l_2 und b eine Formel zur Berechnung von α.

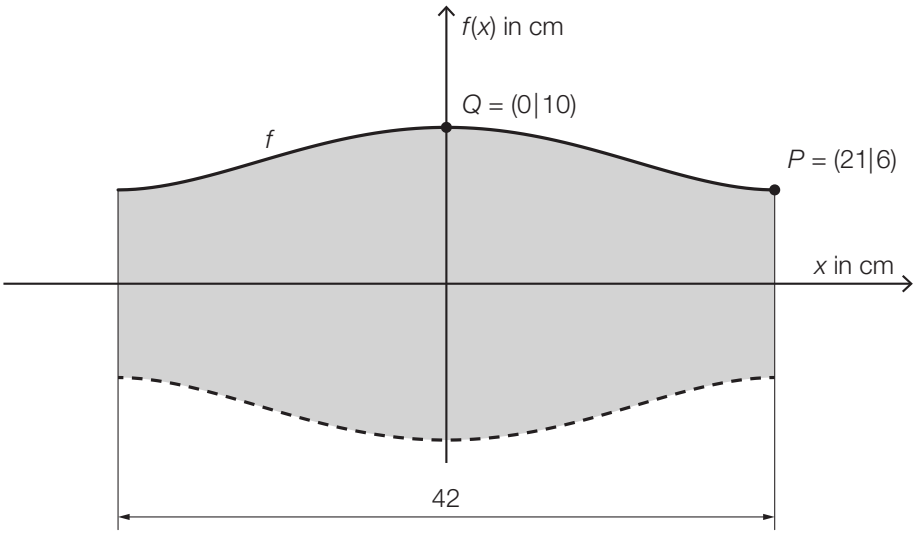
$\alpha =$ _____

2) Markieren Sie in der obigen Abbildung die Winkel β und γ, für die gilt:

$$\frac{\sin(\beta)}{h} = \frac{\sin(\gamma)}{l_3}$$

* ehemalige Klausuraufgabe

b) In der nachstehenden Abbildung ist ein Modell der Rückenlehne eines bestimmten Hochstuhls dargestellt.



Die obere Begrenzungslinie lässt sich näherungsweise durch den Graphen der Funktion f mit $f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^2 + c$ beschreiben. Im Punkt P verläuft die Tangente an den Graphen der Funktion f waagrecht.

1) Erstellen Sie mithilfe der Informationen zu P und Q ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten a, b und c.

2) Berechnen Sie diese Koeffizienten.

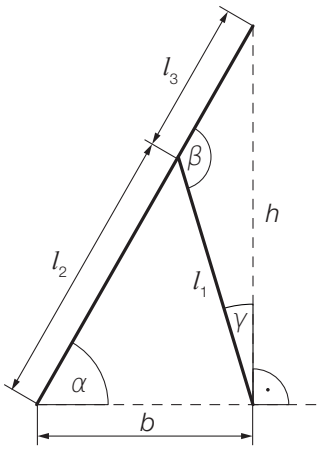
Die untere Begrenzungslinie entsteht durch Spiegelung des Graphen der Funktion f an der x-Achse.

3) Ermitteln Sie den Inhalt der in der obigen Abbildung grau markierten Fläche.

Möglicher Lösungsweg

a1) $\alpha = \arccos\left(\frac{b^2 + l_2^2 - l_1^2}{2 \cdot b \cdot l_2}\right)$

a2)



b1) $f'(x) = 4 \cdot a \cdot x^3 + 2 \cdot b \cdot x$

I: $f(0) = 10$

II: $f(21) = 6$

III: $f'(21) = 0$

oder:

I: $10 = a \cdot 0^4 + b \cdot 0^2 + c$

II: $6 = a \cdot 21^4 + b \cdot 21^2 + c$

III: $0 = 4 \cdot a \cdot 21^3 + 2 \cdot b \cdot 21$

b2) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$a = \frac{4}{194\,481} = 0{,}00002056...$

$b = -\frac{8}{441} = -0{,}01814...$

$c = 10$

b3) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$2 \cdot \int_{-21}^{21} f(x)\,dx = 683{,}2$

Der Flächeninhalt beträgt 683,2 cm².

Lösungsschlüssel

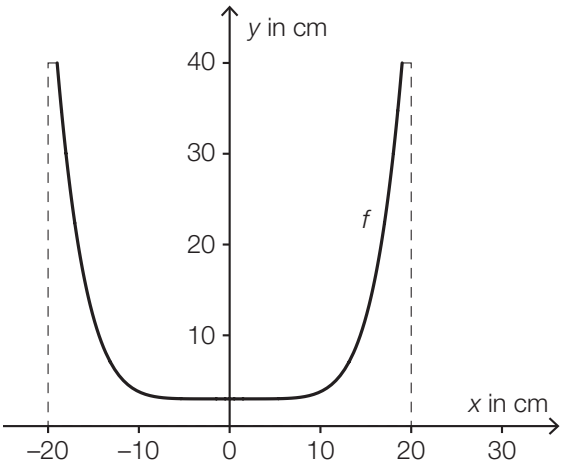
a1) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel
a2) 1 × C: für das richtige Markieren der beiden Winkel
b1) 1 × A1: für das richtige Erstellen der Gleichungen mithilfe der Koordinaten der Punkte P und Q
1 × A2: für das richtige Erstellen der Gleichung mithilfe der 1. Ableitung
b2) 1 × B1: für das richtige Berechnen der Koeffizienten
b3) 1 × B2: für das richtige Ermitteln des Inhalts der Fläche

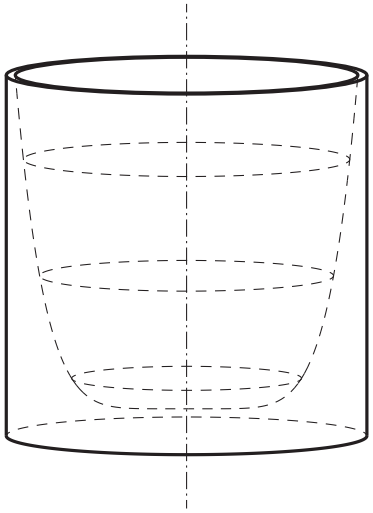
Blumentopf*

Aufgabennummer: B_474

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Ein Unternehmen produziert Blumentöpfe.
Der Außendurchmesser eines solchen Blumentopfs beträgt 40 cm. Auch die Gesamthöhe des Blumentopfs beträgt 40 cm. (Siehe nachstehende Abbildung.)





Für die Funktion f mit $f(x) = y$ gilt:

$$y = \frac{37}{19^6} \cdot x^6 + 3 \text{ mit } -19 \leq x \leq 19$$

1) Begründen Sie, warum f eine gerade Funktion ist.

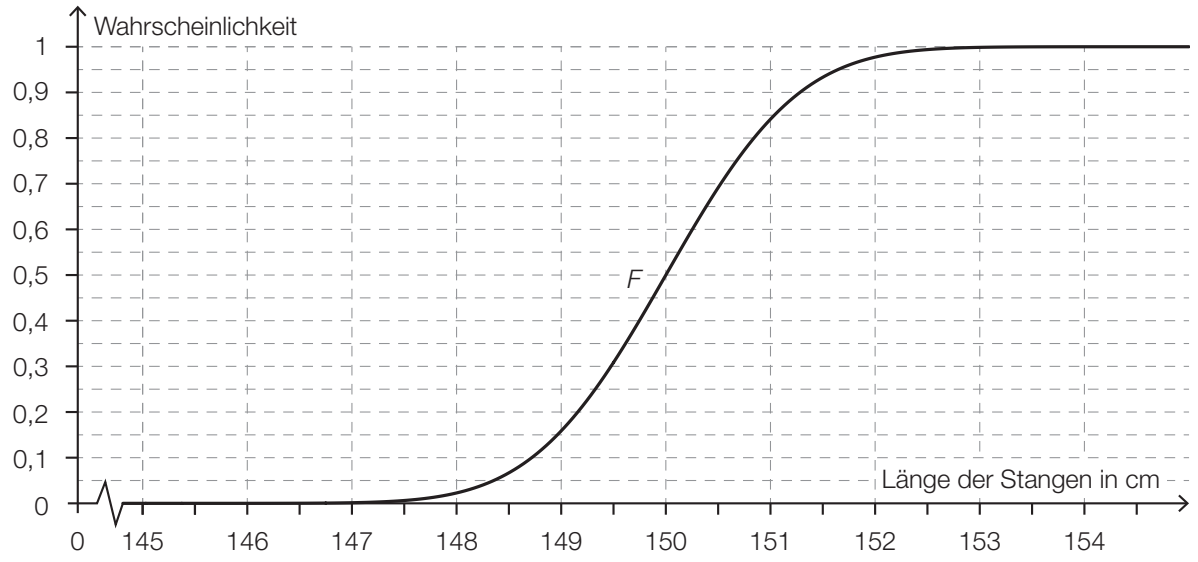
Die Innenwand des Blumentopfs entsteht durch Rotation des oben dargestellten Graphen von f um die y-Achse.

2) Berechnen Sie das Innenvolumen des Blumentopfs.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Ein Unternehmen produziert Stangen für Kletterpflanzen. Die Länge dieser Stangen ist annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 150$ cm.

Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen der zugehörigen Verteilungsfunktion F.



1) Lesen Sie aus der obigen Abbildung den Wert der Standardabweichung ab.

2) Veranschaulichen Sie in der obigen Abbildung die Wahrscheinlichkeit, die durch den nachstehenden Ausdruck berechnet wird.

$1 - F(149{,}5)$

Ein anderes Unternehmen produziert auch solche Stangen. Die Länge dieser Stangen ist ebenfalls annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 150$ cm. Es ist bekannt, dass 92,3 % dieser Stangen eine Länge von höchstens 151 cm haben.

3) Berechnen Sie die zugehörige Standardabweichung.

c) Der Erlös aus dem Verkauf von Blumentöpfen kann durch die Funktion E beschrieben werden:

$E(x) = 20 \cdot x - 0{,}12 \cdot x^2$

x … Verkaufsmenge in ME
$E(x)$ … Erlös bei der Verkaufsmenge x in GE

1) Ermitteln Sie das größtmögliche Intervall für x, in dem der Erlös mindestens 100 GE beträgt.

Möglicher Lösungsweg

a1) Die Funktion f ist gerade, weil der Graph symmetrisch zur y-Achse ist.

oder:

Die Funktion f ist gerade, weil $f(x) = f(-x)$.

oder:

Die Funktion f ist gerade, weil f eine Polynomfunktion ist, in der die einzige auftretende Potenz von x einen geradzahligen Exponenten hat.

a2) Ansatz: $\pi \cdot \int_3^{40} x^2 \, dy$

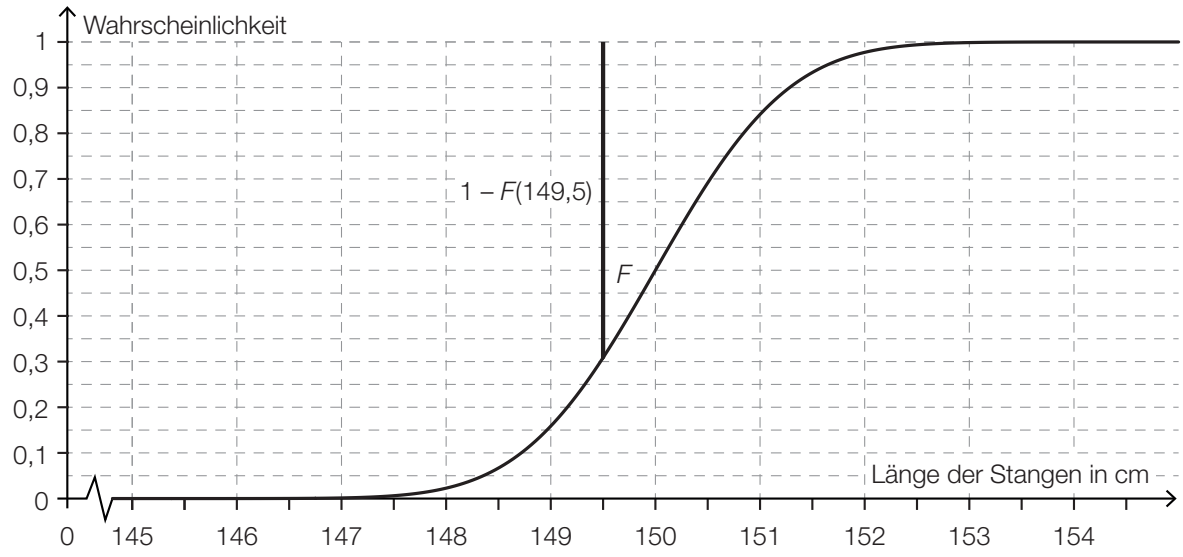
$\pi \cdot \int_3^{40} 19^2 \cdot \sqrt[3]{\frac{y-3}{37}} \, dy = 31\,471{,}6...$

Das Innenvolumen des Blumentopfs beträgt rund 31 472 cm³.

b1) $\sigma = 1$ cm

Toleranzbereich: [0,7; 1,3]

b2)



b3) X ... Länge der Stangen in cm

$P(X \leq 151) = 0{,}923$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$\sigma = 0{,}70...$ cm

c1) $E(x) = 100$ *oder* $20 \cdot x - 0{,}12 \cdot x^2 = 100$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$x_1 = 5{,}15\ldots$
$x_2 = 161{,}50\ldots$

Intervall: [5,15...; 161,50...]

Lösungsschlüssel

a1) 1 × D: für das richtige Begründen
a2) 1 × A: für den richtigen Ansatz
1 × B: für das richtige Berechnen des Innenvolumens
b1) 1 × C: für das richtige Ablesen der Standardabweichung (Toleranzbereich: [0,7; 1,3])
b2) 1 × A: für das richtige Veranschaulichen der Wahrscheinlichkeit
b3) 1 × B: für das richtige Berechnen der Standardabweichung
c1) 1 × B: für das richtige Ermitteln des Intervalls

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

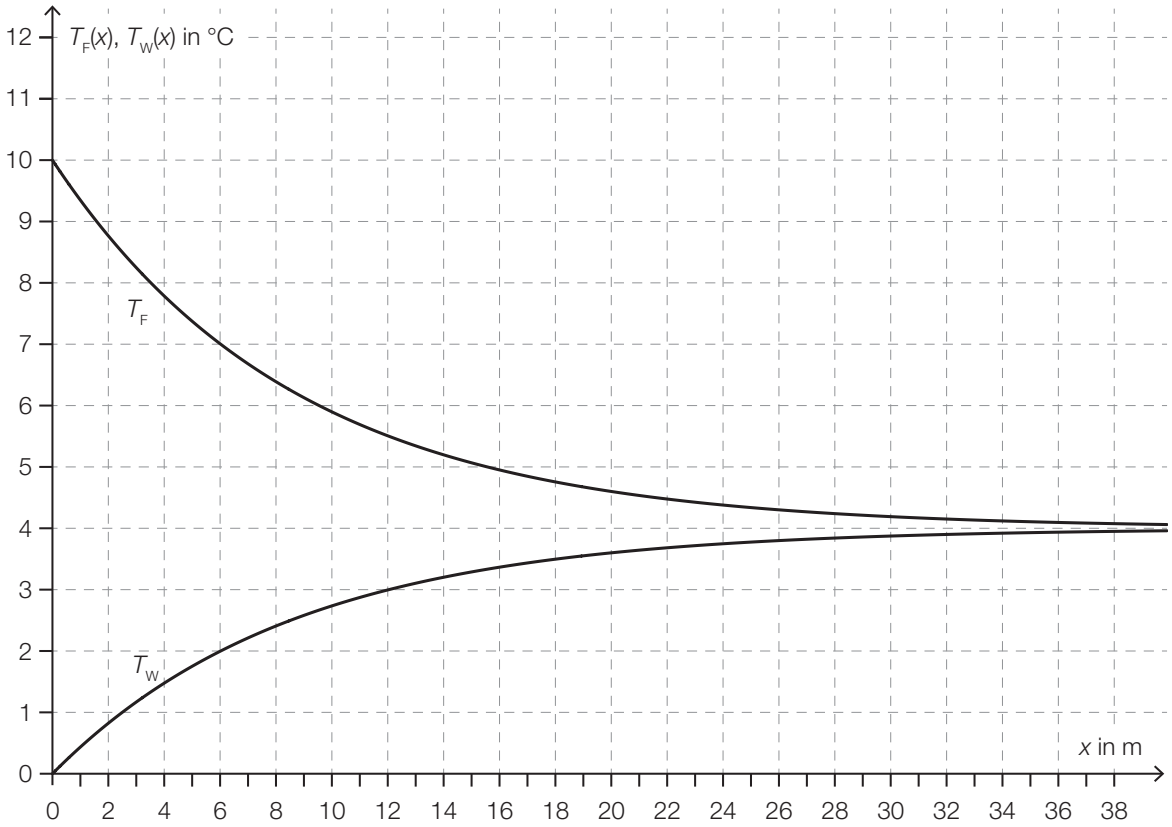
Limnologie*

Aufgabennummer: B_478

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Die Limnologie erforscht wichtige Kenngrößen von stehenden Gewässern wie etwa Temperatur oder Dichte.

a) Die nachstehende Abbildung zeigt modellhaft die Wassertemperatur eines Sees in Abhängigkeit von der Tiefe x im Frühling (T_F) und im Winter (T_W). Die Wassertemperatur nähert sich in beiden Fällen asymptotisch dem Wert 4 °C.



Die Wassertemperatur des Sees im Frühling kann in Abhängigkeit von der Tiefe x näherungsweise durch eine Exponentialfunktion T_F mit $T_F(x) = a + b \cdot e^{c \cdot x}$ beschrieben werden.

1) Ermitteln Sie mithilfe der obigen Abbildung die Parameter a, b und c der Funktion T_F.

Für ein bestimmtes x_1 gilt: $T_F(x_1) - T_W(x_1) = 5$

2) Ermitteln Sie x_1 mithilfe der obigen Abbildung.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) In der Limnologie wird für bestimmte Zwecke eine Funktion g verwendet:

$g(x) = a \cdot \left(1 - \frac{x}{b}\right)^{-1}$

a, b ... positive Parameter

1) Kreuzen Sie diejenige Aussage an, die auf die Funktion g nicht zutrifft. *[1 aus 5]*

$g(0) = a$	☐
Für $0 < x < b$ gilt: $g(x) > a$	☐
g ist für $0 < x < b$ monoton steigend.	☐
Die Funktion g hat eine Polstelle.	☐
$g(b) = 0$	☐

c) Die Dichte von Wasser in Abhängigkeit von der Temperatur kann unter bestimmten Bedingungen näherungsweise durch die Funktion ϱ beschrieben werden:

$\varrho(T) = a - b \cdot (T - 4)^2$ mit $0 < T \leq 10$

T ... Temperatur in °C
$\varrho(T)$ ... Dichte von Wasser bei der Temperatur T in kg/m³
a, b ... positive Parameter

1) Lesen Sie aus der obigen Funktionsgleichung die Koordinaten des Scheitelpunkts S von ϱ ab.

$S = (_____ | _____)$

2) Argumentieren Sie mathematisch, dass der Scheitelpunkt ein Hochpunkt der Funktion ϱ ist.

Es gilt: $a = 999{,}972$ und $b = 0{,}007$
Die Gleichung einer Tangente an den Graphen der Funktion ϱ lautet: $f(T) = 0{,}028 \cdot T + d$

3) Berechnen Sie den Parameter d.

Jemand verwendet zur Berechnung der Dichte von Wasser bei 10 °C die obige Funktion ϱ mit den Parametern $a = 999{,}972$ und $b = 0{,}007$.
Die Dichte von Wasser bei 10 °C beträgt jedoch laut einer Tabelle 999,700 kg/m³.

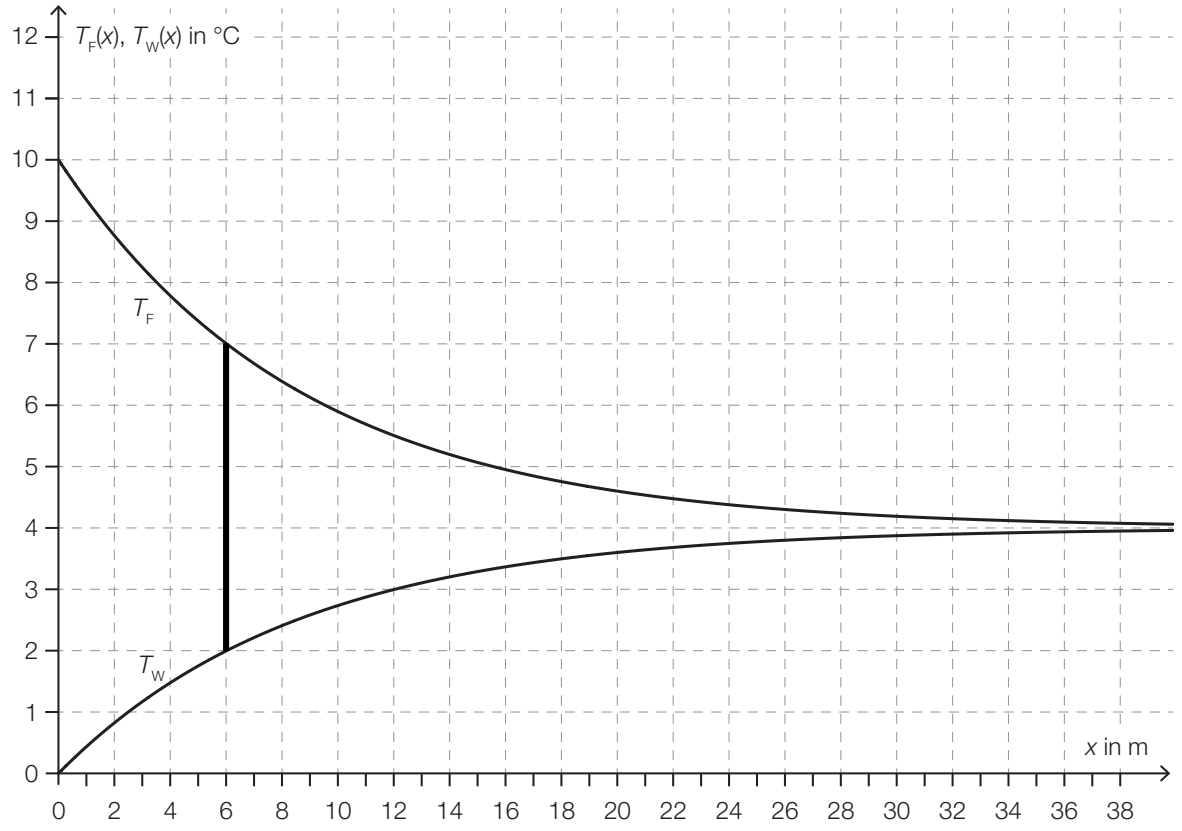
4) Berechnen Sie den Betrag des absoluten Fehlers bei Verwendung der Funktion ϱ anstelle des Tabellenwerts.

Möglicher Lösungsweg

a1) $a = 4,\ b = 6$

Einsetzen des Punktes mit den Koordinaten (6|7): $7 = 4 + 6 \cdot e^{c \cdot 6}$
Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$c = -0{,}1155...$

a2)



An der Stelle $x_1 = 6$ ergibt sich eine Temperaturdifferenz von 5 °C.
Toleranzbereich: [5,9; 6,1]

b1)

$g(b) = 0$	☒

c1) $S = (4 \mid a)$

c2) Es liegt ein Hochpunkt vor, da die 2. Ableitung von ϱ negativ ist ($\varrho''(T) = -2 \cdot b < 0$).

oder:

Es liegt ein Hochpunkt vor, weil der Koeffizient des quadratischen Gliedes ($-b$) negativ ist.

c3) $\varrho'(T) = -0{,}014 \cdot T + 0{,}056$

$\varrho'(T_1) = 0{,}028 \quad \Rightarrow \quad T_1 = 2$
$d = \varrho(2) - 0{,}028 \cdot 2 = 999{,}888$

c4) $|\varrho(10) - 999{,}7| = 0{,}02$

Betrag des absoluten Fehlers: 0,02 kg/m^3

Lösungsschlüssel

a1) 1 × A1: für das richtige Ermitteln der Parameter *a* und *b*
1 × B: für das richtige Ermitteln des Parameters *c*
a2) 1 × A2: für das richtige Ermitteln von x_1 (Toleranzbereich: [5,9; 6,1])
b1) 1 × C: für das richtige Ankreuzen
c1) 1 × C: für das richtige Ablesen der Koordinaten des Scheitelpunkts
c2) 1 × D: für das richtige mathematische Argumentieren
c3) 1 × B1: für das richtige Berechnen des Parameters *d*
c4) 1 × B2: für das richtige Berechnen des Betrags des absoluten Fehlers

Bitterfelder Bogen*

Aufgabennummer: B_477

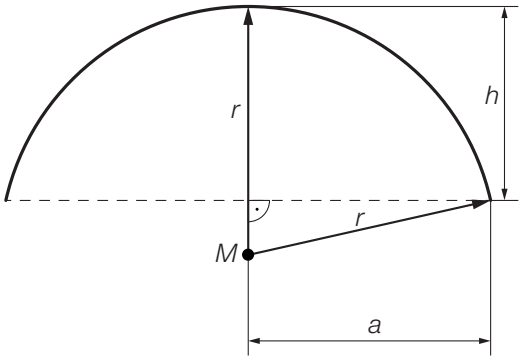
Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Der *Bitterfelder Bogen* ist eine Stahlkonstruktion, die aus mehreren Bögen besteht. Ein aus Rampen bestehender Fußweg führt innerhalb der Bögen zu einer Aussichtsplattform.



Bildquelle: Joeb07 [GFDL or CC BY 3.0], from Wikimedia Commons, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Bitterfelder_Bogen_(2).jpg [20.11.2018].

a) In der nachstehenden Skizze wird der äußere Rand der Stahlkonstruktion näherungsweise durch einen Kreisbogen mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r dargestellt.

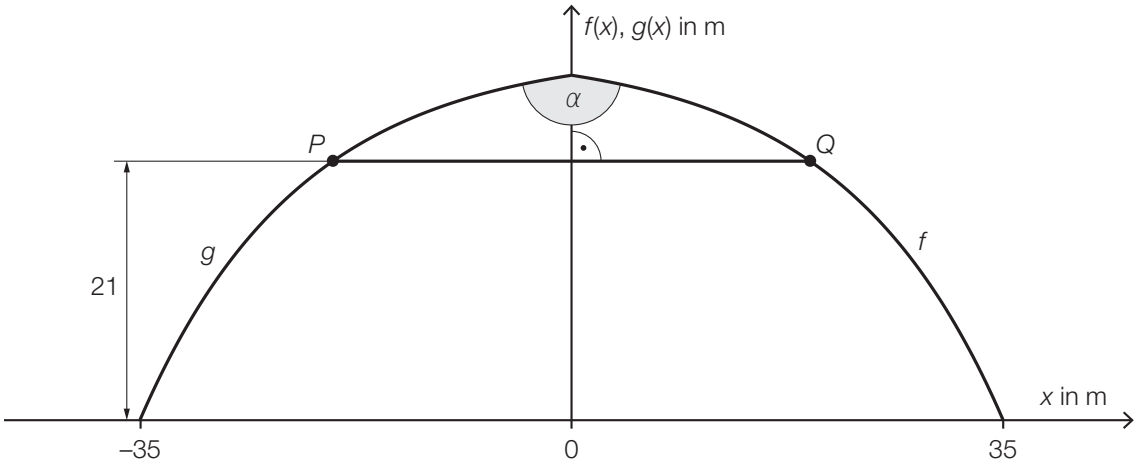


1) Erstellen Sie aus a und h eine Formel zur Berechnung des Radius r.

$r =$ _____

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Der Verlauf des Bogens kann näherungsweise durch die Graphen der Funktionen f und g dargestellt werden. Die Graphen der beiden Funktionen sind zueinander symmetrisch bezüglich der senkrechten Achse. (Siehe nachstehende Abbildung.)



Es gilt:
$f(x) = 30 \cdot \left(1 - e^{\frac{x-35}{13}}\right)$ mit $0 \le x \le 35$

In einer Höhe von 21 m befindet sich die Aussichtsplattform.

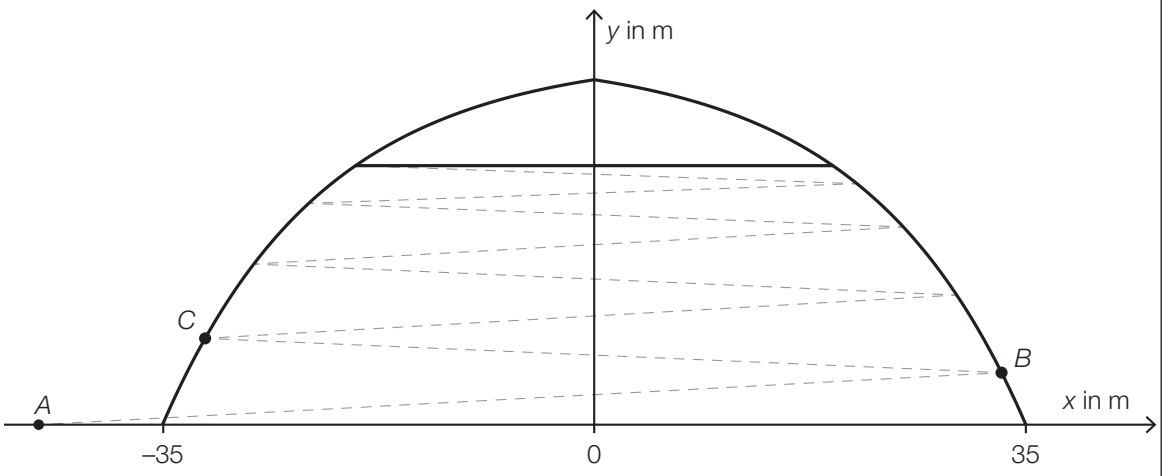
1) Berechnen Sie die Länge $\overline{PQ}$.

2) Berechnen Sie den Schnittwinkel α der Graphen der Funktionen f und g.

3) Interpretieren Sie das Ergebnis des nachstehenden Ausdrucks im gegebenen Sachzusammenhang.

$$2 \cdot \int_0^{35} \sqrt{1 + \left(-\frac{30}{13} \cdot e^{\frac{x-35}{13}}\right)^2}\, dx = 94{,}57...$$

c) Der Fußweg zur Aussichtsplattform besteht aus einzelnen Rampen (siehe strichlierte Geradenstücke in der nachstehenden modellhaften Abbildung).



Es gilt: $A = (-45\,|\,0)$, $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 78 \\ 4{,}2 \end{pmatrix}$

1) Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes B.

Die Neigungswinkel der Rampen sind jeweils gleich groß.

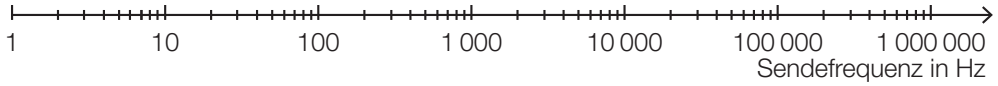
Es soll eine Parameterdarstellung der Geraden g durch die Punkte B und C erstellt werden.

2) Tragen Sie die fehlenden Zahlen in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.

$g\colon X = \begin{pmatrix} \square \\ \square \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} \square \\ \square \end{pmatrix}$

d) Ein Läufer verwendet den Fußweg zur Aussichtsplattform als Trainingsstrecke. Mithilfe eines Brustgurts misst er seine Herzfrequenz. Diese wird an seine Pulsuhr mit einer Sendefrequenz von 5 Kilohertz (kHz) übermittelt.

1) Tragen Sie in der nachstehenden logarithmischen Skala die Sendefrequenz des Brustgurts ein.



Der Läufer hat wiederholt seinen Maximalpuls (in Herzschlägen pro Minute) gemessen:

182	192	183	185	189	185	179	189	192

Der Maximalpuls des Läufers kann als annähernd normalverteilt angenommen werden.

2) Ermitteln Sie den zweiseitigen 95-%-Vertrauensbereich für den Erwartungswert des Maximalpulses.

Möglicher Lösungsweg

a1) $r^2 = a^2 + (r-h)^2 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{a^2}{2 \cdot h} + \frac{h}{2}$

b1) $f(x) = 21 \quad oder \quad 30 \cdot \left(1 - e^{\frac{x-35}{13}}\right) = 21 \quad \Rightarrow \quad x = 19{,}34...$

$\overline{PQ} = 2 \cdot 19{,}34... = 38{,}69...$

Die Länge $\overline{PQ}$ beträgt rund 38,7 m.

b2) $f'(x) = -\frac{30}{13} \cdot e^{\frac{x-35}{13}}$

$f'(0) = -0{,}156...$

Steigungswinkel: $\arctan(-0{,}156...) = -8{,}88...°$

$\alpha = 180° - 2 \cdot 8{,}8...° = 162{,}23...°$

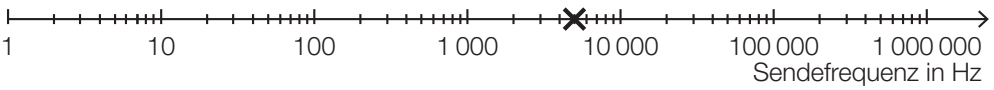
b3) Es wird die Länge des Bogens berechnet.

c1) $\begin{pmatrix} -45 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 78 \\ 4{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 \\ 4{,}2 \end{pmatrix}$

$B = (33 \mid 4{,}2)$

c2) $g\colon X = \begin{pmatrix} 33 \\ 4{,}2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -78 \\ 4{,}2 \end{pmatrix}$

d1)



d2) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

Stichprobenmittelwert: $\bar{x} = 186{,}22...$

Stichprobenstandardabweichung: $s_{n-1} = 4{,}54...$

Berechnung des Vertrauensbereichs mithilfe der t-Verteilung:

$\mu_u = 186{,}22... - t_{8;0{,}975} \cdot \frac{4{,}54...}{\sqrt{9}} = 182{,}72...$

$\mu_o = 186{,}22... + t_{8;0{,}975} \cdot \frac{4{,}54...}{\sqrt{9}} = 189{,}71...$

Vertrauensbereich: [182,7; 189,7] (in Herzschlägen pro Minute)

Lösungsschlüssel

a1) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel
b1) 1 × B1: für das richtige Berechnen der Länge $\overline{PQ}$
b2) 1 × B2: für das richtige Berechnen des Schnittwinkels α
b3) 1 × C: für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang
c1) 1 × B: für das richtige Berechnen der Koordinaten des Punktes B
c2) 1 × A: für das richtige Eintragen der fehlenden Zahlen
d1) 1 × A: für das richtige Eintragen in der logarithmischen Skala
d2) 1 × B: für das richtige Ermitteln des Vertrauensbereichs

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

W-LAN*

Aufgabennummer: B_475

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

In einer Fabrikshalle wird mit Access-Points und Repeatern ein W-LAN eingerichtet.
Ein Access-Point verbindet einen Laptop kabellos mit einem Netzwerk. Ein Repeater verstärkt das Signal.

Die Datenübertragungsrate beschreibt die übertragene Datenmenge pro Zeiteinheit und wird meist in der Einheit Megabit pro Sekunde (Mbit/s) angegeben.

a) Die Datenübertragungsrate zu einem Laptop hängt von seiner Entfernung von einem Access-Point ab.
Es wurden folgende Daten erhoben:

Entfernung in m	2	8	16	30	39	46
Datenübertragungsrate in Mbit/s	547	456	400	139	108	25

Ein Mitarbeiter geht aufgrund der Messwerte von einem annähernd linearen Zusammenhang für die Datenübertragungsrate in Abhängigkeit von der Entfernung aus.

1) Erklären Sie, warum der zugehörige Korrelationskoeffizient negativ sein muss.
2) Ermitteln Sie eine Gleichung der zugehörigen linearen Regressionsfunktion.
3) Interpretieren Sie den Wert der Steigung dieser Funktion im gegebenen Sachzusammenhang.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Eine Technikerin modelliert die Datenübertragungsrate in Abhängigkeit von der Entfernung von einem Access-Point mit einer Exponentialfunktion d.

$d(x) = c \cdot a^x$

x … Entfernung in m
$d(x)$ … Datenübertragungsrate in einer Entfernung x in Mbit/s

Sie ermittelt folgende Messwerte:

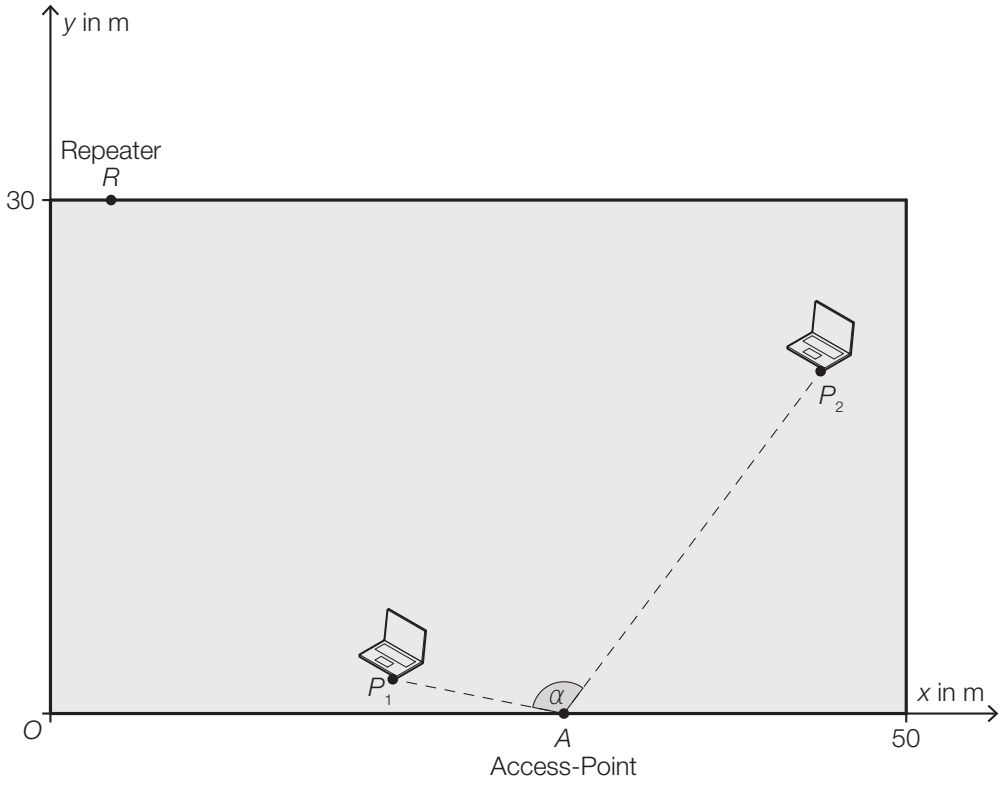
Entfernung in m	5	50
Datenübertragungsrate in Mbit/s	500	10

1) Berechnen Sie die Parameter a und c der Exponentialfunktion d.

2) Kreuzen Sie die auf diese Exponentialfunktion d nicht zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]*

Die Funktionswerte der 1. Ableitung der Funktion d sind negativ.	☐
Die x-Achse ist für den Graphen der Funktion d eine Asymptote.	☐
Wird der Änderungsfaktor a in der Form e^k geschrieben, muss k positiv sein.	☐
Die Funktion d hat an der Stelle $x = 0$ den Funktionswert c.	☐
Die Funktionswerte der 2. Ableitung der Funktion d sind positiv.	☐

c) Im Rahmen einer Testinstallation werden in der Fabrikshalle ein Access-Point, ein Repeater und 2 Laptops auf gleich hohe Tische gestellt (siehe nachstehende schematische Abbildung, Ansicht von oben).



Im Punkt $A = (30|0)$ befindet sich der Access-Point. Die Laptops in den Punkten $P_1 = (20|2)$ und $P_2 = (45|20)$ sollen diesen Access-Point nützen können.

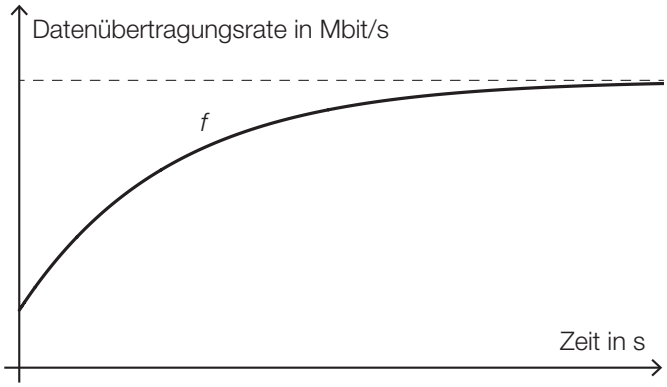
1) Zeigen Sie mithilfe der Vektorrechnung, dass der Winkel α kleiner als 120° ist.

2) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung denjenigen Punkt P_3 ein, der folgendermaßen bestimmt werden kann:
$\overrightarrow{OP_3} = \overrightarrow{OP_2} - \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{P_1P_2}$

Ein Repeater soll im Punkt $R = (x_R|30)$ in einem Abstand von 40 m vom Access-Point im Punkt A montiert werden (siehe obige Abbildung).

3) Berechnen Sie x_R.

d) In der nachstehenden Abbildung ist die Datenübertragungsrate in Abhängigkeit von der Zeit bei einem bestimmten Downloadvorgang dargestellt.



Dabei gilt:

$f(t) = 15 - 12 \cdot e^{-0,3 \cdot t}$ mit $t \geq 0$

t ... Zeit in s
$f(t)$ ... Datenübertragungsrate zur Zeit t in Mbit/s

1) Zeigen Sie mithilfe der Differenzialrechnung, dass die Funktion f monoton steigend ist.

2) Ermitteln Sie die gesamte Datenmenge in Mbit, die im Zeitintervall [0; 8] heruntergeladen wurde.

Möglicher Lösungsweg

a1) Da mit zunehmender Entfernung die Datenübertragungsrate sinkt, muss der Korrelationskoeffizient negativ sein.

a2) Ermittlung mittels Technologieeinsatz:
$D(x) = -12{,}08 \cdot x + 563$ *(Koeffizienten gerundet)*

x ... Entfernung in Metern
$D(x)$ ... Datenübertragungsrate in einer Entfernung x in MBit/s

a3) Pro Meter, den man sich vom Access-Point entfernt, sinkt die Datenübertragungsrate um rund 12 Mbit/s.

b1) $a = \sqrt[45]{\frac{10}{500}} = 0{,}9167...$

$500 = c \cdot a^5 \quad \Rightarrow \quad c = 772{,}2\ldots$

b2)

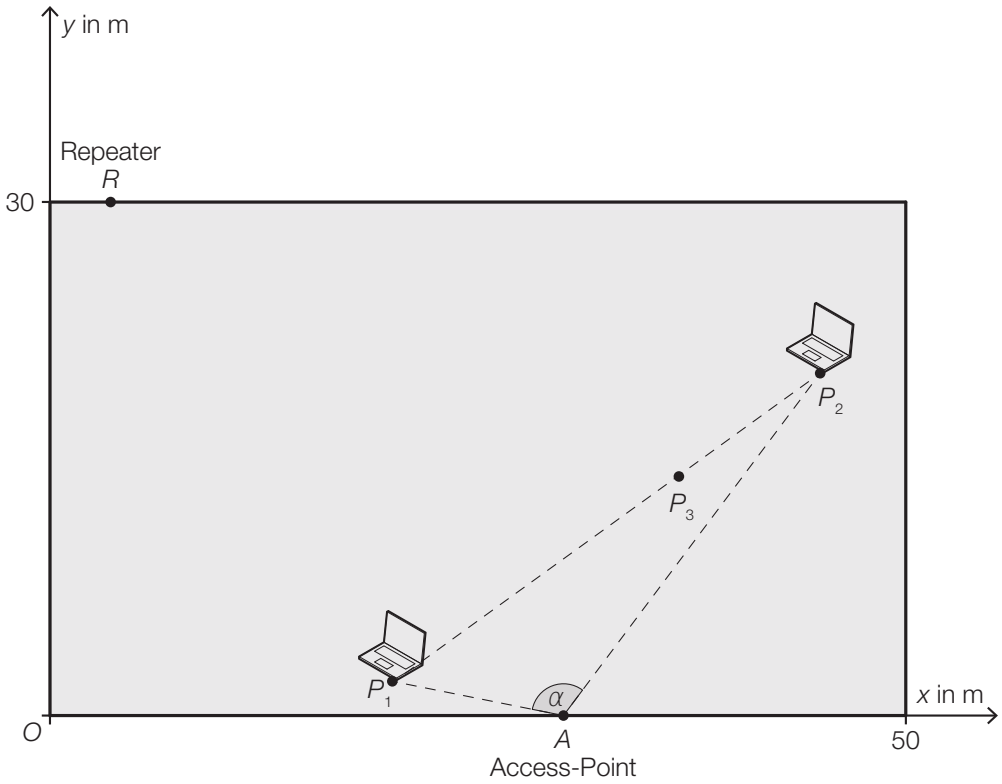
Wird der Änderungsfaktor a in der Form e^k geschrieben, muss k positiv sein.	☒

c1) $\overrightarrow{AP_1} = \begin{pmatrix} -10 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AP_2} = \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \end{pmatrix}$

$\alpha = \arccos\left(\frac{\overrightarrow{AP_1} \cdot \overrightarrow{AP_2}}{|\overrightarrow{AP_1}| \cdot |\overrightarrow{AP_2}|}\right) = 115{,}55...° < 120°$

c2)



c3) $|\overrightarrow{AR}| = 40$

oder:

$(x_R - 30)^2 + (30 - 0)^2 = 40^2$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$(x_R)_1 = 3{,}54...$ $\left((x_R)_2 = 56{,}45...\right)$

Die zweite Lösung $(x_R)_2 = 56{,}45…$ muss nicht berechnet werden.

d1) $f'(t) = 3{,}6 \cdot e^{-0{,}3 \cdot t}$

Für alle $t \geq 0$ gilt: $f'(t) \geq 0$, weil $e^{-0{,}3 \cdot t} > 0$.
Daher ist die Funktion f für alle $t \geq 0$ monoton steigend.

d2) $\int_0^8 (15 - 12 \cdot e^{-0{,}3 \cdot t})\,dt = 83{,}6...$
Die gesamte Datenmenge beträgt rund 84 Mbit.
Die Angabe der Einheit „Mbit“ ist für die Punktevergabe nicht relevant.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × D: für das richtige Erklären
a2) 1 × B: für das richtige Ermitteln der Gleichung der Regressionsfunktion
a3) 1 × C: für das richtige Interpretieren der Steigung im gegebenen Sachzusammenhang
b1) 1 × B: für das richtige Berechnen der Parameter a und c der Exponentialfunktion
b2) 1 × C: für das richtige Ankreuzen
c1) 1 × D: für das richtige Nachweisen mithilfe der Vektorrechnung
c2) 1 × A: für das richtige Einzeichnen des Punktes P_3
c3) 1 × B: für das richtige Berechnen von x_R
d1) 1 × D: für das richtige Nachweisen mithilfe der Differenzialrechnung
d2) 1 × B: für das richtige Ermitteln der gesamten Datenmenge
(Die Angabe der Einheit „Mbit“ ist für die Punktevergabe nicht relevant.)

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Wandern*

Aufgabennummer: A_089

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Um die Gehzeit für eine Wanderung zu ermitteln, kann die folgende Faustregel angewendet werden:
„Die Höhendifferenz in Metern dividiert man durch 400, die Horizontalentfernung in Kilometern dividiert man durch 4.
Addiert man diese beiden Ergebnisse, so erhält man die Gehzeit in Stunden."

1) Übertragen Sie diese Faustregel in eine Formel für die Gehzeit t. Verwenden Sie dabei die folgenden Bezeichnungen:

h ... Höhendifferenz in m
x ... Horizontalentfernung in km
t ... Gehzeit in h

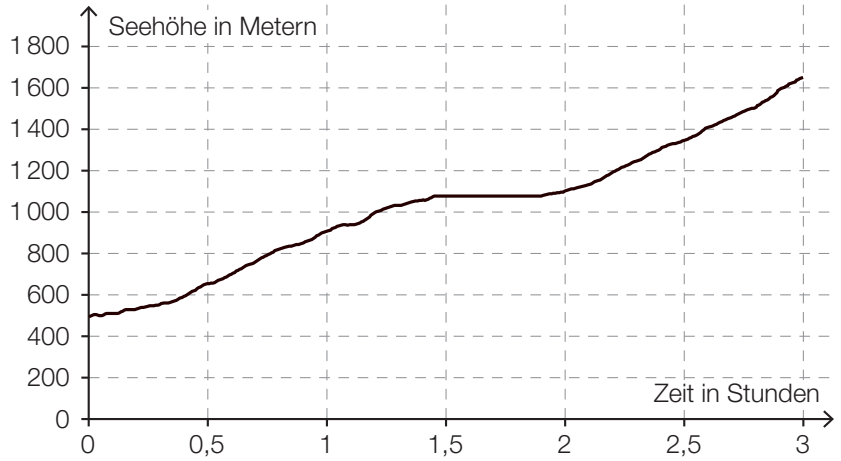
$t =$ _____

Jemand legt bei einer Wanderung eine Horizontalentfernung von 6,7 km zurück und benötigt dafür eine Gehzeit von 3 h 15 min.

2) Berechnen Sie die dabei überwundene Höhendifferenz mithilfe der angegebenen Faustregel.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) In der nachstehenden Abbildung ist der Höhenverlauf während einer 3-stündigen Wanderung dargestellt.

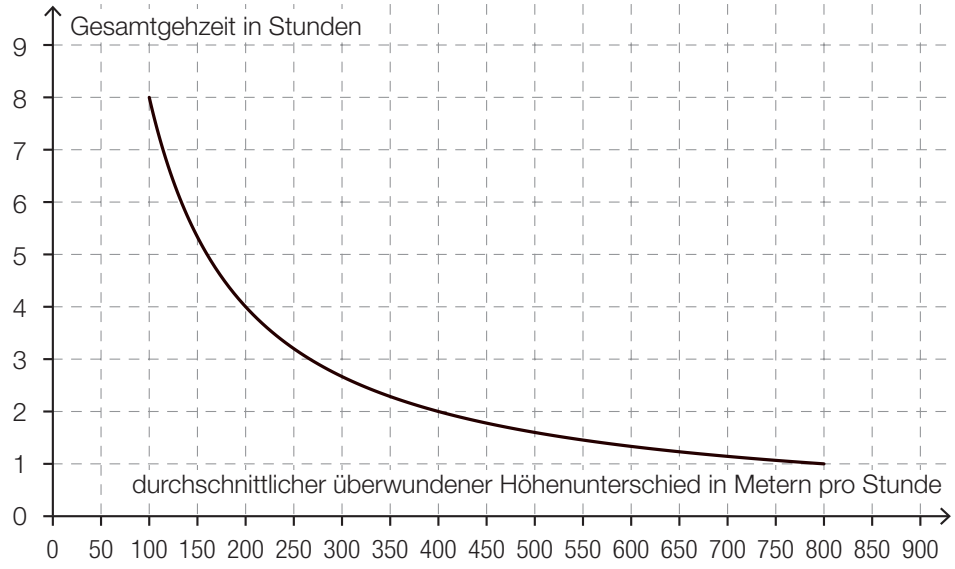


1) Ermitteln Sie die mittlere Änderungsrate der Seehöhe in Abhängigkeit von der Zeit für die gesamte Wanderung. Geben Sie das Ergebnis mit der zugehörigen Einheit an.

Jemand behauptet: „Nach etwa 1,5 Stunden wurde eine Pause eingelegt. Das erkennt man daran, dass der Graph während der Pause waagrecht verläuft."

2) Argumentieren Sie, dass diese Behauptung nicht zwingend richtig sein muss.

c) Bei der Besteigung eines bestimmten Berges ist die Gesamtgehzeit indirekt proportional zu dem durchschnittlichen überwundenen Höhenunterschied in Metern pro Stunde (siehe nachstehende Abbildung).



1) Lesen Sie aus der obigen Abbildung ab, welcher Höhenunterschied bei dieser Besteigung insgesamt überwunden werden muss.

Möglicher Lösungsweg

a1) $t = \frac{h}{400} + \frac{x}{4}$

a2) $3{,}25 = \frac{h}{400} + \frac{6{,}7}{4} \quad \Rightarrow \quad h = 630$
Gemäß der Faustregel wird bei dieser Wanderung eine Höhendifferenz von 630 m überwunden.

b1) $\frac{1\,650 - 500}{3} = 383{,}33...$
Die mittlere Änderungsrate beträgt rund 383 m/h.
Toleranzbereich: [360 m/h; 400 m/h]

b2) Es kann auch sein, dass sich der Wanderer / die Wanderin auf konstanter Höhe („eben“) bewegt hat.

c1) Ablesen der Koordinaten eines beliebigen Punktes des Funktionsgraphen, z. B. (800|1):
Es werden insgesamt 800 Höhenmeter überwunden.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × A: für das richtige Übertragen der Faustregel in eine Formel
a2) 1 × B: für die richtige Berechnung der Höhendifferenz
b1) 1 × C: für das richtige Ermitteln der mittleren Änderungsrate unter Angabe der Einheit im Toleranzbereich [360 m/h; 400 m/h]
b2) 1 × D: für die richtige Argumentation
c1) 1 × C: für das richtige Ablesen

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Lieblingsfarbe*

Aufgabennummer: A_082

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Person Rosa als Lieblingsfarbe nennt, beträgt 13 %.
25 zufällig ausgewählte Personen werden nach ihrer Lieblingsfarbe gefragt.

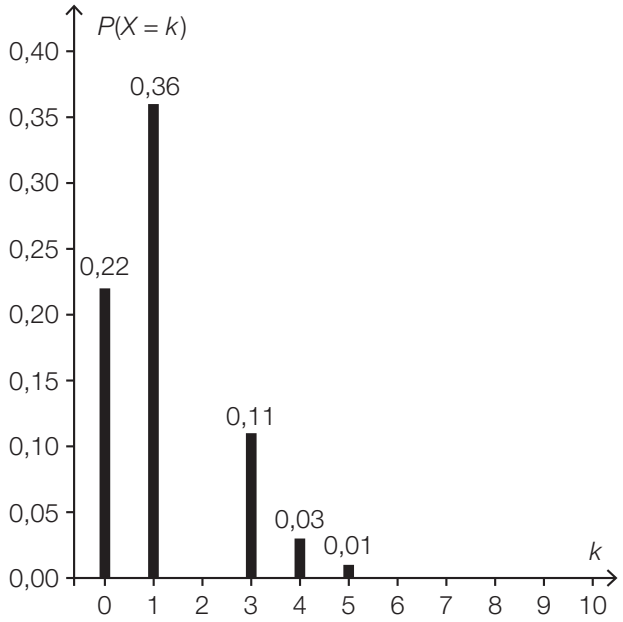
1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass genau 3 der 25 Personen Rosa als Lieblingsfarbe nennen.

b) Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Person Orange als Lieblingsfarbe nennt, beträgt 7 %.
Unter n befragten Personen soll mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % mindestens 1 Person sein, die Orange als Lieblingsfarbe nennt.

1) Berechnen Sie die Anzahl n derjenigen Personen, die dafür mindestens befragt werden müssen.

* ehemalige Klausuraufgabe

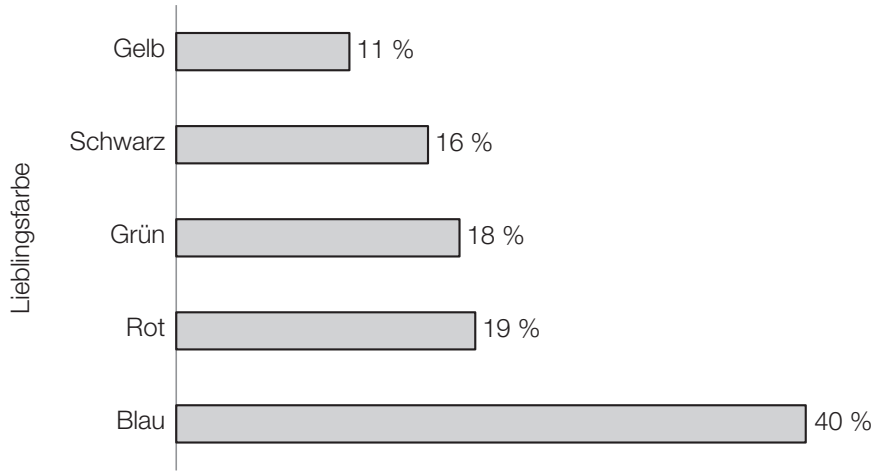
c) Die binomialverteilte Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl derjenigen Personen unter 10 Befragten, die Lila als Lieblingsfarbe nennen. Die Wahrscheinlichkeitsfunktion dieser Zufallsvariablen ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



Die Wahrscheinlichkeit, dass unter 10 Befragten maximal 3 Befragte Lila als Lieblingsfarbe nennen, beträgt 96 %.

1) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung die fehlende Säule für $P(X = 2)$ ein.

d) Die Schüler/innen einer Schule wurden nach ihren Lieblingsfarben gefragt. In der nachstehenden Abbildung ist dargestellt, wie viel Prozent der Befragten die jeweilige Farbe als Lieblingsfarbe genannt haben.



1) Beschreiben Sie, woran man erkennen kann, dass man auch mehr als eine Lieblingsfarbe nennen durfte.

Möglicher Lösungsweg

a1) X … Anzahl derjenigen Personen, die Rosa als Lieblingsfarbe nennen

Binomialverteilung mit $n = 25$ und $p = 0{,}13$:
Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$P(X = 3) = 0{,}2360\ldots$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von rund 23,6 % nennen genau 3 der 25 befragten Personen Rosa als Lieblingsfarbe.

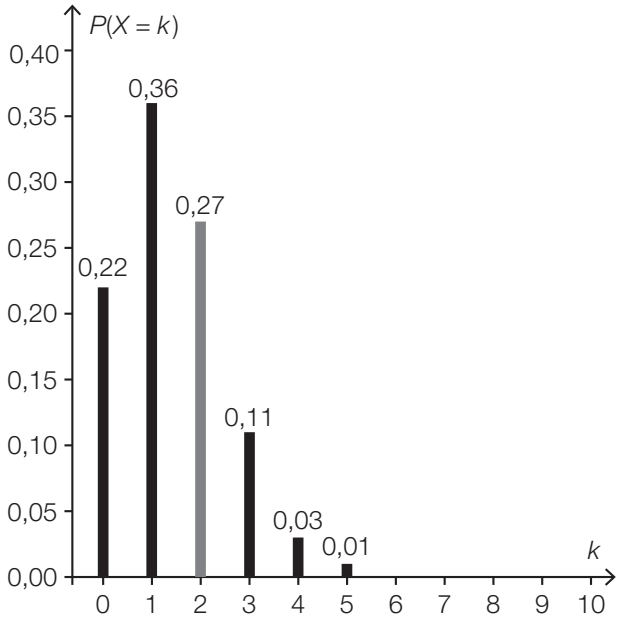
b1) X … Anzahl derjenigen Personen, die Orange als Lieblingsfarbe nennen

Binomialverteilung mit $p = 0{,}07$:
$P(X \geq 1) = 0{,}9$
$1 - P(X = 0) = 0{,}9$
$1 - 0{,}93^n = 0{,}9$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$n = 31{,}7\ldots$

Es müssen mindestens 32 Personen befragt werden.

c1) $P(X = 2) = 0{,}96 - (0{,}22 + 0{,}36 + 0{,}11) = 0{,}27$



Toleranzbereich für die Höhe der Säule: [0,25; 0,30]

Für die Punktevergabe ist es nicht erforderlich, den Wert von P(X = 2) *anzugeben.*

d1) Addiert man die Prozentsätze für alle Lieblingsfarben, so erhält man ein Ergebnis, das größer als 100 % ist.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit
b1) 1 × B: für die richtige Berechnung der Mindestanzahl
c1) 1 × A: für das richtige Einzeichnen der fehlenden Säule im Toleranzbereich [0,25; 0,30]
d1) 1 × C: für die richtige Beschreibung

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Kontrolle der Geschwindigkeit*

Aufgabennummer: A_117

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

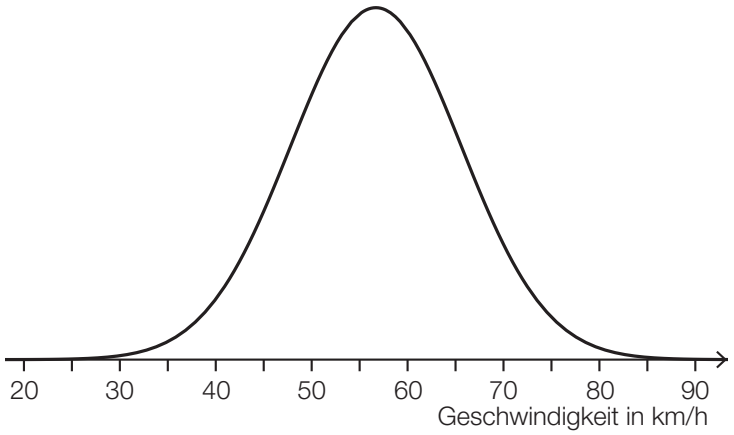
a) Die Wahrscheinlichkeit, dass auf einem bestimmten Abschnitt der Westautobahn ein Fahrzeug mit überhöhter Geschwindigkeit unterwegs ist, beträgt 4 %.
Eine Zufallsstichprobe von 1 500 Fahrzeugen wird überprüft.
Die binomialverteilte Zufallsvariable X gibt die Anzahl derjenigen Fahrzeuge an, die dort mit überhöhter Geschwindigkeit unterwegs sind.

1) Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit, dass genau a Fahrzeuge dieser Zufallsstichprobe mit überhöhter Geschwindigkeit unterwegs sind.

$P(X = a) =$ _____

b) Es wird angenommen, dass die Geschwindigkeiten der Fahrzeuge an einer bestimmten Stelle, an der die erlaubte Höchstgeschwindigkeit 50 km/h beträgt, annähernd normalverteilt sind.

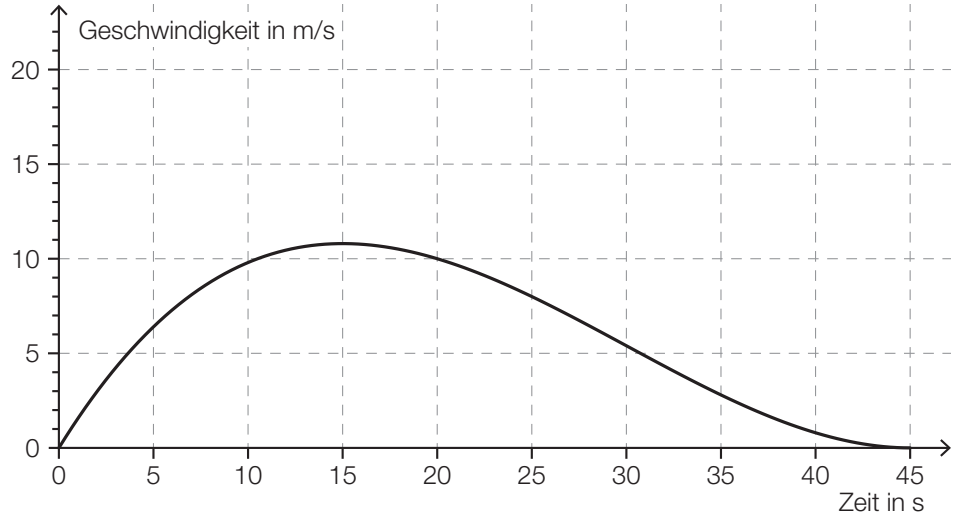
In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der zugehörigen Dichtefunktion dargestellt.



1) Veranschaulichen Sie in der obigen Abbildung die Wahrscheinlichkeit, dass die Geschwindigkeit mehr als 15 km/h über der erlaubten Höchstgeschwindigkeit von 50 km/h liegt.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Der nachstehend dargestellte Graph zeigt annähernd den Geschwindigkeitsverlauf eines im Stadtgebiet fahrenden Autos.



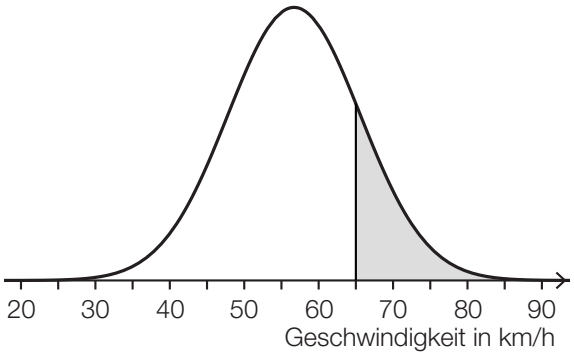
1) Ermitteln Sie näherungsweise die Länge des im Zeitintervall [0; 45] zurückgelegten Weges.

2) Lesen Sie die Höchstgeschwindigkeit des Autos ab. Geben Sie das Ergebnis in km/h an.

Möglicher Lösungsweg

a1) $P(X = a) = \binom{1\,500}{a} \cdot 0{,}04^{a} \cdot 0{,}96^{1\,500-a}$

b1)



c1) Abschätzen der Länge des zurückgelegten Weges s:
$s \approx 25 \cdot 11 = 275$
Die Länge des zurückgelegten Weges beträgt näherungsweise 275 m.
Toleranzbereich: [220; 330]

c2) Höchstgeschwindigkeit: 11 m/s = 39,6 km/h
Toleranzbereich: [37,8; 41,4]

Lösungsschlüssel

a1) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel
b1) 1 × C: für das richtige Veranschaulichen der Wahrscheinlichkeit
c1) 1 × B: für das richtige Ermitteln der Weglänge im Toleranzbereich [220; 330]
c2) 1 × C: für das richtige Angeben der Höchstgeschwindigkeit in km/h im Toleranzbereich [37,8; 41,4]

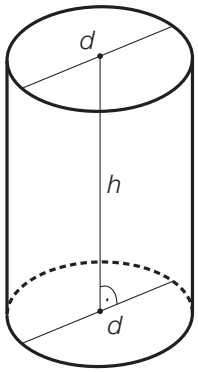
Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Flüssigkeitsbehälter*

Aufgabennummer: A_063

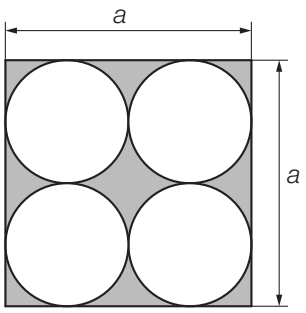
Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Das nachstehend abgebildete zylindrische Gefäß mit der Höhe h = 16 dm fasst bei Befüllung bis 10 cm unter den oberen Rand 1 200 L.



1) Berechnen Sie den Durchmesser d des Gefäßes.

b) Ein Raum hat eine quadratische Grundfläche mit der Seitenlänge a. Es werden darin 4 zylindrische Gefäße mit gleichem Außendurchmesser gelagert (siehe nachstehende Abbildung, Ansicht von oben).



1) Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung des Inhalts A der grau markierten Fläche aus der Seitenlänge a.

A = _____

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Ein Flüssigkeitsbehälter wird befüllt. Dabei kann die Flüssigkeitsmenge im Flüssigkeitsbehälter in Abhängigkeit von der Füllzeit näherungsweise durch die Funktion F beschrieben werden.

$F(t) = 1\,100 - 800 \cdot e^{-0{,}02 \cdot t}$

t ... Füllzeit in min
$F(t)$ ... Flüssigkeitsmenge im Flüssigkeitsbehälter zur Füllzeit t in L

Die Gleichung $900 = 1\,100 - 800 \cdot e^{-0{,}02 \cdot t}$ wird nach t gelöst.

1) Beschreiben Sie die Bedeutung der Lösung im gegebenen Sachzusammenhang.

Möglicher Lösungsweg

a1) $1\,200 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot \pi \cdot 15$

$d = \sqrt{\frac{1\,200 \cdot 4}{15 \cdot \pi}} = 10{,}09...$

Der Durchmesser beträgt rund 10,1 dm.

b1) $A = a^2 - 4 \cdot \left(\frac{a}{4}\right)^2 \cdot \pi$

c1) Es wird diejenige Füllzeit berechnet, zu der sich 900 L Flüssigkeit im Flüssigkeitsbehälter befinden.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × B: für die richtige Berechnung des Durchmessers *d*

b1) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel für *A* aus der Seitenlänge *a*

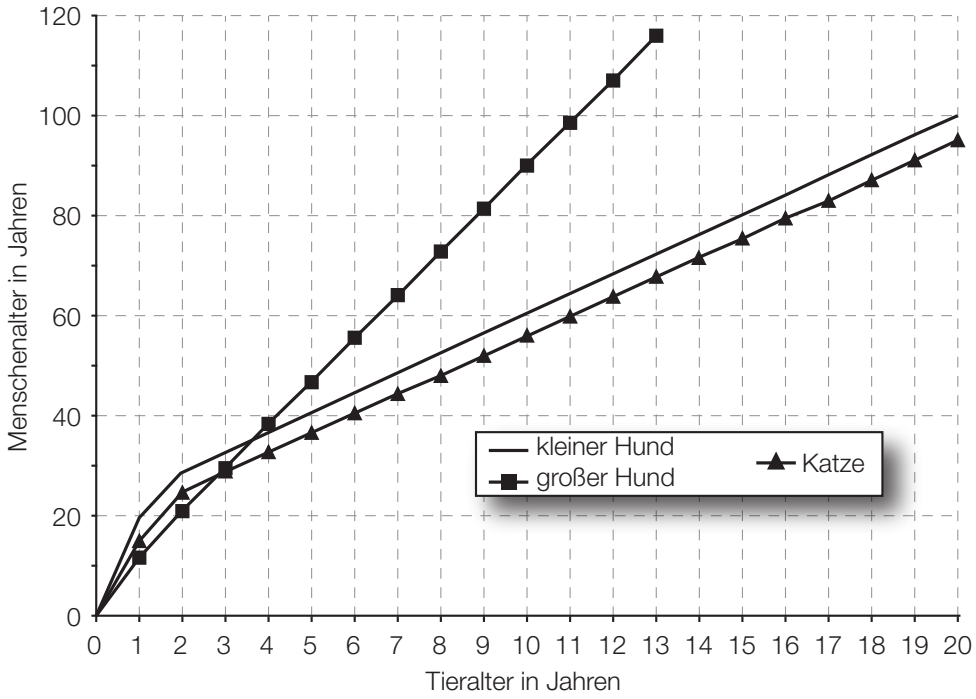
c1) 1 × C: für die richtige Beschreibung der Bedeutung der Lösung im gegebenen Sachzusammenhang

Entwicklung von Katzen und Hunden*

Aufgabennummer: A_098

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Viele Tiere altern schneller als Menschen. Ein 9 Jahre alter großer Hund ist beispielsweise etwa so „alt“ wie ein 80-jähriger Mensch. Für einige Haustiere ist der Zusammenhang zwischen Tieralter und Menschenalter in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



Für eine Katze kann der Zusammenhang zwischen dem Tieralter in Jahren und dem Menschenalter in Jahren in einem bestimmten Bereich durch eine lineare Funktion K beschrieben werden:

$K(t) = k \cdot t + d$

t ... Tieralter in Jahren mit $t \geq 2$
$K(t)$ ... das dem Tieralter t der Katze entsprechende Menschenalter in Jahren

1) Erstellen Sie unter Zuhilfenahme von 2 Punkten aus der obigen Grafik eine Gleichung der linearen Funktion K für $t \geq 2$.

* ehemalige Klausuraufgabe

Für einen kleinen Hund kann dieser Zusammenhang durch eine lineare Funktion H modelliert werden:

$H(t) = k_1 \cdot t + d_1$

t ... Tieralter in Jahren mit $t \geq 2$
$H(t)$ ... das dem Tieralter t des kleinen Hundes entsprechende Menschenalter in Jahren

2) Geben Sie an, welcher Zusammenhang zwischen den Parametern k und k_1 besteht. Begründen Sie Ihre Antwort mithilfe der obigen Abbildung.

b) Bei einer Studie wurde die Körpermasse von ausgewachsenen Katzen einer bestimmten Rasse als annähernd normalverteilt mit einem Erwartungswert von $\mu = 3{,}6$ kg und einer Standardabweichung von $\sigma = 0{,}7$ kg angenommen.
Die schwersten 10 % der ausgewachsenen Katzen wurden in dieser Studie als übergewichtig bezeichnet.

1) Bestimmen Sie diejenige Körpermasse, ab der eine ausgewachsene Katze in dieser Studie als übergewichtig bezeichnet wurde.

Möglicher Lösungsweg

a1) Ablesen von 2 Punkten aus der Abbildung – beispielsweise: (6|40) und (11|60)

$k = \frac{60 - 40}{11 - 6} = 4$
$40 = 4 \cdot 6 + d \quad \Rightarrow \quad d = 16$
$K(t) = 4 \cdot t + 16 \quad \text{mit} \quad t \geq 2$

Toleranzbereich beim Ermitteln der Parameter im Rahmen der Ablesegenauigkeit der verwendeten Punkte

a2) Die beiden Parameter k und k_1 sind gleich, weil die beiden Funktionsgraphen (für $t \geq 2$) parallel verlaufen.

b1) X ... Körpermasse in kg

Normalverteilung mit $\mu = 3{,}6$ kg und $\sigma = 0{,}7$ kg:
$P(X \geq a) = 0{,}1$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$a = 4{,}49...$

Ab einer Körpermasse von rund 4,5 kg wurde eine ausgewachsene Katze in dieser Studie als übergewichtig bezeichnet.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × A: für das richtige Erstellen der Funktionsgleichung (Toleranzbereich beim Ermitteln der Parameter im Rahmen der Ablesegenauigkeit der verwendeten Punkte)
a2) 1 × D: für das richtige Angeben und die richtige Begründung
b1) 1 × B: für das richtige Bestimmen der Körpermasse, ab der eine ausgewachsene Katze in dieser Studie als übergewichtig bezeichnet wurde

Baumhaus*

Aufgabennummer: A_116

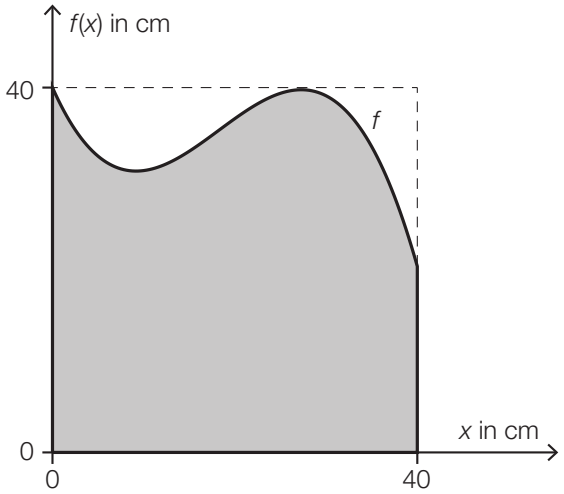
Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Eine Familie plant, ein Baumhaus aus Holz zu errichten. Der Baum dafür steht in einem horizontalen Teil des Gartens.

a) Eine 3,2 m lange Leiter wird angelehnt und reicht dann vom Boden genau bis zum Einstieg ins Baumhaus in einer Höhe von 2,8 m.

1) Berechnen Sie denjenigen Winkel, unter dem die Leiter gegenüber dem horizontalen Boden geneigt ist.

b) Die Fenster des Baumhauses sollen eine spezielle Form haben (siehe grau markierte Fläche in der nachstehenden Abbildung).



Die obere Begrenzungslinie des Fensters kann näherungsweise durch den Graphen der Funktion f beschrieben werden.

$f(x) = -0{,}003 \cdot x^3 + 0{,}164 \cdot x^2 - 2{,}25 \cdot x + 40$ mit $0 \leq x \leq 40$

x, $f(x)$ ... Koordinaten in cm

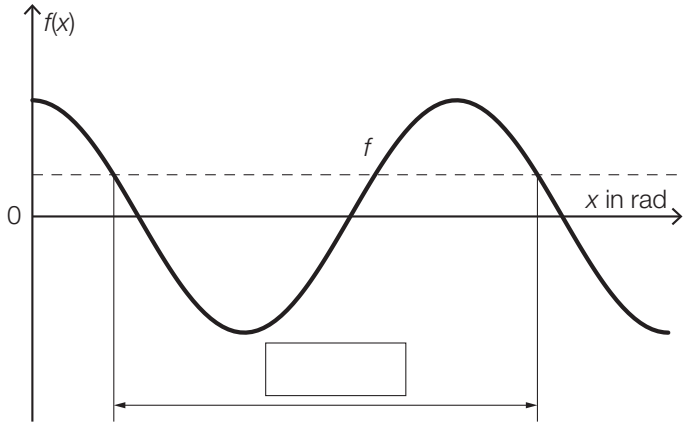
1) Berechnen Sie, um wie viel Prozent die Fensterfläche in der dargestellten Form kleiner als die Fensterfläche eines quadratischen Fensters mit der Seitenlänge 40 cm ist.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Das Baumhaus wird mit gewellten Kunststoffplatten überdacht.

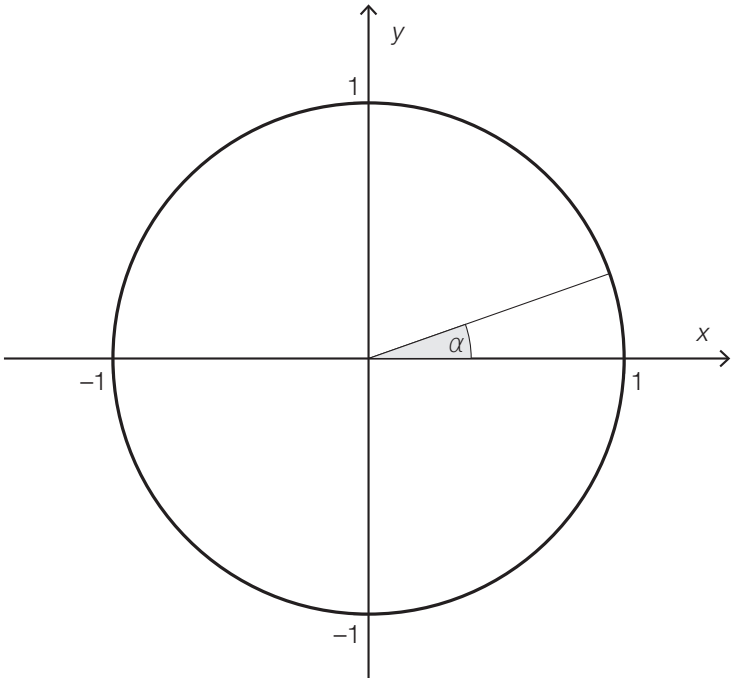


Dem Querschnitt liegt der Graph der Funktion f mit $f(x) = \cos(x)$ zugrunde. Dieser ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



1) Tragen Sie in der obigen Abbildung die fehlende Zahl in das dafür vorgesehene Kästchen ein.

In der nachstehenden Abbildung ist ein Winkel α im Einheitskreis dargestellt.



2) Zeichnen Sie im obigen Einheitskreis denjenigen Winkel β ein, für den gilt: $\sin(\beta) = \sin(\alpha)$ mit $\beta \neq \alpha$ und $0° \leq \beta \leq 360°$.

Möglicher Lösungsweg

a1) $\arcsin\left(\frac{2{,}8}{3{,}2}\right) = 61{,}0...°$

Der Winkel beträgt rund 61°.

b1) Flächeninhalt zwischen den Achsen und dem Graphen der Funktion in cm^2:

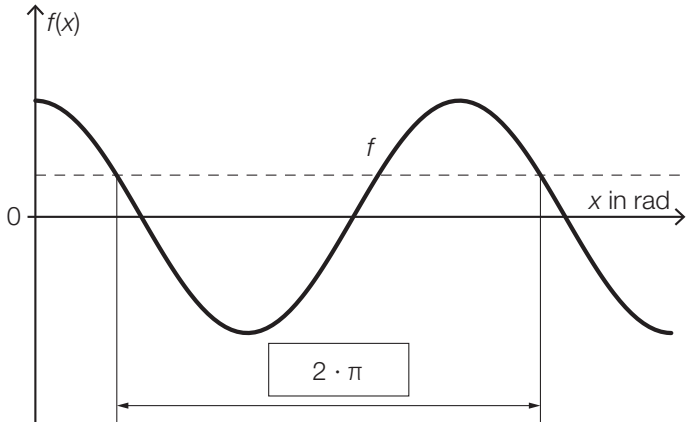
$\int_0^{40} f(x)\,dx = 1\,378{,}66...$

Flächeninhalt des Quadrats in cm^2: $A = 1\,600$

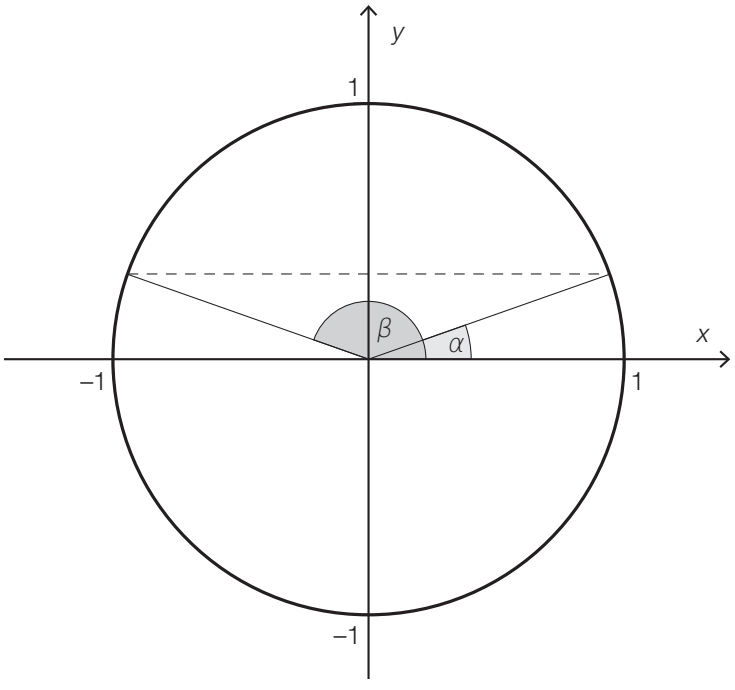
prozentueller Unterschied: $\frac{1\,378{,}66... - 1\,600}{1\,600} = -0{,}1383...$

Die Fensterfläche ist um rund 13,8 % kleiner als die Fensterfläche eines quadratischen Fensters mit der Seitenlänge 40 cm.

c1)



c2)



Lösungsschlüssel

a1) 1 × B: für die richtige Berechnung des Winkels

b1) 1 × A: für den richtigen Ansatz (Berechnung des Flächeninhalts mittels Integral)
1 × B: für die richtige Berechnung des prozentuellen Unterschieds

c1) 1 × A1: für das richtige Eintragen der fehlenden Zahl

c2) 1 × A2: für das richtige Einzeichnen des Winkels β im Einheitskreis

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Standseilbahnen*

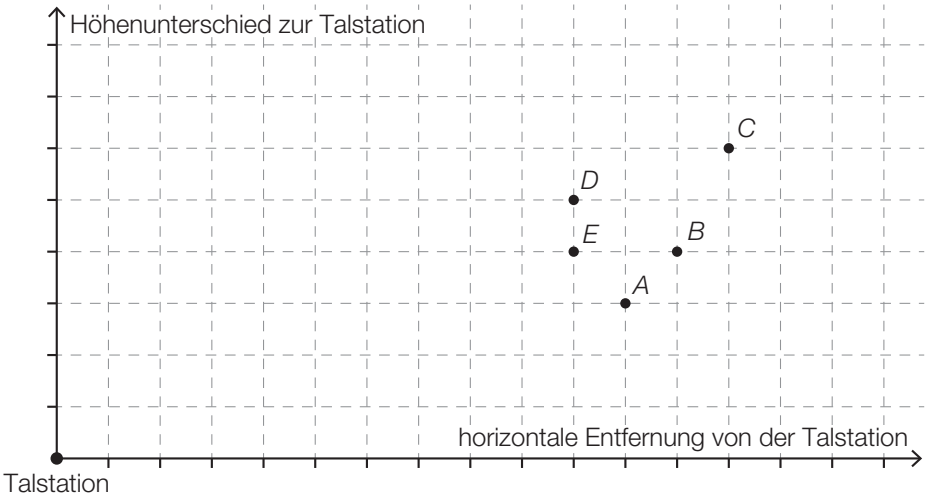
Aufgabennummer: A_290

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Die Wägen von Standseilbahnen fahren auf Schienen und können große Steigungen bewältigen.

a) Eine bestimmte Standseilbahn hat eine konstante Steigung von 40 %. Der Streckenverlauf dieser Bahn soll im unten stehenden Koordinatensystem dargestellt werden.

Die beiden Achsen des Koordinatensystems haben die gleiche Skalierung.
Die Talstation der Bahn liegt im Koordinatenursprung. Nur einer der Punkte *A*, *B*, *C*, *D* und *E* kommt als Bergstation der Bahn infrage.



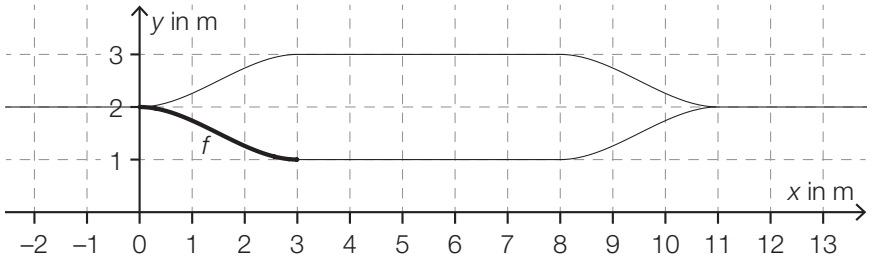
1) Kreuzen Sie denjenigen Punkt an, der als Bergstation infrage kommt. *[1 aus 5]*

A	☐
B	☐
C	☐
D	☐
E	☐

2) Berechnen Sie, welchen Höhenunterschied ein Wagen dieser Bahn überwindet, wenn er von der Talstation bis zur Bergstation eine Fahrstrecke von 180 m zurücklegt.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Bei den meisten Standseilbahnen gibt es in der Mitte der Strecke eine Ausweichstelle, bei der der talwärts fahrende Wagen dem bergwärts fahrenden Wagen ausweichen kann.
In der nachstehenden Abbildung ist eine solche Ausweichstelle modellhaft dargestellt.



Der Funktionsgraph von f schließt an den Stellen 0 und 3 knickfrei an die eingezeichneten Geradenstücke an. „Knickfrei“ bedeutet, dass die Funktionen an denjenigen Stellen, an denen ihre Graphen aneinander anschließen, den gleichen Funktionswert und die gleiche Steigung haben.

Für die Funktion f gilt:

$f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$

x, $f(x)$ … Koordinaten in m

Die Koeffizienten a, b, c und d können mithilfe eines linearen Gleichungssystems berechnet werden. Der Ansatz für zwei der benötigten Gleichungen lautet:

$27 \cdot a + 9 \cdot b + 3 \cdot c + d =$ ☐

$27 \cdot a + 6 \cdot b + c =$ ☐

1) Vervollständigen Sie mithilfe der obigen Abbildung die beiden Gleichungen, indem Sie jeweils die fehlende Zahl in das dafür vorgesehene Kästchen schreiben.

2) Lesen Sie aus der obigen Abbildung den Wert des Koeffizienten d ab.

c) Der Umsatz des Weltmarktführers im Seilbahnbau betrug im Geschäftsjahr 2015/16 rund 834 Millionen Euro und lag somit um 5,04 % über dem Umsatz im Geschäftsjahr 2014/15.

1) Berechnen Sie den Umsatz im Geschäftsjahr 2014/15 in Millionen Euro.

Möglicher Lösungsweg

a1)

E	☒

a2) Neigungswinkel $\alpha = \arctan(0{,}4) = 21{,}801...°$
Höhenunterschied $h = 180 \cdot \sin(\alpha) = 66{,}850...$

Der Wagen überwindet einen Höhenunterschied von rund 66,85 m.

b1) $27 \cdot a + 9 \cdot b + 3 \cdot c + d =$ 1
$27 \cdot a + 6 \cdot b + c =$ 0

b2) $d = 2$

c1) $\frac{834}{1{,}0504} = 793{,}9...$

Der Umsatz im Geschäftsjahr 2014/15 betrug rund 794 Millionen Euro.
Die Angabe des Zusatzes „Millionen Euro“ ist für die Punktevergabe nicht relevant.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × A: für das richtige Ankreuzen
a2) 1 × B: für das richtige Berechnen des Höhenunterschieds
b1) 1 × A1: für das richtige Vervollständigen der ersten Gleichung
1 × A2: für das richtige Vervollständigen der zweiten Gleichung
b2) 1 × C: für das richtige Ablesen von *d*
c1) 1 × B: für das richtige Berechnen des Umsatzes
Die Angabe des Zusatzes „Millionen Euro“ ist für die Punktevergabe nicht relevant.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Psi-Tests*

Aufgabennummer: A_291

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Seit vielen Jahren hat die GWUP (Gesellschaft zur wissenschaftlichen Untersuchung von Parawissenschaften e. V.) ein Preisgeld für den Nachweis einer paranormalen (übersinnlichen) Fähigkeit ausgeschrieben.
Die behaupteten Fähigkeiten einer Versuchsperson werden dabei mit verschiedenen Tests überprüft.

a) Eine Versuchsperson muss auf Basis ihrer paranormalen Fähigkeiten angeben, unter welcher von 10 Schachteln ein Glas Wasser versteckt ist. Der Versuch wird 13-mal durchgeführt, wobei das Glas Wasser jedes Mal neu versteckt wird. Um die Testphase zu bestehen, müssen bei 13 Durchführungen des Versuchs 7 oder mehr Treffer erzielt werden.

Es wird angenommen, dass die Versuchsperson keine paranormalen Fähigkeiten besitzt und daher bei jeder Durchführung des Versuchs mit einer Wahrscheinlichkeit von 10 % einen Treffer erzielt.

1) Berechnen Sie den Erwartungswert für die Anzahl der Treffer.
2) Zeigen Sie, dass es wahrscheinlicher ist, dass diese Versuchsperson mindestens 1 Treffer erzielt, als dass sie gar keinen Treffer erzielt.
3) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der die Versuchsperson die Testphase besteht.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Eine Versuchsperson muss auf Basis ihrer paranormalen Fähigkeiten angeben, ob in einem Kabel Strom fließt oder nicht. Dieser Versuch wird 50-mal durchgeführt. Um die Testphase zu bestehen, müssen bei 50 Durchführungen des Versuchs 40 oder mehr Treffer erzielt werden.

Es wird angenommen, dass die Versuchsperson keine paranormalen Fähigkeiten besitzt und daher bei jeder Durchführung des Versuchs mit einer Wahrscheinlichkeit von 50 % einen Treffer erzielt.

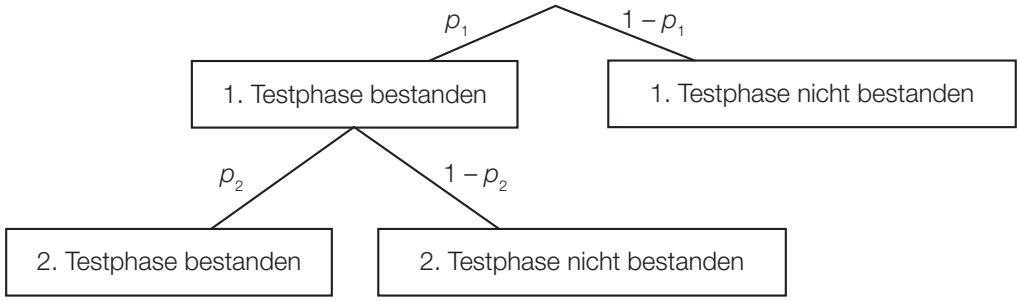
1) Ordnen Sie den beiden Ereignissen jeweils die zutreffende Wahrscheinlichkeit aus A bis D zu. *[2 zu 4]*

Die Versuchsperson erzielt mindestens 40 Treffer.	
Die Versuchsperson erzielt höchstens 20 Treffer.	

A	$\sum_{k=20}^{50} \binom{50}{k} \cdot 0{,}5^k \cdot 0{,}5^{50-k}$
B	$\sum_{k=0}^{20} \binom{50}{k} \cdot 0{,}5^k \cdot 0{,}5^{50-k}$
C	$\sum_{k=0}^{40} \binom{50}{k} \cdot 0{,}5^k \cdot 0{,}5^{50-k}$
D	$\sum_{k=40}^{50} \binom{50}{k} \cdot 0{,}5^k \cdot 0{,}5^{50-k}$

c) Sollte eine Versuchsperson die 1. Testphase bestehen, so muss die Versuchsperson die 2. Testphase ebenfalls bestehen, um das Preisgeld zu gewinnen.

Dieser Sachverhalt ist im nachstehenden Baumdiagramm dargestellt.



1) Erstellen Sie mithilfe von p_1 und p_2 eine Formel zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit, dass die Versuchsperson das Preisgeld nicht gewinnt.

P(„Versuchsperson gewinnt das Preisgeld nicht“) = _____

Möglicher Lösungsweg

a1) X ... Anzahl der Treffer
Binomialverteilung mit $n = 13$, $p = 0{,}1$:

$E(X) = n \cdot p = 13 \cdot 0{,}1 = 1{,}3$

a2) $P(X = 0) = 0{,}9^{13} = 0{,}254... < 1 - P(X = 0)$

a3) Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$P(7 \leq X \leq 13) = 0{,}000099... = 0{,}0099...\ \%$
Die Wahrscheinlichkeit beträgt rund 0,01 %.

b1)

Die Versuchsperson erzielt mindestens 40 Treffer.	D
Die Versuchsperson erzielt höchstens 20 Treffer.	B

A	$\sum_{k=20}^{50} \binom{50}{k} \cdot 0{,}5^k \cdot 0{,}5^{50-k}$
B	$\sum_{k=0}^{20} \binom{50}{k} \cdot 0{,}5^k \cdot 0{,}5^{50-k}$
C	$\sum_{k=0}^{40} \binom{50}{k} \cdot 0{,}5^k \cdot 0{,}5^{50-k}$
D	$\sum_{k=40}^{50} \binom{50}{k} \cdot 0{,}5^k \cdot 0{,}5^{50-k}$

c1) $P(\text{„Versuchsperson gewinnt das Preisgeld nicht“}) = (1 - p_1) + p_1 \cdot (1 - p_2)$

oder:

$P(\text{„Versuchsperson gewinnt das Preisgeld nicht“}) = 1 - p_1 \cdot p_2$

Lösungsschlüssel

a1) 1 × B1: für das richtige Berechnen des Erwartungswerts
a2) 1 × D: für das richtige Nachweisen
a3) 1 × B2: für das richtige Ermitteln der Wahrscheinlichkeit
b1) 1 × C: für das richtige Zuordnen
c1) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

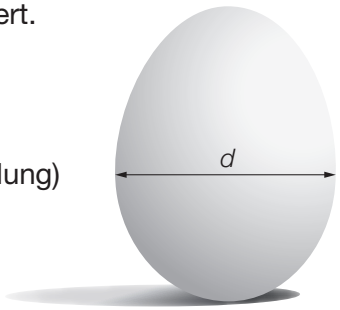
Kochzeit von Eiern*

Aufgabennummer: A_289

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Der Physiker Werner Gruber hat mit Hühnereiern experimentiert. Er hat festgestellt, dass die Kochzeit von Eiern unter anderem abhängt von:

- dem Durchmesser d des Eies (siehe nebenstehende Abbildung)
- der Lagertemperatur x vor dem Kochen



Datenquelle: Gruber, Werner: *Die Genussformel. Kulinarische Physik.* Salzburg: Ecowin 2008, S. 79–84.

a) Ein Ei soll weich gekocht werden. Die Kochzeit kann in Abhängigkeit vom Durchmesser d unter bestimmten Bedingungen näherungsweise durch die quadratische Funktion W beschrieben werden:

$W(d) = a \cdot d^2$

d ... Durchmesser des Eies in mm
$W(d)$ ... Kochzeit bei einem Durchmesser d in min
a ... positiver Parameter

Bei einem Durchmesser von 45 mm ergibt sich eine Kochzeit von 5 min.

1) Ermitteln Sie den Parameter a.

Zwei Eier mit unterschiedlichen Durchmessern werden weich gekocht. Der Durchmesser von Ei B ist um 10 % größer als der Durchmesser von Ei A.

2) Zeigen Sie, dass die Kochzeit von Ei B um mehr als 10 % länger ist als die Kochzeit von Ei A.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Die quadratische Funktion Z beschreibt näherungsweise die Kochzeit für ein weich gekochtes Ei in Abhängigkeit von der Lagertemperatur:

$Z(x) = -0{,}024 \cdot x^2 - 2{,}16 \cdot x + 252$

x ... Lagertemperatur in °C
$Z(x)$ ... Kochzeit bei der Lagertemperatur x in s

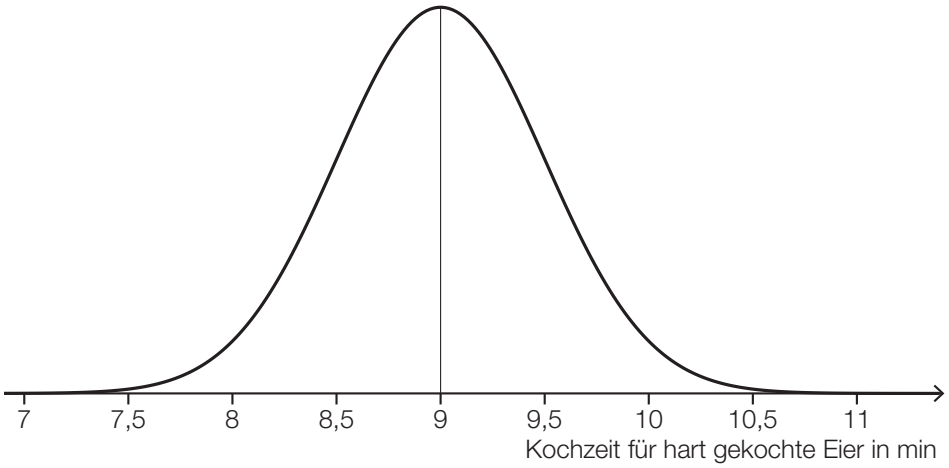
Ein Ei wird anstatt bei einer Temperatur von 4 °C (Kühlschranktemperatur) bei einer Temperatur von 20 °C (Raumtemperatur) gelagert.

1) Ermitteln Sie, um wie viele Sekunden die Kochzeit dadurch kürzer ist.

c) Die Kochzeit für weich gekochte Eier ist unter bestimmten Bedingungen annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 5{,}5$ min und der Standardabweichung $\sigma = 0{,}35$ min.

1) Ermitteln Sie dasjenige um den Erwartungswert symmetrische Intervall, in dem die Kochzeit für ein zufällig ausgewähltes Ei mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % liegt.

Die Kochzeit für hart gekochte Eier ist unter bestimmten Bedingungen annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 9$ min und der Standardabweichung $\sigma = 0{,}5$ min. Der Graph der zugehörigen Dichtefunktion ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



X ... Kochzeit für hart gekochte Eier in min

2) Kreuzen Sie die auf diese Dichtefunktion nicht zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]*

$P(X \geq 9) = 0{,}5$	☐
$P(X \geq 10) = P(X \leq 8)$	☐
$P(8{,}5 \leq X \leq 9{,}5) \approx 0{,}68$	☐
$P(8 \leq X \leq 10) = 1 - P(X \geq 10)$	☐
$P(7 \leq X \leq 11) \approx 1$	☐

Möglicher Lösungsweg

a1) $5 = a \cdot 45^2 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{5}{45^2} = 0{,}00246...$

a2) $W(1{,}1 \cdot d) = a \cdot (1{,}1 \cdot d)^2 = a \cdot 1{,}21 \cdot d^2$
Ist der Durchmesser um 10 % größer, dann ist die Kochzeit um 21 % länger.

Der geforderte Nachweis kann auch mit konkreten Zahlen erfolgen.

b1) $Z(4) = 242{,}976$
$Z(20) = 199{,}2$

$Z(4) - Z(20) = 43{,}7...$

Die Kochzeit ist um rund 44 s kürzer.

c1) X ... Kochzeit für weich gekochte Eier in min

Berechnung des Intervalls mittels Technologieeinsatz:
$P(\mu - a \leq X \leq \mu + a) = 0{,}9 \quad \Rightarrow \quad$ [4,92 min; 6,08 min]

c2)

$P(8 \leq X \leq 10) = 1 - P(X \geq 10)$	☒

Lösungsschlüssel

a1) 1 × B: für das richtige Ermitteln des Parameters a
a2) 1 × D: für das richtige Nachweisen
b1) 1 × B: für das richtige Ermitteln der Zeitdifferenz
c1) 1 × B: für das richtige Ermitteln des Intervalls
c2) 1 × C: für das richtige Ankreuzen

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Fressverhalten von Furchenwalen*

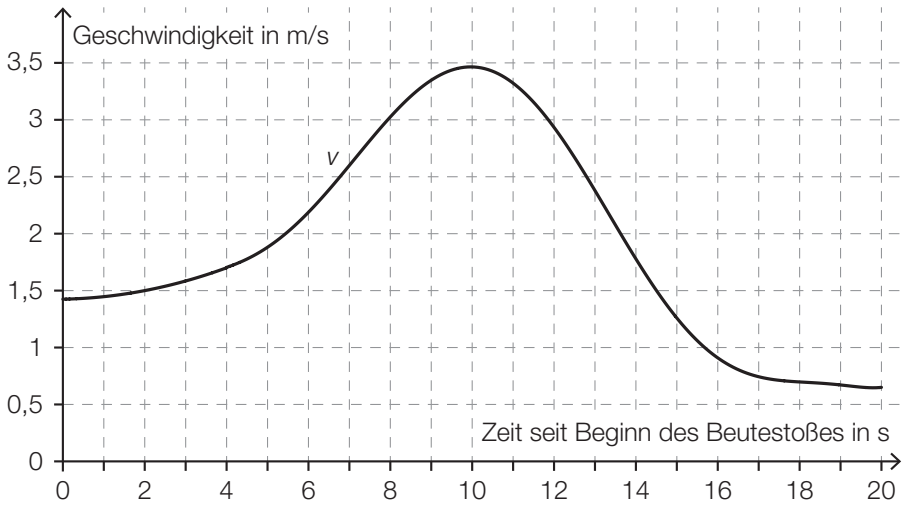
Aufgabennummer: A_288

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Bei einem Beutestoß nehmen Furchenwale mit weit geöffnetem Maul eine große Menge Meerwasser und die darin enthaltene Beute auf. Forscher/innen beobachteten dieses Fressverhalten. Sie ermittelten mithilfe von Sensoren die Geschwindigkeit des Furchenwals bei einem Beutestoß, die Größe der Maulöffnung und das gesamte Wasservolumen, das dabei aufgenommen wird.

Datenquelle: Goldbogen, Jeremy A.: Schwieriger Krillfang der Wale. In: *Spektrum der Wissenschaft* November 2010, S. 60–67.

a) Die Geschwindigkeit eines Furchenwals bei einem Beutestoß, der insgesamt 20 s dauert, kann näherungsweise durch die Funktion v beschrieben werden (siehe nachstehende Abbildung).



1) Schätzen Sie die Länge s desjenigen Weges ab, der bei diesem Beutestoß zurückgelegt wird.

$s \approx$ _____ m

Ein Forscher behauptet:
„Der Furchenwal erreicht bei diesem Beutestoß eine maximale Geschwindigkeit von 15 km/h.“

2) Weisen Sie nach, dass diese Behauptung falsch ist.

* ehemalige Klausuraufgabe

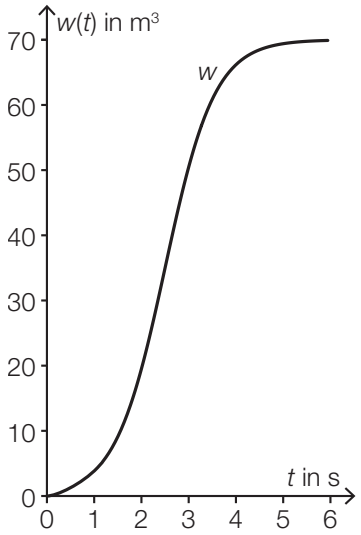
b) Die Größe der Maulöffnung bei einem Beutestoß eines Furchenwals kann näherungsweise durch die Funktion m beschrieben werden:

$$m(t) = \frac{1}{175} \cdot (-17 \cdot t^4 + 204 \cdot t^3 - 922{,}5 \cdot t^2 + 1\,863 \cdot t) \text{ mit } 0 \le t \le 6$$

t ... Zeit seit Beginn des Öffnens des Mauls in s
$m(t)$ ... Größe der Maulöffnung zur Zeit t in m^2

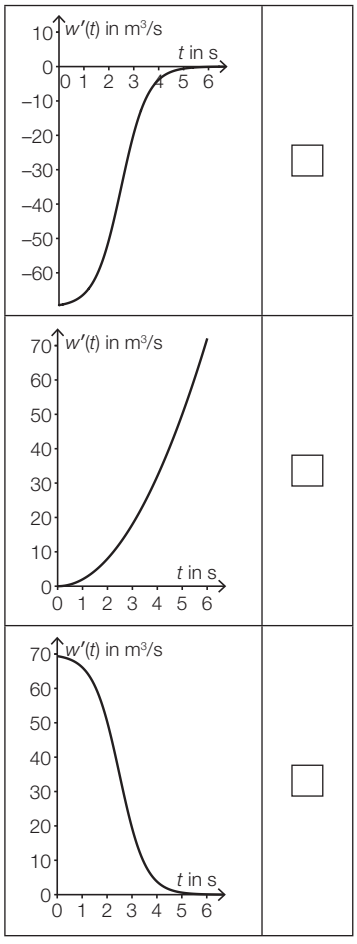
1) Ermitteln Sie die maximale Größe der Maulöffnung.

c) Die Funktion w beschreibt näherungsweise das gesamte Wasservolumen, das ein Furchenwal während eines Beutestoßes aufnimmt (siehe nachstehende Abbildung).

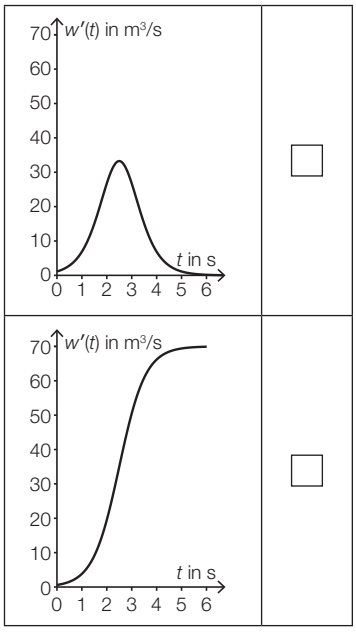


t ... Zeit seit Beginn der Wasseraufnahme in s
$w(t)$ ... gesamtes aufgenommenes Wasservolumen bis zur Zeit t in m³

1) Kreuzen Sie den Graphen der zugehörigen Ableitungsfunktion w' an. *[1 aus 5]*



☐



☐

☐

☐

☐

Möglicher Lösungsweg

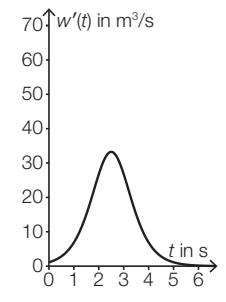
a1) $s \approx 40$ m
Toleranzbereich: [30; 50]

a2) 15 km/h sind rund 4,2 m/s, aus der Abbildung geht allerdings hervor, dass die Maximalgeschwindigkeit unter 3,5 m/s liegt.

b1) Berechnung des Hochpunkts H von m im gegebenen Intervall mittels Technologieeinsatz:
$m'(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad H = (3 \mid 8{,}1)$

Die maximale Größe der Maulöffnung beträgt 8,1 m^2.

c1)

	☒

Lösungsschlüssel

a1) 1 × B: für das richtige Abschätzen von s (Toleranzbereich: [30; 50])
a2) 1 × D: für das richtige Nachweisen
b1) 1 × B: für das richtige Ermitteln der maximalen Größe der Maulöffnung
c1) 1 × C: für das richtige Ankreuzen

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Eiffelturm*

Aufgabennummer: A_287

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Der Eiffelturm ist ein Wahrzeichen der Stadt Paris.

a) Die Metallkonstruktion des Eiffelturms hat eine Masse von 7 300 Tonnen, das sind $7{,}3 \cdot 10^{\square}$ Kilogramm.

1) Tragen Sie den fehlenden Exponenten in das obige Kästchen ein.

Die Masse m ist das Produkt aus Dichte ϱ und Volumen V, also $m = \varrho \cdot V$.
Das Metall des Eiffelturms hat eine Dichte von 7 800 kg/m^3.
Die Grundfläche des Eiffelturms ist quadratisch und hat eine Seitenlänge von 125 m.

Stellen Sie sich vor, die Metallkonstruktion des Eiffelturms würde eingeschmolzen und zu einem Quader mit der gleichen Grundfläche gegossen.

2) Berechnen Sie die Höhe dieses Quaders in Zentimetern.

b) Im Jahr 1950 besuchten rund 1 027 000 Personen den Eiffelturm, im Jahr 1980 waren es rund 3 594 000 Personen.

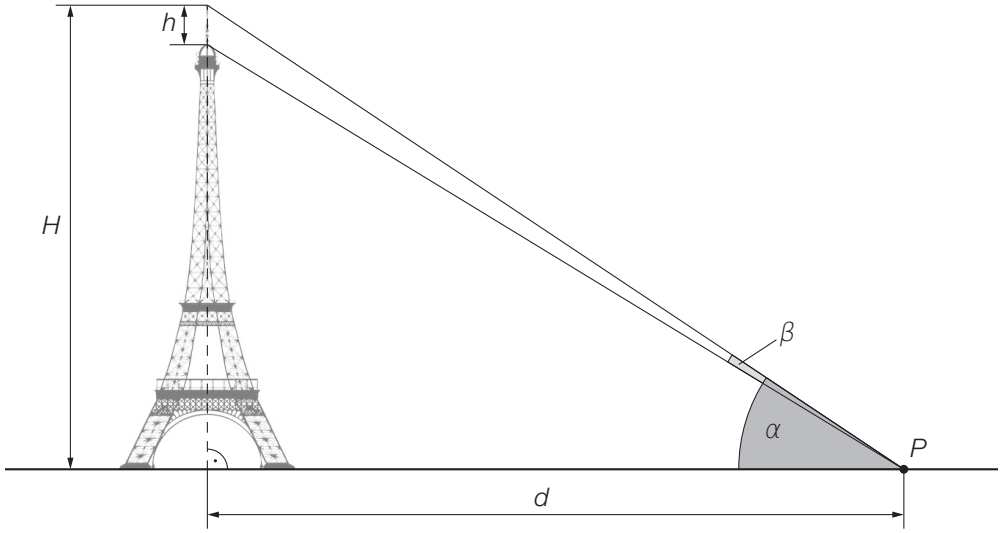
Für den Zeitraum von 1950 bis 1980 kann die Anzahl der Personen, die den Eiffelturm pro Jahr besuchten, näherungsweise durch eine lineare Funktion b beschrieben werden.

t … Zeit in Jahren mit $t = 0$ für das Jahr 1950
$b(t)$ … Anzahl der Personen, die den Eiffelturm pro Jahr besuchten, zur Zeit t

1) Erstellen Sie eine Gleichung der Funktion b. Wählen Sie $t = 0$ für das Jahr 1950.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Von Punkt P aus sieht man den höchsten Punkt des H Meter hohen Eiffelturms unter dem Höhenwinkel α und die h Meter hohe Spitze unter dem Sehwinkel β (siehe nachstehende Abbildung).



1) Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen des jeweils richtigen Satzteils so, dass eine korrekte Aussage entsteht. *[Lückentext]*

Die Höhe _____①_____ ist durch den Ausdruck _____②_____ gegeben.

①	
H	☐
h	☐
$H - h$	☐

②	
$d \cdot \tan(\alpha + \beta)$	☐
$d \cdot \tan(\alpha - \beta)$	☐
$d \cdot \tan(\beta)$	☐

Möglicher Lösungsweg

a1) $7{,}3 \cdot 10^{\boxed{6}}$ Kilogramm

a2) 7 300 t = 7 300 000 kg

Volumen des verbauten Metalls in m^3: $V = \frac{7\,300\,000}{7\,800} = 935{,}897...$

Höhe des Quaders in m: $h = \frac{935{,}897...}{125^2} = 0{,}059...$

Der Quader wäre rund 6 cm hoch.

b1) $b(t) = k \cdot t + d$

$k = \frac{3\,594\,000 - 1\,027\,000}{30} = 85\,566{,}6...$

$d = 1\,027\,000$

$b(t) = 85\,567 \cdot t + 1\,027\,000$ *(Steigung gerundet)*

c1)

①	
$H - h$	☒

②	
$d \cdot \tan(\alpha - \beta)$	☒

Lösungsschlüssel

a1) 1 × A1: für das richtige Eintragen des Exponenten

a2) 1 × A2: für den richtigen Ansatz (richtige Anwendung der Formel zur Berechnung des Volumens eines Quaders auf den gegebenen Sachverhalt)

1 × B: für das richtige Berechnen der Höhe in Zentimetern

b1) 1 × A: für das richtige Erstellen der Funktionsgleichung

c1) 1 × A: für das richtige Ergänzen der beiden Textlücken

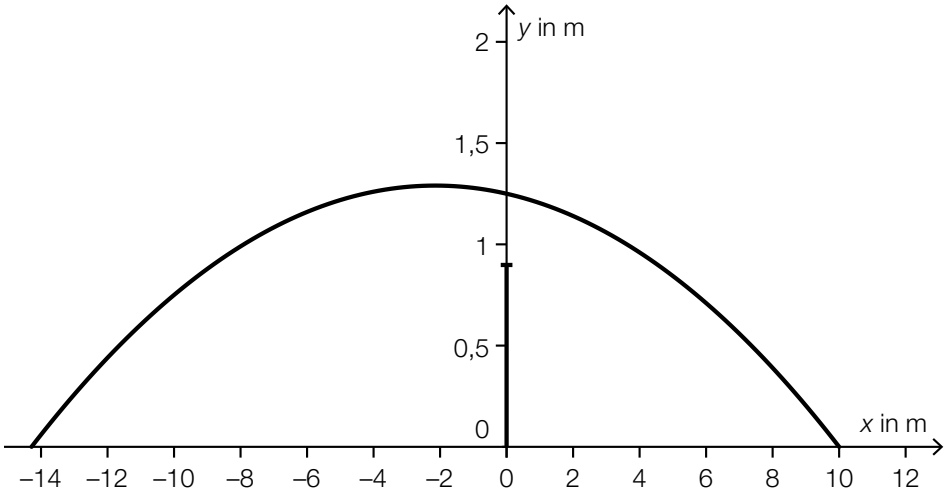
BMB
Bundesministerium
für Bildung

Tennis (1)*

Aufgabennummer: A_151

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Die Flugbahn eines Tennisballs ist ein Teil des unten dargestellten parabelförmigen Funktionsgraphen. Der Abschusspunkt *A* liegt 10 m vom Netz entfernt in einer Höhe von 0,75 m. Das Netz (0,9 m hoch) wird auf der *y*-Achse dargestellt. Der Ball überfliegt das Netz in einer Höhe von 35 cm und trifft 10 m hinter dem Netz im Aufprallpunkt *P* den Boden.



a) – Kennzeichnen Sie in der oben stehenden Grafik den Abschusspunkt *A* und den Aufprallpunkt *P*.
– Bestimmen Sie dasjenige Intervall, in dem der Funktionsgraph ein Modell für die Flugbahn darstellt.

b) – Ermitteln Sie die Funktionsgleichung für die Flugbahn des Balles.

c) Die Flugbahn eines anderen Tennisballs kann näherungsweise durch eine quadratische Funktion $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ beschrieben werden.

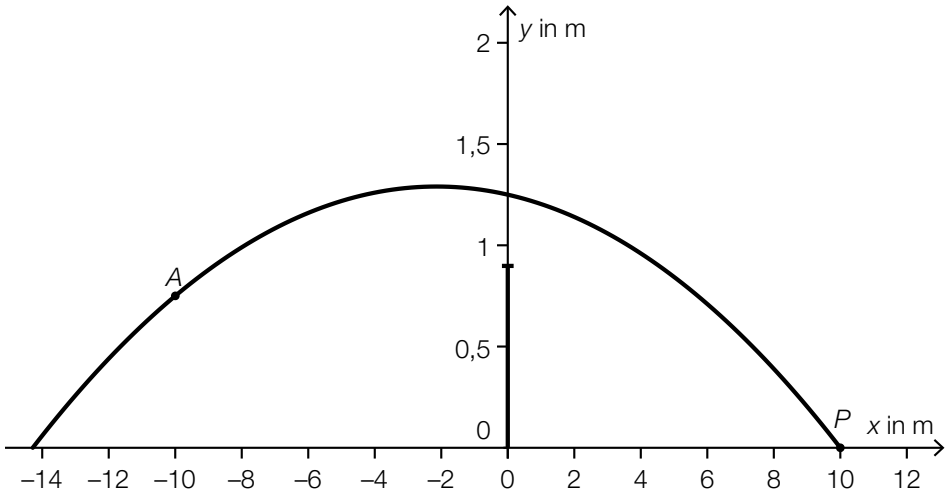
– Beschreiben Sie, welche Stelle der Flugbahn berechnet werden kann, wenn die Gleichung $2 \cdot a \cdot x + b = 0$ nach x gelöst wird.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

a)



sinnvolles Intervall für die Beschreibung der Flugbahn: [–10; 10]

b) I. $f(-10) = 0{,}75$
II. $f(0) = 1{,}25$
III. $f(10) = 0$
$f(x) = -0{,}00875 \cdot x^2 - 0{,}0375 \cdot x + 1{,}25$

c) Durch das Lösen der Gleichung $2 \cdot a \cdot x + b = 0$ wird die x-Koordinate des Extrempunkts (Maximum) berechnet.

Lösungsschlüssel

a) 1 × C1: für das richtige Einzeichnen von Abschusspunkt *A* und Aufprallpunkt *P*
1 × C2: für die Beschreibung oder Angabe des richtigen Bereichs mit den korrekten Intervallgrenzen
b) 1 × A: für einen richtigen Ansatz
1 × B: für die richtige Ermittlung der Funktionsgleichung
c) 1 × C: für die richtige Beschreibung

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Straßenbahn (1)

Aufgabennummer: A_028

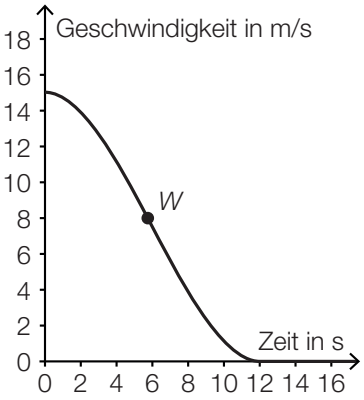
Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Beim Bremsen tritt eine negative Beschleunigung auf. Den Betrag dieser negativen Beschleunigung bezeichnet man als Bremsverzögerung.

a) Eine Straßenbahn beginnt vor der Haltestelle zu bremsen. Vom Bremsbeginn bis zum Stillstand lässt sich der Geschwindigkeitsverlauf näherungsweise durch die folgende Funktion v beschreiben:

$$v(t) = \frac{5}{288} \cdot t^3 - \frac{5}{16} \cdot t^2 + 15 \quad \text{mit} \quad 0 \le t \le 12$$

t … Zeit in s
$v(t)$ … Geschwindigkeit zur Zeit t in m/s



– Interpretieren Sie die beiden Koordinaten des Wendepunkts W der Funktion v im gegebenen Sachzusammenhang.

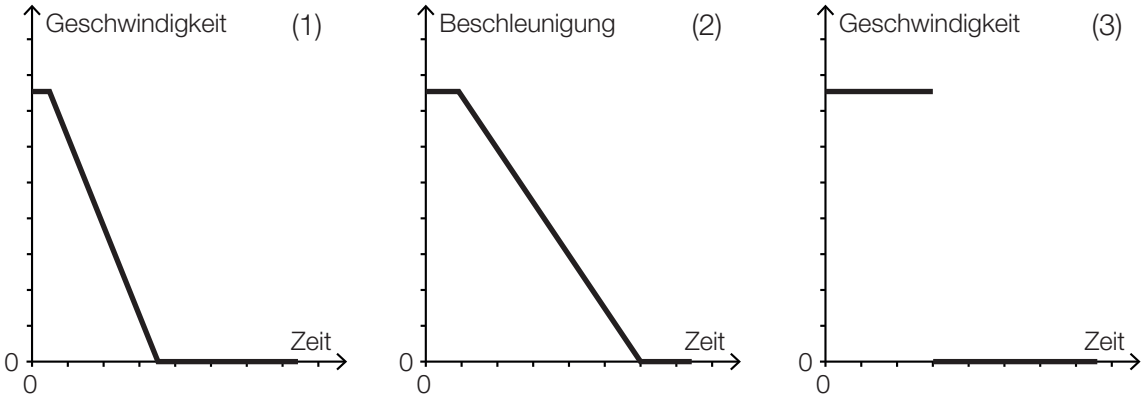
– Berechnen Sie die maximale Bremsverzögerung.

b) Eine Notbremsung, die zum Zeitpunkt $t = 0$ s bei einer Geschwindigkeit der Straßenbahn von 15 m/s eingeleitet wird, erfolgt mit einer konstanten Bremsverzögerung von 2,5 m/s^2.

– Erstellen Sie ein Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm, das diesen Sachverhalt darstellt.

c) Bei einer Notbremsung mit konstanter Bremsverzögerung benötigt ein Straßenbahnfahrer eine gewisse Zeitspanne, um den Bremsvorgang einzuleiten (Reaktionszeit).

– Geben Sie an, welcher der unten dargestellten Graphen diesen Sachzusammenhang zutreffend beschreibt. Begründen Sie Ihre Entscheidung.



Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Die 1. Koordinate von W ist diejenige Zeit, zu der die Bremsverzögerung maximal ist.
Die 2. Koordinate von W ist die Geschwindigkeit zu dieser Zeit.

$v'(t) = \frac{5}{96} \cdot t^2 - \frac{5}{8} \cdot t$

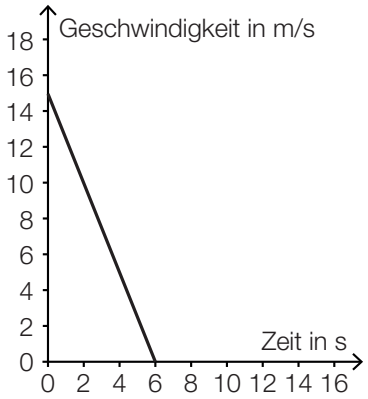
$v''(t) = \frac{5}{48} \cdot t - \frac{5}{8}$

$v''(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 6$

$v'(6) = -1{,}875$

Die maximale Bremsverzögerung beträgt 1,875 m/s^2.

b)



c) Nur der Graph (1) berücksichtigt in korrekter Weise die angeführte Reaktionszeit und die konstante Bremsverzögerung.
Die Geschwindigkeit bleibt während der Reaktionszeit konstant – danach verringert sich die Geschwindigkeit gleichmäßig bis zum Stillstand.
Der Verlauf des Graphen (2) würde eine positive Beschleunigung bedeuten.
Der Verlauf des Graphen (3) würde einen plötzlichen Stillstand (ohne Bremszeit) bedeuten.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) A Modellieren und Transferieren
c) D Argumentieren und Kommunizieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) —
c) —

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) leicht
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 1
c) 1

Thema: Physik

Quellen: —

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

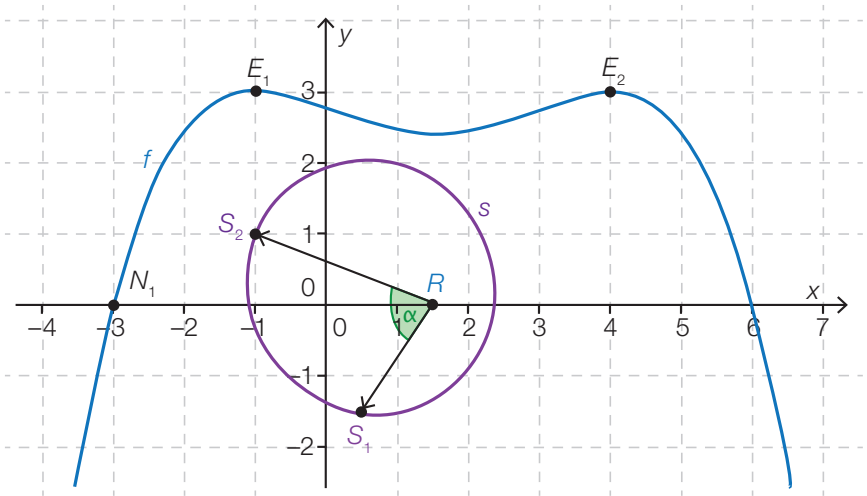
Armageddon

Aufgabennummer: B_295

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Zur Programmierung eines Weltraum-Computerspiels werden einige geometrische Überlegungen benötigt.

Die nachstehende Abbildung zeigt die Flugbahn s zweier Patrouillenschiffe S_1 und S_2 um eine Raumstation R. Die Flugbahn eines feindlichen Raumschiffs wird durch den Graphen der Funktion f beschrieben. (In der Abbildung sind die Nullstelle N_1 sowie die Extrempunkte E_1 und E_2 des Funktionsgraphen von f eingezeichnet.)



a) – Erklären Sie, warum die Flugbahn s kein Graph einer Funktion ist.

Die Funktion f ist eine Polynomfunktion vierten Grades mit $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$.

– Stellen Sie ein Gleichungssystem auf, mit dem die Koeffizienten dieser Funktion f ermittelt werden können.

b) Für die Funktion f gilt:

$$f(x) = -\frac{3}{196}x^4 + \frac{9}{98}x^3 - \frac{3}{196}x^2 - \frac{18}{49}x + \frac{135}{49}$$

Während des Spielverlaufs schießt das feindliche Raumschiff am Wendepunkt der Funktion f in der Nähe von E_2 einen Laserstrahl tangential in Richtung S_2.

– Ermitteln Sie die Funktionsgleichung der Tangente, die den Laserstrahl beschreibt.
– Überprüfen Sie rechnerisch, ob das Raumschiff S_2 vom Laserstrahl getroffen wird.

c) Zu einem bestimmten Zeitpunkt hat die Raumstation die Koordinaten $R = (1{,}5\,|\,0)$ und das erste Patrouillenschiff die Koordinaten $S_1 = (0{,}5\,|\,y > 0)$.

– Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung der fehlenden y-Koordinate des Patrouillenschiffs, wenn der Abstand vom Patrouillenschiff S_1 zur Raumstation R genau d Einheiten beträgt.

$y =$ _____

– Ermitteln Sie den Winkel α, den die beiden Vektoren $\overrightarrow{RS_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1{,}5 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{RS_2} = \begin{pmatrix} -2{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$ einschließen.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Bei der Flugbahn s handelt es sich um keinen Graphen einer Funktion, weil es x-Werte gibt, denen mehr als ein y-Wert zugeordnet wird.

$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$
$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$

Nullstelle: $N_1 = (-3|0)$
Extrempunkte: $E_1 = (-1|3)$ $E_2 = (4|3)$

$f(-3) = 0$: I: $81a - 27b + 9c - 3d + e = 0$
$f(-1) = 3$: II: $a - b + c - d + e = 3$
$f'(-1) = 0$: III: $-4a + 3b - 2c + d = 0$
$f(4) = 3$: IV: $256a + 64b + 16c + 4d + e = 3$
$f'(4) = 0$: V: $256a + 48b + 8c + d = 0$

b) Berechnung des Wendepunktes:

$f''(x) = -\frac{9}{49}x^2 + \frac{27}{49}x - \frac{3}{98}$
$-\frac{9}{49}x^2 + \frac{27}{49}x - \frac{3}{98} = 0$
$x_1 = 2{,}943\ldots \approx 2{,}94$
$(x_2 = 0{,}056\ldots)$
$f(2{,}943\ldots) = 2{,}734\ldots$
$W = (2{,}94|2{,}73)$

Aufstellen der Funktionsgleichung der Tangente:
$y = kx + d$
$k = f'(2{,}943\ldots) = 0{,}36820\ldots$, $d = y - kx = 1{,}65049\ldots$
$y = 0{,}3682x + 1{,}6505$

Einsetzen der Koordinaten von S_2 in die Tangentengleichung:
$1 = 0{,}3682 \cdot (-1) + 1{,}6505$
$1 = 1{,}2822$
Der Laserstrahl trifft nicht das Raumschiff S_2.

c) $\overrightarrow{RS_1} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ y \end{pmatrix}$

$(-1)^2 + y^2 = d^2$

$y = \sqrt{d^2 - 1}$

$$\cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix} -1 \\ -1{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{(-1)^2 + (-1{,}5)^2} \cdot \sqrt{(-2{,}5)^2 + 1^2}}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{3{,}25} \cdot \sqrt{7{,}25}}$$

$\alpha \approx 78{,}11°$

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 4 Analysis
c) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) leicht

Punkteanzahl:

a) 3
b) 3
c) 2

Thema: Informatik

Quellen: —

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Grenzkosten*

Aufgabennummer: B_316

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Ein Betrieb erhebt die Grenzkosten für unterschiedliche Produkte.

a) Für eine quadratische Grenzkostenfunktion K' mit $K'(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ ergeben sich folgende Zusammenhänge:

Anzahl der produzierten Mengeneinheiten (ME)	20	50	60
Grenzkosten in Geldeinheiten/Mengeneinheit (GE/ME)	1 060	7 120	10 340

– Interpretieren Sie den Grenzkostenwert 1 060 im gegebenen Sachzusammenhang.
– Stellen Sie die Funktionsgleichung dieser Grenzkostenfunktion auf.

b) Für die Grenzkostenfunktion K' eines anderen Produkts gilt:

$K'(x) = 0{,}3 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 15$

x … Anzahl der produzierten ME
$K'(x)$ … Grenzkosten bei x ME in GE/ME

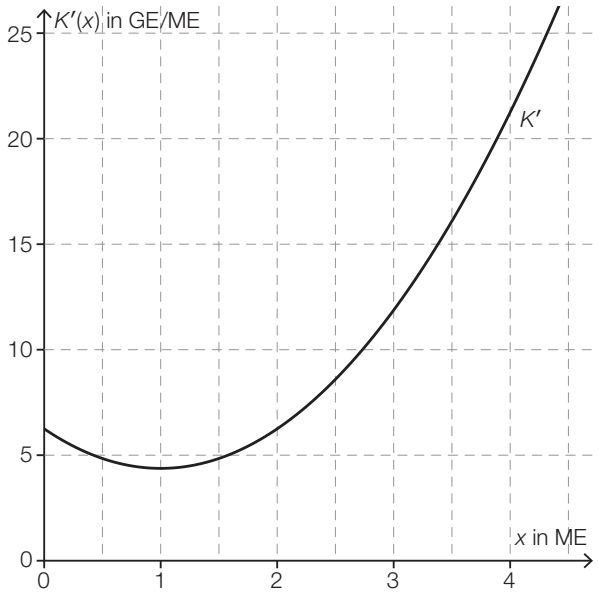
– Berechnen Sie die Kostenkehre.

Bei einer Produktionsmenge von 35 ME betragen die Gesamtkosten 2 372,50 GE.

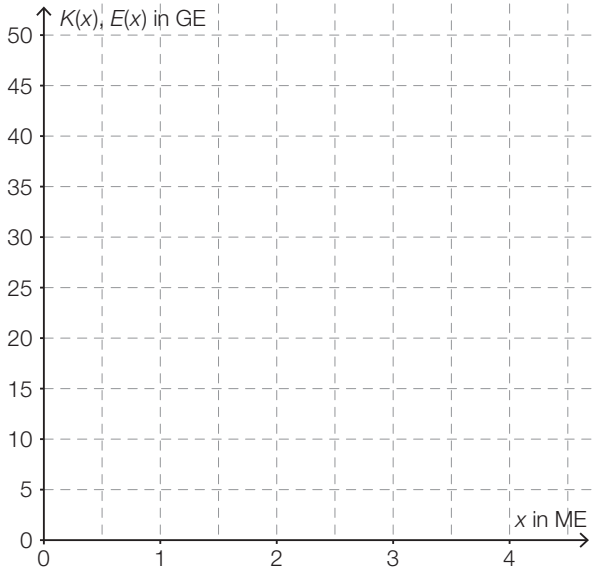
– Berechnen Sie die zugehörige Kostenfunktion K.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Ein Produkt wird zu einem konstanten Preis von 10 GE/ME abgesetzt. Die Fixkosten betragen 5 GE. Die obere Gewinngrenze beträgt 4 ME.
Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen der quadratischen Grenzkostenfunktion K' dieses Produkts.



– Zeichnen Sie den Funktionsgraphen der zugehörigen Erlösfunktion E im Intervall [0; 4] in der unten stehenden Abbildung ein.
– Zeichnen Sie den Funktionsgraphen der zugehörigen Kostenfunktion K im Intervall [0; 4] in der unten stehenden Abbildung ein.



Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Der Grenzkostenwert 1 060 GE/ME bedeutet, dass bei einer Produktionsmenge von 20 ME eine Steigerung der Produktion um 1 ME zu einer Kostensteigerung von näherungsweise 1 060 GE führen wird.

$K'(20) = 1\,060$
$K'(50) = 7\,120$
$K'(60) = 10\,340$

Lösen dieses Gleichungssystems mittels Technologieeinsatz:
$K'(x) = 3 \cdot x^2 - 8 \cdot x + 20$

b) $K''(x) = 0{,}6 \cdot x - 4$

$0 = 0{,}6 \cdot x - 4 \Rightarrow x = \frac{20}{3} \approx 6{,}7$

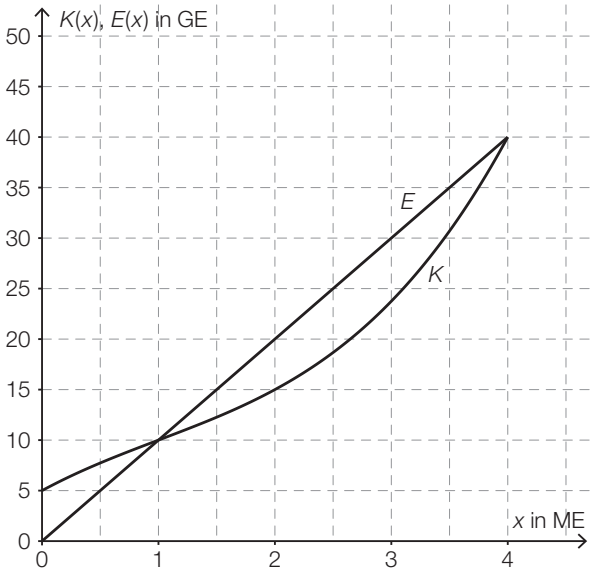
Die Kostenkehre liegt bei rund 6,7 ME.

$\int (0{,}3 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 15)\,dx = 0{,}1 \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 + 15 \cdot x + C$

$K(35) = 2\,372{,}50$:
$0{,}1 \cdot 35^3 - 2 \cdot 35^2 + 15 \cdot 35 + C = 2372{,}50 \Rightarrow C = 10$

$K(x) = 0{,}1 \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 + 15 \cdot x + 10$

c)



Lösungsschlüssel

a) 1 × C: für die richtige Interpretation der Grenzkosten im gegebenen Sachzusammenhang
1 × A: für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung

b) 1 x B1: für die richtige Berechnung der Kostenkehre
1 x A: für den richtigen Ansatz zum Aufstellen der Funktionsgleichung der Kostenfunktion K
1 x B2: für die richtige Berechnung der Integrationskonstanten

c) 1 x A1: für das richtige Einzeichnen des Graphen von E im Intervall [0; 4]
1 x A2: für das richtige Einzeichnen des Graphen von K im Intervall [0; 4] als ertragsgesetzliche Kostenfunktion mit Fixkosten 5 GE und oberer Gewinngrenze 4 ME
1 x A3: für die richtige Darstellung der Extremstelle der Grenzkostenfunktion als Wendepunkt des Graphen der Kostenfunktion an der Stelle $x = 1$

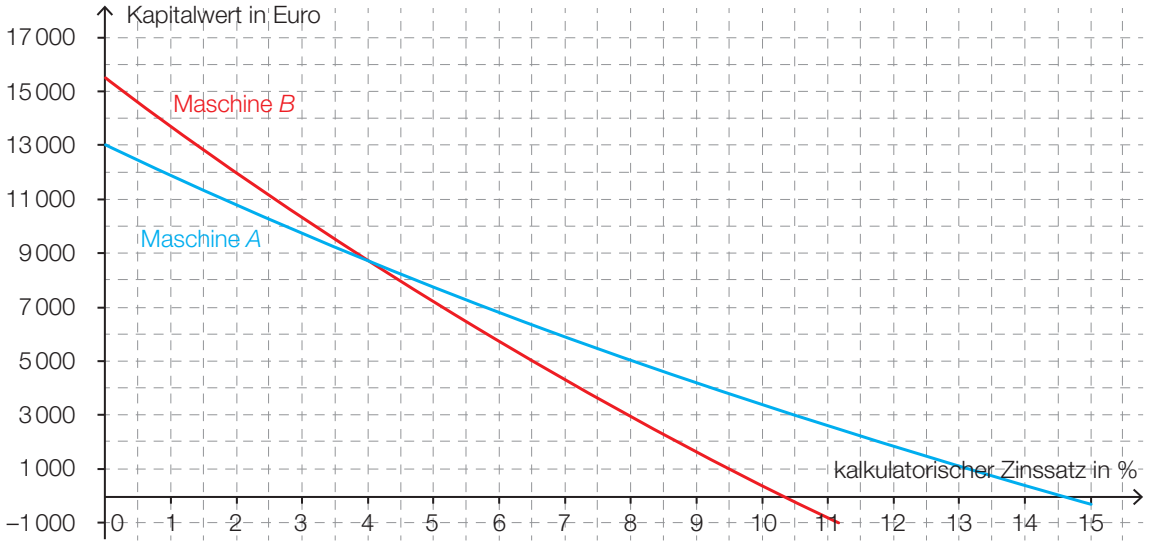
Modernisierung

Aufgabennummer: B_324

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Ein Unternehmer möchte seinen Betrieb modernisieren.

a) Er überlegt die Anschaffung einer neuen Maschine. Dabei stehen 2 Modelle – Maschine *A* und Maschine *B* – zur Auswahl. In der nachstehenden Grafik ist der Kapitalwert dieser Investitionen in Abhängigkeit vom kalkulatorischen Zinssatz dargestellt.



– Kreuzen Sie diejenige Aussage an, die mithilfe der Informationen in der Grafik getroffen werden kann. *[1 aus 5]*

Beide Maschinen haben dieselbe Nutzungsdauer.	☐
Die Anschaffungskosten von Maschine *A* sind höher als jene von Maschine *B*.	☐
Der zu erwartende Liquidationserlös von Maschine *B* ist höher als jener von Maschine *A*.	☐
Der interne Zinssatz von Maschine *A* ist höher als jener von Maschine *B*.	☐
Die zu erwartenden Rückflüsse von Maschine *A* sind stets höher als jene von Maschine *B*.	☐

– Lesen Sie aus der obigen Grafik denjenigen kalkulatorischen Zinssatz ab, für den beide Maschinen einen gleich hohen Kapitalwert haben.

b) Der Unternehmer hat in den letzten 5 Jahren Rücklagen gebildet. Er hat dazu über den gesamten Zeitraum halbjährlich nachschüssig Raten der Höhe R auf ein Sparbuch gelegt. Es hat aber auch andere Ein- bzw. Auszahlungen am Sparbuch gegeben. Die nachstehende Berechnung zeigt, wie der momentan am Sparbuch zur Verfügung stehende Betrag bei jährlicher Verzinsung gebildet wurde.

$$208\,732{,}46 = \text{Endwert der Rente} + 40\,000 \cdot 1{,}025^3 - 20\,000 \cdot 1{,}025^2 + 28\,000$$

– Stellen Sie den beschriebenen Zahlungsstrom auf einer geeigneten Zeitachse grafisch dar.
– Lesen Sie aus der obigen Berechnung denjenigen Jahreszinssatz ab, mit dem die Geldbeträge am Sparbuch verzinst wurden.
– Berechnen Sie den dazu äquivalenten Halbjahreszinssatz.
– Berechnen Sie die Höhe der halbjährlichen Raten.

c) Durch den Einsatz neuer Maschinen steigt die Qualität des hergestellten Produkts. Man glaubt, dass bei einem Preis von 20 GE/ME monatlich 100 ME abgesetzt werden können. Der Höchstpreis für das Produkt liegt erfahrungsgemäß bei 60 GE/ME.

– Erstellen Sie eine Gleichung der zugehörigen linearen Preisfunktion der Nachfrage.

Der Unternehmer plant, den Preis von 20 GE/ME auf 18 GE/ME zu senken.

– Berechnen Sie, um welchen Betrag sich der Erlös durch die Preissenkung verändert.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

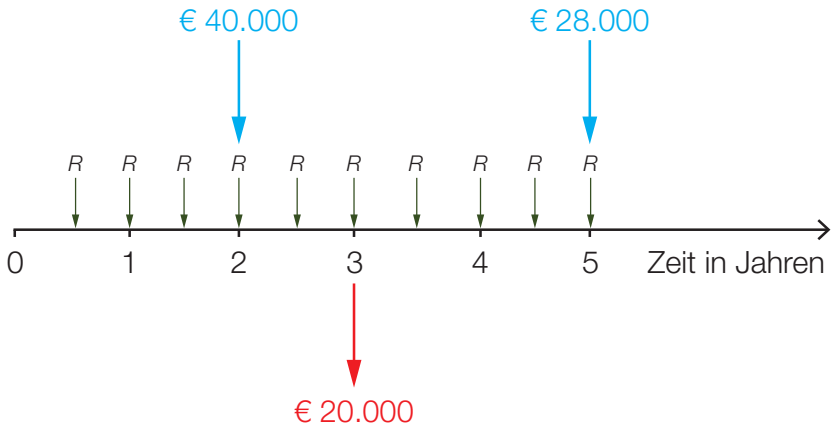
Möglicher Lösungsweg

a)

[...]	
[...]	
[...]	
Der interne Zinssatz von Maschine *A* ist höher als jener von Maschine *B*.	☒
[...]	

Bei einem kalkulatorischen Zinssatz von 4 % haben beide Maschinen einen gleich hohen Kapitalwert (in Höhe von rund € 8.700).

b)



Jahreszinssatz $i = 2{,}5\ \%$ p. a.

$q_2 = \sqrt{1{,}025} = 1{,}01242\ldots$

Der äquivalente Halbjahreszinssatz beträgt rund 1,24 % p. s.

Endwert der Rente $= 208\,732{,}46 - 40\,000 \cdot 1{,}025^3 + 20\,000 \cdot 1{,}025^2 - 28\,000 = 158\,669{,}335$

$$158\,669{,}335 = R \cdot \frac{q_2^{10} - 1}{q_2 - 1}$$

$R = 15\,000{,}000\ldots$

Die Höhe der halbjährlichen Raten beträgt € 15.000.

c) $p_N(x) = a \cdot x + b$

x ... Anzahl der nachgefragten ME
$p_N(x)$ ... Preis bei x nachgefragten ME in GE/ME

Aus $p_N(0) = 60$ folgt $b = 60$.
$p_N(100) = 20 \Rightarrow 20 = 100 \cdot a + 60$
$a = -0{,}4$
$p_N(x) = -0{,}4 \cdot x + 60$

$18 = -0{,}4 \cdot x + 60$
$x = 105$
Bei einem Preis von 18 GE/ME können 105 ME abgesetzt werden.

Bei 20 GE/ME werden 100 ME verkauft. Erlös = $20 \cdot 100 = 2\,000$.
Bei 18 GE/ME werden 105 ME verkauft. Erlös = $18 \cdot 105 = 1\,890$.
Durch die Preissenkung sinkt der Erlös um 110 GE.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) A Modellieren und Transferieren, C Interpretieren und Dokumentieren
c) A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 4
c) 2

Thema: Wirtschaft

Quellen: —

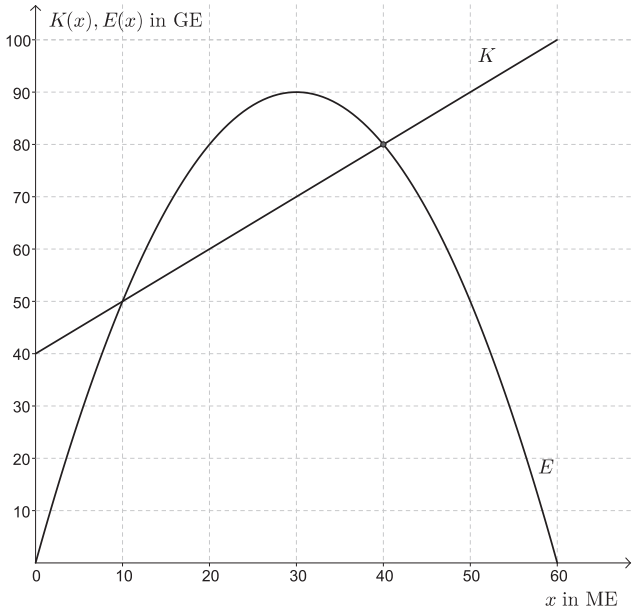
Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Papierproduzent*

Aufgabennummer: B_281

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein Papierproduzent stellt als Monopolist hochwertiges Urkundenpapier her. Die Kostenfunktion K für die Herstellung und die Erlösfunktion E für den Absatz dieses Produkts sind in der nachstehenden Grafik dargestellt.



a) – Stellen Sie die Funktionsgleichung dieser Kostenfunktion K auf.
– Argumentieren Sie, welches Vorzeichen der Koeffizient a dieser Erlösfunktion E mit $E(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x$ haben muss.

b) Das Verhalten der Erlösfunktion soll für die nachgefragte Menge 40 ME untersucht werden.
– Zeichnen Sie in der obigen Grafik die Tangente an den Graphen der Erlösfunktion E an der Stelle $x = 40$ ein.
– Lesen Sie die Steigung dieser Tangente ab.
– Interpretieren Sie die Steigung dieser Tangente im Sachzusammenhang.

c) Für die Stelle des Gewinnmaximums gilt, dass die Grenzkosten gleich dem Grenzerlös sind.
– Begründen Sie diese Aussage.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

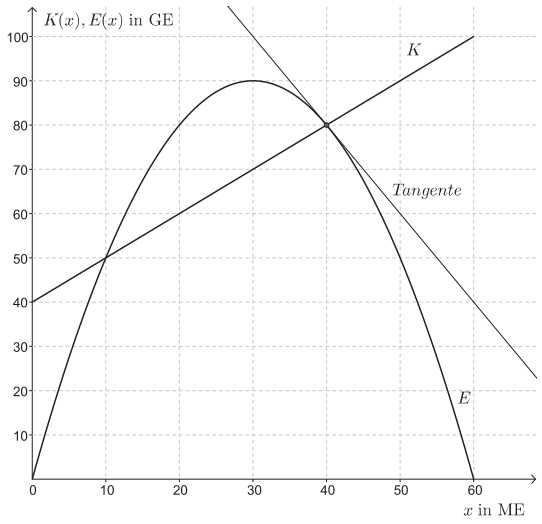
* ehemalige Klausuraufgabe (adaptiert)

Möglicher Lösungsweg

a) Kostenfunktion: $K(x) = x + 40$

Erlösfunktion: Der Koeffizient a muss negativ sein, weil der Funktionsgraph der Erlösfunktion eine nach unten geöffnete Parabel ist.

b)



Steigung der Tangente: $k = -2$
Toleranzbereich: $[-2{,}5; -1{,}5]$

Wird die Absatzmenge um 1 ME erhöht, sinkt der Erlös näherungsweise um 2 GE.

c) $G(x) = E(x) - K(x)$
An der Stelle des Gewinnmaximums gilt: $G'(x) = 0$.
$G'(x) = 0 = E'(x) - K'(x)$
Also: $E'(x) = K'(x)$.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung
   1 × D: für die richtige Argumentation zum Vorzeichen des Koeffizienten *a*
b) 1 × A: für das richtige Einzeichnen der Tangente
   1 × C1: für das richtige Ablesen der Steigung der Tangente im Toleranzbereich [–2,5; –1,5]
   1 × C2: für die richtige Interpretation der Steigung der Tangente im Sachzusammenhang
c) 1 × D: für die richtige Begründung

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

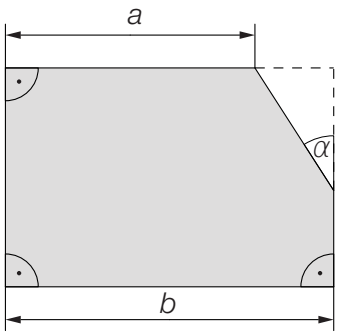
Produktionserweiterung*

Aufgabennummer: B_337

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Ein Industriebetrieb erwägt die Erweiterung seiner Produktpalette.

a) Die Produktion des neuen Produktes erfordert Umbauarbeiten. Wegen einer neuen Zufahrtsstraße wird von der unten dargestellten Fläche ein dreieckiger Abschnitt abgetrennt.



Die Größen a, b und α sind bekannt.

– Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung des Inhalts A dieser dreieckigen Fläche aus den gegebenen Größen.

$A =$ _____

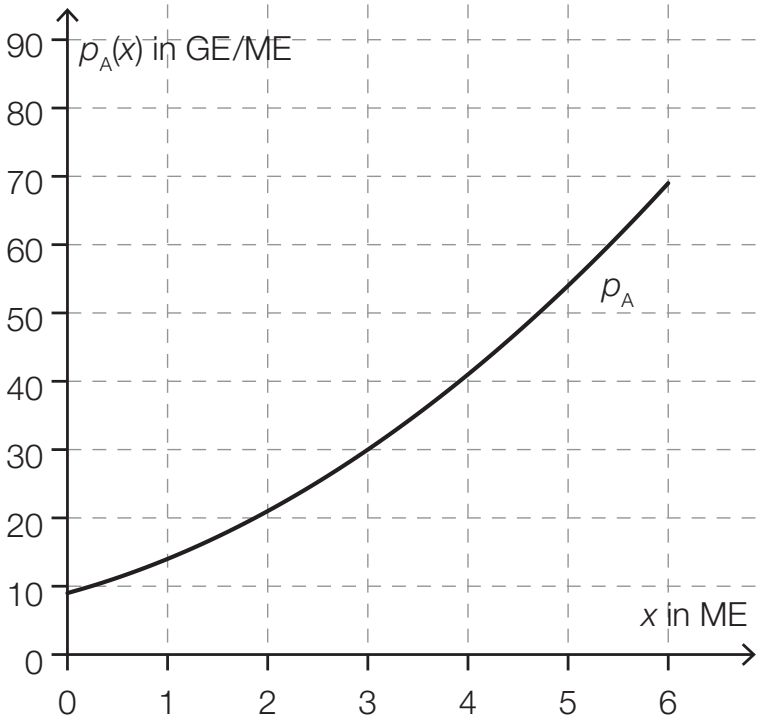
b) Für eine neue Produktionshalle wird ein Kredit benötigt. Die ersten 5 Jahre garantiert die Bank einen fixen Jahreszinssatz i, für die restliche Laufzeit wird ein Jahreszinssatz i' angenommen.
Die nachstehende Tabelle zeigt einen Auszug aus dem Tilgungsplan der Annuitätenschuld.

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
5	€ 2.121,44	€ 7.878,56	€ 10.000,00	
6	€ 2.513,44	€ 7.486,56	€ 10.000,00	
…				
12	€ 527,12	€ 9.472,88	€ 10.000,00	€ 3.705,01
13				

– Beschreiben Sie, wie man aus dem Tilgungsplan ablesen kann, dass der Zinssatz i' größer als i ist.
– Berechnen Sie die Zeile für das Jahr 13 des Tilgungsplans, wenn man davon ausgeht, dass die Schuld am Ende dieses Jahres vollständig getilgt wird.

* ehemalige Klausuraufgabe (adaptiert)

c) Für den Verkauf des neuen Produktes ist der Graph der Preisfunktion des Angebots p_A in der nachstehenden Abbildung dargestellt.
Man hofft, das Produkt zu einem Marktgleichgewichtspreis von 30 GE/ME verkaufen zu können.
Es wird angenommen, dass die Preisfunktion der Nachfrage p_N linear ist und nicht mehr als 5 ME abgesetzt werden können.

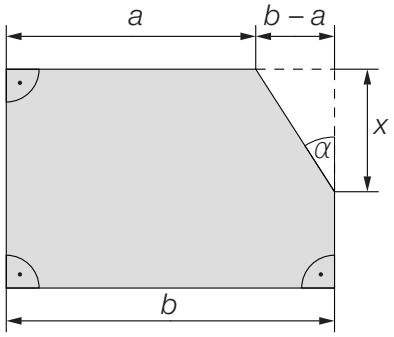


– Zeichnen Sie den Graphen der Preisfunktion der Nachfrage p_N für dieses Produkt in die gegebene Abbildung ein.
– Stellen Sie die Funktionsgleichung von p_N auf.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



$\tan(\alpha) = \frac{b-a}{x}$

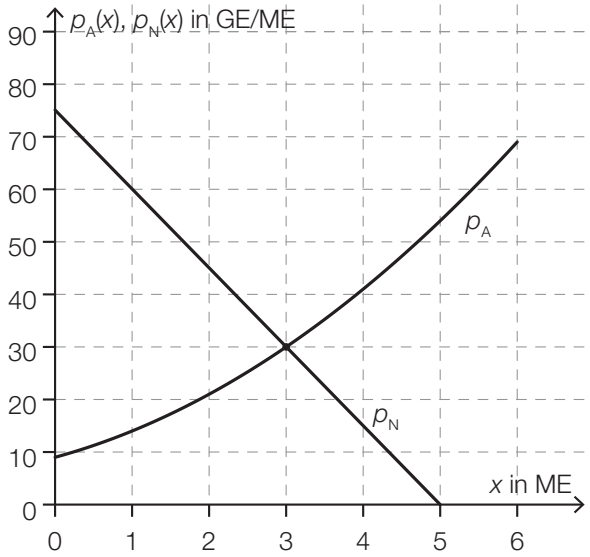
Flächeninhalt des rechtwinkeligen Dreiecks: $A = \frac{(b-a)\cdot x}{2} = \frac{(b-a)\cdot(b-a)}{2\cdot\tan(\alpha)} = \frac{(b-a)^2}{2\cdot\tan(\alpha)}$

b) Der Zinsanteil eines Jahres berechnet sich stets basierend auf der verbleibenden Restschuld des Vorjahres. Im 5. Jahr erfolgt eine positive Tilgung. Damit ist die Restschuld am Ende des Jahres 5 geringer als am Ende Jahres 4. Trotzdem ist der Zinsanteil im Jahr 5 geringer als jener im Jahr 6. Der Zinssatz i' muss daher größer als der Zinssatz i sein.

Restschuld im Jahr 11: 3705,01 + 9472,88 = 13177,89
Zinssatz i': 527,12 = 13177,89 · i' $\Rightarrow$ i' = 0,0400… ≈ 4,0 %

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
13	3705,01 · i' **€ 148,20**	**€ 3.705,01**	148,20 + 3705,01 **€ 3.853,21**	**€ 0**

c)



Modellierung der Preisfunktion der Nachfrage p_N mithilfe der gegebenen Punkte oder durch Ablesen aus dem Funktionsgraphen: $p_N(x) = -15 \cdot x + 75$

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel

b) 1 × C: für die richtige Beschreibung
1 × B1: für die richtige Berechnung des Zinssatzes i'
1 × B2: für das richtige Berechnen der letzten Zeile des Tilgungsplans

c) 1 × A1: für das richtige Einzeichnen des Funktionsgraphen der Preisfunktion der Nachfrage
1 × A2: für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Widerstände*

Aufgabennummer: B_396

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

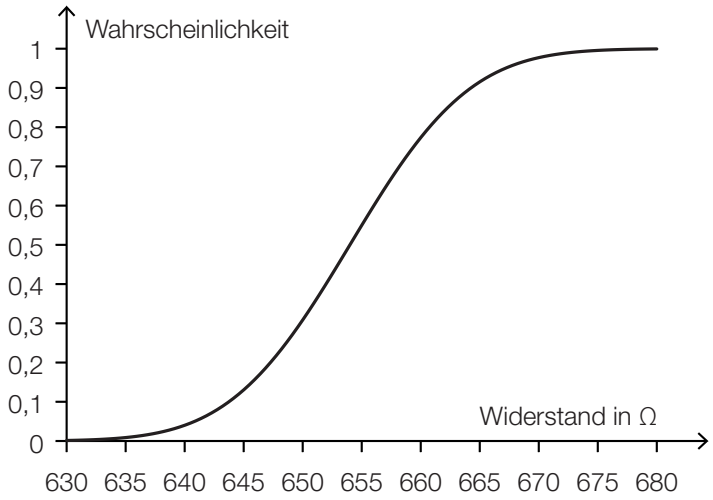
a) Bei der Produktion von elektrischen Widerständen können die Widerstandswerte als normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 100{,}0\ \Omega$ und der Standardabweichung $\sigma = 3{,}2\ \Omega$ angenommen werden. Eine Zufallsstichprobe von 20 Widerständen wird untersucht.

– Berechnen Sie den zum Erwartungswert symmetrischen Zufallsstreubereich, in dem der Stichprobenmittelwert der Widerstandswerte mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % liegt.

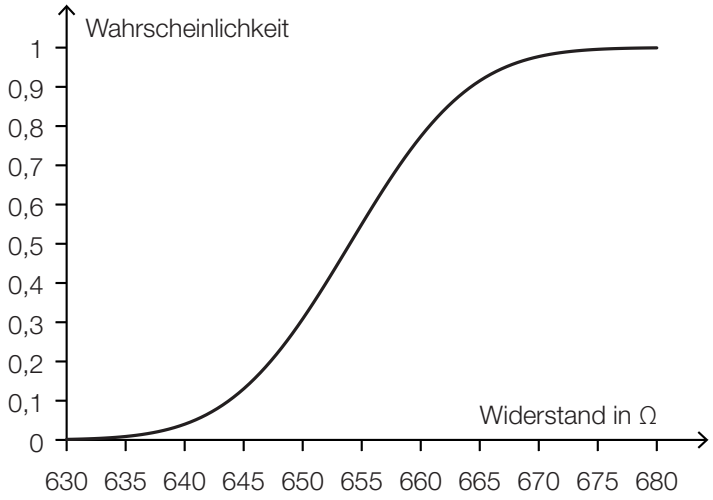
* ehemalige Klausuraufgabe

b) Bei der Produktion von anderen elektrischen Widerständen können die Widerstandswerte als normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 654\ \Omega$ und der Standardabweichung $\sigma = 8\ \Omega$ angenommen werden.

– Veranschaulichen Sie in der nachstehenden Darstellung der Verteilungsfunktion dieser Normalverteilung die Wahrscheinlichkeit $P(X \leq 650)$.



– Skizzieren Sie in der nachstehenden Abbildung den Graphen der Verteilungsfunktion einer Normalverteilung mit gleichem μ und kleinerem σ als in der gegebenen Darstellung.



Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

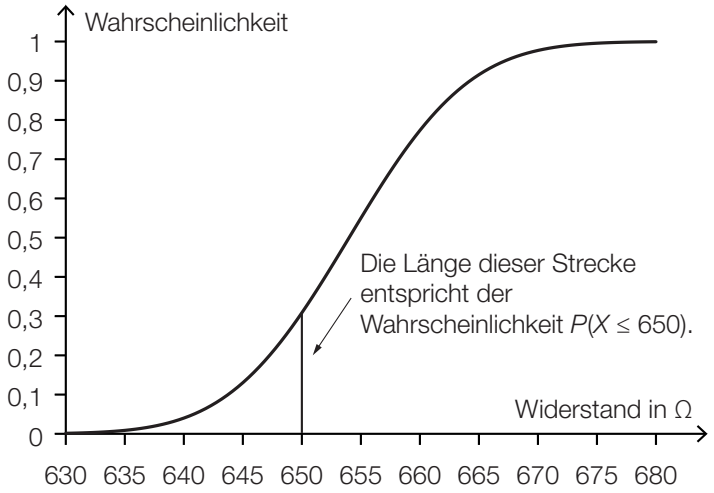
a) Zweiseitigen 90-%-Zufallsstreubereich mithilfe der Normalverteilung bestimmen:

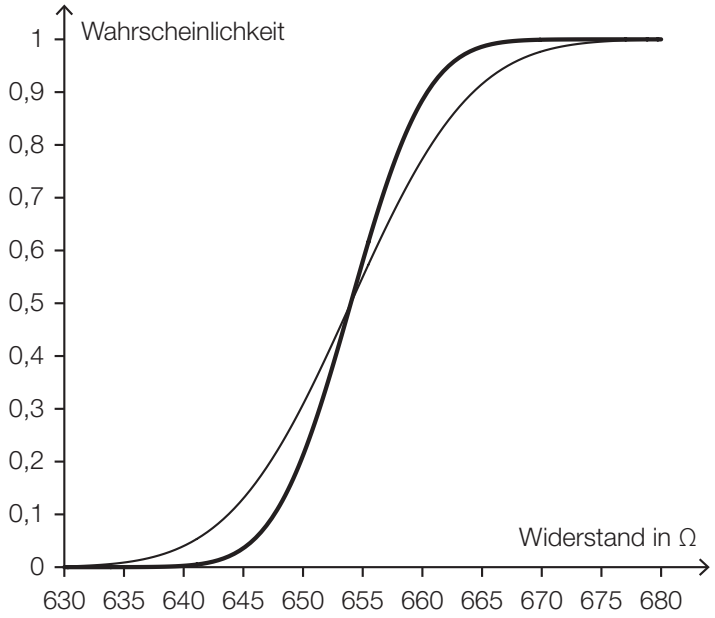
$100 \pm u_{0,95} \cdot \frac{3,2}{\sqrt{20}}$

$u_{0,95} = 1,644\ldots$

Daraus ergibt sich folgender Zufallsstreubereich in Ω: [98,8; 101,2] (*gerundet*).

b)





Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für die Verwendung des richtigen Modells (Zufallsstreubereich für einen Stichprobenmittelwert mithilfe der Normalverteilung)
1 × B: für die richtige Berechnung des Zufallsstreubereichs

b) 1 × A1: für das richtige Veranschaulichen der Wahrscheinlichkeit
1 × A2: für das richtige Skizzieren des Graphen der Verteilungsfunktion (Funktionswert an der Stelle μ richtig eingezeichnet; Abweichung der Funktionswerte von der gegebenen Verteilungsfunktion auf beiden Seiten von μ richtig eingezeichnet)

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Zahnpasta*

Aufgabennummer: B_307

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) In der Marketingabteilung eines Zahnpastaproduzenten stellt man fest, dass sich bei einem Preis von € 2,00 pro Tube täglich 500 Stück absetzen lassen. Nach einer Preissenkung auf € 1,80 lassen sich täglich 600 Stück absetzen.

– Beschreiben Sie, wie sich durch diese Preissenkung der Erlös ändert.

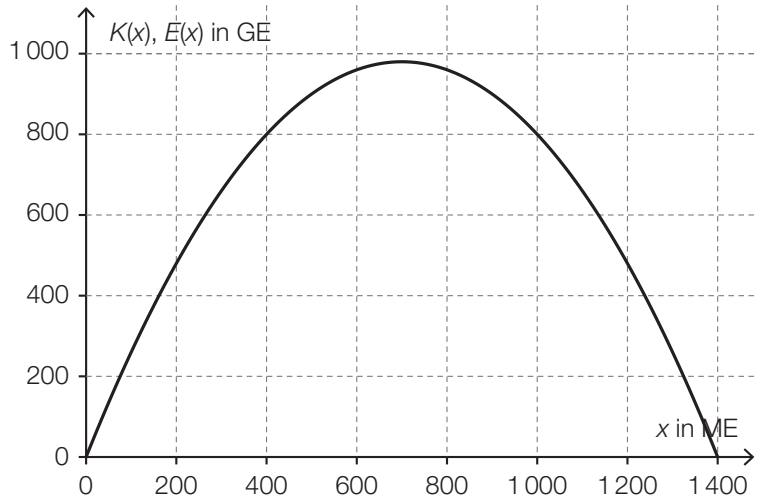
b) Bei einem Preis von € 2,00 pro Tube lassen sich täglich 500 Stück in einer bestimmten Region absetzen, bei einem Preis von € 1,80 lassen sich täglich 600 Stück absetzen. Der Höchstpreis liegt bei € 3,15.

Es soll der Zusammenhang zwischen dem Preis p in Euro und der nachgefragten Menge x in Stück durch eine quadratische Funktion $p(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ dargestellt werden.

– Stellen Sie die Gleichung der Preisfunktion der Nachfrage auf.
– Berechnen Sie die Sättigungsmenge.
– Erklären Sie, warum die Funktion nur im Intervall zwischen null und der Sättigungsmenge ein sinnvolles Modell für diesen Zusammenhang liefert.

* ehemalige Klausuraufgabe (adaptiert)

c) In der nachstehenden Grafik ist die Erlösfunktion E eines Zahnpastaproduzenten dargestellt. Für die zugehörige lineare Kostenfunktion K gelten Fixkosten in Höhe von 400 GE und variable Kosten in Höhe von 0,5 GE/ME.



– Zeichnen Sie den Graphen der Kostenfunktion K in die vorgegebene Grafik ein.
– Lesen Sie aus der Grafik ab, bei welcher Menge der Gewinn maximal ist.

d) Aufgrund einer Lohnerhöhung steigen die Fixkosten.

– Begründen Sie, warum sich die gewinnmaximale Menge dadurch nicht verändert.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Erlös beim Preis € 2,00: $E = 2 \cdot 500 = 1\,000$
Erlös beim Preis € 1,80: $E = 1{,}8 \cdot 600 = 1\,080$
Durch die Preissenkung steigt der Erlös.

b) $p(0) = 3{,}15$: $3{,}15 = c$
$p(500) = 2$: $2 = 500^2 \cdot a + 500 \cdot b + 3{,}15$
$p(600) = 1{,}8$: $1{,}8 = 600^2 \cdot a + 600 \cdot b + 3{,}15$

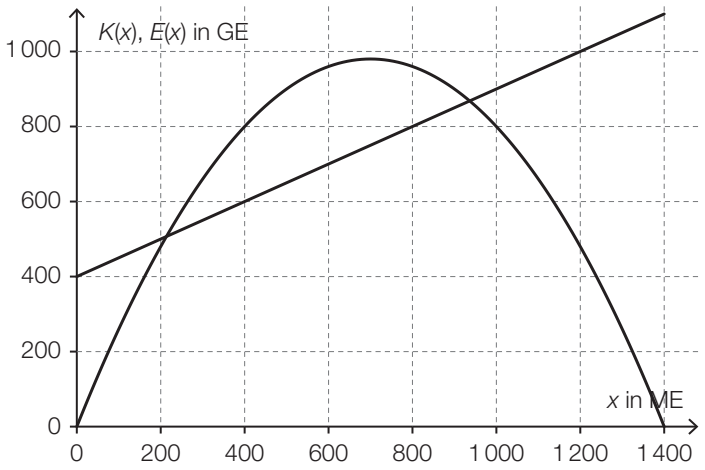
$a = 0{,}0000005$; $b = -0{,}00255$

$p(x) = 0{,}0000005 \cdot x^2 - 0{,}00255 \cdot x + 3{,}15$

Sättigungsmenge: Setze $p(x) = 0$:
$0 = 0{,}0000005 \cdot x^2 - 0{,}00255 \cdot x + 3{,}15$
$x_1 = 2\,100$; ($x_2 = 3\,000$)

Die Sättigungsmenge liegt bei 2 100 Tuben täglich.
Ein sinnvolles Intervall ist [0; 2 100], da der Preis nicht unter null gesenkt werden kann.

c)



gewinnmaximale Menge: ca. 600 ME (exakt 575 ME)
Toleranzbereich: [450; 650]
Achtung: $x = 700$ ist falsch!

d) Die gewinnmaximale Menge ändert sich nicht, wenn die Fixkosten geändert werden. Die Fixkosten sind in der Gewinnfunktion ein konstanter Summand, der bei der Ableitung wegfällt. Da die gewinnmaximale Menge die Nullstelle des Grenzgewinns ist, haben die Fixkosten keinen Einfluss auf die gewinnmaximale Menge.

oder

Im Gewinnmaximum sind die Grenzkosten gleich dem Grenzerlös. Die Grenzkosten sind unabhängig von den Fixkosten.

oder

$G(x) = E(x) - K_v(x) - F$
$G'(x) = E'(x) - K_v'(x)$

x ... produzierte bzw. abgesetzte Menge in ME
$G(x)$ ... Gewinn in GE
$E(x)$ ... Erlös in GE
$K_v(x)$ ... variable Kosten in GE
F ... Fixkosten in GE

Der Gewinn ist maximal, wenn gilt: $E'(x) = K_v'(x)$, d. h., die Fixkosten sind irrelevant.

Lösungsschlüssel

a) 1 × C: für die richtige Beschreibung der Erlösänderung

b) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Bedingungen
1 × B1: für das richtige Ermitteln der Funktionsgleichung
1 × B2: für die richtige Berechnung der Sättigungsmenge
1 × D: für die richtige Erklärung des Intervalls

c) 1 × A: für das richtige Einzeichnen des Graphen der Kostenfunktion
1 × C: für das richtige Ablesen der gewinnmaximalen Menge

d) 1 × D: für die richtige Begründung

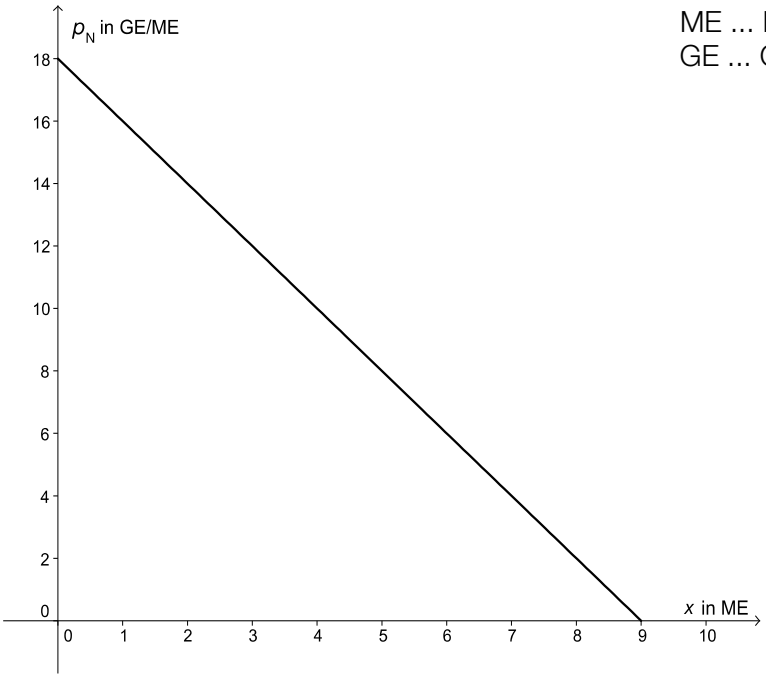
Zeitschrift

Aufgabennummer: B_276

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Preisfunktion der Nachfrage p_N für eine Sonderausgabe einer Zeitschrift dargestellt.

ME ... Mengeneinheiten
GE ... Geldeinheiten



a) Der Preis der Sonderausgabe wird von 14 GE/ME auf 12 GE/ME gesenkt.

– Kennzeichnen Sie in der obigen Abbildung die entsprechenden Verkaufsmengen.
– Berechnen Sie, um wie viele Geldeinheiten sich der zu erwartende Verkaufserlös verändert.

b) – Stellen Sie die Funktionsgleichung der oben dargestellten Preisfunktion der Nachfrage p_N auf.

Für die Preisfunktion des Angebots p_A gilt:
$p_A(x) = 1 + 4{,}5\sqrt{x}$

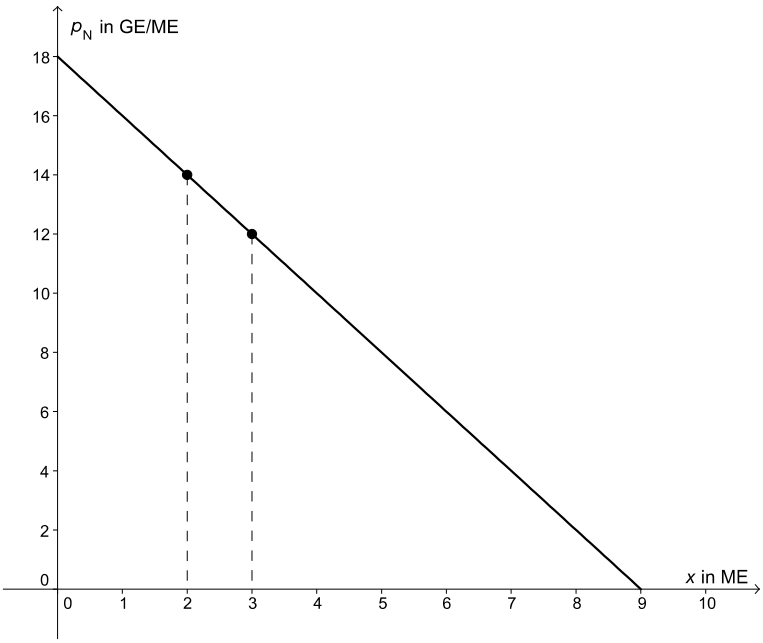
x ... angebotene Menge in ME
$p_A(x)$ ... Angebotspreis in GE/ME

– Berechnen Sie den zugehörigen Gleichgewichtspreis.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



Bei einem Preis von 14 GE/ME können 2 ME verkauft werden. Der Erlös beträgt 28 GE.
Bei einem Preis von 12 GE/ME können 3 ME verkauft werden. Der Erlös beträgt 36 GE.
Die Preisminderung führt zu einer Erlössteigerung um 8 GE.

b) Aus der Grafik kann man ablesen: $p_N(x) = -2x + 18$.

Im Marktgleichgewicht gilt: $p_A(x) = p_N(x)$.
$1 + 4{,}5\sqrt{x} = 18 - 2x$
Mithilfe von Technologie erhält man: $x = 4$.
$p_N(4) = 10$
Der zugehörige Gleichgewichtspreis beträgt 10 GE/ME.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 4

Thema: Wirtschaft

Quellen: —

Drehteile

Aufgabennummer: A_086

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Auf einer Drehmaschine werden Stahlzylinder gefertigt. Die Durchmesser der Zylinder sind annähernd normalverteilt mit den Parametern $\mu = 60$ mm (Erwartungswert) und $\sigma = 0{,}3$ mm (Standardabweichung).

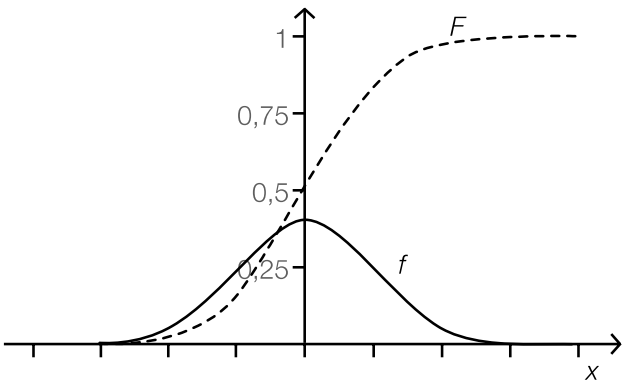
a) Bei einer Überprüfung wird ein Zylinder zufällig ausgewählt.

– Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit in Prozent, dass der Durchmesser dieses Zylinders innerhalb eines Bereichs von 60,1 mm ± 0,6 mm liegt.

b) – Berechnen Sie jenen um den Erwartungswert symmetrisch liegenden Bereich, in dem erwartungsgemäß 90 % aller Durchmesser der Werkstücke liegen.

c) Die gegebene Grafik stellt die Wahrscheinlichkeitsdichte- und die Verteilungsfunktion einer normalverteilten Zufallsvariablen dar.

– Vergleichen Sie die beiden Funktionen und erklären Sie ihre Beziehung zueinander.
– Interpretieren Sie beide Graphen hinsichtlich ihrer Extremwerte und Wendepunkte (bezüglich μ und σ) sowie hinsichtlich ihres Verhaltens im Unendlichen.



Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Die Wahrscheinlichkeit $P(59{,}5 \le X \le 60{,}7)$ wird mittels Technologieeinsatz ermittelt.
(Zufallsvariable X … Durchmesser der Stahlzylinder in mm)

(Alternativ mit Normalverteilungstabelle:
Nach Überführung der gegebenen Verteilung in die standardisierte Normalverteilung wird die Wahrscheinlichkeit $P\left(-\frac{5}{3} \le Z \le \frac{7}{3}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{5}{3}\right) - \Phi\left(\frac{7}{3}\right)$ ermittelt.)

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Durchmesser eines zufällig ausgewählten Zylinders innerhalb eines Bereichs von 60,1 mm ± 0,6 mm liegt, beträgt etwa 94 %.

b) Ansatz: $P(-z \le Z \le z) = 0{,}9$. Die Gleichung $2\Phi(z) - 1 = 0{,}9$ wird nach $\Phi(z)$ aufgelöst. Mittels Technologieeinsatz oder aus der Tabelle erhält man $z = 1{,}64$.
Aus $x = z \cdot \sigma + \mu$ erhält man die gesuchten Grenzen.

(Oder man ermittelt die untere Intervallgrenze 59,51 mm mithilfe von Microsoft Excel:
=NORMINV(5%;60;0,3).)

Das Intervall, innerhalb welchem 90 % der Durchmesser der gefertigten Werkstücke liegen, lautet [59,51 mm; 60,49 mm].

c) Die durchgezogene Kurve zeigt die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion f (Gauß'sche Glockenkurve) einer Normalverteilung mit dem Mittelwert μ und der Standardabweichung σ.
Die strichlierte Kurve ist die zugehörige Verteilungsfunktion F. F beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass eine Zufallsvariable einen Wert annimmt, der kleiner oder gleich x ist. Das ist gleichzeitig die Fläche unter der Glockenkurve links von x.

Das Maximum der Glockenkurve liegt bei $x = \mu$, dort ist $F(x) = 0{,}5$, da die Glockenkurve symmetrisch zu ihrem Maximum ist.

Die Wendepunkte der Glockenkurve befinden sich bei $x_1 = \mu - \sigma$ und $x_2 = \mu + \sigma$.

$f(x)$ strebt für $x \to \pm\infty$ gegen 0. Die Gesamtfläche unter der Glockenkurve beträgt 1.
1 ist der Grenzwert der Verteilungsfunktion $F(x)$ für $x \to \infty$.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 5 Stochastik
c) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) 4 Analysis

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) A Modellieren und Transferieren
c) D Argumentieren und Kommunizieren

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) leicht
c) schwer

Punkteanzahl:

a) 1
b) 2
c) 3

Thema: Technik

Quellen: —

Schadstoffausbreitung*

Aufgabennummer: B_048

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Eine Messstation registriert täglich zu einem bestimmten Zeitpunkt die Konzentration der von einer Fabrik emittierten Schadstoffe (in mg/m³). Es wird angenommen, dass diese Schadstoffkonzentrationen annähernd normalverteilt sind.

a) Es werden Messungen an 10 Tagen vorgenommen:

Schadstoffkonzentration in mg/m³	152	166	149	153	172	147	157	164	157	168

– Berechnen Sie den Stichprobenmittelwert $\bar{x}$.
– Ermitteln Sie das 95-%-Konfidenzintervall für den Erwartungswert μ, wenn bekannt ist, dass die Standardabweichung $\sigma = 8{,}5$ mg/m³ beträgt.

b) Die Verteilung der Schadstoffkonzentration kann sowohl mithilfe der Dichtefunktion als auch mithilfe der Verteilungsfunktion der Normalverteilung beschrieben werden. In der nachstehenden Abbildung 1 ist der Graph der Dichtefunktion dargestellt.

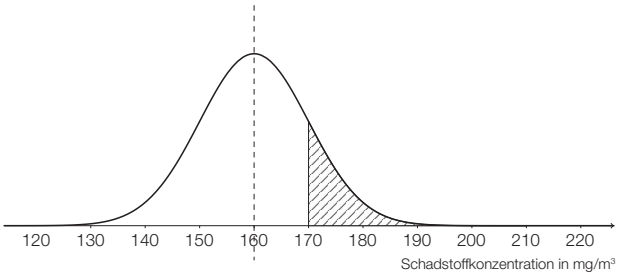


Abbildung 1

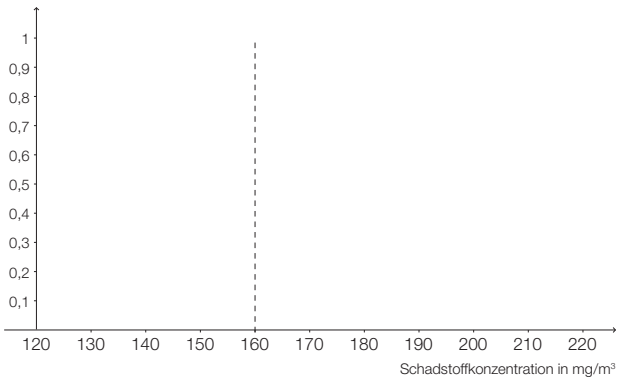


Abbildung 2

– Zeichnen Sie den Graphen der zugehörigen Verteilungsfunktion in Abbildung 2 ein.
– Veranschaulichen Sie die in Abbildung 1 schraffiert dargestellte Wahrscheinlichkeit in Abbildung 2.
– Erklären Sie den mathematischen Zusammenhang zwischen diesen beiden Funktionen.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Die Fabriksleitung geht vom Erwartungswert $\mu = 160\ \text{mg/m}^3$ und von der Standardabweichung $\sigma = 10\ \text{mg/m}^3$ aus.

– Ermitteln Sie den symmetrisch um μ gelegenen Bereich, in den erwartungsgemäß 99 % aller Messwerte fallen (99-%-Zufallsstreubereich).
– Geben Sie an, wie sich die Breite dieses Zufallsstreubereichs verändert, wenn anstelle von 99 % nur noch 95 % aller Messwerte in diesen Bereich fallen sollen.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$\overline{x} = 158{,}5$ mg/m³

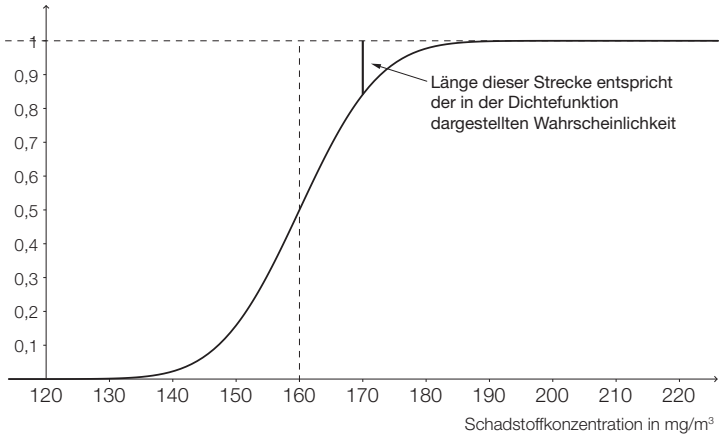
Zweiseitiges 95-%-Konfidenzintervall mithilfe der Normalverteilung bestimmen:

$\overline{x} \pm u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$n = 10$
$\alpha = 5\ \%$
$u_{0{,}975} = 1{,}959...$

Daraus ergibt sich folgendes Konfidenzintervall in mg/m³: $153{,}2 \leq \mu \leq 163{,}8$.

b)



Der Wert der Verteilungsfunktion an einer Stelle x ist das Integral der Dichtefunktion von $-\infty$ bis x.
Oder umgekehrt: Die Dichtefunktion ist die Ableitung der Verteilungsfunktion.

c) 99-%-Zufallsstreubereich mithilfe der Normalverteilung bestimmen:

$\mu \pm u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma$
$\alpha = 1\ \%$
$u_{0{,}995} = 2{,}575...$

Daraus ergibt sich folgender Zufallsstreubereich in mg/m³: [134,2; 185,8].

Der 95-%-Zufallsstreubereich ist schmäler als der entsprechende 99-%-Zufallsstreubereich.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B1: für die richtige Berechnung des Stichprobenmittelwerts $\bar{x}$
1 × A: für die Verwendung des richtigen Modells (Konfidenzintervall mithilfe der Normalverteilung)
1 × B2: für die richtige Ermittlung des Konfidenzintervalls

b) 1 × A1: für das richtige Einzeichnen des Graphen der Verteilungsfunktion (eine qualitative Beschriftung der Ordinatenachse ist nicht notwendig)
1 × A2: für das richtige Veranschaulichen der Wahrscheinlichkeit in Abbildung 2
1 × D: für das richtige Erklären des mathematischen Zusammenhangs zwischen Dichtefunktion und Verteilungsfunktion

c) 1 × B: für die richtige Ermittlung des Zufallsstreubereichs
1 × C: für die richtige Beschreibung der Veränderung der Breite des Zufallsstreubereichs

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Düngersäcke

Aufgabennummer: A_195

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Mehrere Maschinen füllen Säcke mit Dünger ab. Als Füllmenge sind laut Aufdruck 25 kg vorgesehen.

a) Langfristige Überprüfungen einer bestimmten Maschine haben ergeben, dass die tatsächliche Füllmenge der Säcke mit dem Erwartungswert $\mu = 24{,}8$ kg und der Standardabweichung $\sigma = 0{,}2$ kg normalverteilt ist.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Sack eine geringere Füllmenge als vorgesehen aufweist.
– Beschreiben Sie, wie man den Prozentsatz dieser Wahrscheinlichkeit anhand einer Skizze ohne genaue Berechnung abschätzen kann.

b) In der nachstehenden Abbildung sind 2 Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen zu sehen.

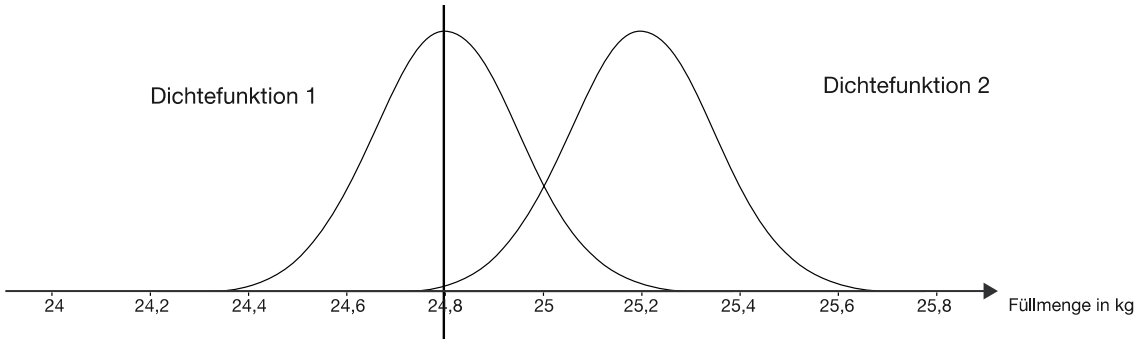


Abbildung 1

Dichtefunktion 1 hat einen Erwartungswert $\mu = 24{,}8$ kg und eine Standardabweichung $\sigma = 0{,}2$ kg. Die Dichtefunktion 2 wurde im Vergleich zur Dichtefunktion 1 verändert.

– Beschreiben Sie, welcher Parameter verändert wurde und woran das zu sehen ist.
– Beschreiben Sie, woran zu sehen ist, dass der andere Parameter nicht verändert wurde.

c) Bei einer bestimmten Abfüllmaschine kann die Füllmenge als normalverteilte Zufallsgröße mit einer Standardabweichung von 0,94 kg und einem Erwartungswert von 25 kg angenommen werden.
Laut Betriebsvorschrift müssen Säcke mit mehr als ± ½ kg Abweichung vom Erwartungswert nachkorrigiert werden.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Füllmenge eines zufällig ausgewählten Sackes nachkorrigiert werden muss.

Nach einer Untersuchung wird beschlossen, dass 97 % aller Säcke (symmetrisch um den Erwartungswert) als korrekt abgefüllt betrachtet werden sollen.

– Berechnen Sie, welche Abweichungen vom Erwartungswert nun bei der Abfüllung toleriert werden.

d) Bei einer Abfüllmaschine eines anderen Fabrikats ist die Füllmenge nicht normalverteilt. Der Graph der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion sieht vielmehr so aus:

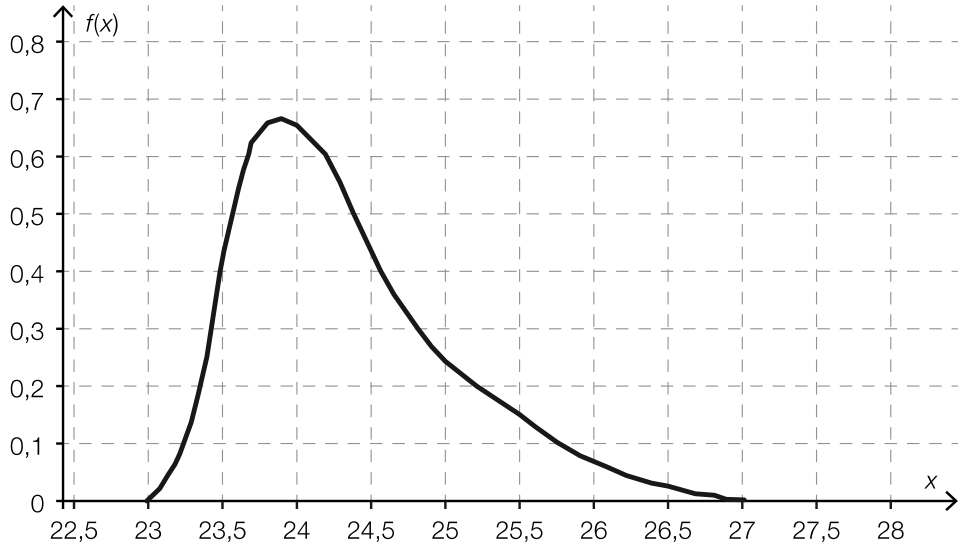


Abbildung 2

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Füllmenge zwischen 2 Werten *a* und *b* liegt, kann als Flächeninhalt unter der Dichtefunktion zwischen *a* und *b* berechnet werden.
Es soll die Wahrscheinlichkeit für eine Füllmenge zwischen 24 kg und 26 kg bestimmt werden.

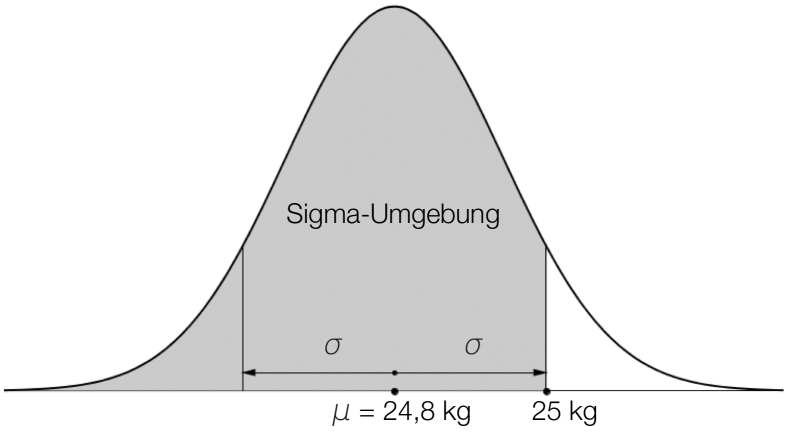
– Markieren Sie in der oben stehenden Grafik die zur Berechnung benötigte Fläche.
– Schätzen Sie mithilfe der Rasterung die Wahrscheinlichkeit ab, mit der die Füllmenge zwischen 24 kg und 26 kg liegt.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $P(X < 25)$ kann für $\mu = 24{,}8$ kg und $\sigma = 0{,}2$ kg mittels Technologieeinsatz berechnet werden. Die Wahrscheinlichkeit beträgt rund 84,13 %.

Die Differenz zwischen der Soll-Füllmenge und dem Erwartungswert entspricht genau der Standardabweichung.
Der Bereich für $x < 25$ kg besteht daher aus der Sigma-Umgebung ($\mu - \sigma$ bis $\mu + \sigma$), das sind ca. 68 %, und der Hälfte des außerhalb der Sigma-Umgebung liegenden Bereiches, das sind ca. 16 %. Gesamt sind es daher ca. 84 %.



b) – Der Erwartungswert μ ist größer geworden, weil die zweite Kurve den Hochpunkt weiter rechts hat. (Die ganze Kurve ist nach rechts verschoben.)
– Die Standardabweichung σ ist gleich geblieben, weil die Kurve außer der Verschiebung nach rechts gleich geblieben ist.

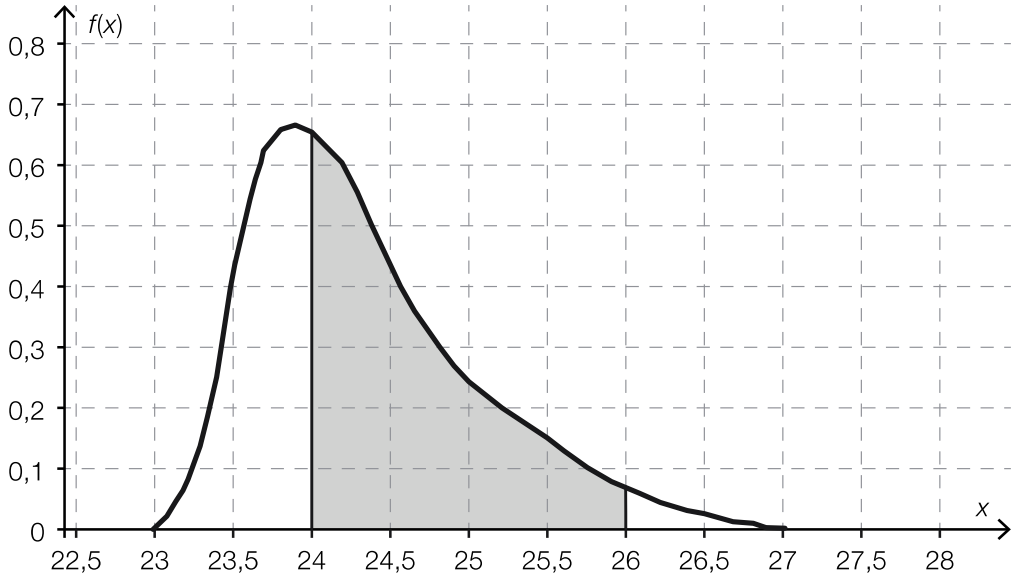
c) $P(X \leq 24{,}5) = P(X \geq 25{,}5) = 0{,}2973...$
Die Wahrscheinlichkeit, dass nachkorrigiert werden muss, beträgt insgesamt rund 59,5 %.

$1 - 2 \cdot P(X \leq a) = 0{,}97$
$P(X \leq a) = 0{,}015$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$a \approx 22{,}96$ kg … untere Grenze des Intervalls
$b \approx 27{,}04$ kg … obere Grenze des Intervalls

Dass Füllmengen zwischen 22,96 kg und 27,04 kg vorkommen, ist bei den gegebenen Voraussetzungen zu 97 % Wahrscheinlichkeit erfüllt. Die Abweichtoleranz vom Erwartungswert beträgt daher $\pm$ 2,04 kg.

d)



Der Flächeninhalt eines Rechtecks beträgt: $0{,}1 \cdot 0{,}5 = 0{,}05$.
7 ganze Rechtecke und rund 4,5 Rechtecke am Rand ergeben einen Flächeninhalt von rund 0,575.
Die Wahrscheinlichkeit, dass die Füllmenge eines zufällig ausgewählten Sackes zwischen 24 kg und 26 kg liegt, beträgt grob geschätzt 58 %.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 5 Stochastik
c) 5 Stochastik
d) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —
d) 2 Algebra und Geometrie

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) —
c) —
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel
d) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2
c) 2
d) 2

Thema: Wirtschaft

Quellen: —

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Geocaching

Aufgabennummer: B_244

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Geocaching ist eine Suche nach einem „Schatz“ (= Cache) mithilfe von GPS (Global Positioning System).

a) Im Jahr 2000 wurde in den USA der erste Cache versteckt. Bis zum Jahr 2012 lässt sich die Anzahl der Caches weltweit näherungsweise durch die folgende Funktion n modellieren:

$n(t) = 3{,}329^t$

t … Zeit in Jahren nach 2000
$n(t)$ … Anzahl der Geocaches nach t Jahren

– Bestimmen Sie die jährliche prozentuelle Zunahme im Zeitraum von 2000 bis 2012.
– Berechnen Sie, wie viele Caches im Jahr 2010 versteckt waren.

Die Landfläche der Erde beträgt etwa $1{,}489 \cdot 10^8$ Quadratkilometer (km^2).

– Berechnen Sie, in welchem Jahr im Durchschnitt auf jedem Quadratmeter der Erdoberfläche ein Cache versteckt wäre, wenn die Entwicklung ungebremst weiterginge.

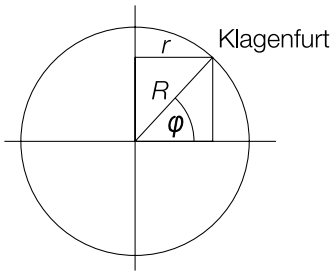
b) Entlang eines Rundwanderweges sind 4 Caches versteckt. Der Rundwanderweg ist annähernd durch die Koordinaten der Cacheverstecke (Einheit 1 km) dargestellt:

Ausgangspunkt = Endpunkt $A = (-4|3)$
Cacheverstecke $B = (-3|0)$, $C = (1|-2)$, $D = (4|1)$, $E = (2|4)$

– Zeichnen Sie den Wanderweg in ein Koordinatensystem ein.
– Stellen Sie den Vektor $\overrightarrow{AB}$ vom Ausgangspunkt zum 1. Cache auf.
– Dokumentieren Sie, wie man die Länge des Vektors $\overrightarrow{AB}$ berechnet.

c) Ein Cache wird in Klagenfurt auf der geografischen Breite von $\varphi \approx 46°$ versteckt. Der Erdradius R beträgt ca. 6 371 km.

– Erstellen Sie eine Formel für die Berechnung des Radius r desjenigen Breitenkreises, auf dem der Cache liegt.



Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Wachstumsgesetz: $n(t) = 3{,}329^t$
$n(t) = (1 + \frac{p}{100})^t$
jährliche Zunahme: ca. 233 %

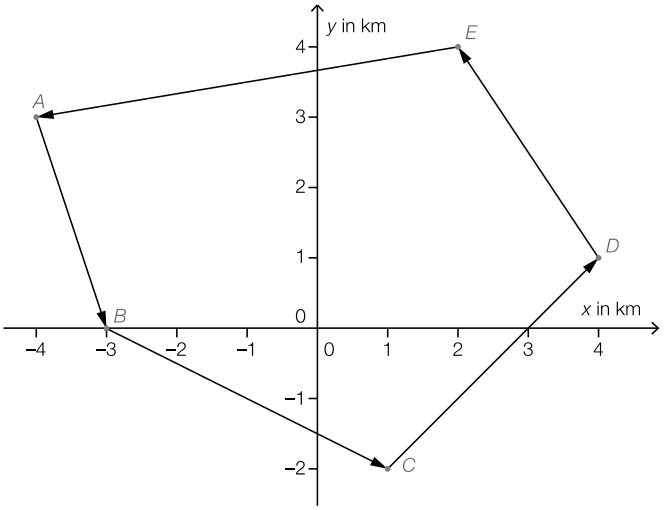
$n(10) = 3{,}329^{10}$
$n(10) = 167\,162{,}\ldots$

Im Jahr 2010 waren etwa 167 000 Caches versteckt.

$n(t) = 3{,}329^t$
$1{,}489 \cdot 10^8\ \text{km}^2 = 1{,}489 \cdot 10^{14}\ \text{m}^2$
$1{,}489 \cdot 10^{14} = 3{,}329^t \mid \log$
$t = 27{,}134\ldots$
$t \approx 27$ Jahre

Im Jahr 2027 wäre auf jedem Quadratmeter der Erdoberfläche ein Cache versteckt.

b)



$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\left|\overrightarrow{AB}\right|$ = Länge (Betrag) des Vektors

Die Berechnung erfolgt mit dem pythagoräischen Lehrsatz, wobei als Katheten des rechtwinkeligen Dreiecks die Koordinaten des Vektors eingesetzt werden.

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ $\qquad \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2}$

c) rechtwinkeliges Dreieck
$\cos(\varphi) = \frac{r}{R}$
$r = R \cdot \cos(\varphi)$

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) 1 Zahlen und Maße
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) B Operieren und Technologieeinsatz, A Modellieren und Transferieren
c) —

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 4
b) 3
c) 1

Thema: Geocaching

Quellen: —

Konfiserie

Aufgabennummer: B_196

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Eine Konditorei möchte Pralinen aus Eigenproduktion anbieten. Um die Nachfrage abschätzen zu können, werden zunächst 4 verschiedene Bonbonnieren (B_1, B_2, B_3, B_4) aus 4 Sorten Pralinen (Marzipan, Nougat, Kokos, Krokant) angeboten. Die folgende Tabelle gibt an, wie viel Stück einer jeden Pralinensorte in jeder Bonbonniere enthalten sind:

		Bonbonnieren			
		B_1	B_2	B_3	B_4
Pralinensorten	Marzipan	5	3	4	4
	Nougat	4	3	5	0
	Kokos	2	3	3	4
	Krokant	1	3	0	4

a) Aus 181 Marzipanpralinen, 142 Nougatpralinen, 144 Kokospralinen und 97 Krokantpralinen wurden Bonbonnieren zusammengestellt.

– Berechnen Sie, wie viele Bonbonnieren der Sorten B_1, B_2, B_3 und B_4 mit diesen Pralinen hergestellt werden können.

b) In der folgenden Tabelle sind die Herstellungskosten pro Praline jeweils als Variable angegeben:

	Marzipan	Nougat	Kokos	Krokant
Kosten (in €)	K_1	K_2	K_3	K_4

Für die Verpackung fallen Materialkosten in Höhe von € 2,50 pro Bonbonniere an. Pro Bonbonniere wird ein Gewinn von 10 % berechnet.

– Erstellen Sie eine Formel in Matrizenschreibweise, mit deren Hilfe die Verkaufspreise P_1, P_2, P_3 und P_4 der Bonbonnieren B_1, B_2, B_3 und B_4 berechnet werden können.
– Begründen Sie, wie viele Zeilen und Spalten die sich ergebende Matrix haben muss.

c) Die Glasur der Pralinen wird in 3 Typen aus unterschiedlichem Gehalt an Kakao, Zucker und Kakaobutter hergestellt. Jeweils 100 Gramm (g) einer Glasur enthalten die in der untenstehenden Tabelle angegebene Masse dieser Zutaten in g.

	Typ 1 (dunkel)	Typ 2 (mittel)	Typ 3 (hell)
Kakao	40	37	35
Zucker	30	40	45
Kakaobutter	30	23	20

Für die Glasur von jeweils 50 Stück der verschiedenen Pralinensorten werden folgende

Mengen (in Einheiten zu 100 Gramm) benötigt:

	Marzipan	Nougat	Kokos	Krokant
Typ 1				5
Typ 2	5	2		3
Typ 3	2	3	6	

– Erstellen Sie einen Gozinto-Graphen, der die Verflechtung zwischen den Rohstoffen (Kakao, Zucker und Kakaobutter), den Glasurtypen und den Pralinensorten beschreibt.
– Interpretieren Sie diesen Graphen hinsichtlich der Zusammensetzung der Glasur von 50 Stück Marzipanpralinen.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) a, b, c und d bezeichnen die Anzahl der hergestellten Bonbonnieren B_1, B_2, B_3 und B_4.

Lösung mit Gleichungssystem:
$5a + 3b + 4c + 4d = 181$
$4a + 3b + 5c \quad\quad = 142$
$2a + 3b + 3c + 4d = 144$
$\quad a + 3b \quad\quad + 4d = 97$
mittels Technologieeinsatz: $a = 8$, $b = 15$, $c = 13$, $d = 11$

Alternativer Lösungsweg (mit inverser Matrix):

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 & 4 \\ 4 & 3 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 181 \\ 142 \\ 144 \\ 97 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 & 4 \\ 4 & 3 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 181 \\ 142 \\ 144 \\ 97 \end{pmatrix}$$

Mittels Technologieeinsatz:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}375 & 0 & -0{,}5 & 0{,}125 \\ -0{,}292 & 0{,}333 & -0{,}167 & 0{,}458 \\ -0{,}125 & 0 & 0{,}5 & -0{,}375 \\ 0{,}125 & -0{,}25 & 0{,}25 & -0{,}125 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 181 \\ 142 \\ 144 \\ 97 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \\ 13 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Es können 8 Bonbonnieren B_1, 15 Bonbonnieren B_2, 13 Bonbonnieren B_3 und 11 Bonbonnieren B_4 hergestellt werden.

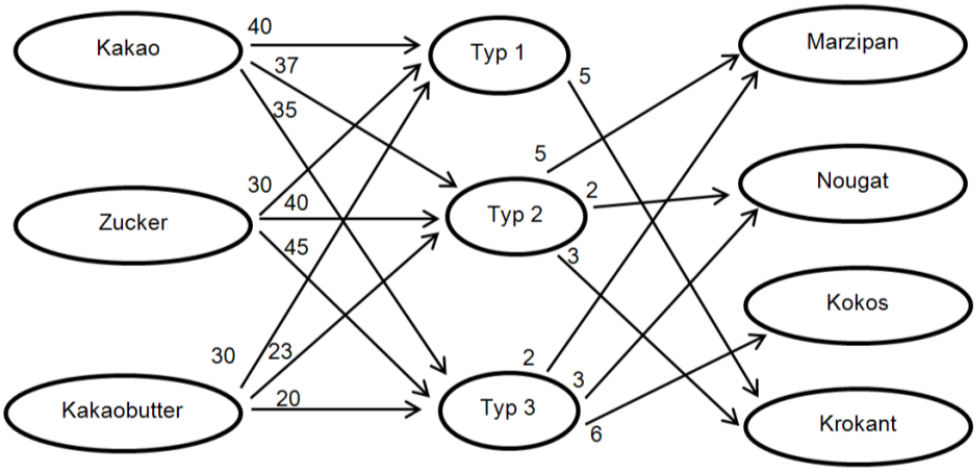
Hinweis: Werden die Einträge der inversen Matrix nicht gerundet, ergeben sich leicht abweichende Zahlenwerte im Ergebnisvektor.

b) Verkaufspreisvektor:

$$(P_1 \quad P_2 \quad P_3 \quad P_4) = \left[(K_1 \quad K_2 \quad K_3 \quad K_4) \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 & 4 \\ 4 & 3 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} + (2{,}5 \quad 2{,}5 \quad 2{,}5 \quad 2{,}5) \right] \cdot 1{,}1$$

Das Ergebnis muss eine 1×4-Matrix sein (also 1 Zeile und 4 Spalten aufweisen), da bei der Multiplikation 1 × 4 mal 4 × 4 eine 1×4-Matrix entsteht und die weiteren Rechenschritte die Dimension der Matrix nicht mehr beeinflussen.

c)



Die Glasur von 50 Stück Marzipanpralinen besteht aus 5 Einheiten Typ 2 und 2 Einheiten Typ 3. In einer Einheit Typ 2 sind 37 g Kakao, 40 g Zucker und 23 g Kakaobutter, in einer Einheit Typ 3 sind 35 g Kakao, 45 g Zucker und 20 g Kakaobutter enthalten. Insgesamt besteht die Glasur also aus:

– Kakao: $5 \cdot 37\ \text{g} + 2 \cdot 35\ \text{g} = 255\ \text{g}$
– Zucker: $5 \cdot 40\ \text{g} + 2 \cdot 45\ \text{g} = 290\ \text{g}$
– Kakaobutter: $5 \cdot 23\ \text{g} + 2 \cdot 20\ \text{g} = 155\ \text{g}$

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) A Modellieren und Transferieren
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) schwer
c) leicht

Punkteanzahl:

a) 3
b) 4
c) 4

Thema: Wirtschaft

Quelle: http://backelt.net/download/bmi/schriftenreihe/10.pdf

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Sektkellerei

Aufgabennummer: B_132

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Eine Sektkellerei erzeugt und vertreibt Sekt unterschiedlicher Marken.

x … Anzahl der produzierten oder verkauften Flaschen pro Tag
$K(x)$ … Gesamtkosten bei x Flaschen pro Tag in Euro (€)

a) Man ermittelt die gesamt anfallenden Produktionskosten in Abhängigkeit von den pro Tag abgefüllten Flaschen der Marke *Dom*.

x	0	100	200	300	400	500	600
$K(x)$	10 000	12 800	14 800	16 000	18 000	19 000	21 600

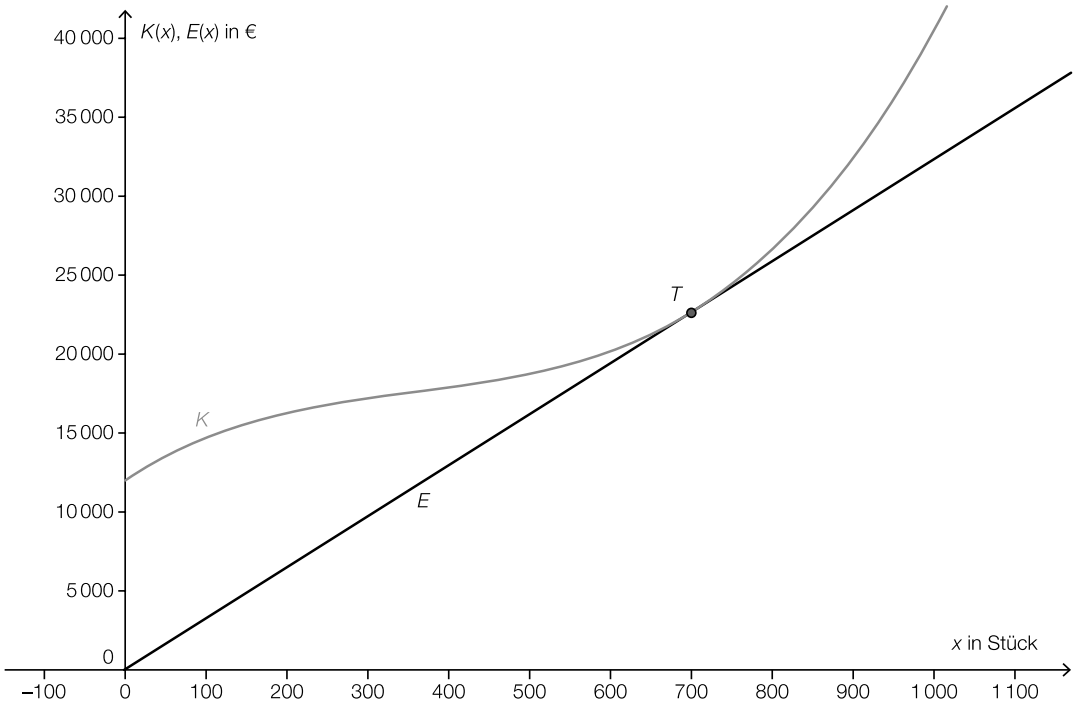
– Bestimmen Sie für diese Gesamtkosten mithilfe von Regression eine passende Polynomfunktion 3. Grades.
– Zeichnen Sie die gegebenen Punkte und den Graphen der Regressionslinie.
– Dokumentieren Sie, wie man mithilfe der Differenzialrechnung die Kostenkehre berechnen kann.

b) Die Kellerei verkauft täglich die Tagesproduktion der Sektmarke *Gold* zu € 40 pro Flasche. Die Kostenfunktion für diese Marke lautet:

$$K(x) = 7 \cdot 10^{-5} \cdot x^3 - 0{,}07 \cdot x^2 + 30 \cdot x + 12\,000$$

– Berechnen Sie, wie viele Flaschen mindestens und wie viele höchstens pro Tag verkauft werden sollen, damit die Kellerei einen Gewinn macht.

c) Interpretieren Sie in der nachstehenden Grafik die Tangente an die Kostenfunktion K als lineare Erlösfunktion E.

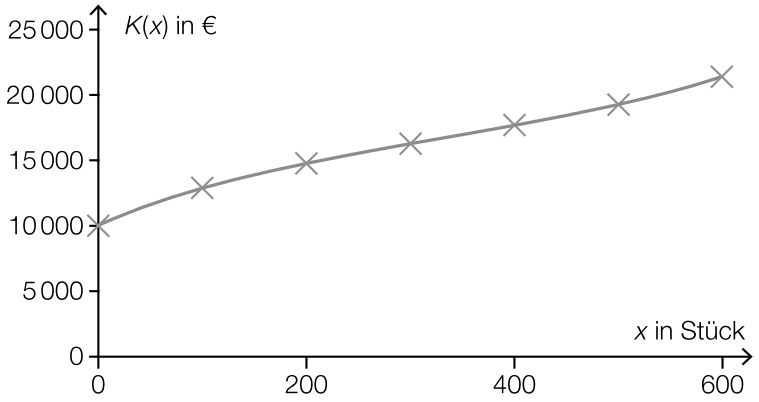


– Lesen Sie den Anstieg der Tangente und die Koordinaten des Berührpunktes T ab.
– Interpretieren Sie die Aussage der Koordinaten von T und des abgelesenen Tangentenanstiegs im Sachzusammenhang.
– Argumentieren Sie, welche Informationen diese Grafik über den möglichen Gewinn enthält.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $K(x) = 0{,}00006 \cdot x^3 - 0{,}0602 \cdot x^2 + 33{,}365 \cdot x + 10\,000$

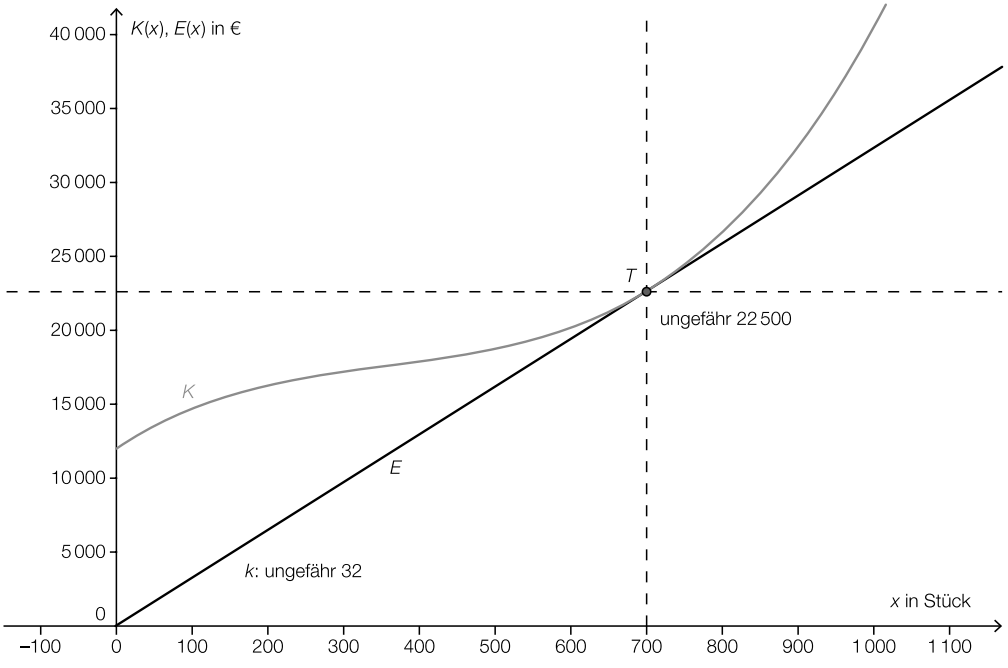


Man berechnet die Kostenkehre, indem man die 2. Ableitung der Kostenfunktion gleich null setzt und die Gleichung nach x auflöst.

b) $p = 40$
$G(x) = 40 \cdot x - (7 \cdot 10^{-5} \cdot x^3 - 0{,}07 \cdot x^2 + 30 \cdot x + 12\,000)$
$G(x) = 0$

Lösung mittels Technologieeinsatz:
$x_1 \approx 440{,}35$; $x_2 \approx 963{,}64$
Die Gewinnzone für diesen Sekt liegt zwischen mindestens 441 und höchstens 963 verkauften Flaschen pro Tag.

c) Genau ablesen lässt sich die x-Koordinate von T: 700 Flaschen, die Kosten lassen sich nur ungefähr bestimmen (≈ 22 500). Der Anstieg beträgt ungefähr 32.



Der Tangentenansteig der Erlösfunktion ergibt den Verkaufspreis pro Flasche,
die Koordinaten von *T* ergeben das Betriebsoptimum x_0 = 700 Flaschen und den Erlös bzw. die Gesamtkosten am Betriebsoptimum von ca. € 22.500.

Aussage: Wenn eine Flasche zu ungefähr € 32 verkauft wird, dann müsste man genau 700 Flaschen verkaufen und nimmt ca. € 22.500 ein. Die Kosten sind bei dieser Verkaufsmenge gleich hoch wie der Erlös, das bedeutet, dass der Betrieb kostendeckend arbeitet. Es wird kein Gewinn erwirtschaftet.
Eine angemessene Ungenauigkeit beim Ablesen der Werte wird toleriert.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) –
c) 4 Analysis

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) A Modellieren und Transferieren
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) D Argumentieren und Kommunizieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) leicht
c) schwer

Punkteanzahl:

a) 3
b) 2
c) 3

Thema: Wirtschaft

Quellen: –

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Kupferbestimmung

Aufgabennummer: B_094

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Um die Konzentration von Kupferlösungen zu ermitteln, wird bei der photometrischen Kupferbestimmung die Absorption des Lichts bei einer definierten Wellenlänge am dunkelblauen Kupfertetraaminkomplex gemessen. Zuerst wird über die Messung der Absorption von Kupferlösungen bekannter Konzentration eine Kalibriergerade bestimmt.
Die Absorption von 4 Eichlösungen wurde gemessen:

Konzentration Cu^{2+} (in g pro L)	0,08	0,16	0,24	0,32
Absorption	0,06	0,13	0,19	0,27

g … Gramm
L … Liter

a) Für die Ermittlung der Kalibriergeraden ($y = k \cdot x + d$) wird die Methode der kleinsten Quadrate herangezogen.

– Stellen Sie diejenige Funktion R der kleinsten Quadrate auf, die zur Berechnung der Funktionsparameter k und d dient.
– Beschreiben Sie in Worten die weitere Vorgangsweise, um k und d zu berechnen.

b) – Berechnen Sie anhand der Tabelle mithilfe der linearen Regression die Kalibriergerade.
– Bestimmen Sie den Korrelationskoeffizienten r.
– Interpretieren Sie die Bedeutung des Korrelationskoeffizienten r.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Die Funktion der kleinsten Quadrate R ergibt sich durch die Differenz der Funktionswerte der zu berechnenden Geraden und der gemessenen Werte.

$R(k, d) = (0{,}08k + d - 0{,}06)^2 + (0{,}16k + d - 0{,}13)^2 + (0{,}24k + d - 0{,}19)^2 - (0{,}32k + d - 0{,}27)^2$

Es handelt sich um ein Extremwertproblem mit 2 Variablen (k, d). Zur Berechnung der Parameter k und d werden die partiellen Ableitungen nach k und nach d jeweils gleich null gesetzt. Danach werden k und d aus diesen Gleichungen berechnet.

b) Berechnung durch lineare Regressionsanalyse, z. B. in Excel, GeoGebra etc.:

$y = 0{,}8625x - 0{,}01$
$r = 0{,}9985$

Der Korrelationskoeffizient r liegt stets im Intervall $[-1; 1]$. Er beschreibt, wie gut der tatsächliche Zusammenhang durch die Regressionsgerade genähert wird. Die Näherung ist umso besser, je näher der Betrag von r bei 1 liegt. Ein Korrelationskoeffizient nahe 0 bedeutet, dass kein linearer Zusammenhang zwischen den zwei Größen erkennbar ist.
Sinngemäß richtige andere Formulierungen sind ebenfalls möglich.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:

a) schwer
b) mittel

Punkteanzahl:

a) 3
b) 3

Thema: Chemie

Quellen: —

CeBIT

Aufgabennummer: B_093

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Jedes Jahr im Frühjahr findet die CeBIT, die Messe für Informationstechnik, in Hannover statt.

a) Die folgende Tabelle zeigt die Besucherzahlen (in 1 000) von 2004 bis 2013:

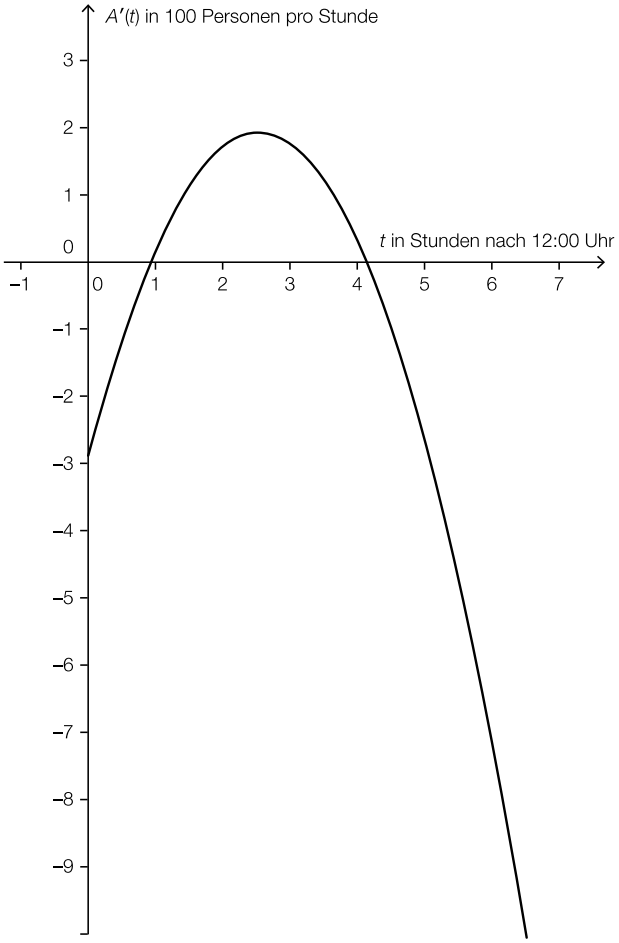
2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
510	480	450	480	495	400	334	339	312	280

– Ermitteln Sie unter Annahme eines linearen Zusammenhangs der Daten die entsprechende Ausgleichsfunktion. Wählen Sie $t = 0$ für das Jahr 2004.
– Stellen Sie die Daten und die Ausgleichsfunktion grafisch dar.
– Erklären Sie die Bedeutung des Vorzeichens des Korrelationskoeffizienten.
– Berechnen Sie, wie viele Besucher/innen aufgrund dieses Modells im Jahr 2015 erwartet werden können.

b) Für den Besuch der CeBIT soll ein Flug nach Hannover gebucht werden. Erfahrungsgemäß werden 6 % der Buchungen storniert. Aus diesem Grund wurden 160 voneinander unabhängige Buchungen für eine Maschine mit 156 Sitzplätzen durchgeführt.

– Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass am Flugtag niemand aus Platzgründen auf eine andere Maschine umgebucht werden muss.
– Begründen Sie, warum die Binomialverteilung unter diesen Voraussetzungen ein geeignetes Modell ist.

c) Die Änderung der Anzahl der Besucher/innen, die die Computermesse zwischen 12:00 Uhr und 18:00 Uhr an einem bestimmten Tag besucht haben, kann durch folgende Funktion beschrieben werden:



$A'(t)$ ... Änderung der Besucherzahl (in 100 Personen) pro Stunde (h)
t ... Zeit in Stunden nach 12:00 Uhr

– Erklären Sie die Bedeutung der Nullstellen und des Hochpunkts der Funktion A' im Hinblick auf die Besucherzahl.
– Interpretieren Sie die Bedeutung der Fläche zwischen dem Funktionsgraphen von A' und der waagrechten Achse.
– Begründen Sie anhand des Funktionsverlaufs, warum die Besucherzahl um 13:00 Uhr geringer ist als um 12:00 Uhr.

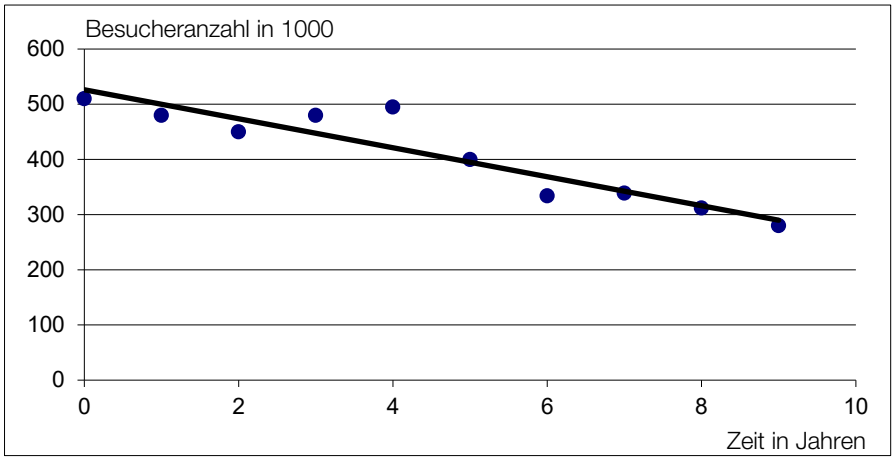
Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Ermitteln der linearen Funktion mittels Technologieeinsatz:

$f(t) = -26{,}267t + 526{,}2$
t … Zeit in Jahren mit $t = 0$ für das Jahr 2004
$f(t)$ … Besucheranzahl (in 1000) zur Zeit t

Berechnen des Korrelationskoeffizienten r:
$r = -0{,}9286$



Das negative Vorzeichen von r bedeutet, dass es sich um eine fallende Gerade handelt.

$f(11) = 237{,}2666$
Die Prognose für das Jahr 2015 lautet: 237 267 Besucher/innen.

b) X … Anzahl der stornierten Buchungen

$P(X > 3) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) - P(X = 3)$
$p = 0{,}06$

$P(X > 3) = 0{,}98809 \ldots = 98{,}81\ \%$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 98,81 % erhält man einen fixen Sitzplatz.

Die Berechnung lässt sich mithilfe der Binomialverteilung durchführen, da es sich um zwei Zustände (Buchung wird nicht storniert – Buchung wird storniert) handelt, jede Buchung mit einer festen Wahrscheinlichkeit von 6 % storniert wird und die Buchungen voneinander unabhängig durchgeführt wurden.

c) Die Nullstellen geben diejenigen Zeitpunkte an, zu denen sich die Besucherzahl nicht verändert. Der Hochpunkt beschreibt die maximale Änderung der Besucherzahl.

Die Fläche unter der Funktion A' gibt an, wie viele Personen mehr oder weniger als um 12:00 Uhr anwesend sind. Um 13:00 Uhr sind weniger Personen als um 12:00 Uhr anwesend, da die Funktion mit der waagrechten Achse eine negative Fläche einschließt.

Im Zeitraum zwischen 12:00 Uhr und 13:00 Uhr nimmt die Besucherzahl ab, da die Kurve hier unterhalb der x-Achse liegt. Somit muss die Funktion A in diesem Bereich fallend sein. Außerdem hat die Funktion A' um 13:00 Uhr eine Nullstelle. Damit muss die Funktion A an dieser Stelle einen Extremwert haben. Aufgrund der Steigung (A' steigt, also ist $A'' > 0$) muss es sich um ein Minimum handeln.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 5 Stochastik
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) 4 Analysis

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) A Modellieren und Transferieren
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz, A Modellieren und Transferieren
b) D Argumentieren und Kommunizieren, B Operieren und Technologieeinsatz
c) D Argumentieren und Kommunizieren

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 4
b) 3
c) 4

Thema: Wirtschaft

Quellen: http://www.cebit.de, http://www.wikipedia.org/

Schallschutzwände

Aufgabennummer: B_029

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Schallschutzwände dämmen den Lärm, der von einer Straße ausgeht.

a) Der Schalldruckpegel ist ein Maß zur Beschreibung der Stärke eines Schallereignisses. Der Schalldruckpegel kann mit zunehmendem Abstand vom Straßenrand durch die folgende Funktion L_p beschrieben werden:

$L_p(x) = 75 - 10 \cdot \lg(x)$

x ... Abstand von der Schallquelle in m ($x > 1$ m)
$L_p(x)$ ... Schalldruckpegel in dB im Abstand x von der Schallquelle

– Ermitteln Sie, um wie viel Dezibel der Schalldruckpegel abnimmt, wenn die Entfernung verdoppelt wird.

Jemand rechnet fälschlicherweise mit der Funktion L^*_p mit $L^*_p(x) = 75 - 10 \cdot \ln(x)$.
Wie wirkt sich dieser Fehler auf die berechneten Werte aus?

– Kreuzen Sie die zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]*

Die Funktionswerte des natürlichen Logarithmus sind für $x > 1$ kleiner als die des Zehnerlogarithmus.	☐
Die Funktionswerte des Schalldruckpegels der Funktion L^*_p nehmen weniger rasch ab als jene der Funktion L_p.	☐
Die Funktionswerte des natürlichen Logarithmus und des Zehnerlogarithmus sind für $x > 1$ gleich.	☐
Die Funktionswerte des Schalldruckpegels der Funktion L^*_p nehmen rascher ab als jene der Funktion L_p.	☐
Die Funktionswerte des Schalldruckpegels der Funktion L^*_p nehmen gleich ab wie jene der Funktion L_p.	☐

b) Die Längen X von Lärmschutzwänden eines bestimmten Herstellers sind normalverteilt mit dem Erwartungswert μ und der Standardabweichung $\sigma = 3{,}5$ mm. Bei einer Stichprobe von 20 Stück wird eine mittlere Länge von $\bar{x} = 3\,998{,}9$ mm festgestellt.

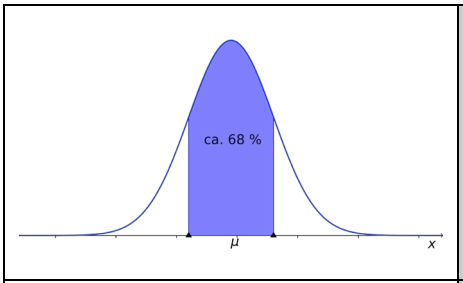
– Ermitteln Sie das 98-%-Konfidenzintervall für μ.

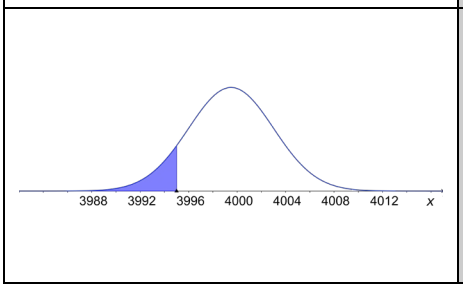
Der Hersteller gibt eine Länge von $\mu = 4\,000$ mm an.

– Beurteilen Sie die Angabe des Herstellers aufgrund dieses Konfidenzintervalls.

c) Die Längen von Lärmschutzwänden eines bestimmten Herstellers sind normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 3\,999{,}5$ mm und der Standardabweichung $\sigma = 3{,}4$ mm. Lärmschutzwände mit einer Länge größer als 4 010 mm werden nicht ausgeliefert. Eine Produktion umfasst 10 000 Stück.

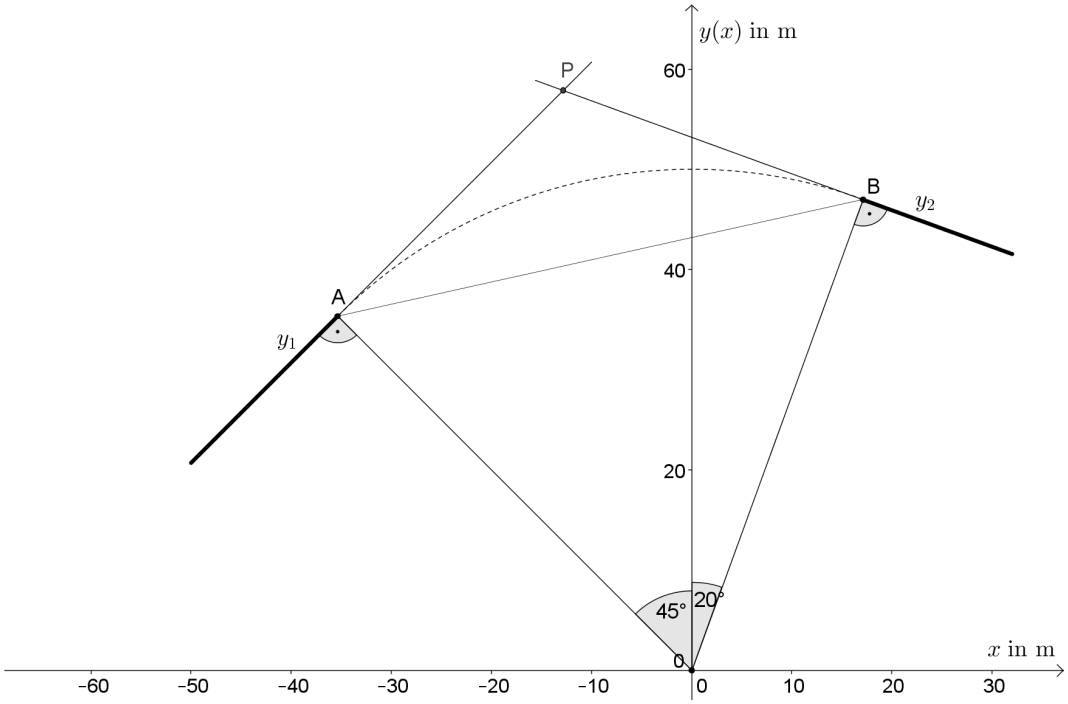
– Berechnen Sie, mit welcher Anzahl von Lärmschutzwänden, die nicht ausgeliefert werden können, in dieser Produktion zu rechnen ist.
– Ordnen Sie den beiden Abbildungen jeweils denjenigen Ausdruck aus A bis D zu, der durch die Abbildung veranschaulicht wird (X ... Länge der Lärmschutzwände in mm).
[2 zu 4]





A	$P(X \geq 3\,995)$
B	$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma)$
C	$P(X \leq 3\,995)$
D	$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma)$

d) Die nachstehende Abbildung zeigt 2 geradlinige Schallschutzwände, die durch einen Kreisbogen ineinander übergeführt werden sollen. Die Bestimmung des Schnittpunktes P mithilfe der Funktionen y_1 und y_2 ergibt: $P = (-12{,}842|57{,}878)$.



– Stellen Sie die Funktionsgleichungen für die Funktionen y_1 und y_2 auf.
– Berechnen Sie die Länge des Kreisbogens zwischen den Punkten A und B.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $L_p(2 \cdot x) - L_p(x) = 75 - 10 \cdot \lg(2 \cdot x) - \left(75 - 10 \cdot \lg(x)\right) = 10 \cdot \lg\left(\frac{x}{2 \cdot x}\right) = 10 \cdot \lg\left(\frac{1}{2}\right) \approx -3$

Bei einer Verdoppelung der Entfernung nimmt der Schalldruckpegel um rund 3 dB ab.

Die Funktionswerte des Schalldruckpegels der Funktion L^*_p nehmen rascher ab als jene der Funktion L_p.	☒

b) $\bar{x} = 3\,998{,}9$ mm
$\sigma = 3{,}5$ mm

$1 - \alpha = 0{,}98;\ \alpha = 0{,}02;\ 1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}99$

$\mu_{un}^{ob} = \bar{x} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$\mu_{un}^{ob} = 3\,998{,}9 \pm 2{,}326\ldots \cdot \frac{3{,}5}{\sqrt{20}}$

$\mu_{un} = 3\,997{,}07\ldots \approx 3\,997{,}0$ mm

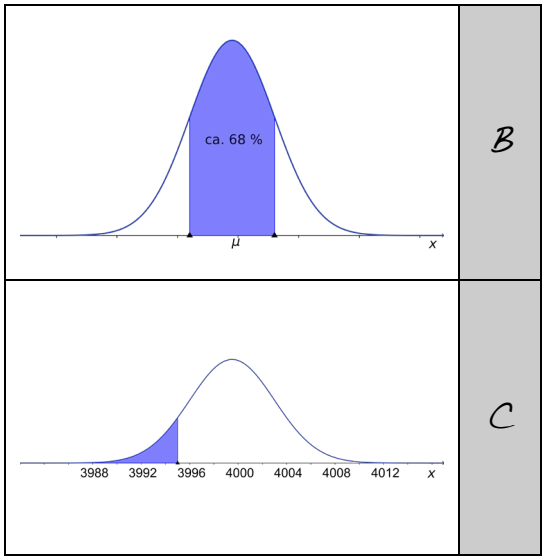
$\mu_{ob} = 4\,000{,}72\ldots \approx 4\,000{,}8$ mm

Konfidenzintervall für μ: $3\,997{,}0 \text{ mm} \leq \mu \leq 4\,000{,}8$ mm

Aufgrund der vorliegenden Stichprobe liegt der Erwartungswert μ der Grundgesamtheit mit einer Wahrscheinlichkeit von 98 % im Bereich von 3 997,0 mm bis 4 000,8 mm.
Auf Basis einer Irrtumswahrscheinlicheit von 2 % kann die Angabe des Herstellers als richtig angesehen werden.

c) $P(X > 4\,010) = 1 - P(X \leq 4\,010) = 0{,}00101...$

Man muss bei einer Produktion von 10 000 Stück mit 10 Stück rechnen, die nicht ausgeliefert werden können.



B

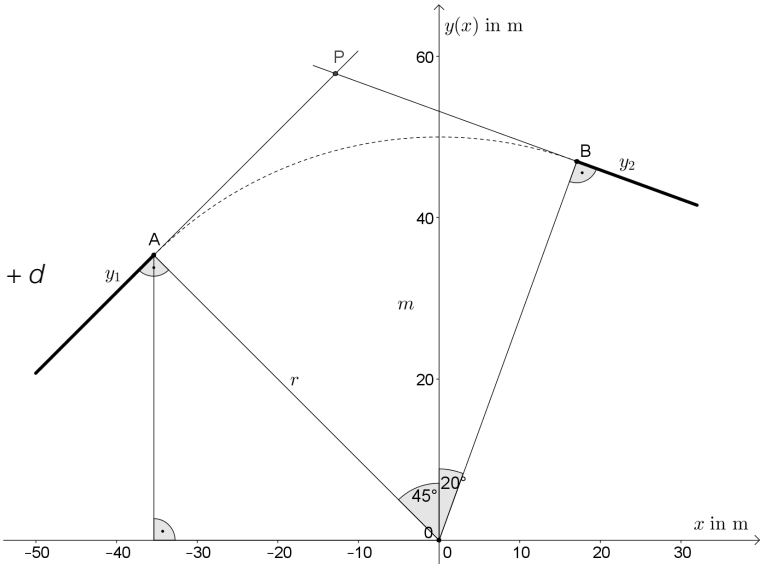
C

A	$P(X \geq 3\,995)$
B	$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma)$
C	$P(X \leq 3\,995)$
D	$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma)$

d) Funktion y_1:
$k = \tan(45°) = 1$
$57{,}878 = 1 \cdot (-12{,}842) + d$
$\Rightarrow d = 70{,}72$
$y_1(x) = x + 70{,}72$

Funktion y_2:
$k = -\tan(20°) = -0{,}363...$
$57{,}878 = -\tan(20°) \cdot (-12{,}842) + d$
$\Rightarrow d = 53{,}203\ldots$
$y_2(x) = -\tan(20°) \cdot x + 53{,}2$

Länge des Kreisbogens:
Im Punkt A schneiden sich die Funktionen
$y_1(x) = x + 70{,}72$ und
$y(x) = -x$.



Koordinaten des Punktes $A = (-35{,}36\,|\,35{,}36)$:

$r = \sqrt{2 \cdot 35{,}36^2}$
$r = 50{,}006\ldots$ m
$b = \dfrac{r \cdot \pi \cdot 65°}{180°}$
$b \approx 56{,}73$ m

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 5 Stochastik
c) 5 Stochastik
d) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) —
c) —
d) 2 Algebra und Geometrie

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) C Interpretieren und Dokumentieren
d) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren, A Modellieren und Transferieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren, A Modellieren und Transferieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) leicht
d) schwer

Punkteanzahl:

a) 3
b) 3
c) 2
d) 4

Thema: Sonstiges

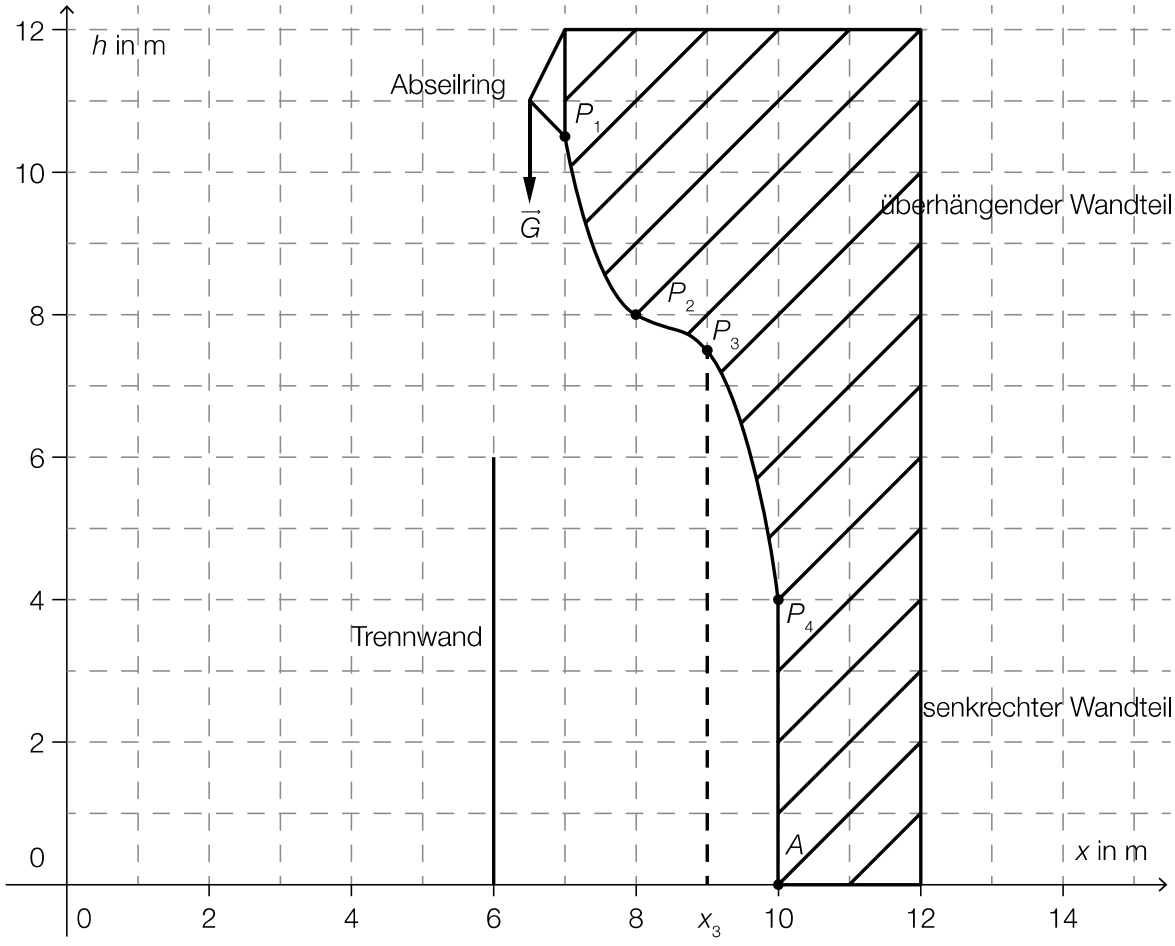
Quellen: Willems, W. M. et al. (2007): *Formeln und Tabellen Bauphysik.* 1. Auflage. Wiesbaden: Vieweg + Teubner.
http://de.wikipedia.org/wiki/Schalldruckpegel

Kletterwand

Aufgabennummer: B_015

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Die nachstehende Abbildung zeigt die Seitenansicht einer Kletterroute an einer Kletterwand.



a) Der Verlauf der Kletterroute im überhängenden Wandteil vom Punkt P_1 bis zum Punkt P_4 soll durch eine Polynomfunktion 3. Grades beschrieben werden.

– Stellen Sie ein Gleichungssystem auf, mit dem die Koeffizienten der Polynomfunktion 3. Grades berechnet werden können. Wählen Sie einen anderen Ursprung des Koordinatensystems als in der Abbildung dargestellt.
– Berechnen Sie die Funktionsgleichung der Polynomfunktion 3. Grades.

b) Um die ungefähre Neigung (= Steigung) der Kletterwand an der Stelle x_3 abzuschätzen, geht ein Kletterer folgendermaßen vor:

$$\frac{\Delta h}{\Delta x} \approx \frac{7{,}5 - 6{,}5}{9 - 9{,}5} = -2$$

– Stellen Sie mithilfe des Differenzialquotienten eine Formel auf, mit der Sie den Winkel α der Neigung der Kletterwand zur Horizontalen an der Stelle x_3 bestimmen können, wenn der Verlauf des überhängenden Wandteils durch eine Funktion h in Abhängigkeit von x beschrieben wird.
– Erklären Sie, wie der angegebene Differenzenquotient und der Differenzialquotient zusammenhängen.

c) Zur Ausleuchtung der Kletterroute wird an der gegenüberliegenden Trennwand in einer Höhe von $h_L = 4$ m eine Lampe mit der Lichtstärke I_V angebracht. Der Punkt A soll möglichst gut beleuchtet werden. Für die Beleuchtungsstärke gilt folgende Formel:

$$E_V = I_V \cdot \frac{\cos(\varphi)}{r^2}$$

E_V … Beleuchtungsstärke in Lux (lx)
I_V … Lichtstärke in Candela (cd)
φ … Tiefenwinkel von der Lampe zum Punkt A
r … Länge des Lichtstrahls von der Lampe zum Punkt A in m

– Zeichnen Sie die Position der Lampe sowie r und φ in die obige Grafik ein.
– Stellen Sie die Beleuchtungsstärke E_V als Funktion abhängig von der Entfernung der Trennwand von der Kletterroute dar.

Um die Entfernung für die maximale Beleuchtungsstärke zu ermitteln, wurde folgende Berechnung durchgeführt. Sie enthält genau einen Fehler.

(1) $E_1(x) = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^2 + h_L^2}$

(2) $E_1'(x) = \frac{\frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{1}{3}} \cdot \left(x^2 + h_L^2\right) - x^{\frac{2}{3}} \cdot (2 \cdot x + 2 \cdot h_L)}{\left(x^2 + h_L^2\right)^2}$

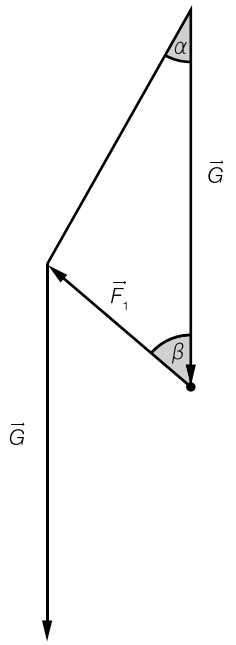
(3) $E_1'(x) = \frac{\frac{2}{3} \cdot x^{\frac{5}{3}} + \frac{2}{3} \cdot h_L^2 \cdot x^{-\frac{1}{3}} - 2 \cdot x^{\frac{5}{3}} - 2 \cdot h_L \cdot x^{\frac{2}{3}}}{\left(x^2 + h_L^2\right)^2}$

(4) $E_1'(x) = \frac{\frac{2}{3} \cdot h_L^2 \cdot x^{-\frac{1}{3}} - \frac{4}{3} \cdot x^{\frac{5}{3}} - 2 \cdot h_L \cdot x^{\frac{2}{3}}}{\left(x^2 + h_L^2\right)^2}$

– Kennzeichnen Sie den Fehler.
– Stellen Sie die Rechnung richtig.

d) Auf den Abseilring in der nebenstehenden Abbildung wirkt durch einen Kletterer eine Gewichtskraft von $\overrightarrow{G}$ = 840 N. Die Winkel betragen α = 30° und β = 45°.

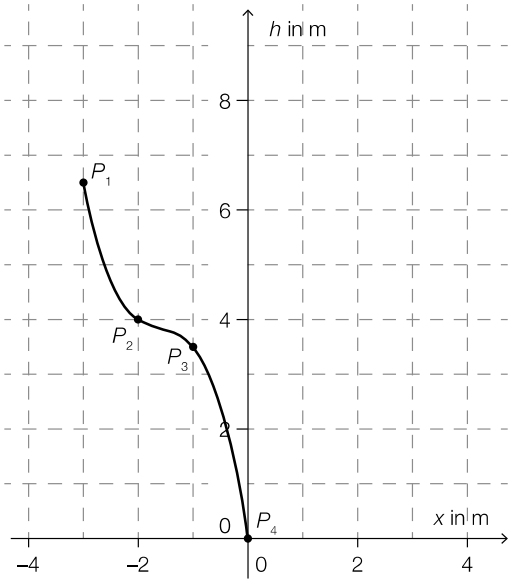
– Berechnen Sie den Betrag der Kraft $\overrightarrow{F_1}$ in Newton (N).



Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Wahl des Ursprungs des Koordinatensystems:
siehe Abbildung rechts



$P_1 = (-3|6{,}5)$, $P_2 = (-2|4)$, $P_3 = (-1|3{,}5)$, $P_4 = (0|0)$

$h(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$

I: $a \cdot (-3)^3 + b \cdot (-3)^2 + c \cdot (-3) + d = 6{,}5$
II: $a \cdot (-2)^3 + b \cdot (-2)^2 + c \cdot (-2) + d = 4$
III: $a \cdot (-1)^3 + b \cdot (-1)^2 + c \cdot (-1) + d = 3{,}5$
IV: $d = 0$

Die Funktion wird mit Technologieeinsatz bestimmt und lautet:

$h(x) = -\frac{5}{6} \cdot x^3 - 4 \cdot x^2 - \frac{20}{3} \cdot x$ mit $-3 \le x \le 0$

Mit einer anderen Wahl des Ursprungs des Koordinatensystems sind weitere Funktionsgleichungen möglich.

b) Aufstellen der Formel zur Bestimmung des Winkels α der Neigung der Kletterwand zur Horizontalen an der Stelle x_3:

$\frac{dh}{dx} = h'(x_3)$
$\tan(\alpha) = h'(x_3)$
$\alpha = |\arctan(h'(x_3))|$

Unterschied bei der Berechnung der Neigung der Kletterwand mithilfe der Formel des Kletterers und des Differenzialquotienten:

$\frac{\Delta h}{\Delta x}$ … Steigung der Sekante, Differenzenquotient
$\frac{dh}{dx}$ … Steigung der Tangente, Differenzialquotient

Die Steigung der Tangente ist gegeben durch den Grenzwert des Differenzenquotienten $\frac{\Delta h}{\Delta x}$, wenn Δx gegen 0 geht.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta h}{\Delta x} = \frac{dh}{dx}$$

c) $E_V = I \cdot \frac{\cos(\varphi)}{r^2}$ Maximum

Nebenbedingungen:

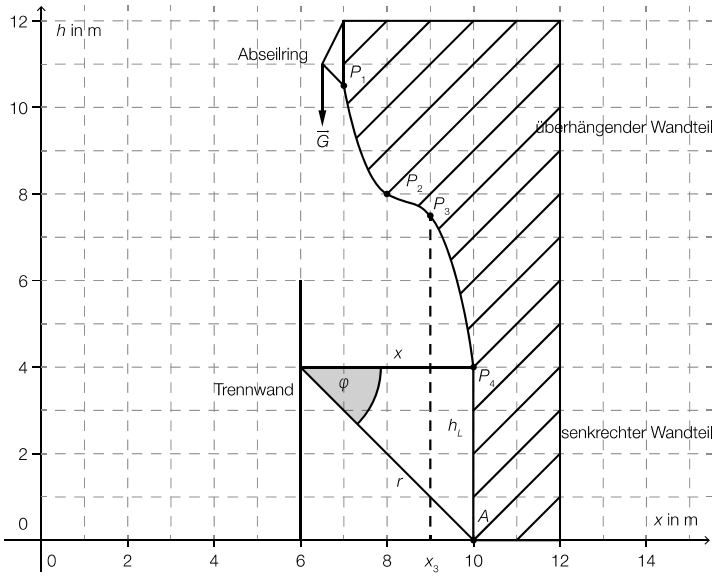
$\cos(\varphi) = \frac{x}{r}$

$r^2 = x^2 + h_L^2 \Rightarrow r = \sqrt{x^2 + h_L^2}$

$E_V(x) = I_V \cdot \frac{\cos(\varphi)}{r^2} =$

$= I_V \cdot \frac{\frac{x}{r}}{r^2} = I_V \cdot \frac{x}{r^3} =$

$= I_V \cdot \frac{x}{\left(x^2 + h_L^2\right)^{\frac{3}{2}}}$



Im Lösungsweg wurde in der 2. Zeile ein Fehler gemacht.

(1) $E_1(x) = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^2 + h_L^2}$

(2) $E_1'(x) = \frac{\frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{1}{3}} \cdot \left(x^2 + h_L^2\right) - x^{\frac{2}{3}} \cdot 2 \cdot x}{\left(x^2 + h_L^2\right)^2}$

(3) $E_1'(x) = \frac{\frac{2}{3} \cdot x^{\frac{5}{3}} + \frac{2}{3} \cdot h_L^2 \cdot x^{-\frac{1}{3}} - 2 \cdot x^{\frac{5}{3}}}{\left(x^2 + h_L^2\right)^2}$

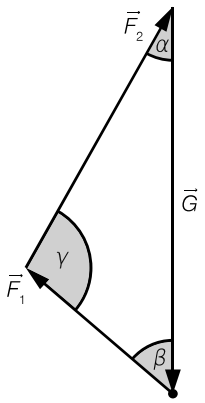
(4) $E_1'(x) = \frac{\frac{2}{3} \cdot h_L^2 \cdot x^{-\frac{1}{3}} - \frac{4}{3} \cdot x^{\frac{5}{3}}}{\left(x^2 + h_L^2\right)^2}$

d) $\gamma = 180 - (\alpha + \beta)$

$\gamma = 105°$

$\frac{G}{\sin(\gamma)} = \frac{F_1}{\sin(\alpha)}$

$F_1 \approx 434{,}8$ N



Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 4 Analysis
c) 4 Analysis
d) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 3 Funktionale Zusammenhänge
d) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) A Modellieren und Transferieren
d) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz, A Modellieren und Transferieren
b) A Modellieren und Transferieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz, C Interpretieren und Dokumentieren
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) schwer
d) leicht

Punkteanzahl:

a) 3
b) 2
c) 4
d) 2

Thema: Sport

Quellen: –

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Abrissbirnen*

Aufgabennummer: B_012

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Abrissbirnen sind kugel- oder birnenförmige Werkzeuge zum Abreißen von Gebäuden.

a) Eine Abrissbirne hat die Form einer Kugel mit dem Durchmesser d. Die Masse m und die Dichte ϱ der Kugel sind bekannt. Die Masse ist das Produkt von Volumen und Dichte.

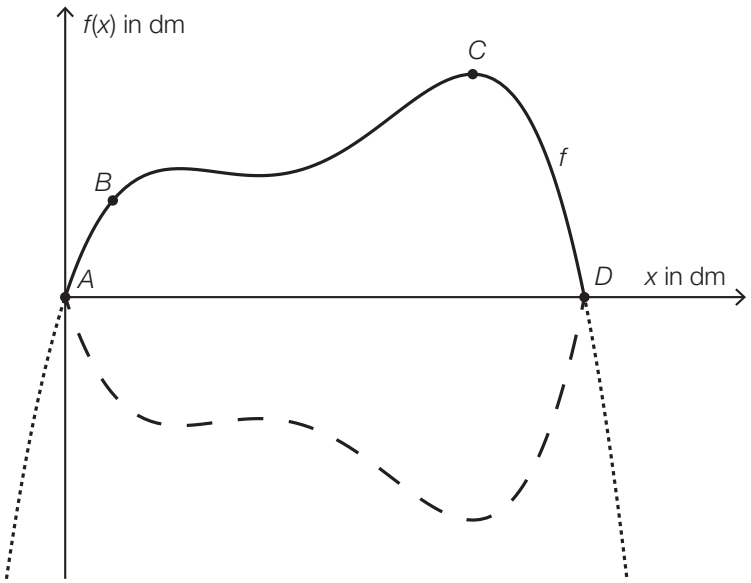
– Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung des Durchmessers d aus m und ϱ.

$d =$ _____

Eine einfache Regel besagt: „Um die Masse einer Kugel zu verdoppeln, ist ihr Durchmesser um rund ein Viertel zu vergrößern."

– Zeigen Sie allgemein, dass diese Regel richtig ist.

b) Eine andere Abrissbirne kann als Körper modelliert werden, der durch Rotation des Graphen der Polynomfunktion f mit $f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$ um die x-Achse entsteht.



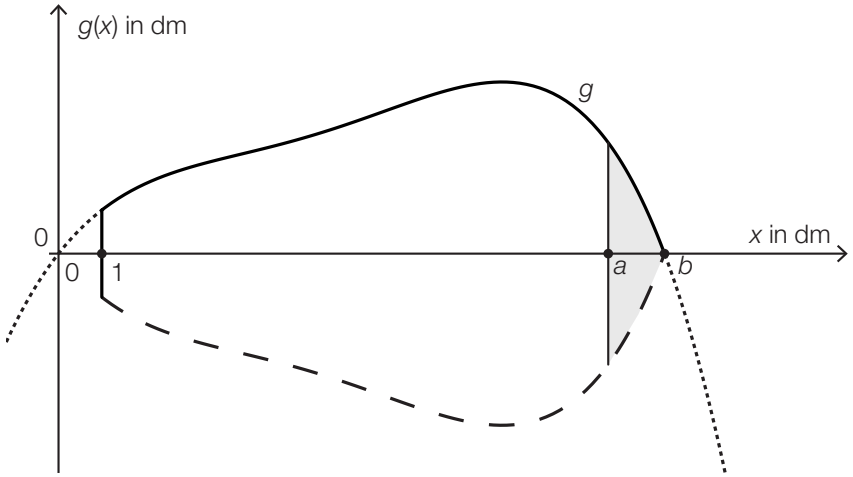
Dabei gilt:
$A = (0|0)$, $B = (1{,}1|2{,}2)$, $C = (9{,}4|5{,}1)$, $D = (12|0)$
Im Punkt C hat die Abrissbirne den größten Durchmesser.

– Erstellen Sie mithilfe der Informationen zu A, B, C und D ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten der Polynomfunktion f.
– Ermitteln Sie die Koeffizienten von f.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Durch Rotation des Graphen der Funktion g im Intervall $[1; b]$ um die x-Achse entsteht die Form einer weiteren Abrissbirne (siehe nachstehende Abbildung):

$g(x) = -0{,}00157 \cdot x^4 + 0{,}03688 \cdot x^3 - 0{,}29882 \cdot x^2 + 1{,}26325 \cdot x$



– Berechnen Sie die Nullstelle b.

Das Volumen dieser Abrissbirne soll verkleinert werden.
Durch Rotation des Graphen der Funktion g im Intervall $[1; a]$ um die x-Achse entsteht die Form einer Abrissbirne mit einem um 10 dm^3 kleineren Volumen.

– Berechnen Sie die in der obigen Abbildung dargestellte Stelle a.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $V = \frac{4 \cdot r^3 \cdot \pi}{3}$; $V = \frac{m}{\varrho} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot m}{4 \cdot \pi \cdot \varrho}} \Rightarrow d = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot m}{\pi \cdot \varrho}}$ *oder* $d = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{3 \cdot m}{4 \cdot \pi \cdot \varrho}}$

d_{neu} ... Durchmesser bei doppelter Masse

$$d_{neu} = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 2 \cdot m}{\pi \cdot \varrho}} = \sqrt[3]{2} \cdot \underbrace{\sqrt[3]{\frac{6 \cdot m}{\pi \cdot \varrho}}}_{= d} = \sqrt[3]{2} \cdot d \approx 1{,}26 \cdot d$$

Der Durchmesser ist daher um rund 26 % (also um rund ein Viertel) zu vergrößern.

b) $f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$
$f'(x) = 4 \cdot a \cdot x^3 + 3 \cdot b \cdot x^2 + 2 \cdot c \cdot x + d$

I: $f(0) = 0$
II: $f(1{,}1) = 2{,}2$
III: $f(9{,}4) = 5{,}1$
IV: $f(12) = 0$
V: $f'(9{,}4) = 0$

oder:

I: $a \cdot 0^4 + b \cdot 0^3 + c \cdot 0^2 + d \cdot 0 + e = 0$
II: $a \cdot 1{,}1^4 + b \cdot 1{,}1^3 + c \cdot 1{,}1^2 + d \cdot 1{,}1 + e = 2{,}2$
III: $a \cdot 9{,}4^4 + b \cdot 9{,}4^3 + c \cdot 9{,}4^2 + d \cdot 9{,}4 + e = 5{,}1$
IV: $a \cdot 12^4 + b \cdot 12^3 + c \cdot 12^2 + d \cdot 12 + e = 0$
V: $4 \cdot a \cdot 9{,}4^3 + 3 \cdot b \cdot 9{,}4^2 + 2 \cdot c \cdot 9{,}4 + d = 0$

Berechnung der Koeffizienten mittels Technologieeinsatz:
$a = -0{,}0066...$
$b = 0{,}1461...$
$c = -1{,}0476...$
$d = 2{,}9843...$
$e = 0$

c) Berechnung der Nullstelle b mittels Technologieeinsatz: $b = 14{,}0...$

$\pi \cdot \int_a^b (g(x))^2 \, dx = 10$
Berechnung der Stelle a mittels Technologieeinsatz: $a = 12{,}7...$

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel
1 × D: für den richtigen Nachweis

b) 1 × A1: für das richtige Erstellen der Gleichungen mithilfe der Koordinaten der Punkte
1 × A2: für das richtige Erstellen der Gleichung mithilfe der 1. Ableitung
1 × B: für das richtige Ermitteln der Koeffizienten

c) 1 × B1: für die richtige Berechnung der Nullstelle b
1 × B2: für die richtige Berechnung der Stelle a

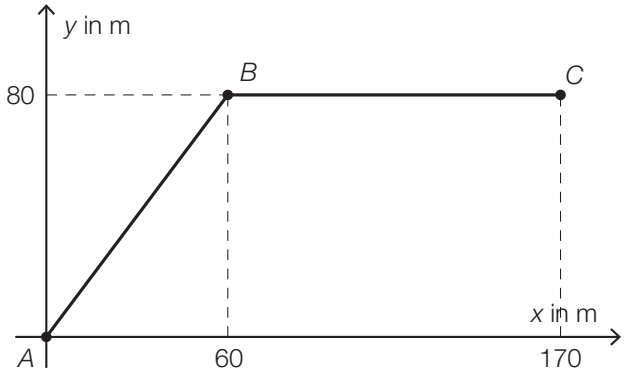
BMB
Bundesministerium
für Bildung

Kräfte*

Aufgabennummer: B_406

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Durch eine Kraft $\vec{F}_{Zug} = \begin{pmatrix} 260 \\ 140 \end{pmatrix}$ Newton (N) wird eine Last von A nach B und danach von B nach C gezogen (siehe nachstehende Skizze).



Die beim Ziehen dieser Last erbrachte Arbeit W in Newtonmetern (Nm) kann folgendermaßen berechnet werden:
$W = \vec{F}_{Zug} \cdot \overrightarrow{AB} + \vec{F}_{Zug} \cdot \overrightarrow{BC}$

– Berechnen Sie die Arbeit W.

b) Drei Kräfte $\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} 800 \\ 200 \\ 700 \end{pmatrix}$ N, $\vec{F}_2 = \begin{pmatrix} -100 \\ 700 \\ -400 \end{pmatrix}$ N und $\vec{F}_3$ greifen an einem Körper in einem Punkt an und halten einander das Gleichgewicht, d. h.: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}$

– Berechnen Sie $\vec{F}_3$.
– Berechnen Sie den Betrag von $\vec{F}_3$.
– Ermitteln Sie denjenigen Winkel, den $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ einschließen.

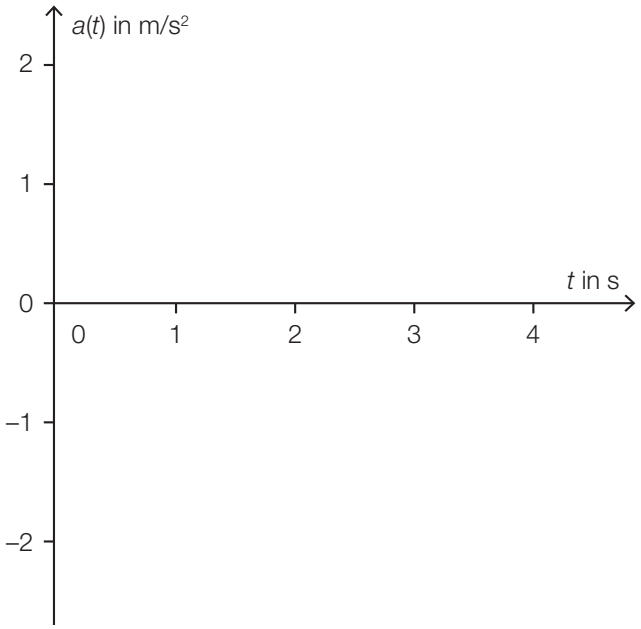
* ehemalige Klausuraufgabe (adaptiert)

c) Der Geschwindigkeitsverlauf einer durch eine bestimmte Kraft hervorgerufenen Bewegung ist durch die Funktion v gegeben:

$$v(t) = 2 \cdot t - \frac{t^2}{2}$$

t ... Zeit in Sekunden (s)
$v(t)$ ... Geschwindigkeit zur Zeit t in Metern pro Sekunde (m/s)

– Begründen Sie, warum im Zeitintervall $0 \leq t \leq 4$ gilt: $v(t) \geq 0$
– Zeichnen Sie im nachstehenden Koordinatensystem das zugehörige Beschleunigung-Zeit-Diagramm für $0 \leq t \leq 4$.



Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 60 \\ 80 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 110 \\ 0 \end{pmatrix}$

$W = \begin{pmatrix} 260 \\ 140 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 60 \\ 80 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 260 \\ 140 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 110 \\ 0 \end{pmatrix} = 26\,800 + 28\,600 = 55\,400$

Die Arbeit beträgt 55 400 Nm.

b) $\overrightarrow{F_3} = -\overrightarrow{F_1} - \overrightarrow{F_2} = \begin{pmatrix} -700 \\ -900 \\ -300 \end{pmatrix}$ N

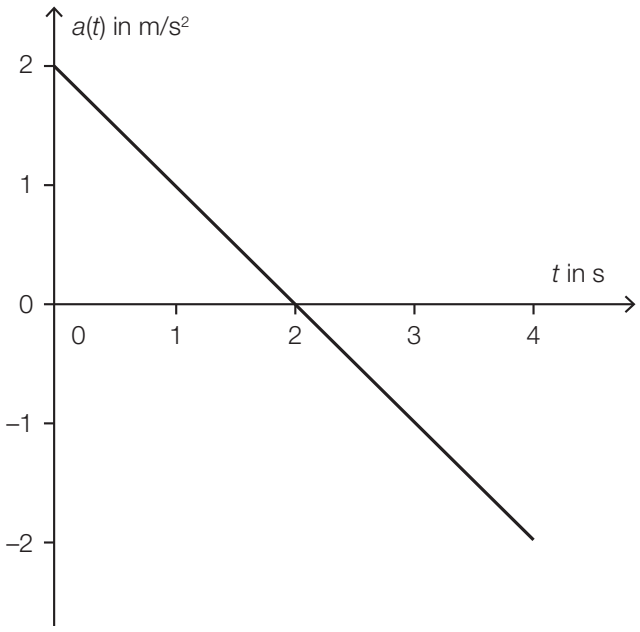
$|\overrightarrow{F_3}| = 1\,178{,}9\ldots \text{ N} \approx 1\,179 \text{ N}$

$\alpha = \arccos\left(\dfrac{\overrightarrow{F_1} \cdot \overrightarrow{F_2}}{|\overrightarrow{F_1}| \cdot |\overrightarrow{F_2}|}\right) = 104{,}49\ldots° \approx 104{,}5°$

Der Ergänzungswinkel auf 360° ist ebenfalls als richtig zu werten.

c) Der Graph der Funktion v ist eine nach unten offene Parabel mit den Nullstellen $t_1 = 0$ und $t_2 = 4$. Daher sind die Funktionswerte im Zeitintervall $0 \le t \le 4$ positiv.

Auch eine Begründung anhand einer Grafik ist als richtig zu werten.



Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für die richtige Darstellung der Wege von *A* nach *B* und von *B* nach *C* mithilfe von Vektoren
1 × B: für die richtige Berechnung der Arbeit *W*

b) 1 × B1: für die richtige Berechnung des Vektors $\vec{F}_3$
1 × B2: für die richtige Berechnung des Betrags des Vektors $\vec{F}_3$
1 × B3: für das richtige Ermitteln des Winkels

c) 1 × D: für die richtige Begründung
Auch eine Begründung anhand einer Grafik ist als richtig zu werten.
1 × A: für das richtige Zeichnen des Beschleunigung-Zeit-Diagramms im gegebenen Intervall

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Kleinwald

Aufgabennummer: B_273

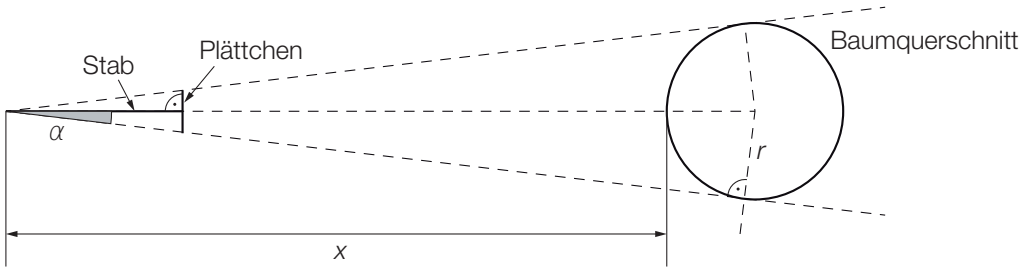
Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Um ein zusätzliches Einkommen zu erwirtschaften, kauft ein Landwirt eine kleine Waldfläche.

a) Er erwirbt eine Waldfläche mit einem Flächeninhalt von 18,6 Hektar (ha). Der Preis liegt bei € 0,95 pro Quadratmeter; der durchschnittliche Erlös pro Jahr soll € 300 pro Hektar betragen. Der Landwirt legt den Erlös an jedem Jahresende auf ein Sparbuch mit einem Jahreszinssatz i.

- Berechnen Sie den Kaufpreis.
- Erstellen Sie eine Gleichung, mit deren Hilfe man die Zeitdauer in Jahren, bis der Landwirt Gewinn erzielt, berechnen kann.
- Berechnen Sie den Gewinn 40 Jahre nach dem Kauf des Waldes bei einem Zinssatz von 0,8 % p. a.

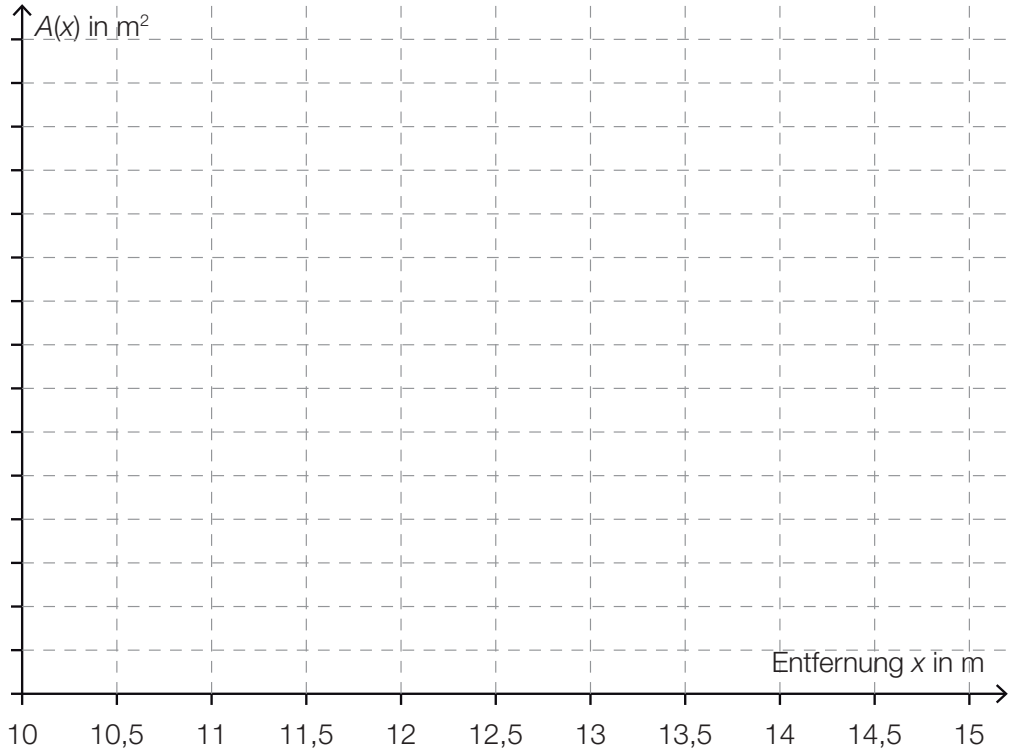
b) Für eine Abschätzung des Holzvolumens eines Baumes kann man die sogenannte „Winkelzählprobe“ verwenden. Dafür wird ein 1 m langer Stab verwendet, an dessen Ende ein 4 cm breites Plättchen symmetrisch im rechten Winkel zum Stab montiert ist.
Man hält dieses Gerät waagrecht und bewegt sich damit in die richtige Position, bei der die Breite des Baums durch das Plättchen verdeckt wird (siehe nachstehende Skizze – Sicht von oben).



- Berechnen Sie den Winkel α.
- Stellen Sie eine Formel zur Berechnung des Baumradius r in Abhängigkeit von x und α auf.

$r =$ _____

– Zeichnen Sie die Funktion A des Flächeninhalts des Baumquerschnitts in Abhängigkeit von der Entfernung x mit entsprechender Skalierung der vertikalen Achse in das nachstehende Koordinatensystem ein.



c) Der Landwirt hat ermittelt, dass er die Höhe der Bäume annähernd mithilfe der folgenden Funktion beschreiben kann:

$h(d) = 194{,}85 + 221{,}89 \cdot \ln(d)$

d … Durchmesser eines Baums auf Brusthöhe in Zentimetern (cm) mit $d \in [3; 14]$
$h(d)$ … Baumhöhe in cm bei einem Durchmesser d

Bei einem Baum wird ein Durchmesser von 5 cm gemessen. Nach einiger Zeit weist der Baum einen Durchmesser d_0 auf.

– Stellen Sie eine Formel auf, mit der man die mittlere Änderungsrate der Baumhöhe bei dieser Durchmesseränderung berechnen kann.

$k =$ _____

– Kreuzen Sie denjenigen Ausdruck an, mit dem die lokale Änderungsrate der Baumhöhe berechnet werden kann. *[1 aus 5]*

$194{,}85 + 221{,}89 \cdot e^d$	☐
$\frac{221{,}89}{d}$	☐
$221{,}89 \cdot \ln(d)$	☐
$194{,}85 + \frac{221{,}89}{d}$	☐
$221{,}89 \cdot d$	☐

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) K ... Kaufpreis

$K = 18{,}6 \cdot 100^2 \cdot 0{,}95 = 176\,700$

Der Kaufpreis beträgt € 176.700.

$q = 1 + i$

n ... Zeit in Jahren

$$176\,700 = 5\,580 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot \frac{1}{q^n}$$

Berechnung des Gewinns nach 40 Jahren:

$$5\,580 \cdot \frac{1{,}008^{40} - 1}{0{,}008} - 176\,700 \cdot 1{,}008^{40} = 18\,795{,}561...$$

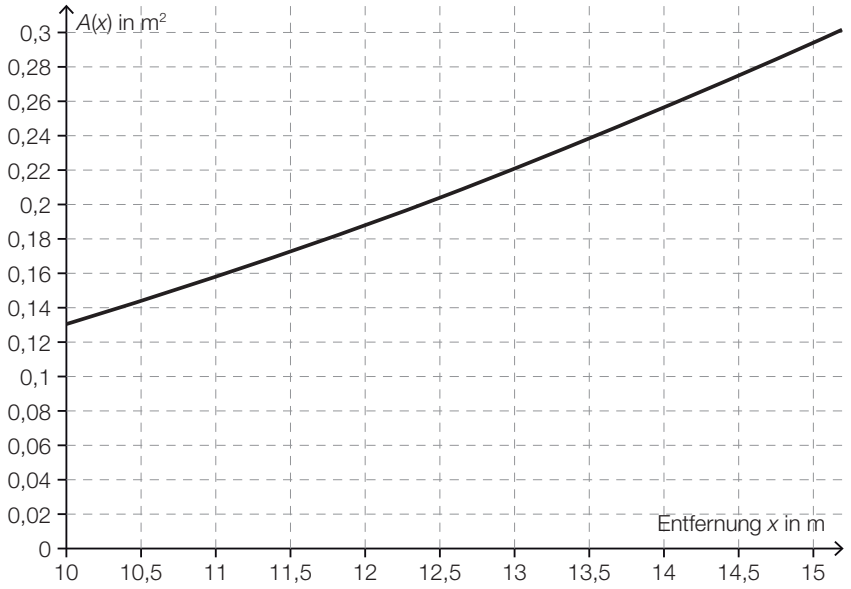
Der Gewinn beträgt € 18.795,56.

b) $\tan(\alpha) = \frac{2}{100} \Rightarrow \alpha = 1{,}1457...°$

Der Winkel beträgt rund 1,146°.

$$\sin(\alpha) = \frac{r}{x + r} \Rightarrow r = \frac{x \cdot \sin(\alpha)}{1 - \sin(\alpha)}$$

$$A(x) = \left(\frac{x \cdot \sin(\alpha)}{1 - \sin(\alpha)}\right)^2 \cdot \pi \quad \text{mit} \quad \sin(\alpha) \approx 0{,}019996$$



c) k … mittlere Änderungsrate der Baumhöhe

$$h(5) = 194{,}85 + 221{,}89 \cdot \ln(5) = 551{,}9\ldots \Rightarrow k = \frac{194{,}85 + 221{,}89 \cdot \ln(d_0) - 551{,}9\ldots}{d_0 - 5}$$

oder:

$$k = \frac{h(d_0) - h(5)}{d_0 - 5}$$

[...]	
$\frac{221{,}89}{d}$	☒
[...]	
[...]	
[...]	

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 4 Analysis

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) A Modellieren und Transferieren
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) schwer
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 3
c) 2

Thema: Forstwirtschaft

Quellen: https://de.wikipedia.org/wiki/Kleinwald (Stand vom 28. Juni 2015 um 18:41 Uhr)
http://www.lagerhaus.at/wie-viel-holz-steht-in-meinem-wald+2500+1066813

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Sightseeing in London

Aufgabennummer: B_361

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Zu den bekanntesten Sehenswürdigkeiten Londons zählen das *London Eye*, der *Big Ben* und die *Tower Bridge*.

a) Das *London Eye* ist das höchste Riesenrad Europas. Der Aufhängepunkt einer Gondel beschreibt einen Kreis mit einem Durchmesser von 121 m und erreicht eine maximale Höhe von 135 m. Das sich mit konstanter Geschwindigkeit drehende Rad benötigt für eine volle Umdrehung 40 Minuten.

Die Höhe des Aufhängepunkts einer Gondel über dem Boden kann in Abhängigkeit von der Zeit durch eine allgemeine Sinusfunktion h beschrieben werden:

$h(t) = a \cdot \sin(b \cdot t + c) + d$

t … Zeit in min
$h(t)$ … Höhe des Aufhängepunkts über dem Boden zur Zeit t in m

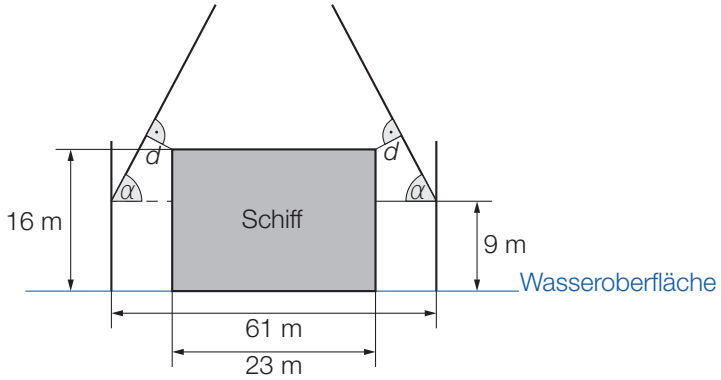
Zur Zeit $t = 0$ befindet sich der Aufhängepunkt an der tiefsten Stelle.

– Ermitteln Sie die Parameter a, b, c und d.

Wählt man für $t = 0$ denjenigen Zeitpunkt, zu dem sich der Aufhängepunkt an der höchsten Stelle befindet, so wird die Höhe des Aufhängepunkts in Abhängigkeit von der Zeit durch die Funktion g beschrieben.

– Erklären Sie, in welchen Parametern sich die Funktion g von h unterscheidet.

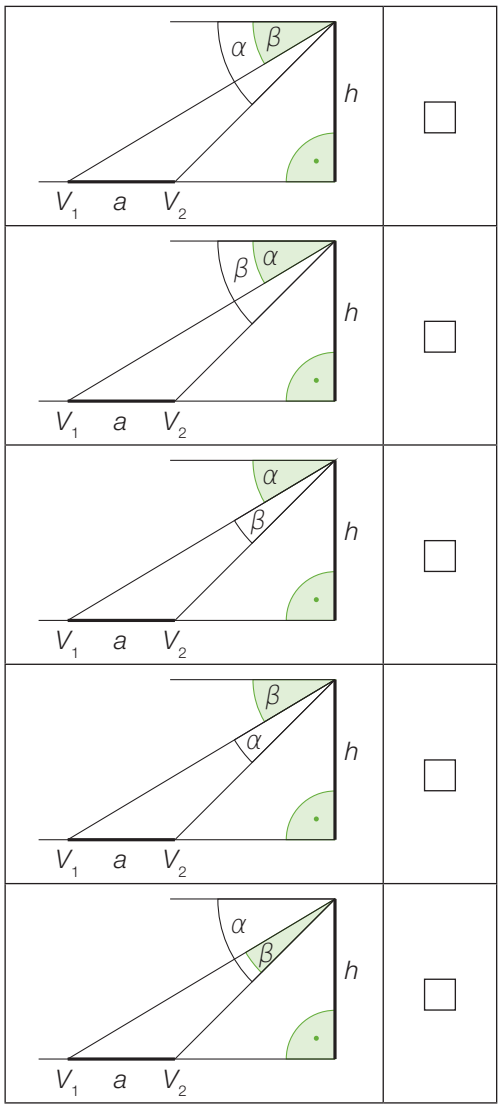
b) Die *Tower Bridge* ist eine Klappbrücke, die über die Themse führt. Um großen Schiffen die Durchfahrt zu ermöglichen, können die Brückenarme des 61 m langen Mittelteils hochgeklappt werden. Die Gelenke der Brückenarme liegen rund 9 m über der Wasseroberfläche. Ein Schiff fährt genau in der Mitte des Flusses und soll unter der Brücke durchfahren (siehe nachstehende Abbildung).



– Berechnen Sie denjenigen Winkel α, um den beide Brückenarme jeweils geöffnet werden müssen, damit das Schiff mit einem Abstand von $d = 2$ m die Brücke passieren kann.

c) Um die Höhe des *Big Ben* zu bestimmen, werden zwei Punkte in einer Ebene festgelegt. Vom Vermessungspunkt V_1 wird der Höhenwinkel α zur Spitze des *Big Ben* gemessen. Von einem um *a* Meter näher zum Turm gelegenen Vermessungspunkt V_2 wird zur Spitze ein Höhenwinkel β gemessen.

– Kreuzen Sie die zu diesem Sachverhalt passende Skizze an. *[1 aus 5]*



– Stellen Sie eine Formel zur Berechnung der Höhe *h* aus *a*, α und β auf.

$h =$ _____

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Der Radius des Rades entspricht der Amplitude a der Sinusfunktion: $a = \frac{121}{2} = 60{,}5$
b ist die Kreisfrequenz: $b = \frac{2\pi}{40} = \frac{\pi}{20}$

c ist der Nullphasenwinkel. Die Funktion h soll bei $t = 0$ ein Minimum haben. Als Werte für c kommen daher alle Minimumstellen der Funktion f mit $f(x) = \sin(x)$ infrage: $c = -\frac{\pi}{2}$ oder $c = \frac{3\pi}{2}$ oder ...

d bewirkt eine vertikale Verschiebung des Graphen. Mit $d = 0$ wäre $h(0) = -60{,}5$, da jedoch $h(0) = 14$ sein muss, ist $d = 14 + 60{,}5 = 74{,}5$.

$a = 60{,}5;\ b = \frac{\pi}{20};\ c = -\frac{\pi}{2};\ d = 74{,}5$

Die Amplitude a (Radius des Kreises), die Kreisfrequenz b (Drehgeschwindigkeit) und der Abstand d bleiben gleich.
Befindet sich der Aufhängepunkt zum Zeitpunkt $t = 0$ im höchsten Punkt, ändert sich nur der Nullphasenwinkel, wodurch eine Verschiebung des Graphen in horizontaler Richtung bewirkt wird.

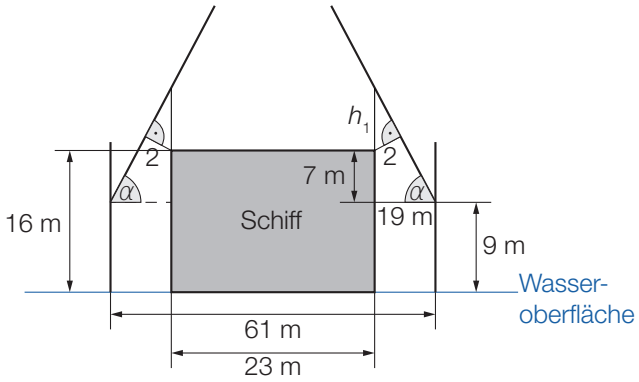
b) $\sin(90° - \alpha) = \frac{2}{h_1}$

$h_1 = \frac{2}{\sin(90° - \alpha)}$

$\tan(\alpha) = \frac{h_1 + 7}{19}$

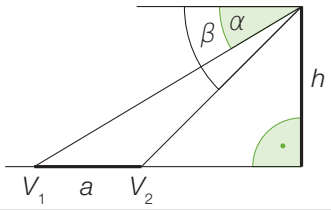
$\tan(\alpha) = \frac{\frac{2}{\sin(90° - \alpha)} + 7}{19}$

Lösen mittels Technologieeinsatz:
$\alpha = 25{,}893…°$



Die Brückenarme müssen in einem Winkel von rund $\alpha = 25{,}89°$ geöffnet werden.

c)

[...]	
	☒
[...]	
[...]	
[...]	

$$h = \frac{a \cdot \tan(\beta) \cdot \tan(\alpha)}{\tan(\beta) - \tan(\alpha)}$$

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) A Modellieren und Transferieren
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) schwer
c) schwer

Punkteanzahl:

a) 3
b) 2
c) 2

Thema: Sonstiges

Quellen: –

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Kalt – warm (1)*

Aufgabennummer: B_394

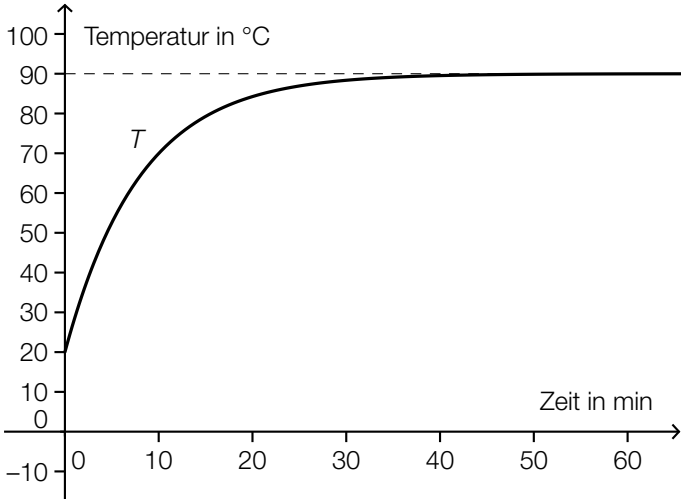
Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) In der unten stehenden Grafik ist ein Erwärmungsvorgang dargestellt, der durch die Funktion T beschrieben wird:

$T(t) = a \cdot (1 - e^{-\frac{t}{8}}) + 20$ mit $t \geq 0$

t ... Zeit nach Beginn des Vorgangs in min
$T(t)$ ... Temperatur zur Zeit t in °C
a ... Konstante

Der Graph dieser Funktion T ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



– Ermitteln Sie mithilfe der obigen Abbildung die Konstante a.
– Interpretieren Sie die nachstehende Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang.

$\frac{1}{b} \cdot \int_0^b T(t)\,dt = 60$ °C

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Der Temperaturverlauf von abkühlendem Wasser wird durch die Funktion T beschrieben:

$T(t) = 8 + 42 \cdot e^{-\frac{t}{84}}$ mit $t \geq 0$

t ... Zeit nach Beginn des Vorgangs in min
$T(t)$ ... Temperatur des Wassers zur Zeit t in °C

– Stellen Sie den Temperaturverlauf in den ersten 5 Stunden grafisch dar.
– Stellen Sie eine Gleichung der Tangente an den Graphen von T zur Zeit $t = 0$ auf.

Die Tangente soll zur näherungsweisen Beschreibung des Temperaturverlaufs verwendet werden. Dabei werden Abweichungen von maximal 2 °C toleriert.

– Ermitteln Sie dasjenige Zeitintervall, in dem die Abweichung maximal 2 °C beträgt.

c) Folgende Differenzialgleichung beschreibt den Temperaturverlauf eines abkühlenden Körpers in Abhängigkeit von der Zeit:

$\frac{dT}{dt} = k \cdot (T - T_U)$ mit $T > T_U$

t ... Zeit
T ... Temperatur
T_U ... Umgebungstemperatur (konstant)
k ... Konstante

Dabei nähert sich die Temperatur T des abkühlenden Körpers der Umgebungstemperatur T_U.

– Argumentieren Sie anhand der Differenzialgleichung, welches Vorzeichen k haben muss.
– Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung mithilfe der Methode *Trennen der Variablen*.
– Berechnen Sie die Lösung der Differenzialgleichung mit $T(0) = T_0$.

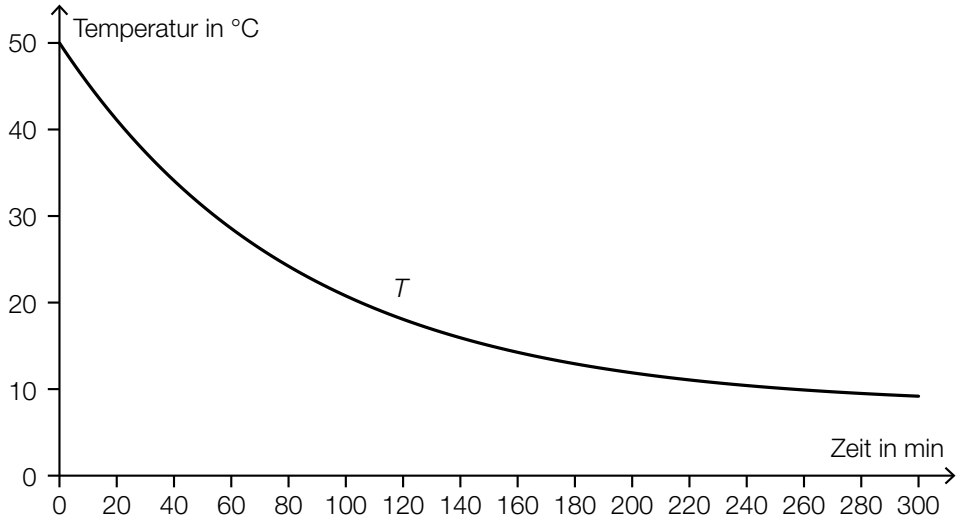
Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $a = 70$

Im Intervall $[0; b]$ beträgt die mittlere Temperatur 60 °C.

b)



Gleichung der Tangente(nfunktion): $f(t) = k \cdot t + d$
$k = T'(0) = -0{,}5$
$d = 50$
$\Rightarrow \; f(t) = -0{,}5 \cdot t + 50$

$8 + 42 \cdot e^{-\frac{t}{84}} - (-0{,}5 \cdot t + 50) = 2$
Lösung der Gleichung mittels Technologieeinsatz für $t > 0$: $t = 27{,}3\ldots$
Zeitintervall: $[0; 27]$

c) Für $T > T_U$ handelt es sich um einen Abnahmeprozess, also muss $\frac{dT}{dt}$ negativ sein.
Da $(T - T_U)$ positiv ist, muss also k negativ sein.

$\frac{dT}{dt} = k \cdot (T - T_U)$

$\frac{dT}{T - T_U} = k \cdot dt$ (oder: $\frac{T'}{T - T_U} = k$)

$\int \frac{dT}{T - T_U} = k \cdot \int dt$ (oder: $\int \frac{T'(t)}{T(t) - T_U} \, dt = k \cdot \int dt$)

$\ln|T(t) - T_U| = k \cdot t + C_1$

allgemeine Lösung: $T(t) = T_U + C \cdot e^{k \cdot t}$

$T(0) = T_0 \; \Rightarrow \; T_0 = T_U + C$
$T(t) = T_U + (T_0 - T_U) \cdot e^{k \cdot t}$

Lösungsschlüssel

a) 1 × C1: für das richtige Ermitteln der Konstanten a
1 × C2: für die richtige Interpretation der Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang

b) 1 × B1: für das richtige Darstellen des Temperaturverlaufs in den ersten 5 Stunden
1 × A: für das richtige Aufstellen der Gleichung der Tangente
1 × B2: für das richtige Ermitteln des Zeitintervalls

c) 1 × D: für die richtige Argumentation
1 × B1: für die richtige Berechnung der allgemeinen Lösung
1 × B2: für die richtige Berechnung der Lösung mit $T(0) = T_0$

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Newton’sches Abkühlungsgesetz

Aufgabennummer: B_077

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Das Newton’sche Abkühlungsgesetz besagt, dass die momentane Änderungsrate der Temperatur eines Körpers proportional zur Differenz zwischen der Temperatur des abkühlenden Körpers zur Zeit t und der Umgebungstemperatur ist.

$$\frac{dT(t)}{dt} = k \cdot (T_U - T(t))$$

t … Zeit in Minuten (min)
$T(t)$ … Temperatur des Körpers zur Zeit t in °C
T_U … Umgebungstemperatur in °C
$k > 0$ … Proportionalitätsfaktor in min^{-1}

a) Ein Thermometer wird aus einem Raum ins Freie gebracht, wo es eine Temperatur von $T_U = -10$ °C hat. Die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung für $k = 0{,}84\ \text{min}^{-1}$ lautet:

$T(t) = -10 - C \cdot e^{-0{,}84 \cdot t}$

– Zeigen Sie, dass diese Funktion T die allgemeine Lösung der gegebenen Differenzialgleichung ist.

Der Raum, aus dem das Thermometer ins Freie gebracht wird, hat eine Temperatur von 22 °C. Zu Beginn ($t = 0$) zeigt das Thermometer also eine Temperatur von 22 °C an.

– Ermitteln Sie für diesen Sachzusammenhang eine spezielle Lösung der Differenzialgleichung.
– Stellen Sie den Funktionsgraphen dieser speziellen Lösung in einem Koordinatensystem für $0\ \text{min} \le t \le 5\ \text{min}$ grafisch dar.

b) Für eine weitere spezielle Lösung der Differenzialgleichung gilt:

$T(t) = 43 \cdot (0{,}4317^t - 0{,}1163)$

Das Thermometer wird zur Zeit $t = 0$ aus einem Raum ins Freie ($T_U = -5$ °C) gebracht.

– Ermitteln Sie mithilfe der gegebenen speziellen Lösung, nach welcher Zeit t das Thermometer 0 °C anzeigt.
– Ermitteln Sie, welche Temperatur im Raum herrscht.

c) – Erklären Sie anhand der gegebenen Differenzialgleichung, warum die Steigung der Abkühlungskurve positiv ist, wenn die Umgebungstemperatur T_U höher als die Temperatur $T(t)$ des Körpers ist.
– Interpretieren Sie im gegebenen Sachzusammenhang, was es bedeutet, wenn $\frac{dT(t)}{dt}$ gegen null geht.

d) Für ein Experiment wird ein Topf mit warmem Wasser ins Freie bei einer Temperatur von 0 °C gestellt.

– Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung für den Abkühlvorgang mithilfe der Methode *Trennen der Variablen*.

In diesem Experiment hat das Wasser im Topf zu Beginn eine Temperatur von 50 °C. Nach 30 Minuten beträgt die Temperatur des Wassers 36 °C.

– Ermitteln Sie mithilfe dieser Angaben den Proportionalitätsfaktor k.

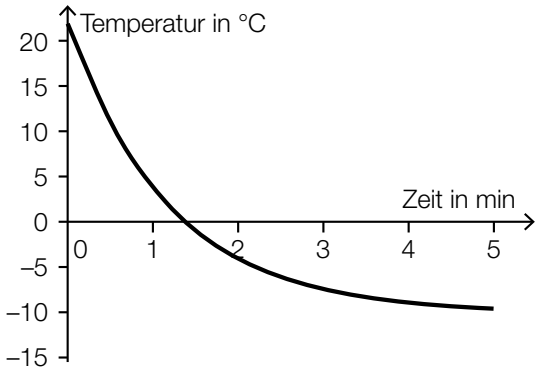
Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $T(t) = -10 - C \cdot e^{-0{,}84 \cdot t}$
$T'(t) = 0{,}84 \cdot C \cdot e^{-0{,}84 \cdot t}$
Einsetzen in Differenzialgleichung: $0{,}84 \cdot C \cdot e^{-0{,}84 \cdot t} = k \cdot (T_U + 10 + C \cdot e^{-0{,}84 \cdot t})$

Mit $T_U = -10$ und $k = 0{,}84$ gilt:
$0{,}84 \cdot C \cdot e^{-0{,}84 \cdot t} = 0{,}84 \cdot C \cdot e^{-0{,}84 \cdot t} \Rightarrow$ Die angegebene Lösung ist korrekt.

$T(0) = 22$
$22 = -10 - C \cdot e^0 \Rightarrow C = -32$
$T(t) = 32 \cdot e^{-0{,}84 \cdot t} - 10$ … spezielle Lösung der Differenzialgleichung



b) Lösen der Gleichung $0 = 43 \cdot (0{,}4317^t - 0{,}1163)$ liefert $t = 2{,}5613\ldots$ min.
Nach etwa 2,6 Minuten zeigt das Thermometer 0 °C an.

$T(0) = 43 \cdot (0{,}4317^0 - 0{,}1163) = 37{,}9991$
$T \approx 38$ °C

c) $\frac{dT(t)}{dt} = k \cdot (T_U - T(t))$

Da $k > 0$ und $T_U > T(t)$, also $T_U - T(t) > 0$, ist das Produkt $k \cdot (T_U - T(t)) = \frac{dT(t)}{dt} > 0$.
Die Steigung der Abkühlungskurve ist also positiv.

$\frac{dT(t)}{dt} = 0 \Rightarrow k \cdot (T_U - T) = 0$ mit $k > 0 \Rightarrow T = T_U$
Die Temperatur T nähert sich der Umgebungstemperatur T_U.

d) $\frac{\mathrm{d}T(t)}{\mathrm{d}t} = k \cdot (T_U - T(t))$

Trennen der Variablen: $\frac{\mathrm{d}T(t)}{T_U - T(t)} = k \cdot \mathrm{d}t$

$\int \frac{\mathrm{d}T(t)}{T_U - T(t)} = k \cdot \int \mathrm{d}t$

$-\ln|T_U - T(t)| = k \cdot t + C$

$\ln|T_U - T(t)| = -k \cdot t - C$

$T_U - T(t) = e^{-k \cdot t} \cdot e^{-C}$

$T(t) = T_U - e^{-k \cdot t} \cdot e^{-C}$

Mit $T_U = 0$ und $e^{-C} = T_0$ erhält man:

$T(t) = T_0 \cdot e^{-k \cdot t}$ … allgemeine Lösung der Differenzialgleichung

T_0 … Anfangstemperatur des Wassers

k … Proportionalitätsfaktor

$T_0 = 50\ °C$

$36 = 50 \cdot e^{-k \cdot 30}$

$k = -\frac{1}{30} \cdot \ln\left(\frac{36}{50}\right)$

$k = 0{,}010950\ldots$

$k \approx 0{,}011\ \mathrm{min}^{-1}$

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 3 Funktionale Zusammenhänge
d) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) 4 Analysis
d) 2 Algebra und Geometrie

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) C Interpretieren und Dokumentieren
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) D Argumentieren und Kommunizieren
d) —

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) leicht
c) schwer
d) mittel

Punkteanzahl:

a) 4
b) 2
c) 2
d) 2

Thema: Physik

Quellen: —

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Kleidungs- und Schuhproduktion

Aufgabennummer: A_046

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Ein Unternehmen lässt Bekleidung und Schuhe in Asien produzieren.

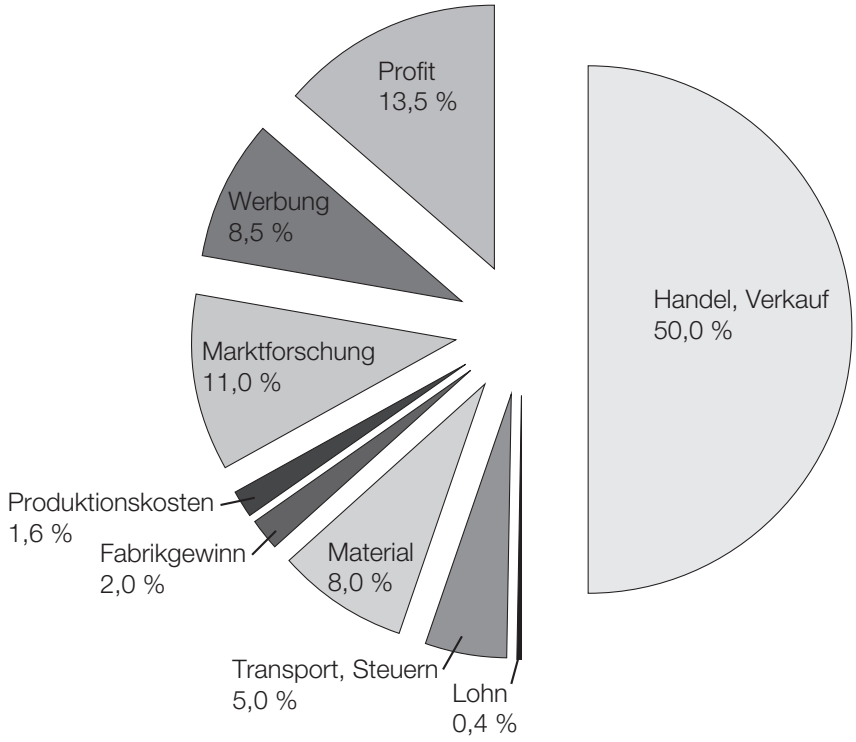
a) In der Produktion von T-Shirts betragen die Fixkosten 15 Millionen Euro.
Die Lohnkosten betragen durchschnittlich 2 Cent pro T-Shirt. Dazu kommen noch 1 Cent an Materialkosten und 5 Cent für Transport und Steuern pro T-Shirt.
Der Verkaufspreis beträgt 7,90 Euro pro T-Shirt.

- Erstellen Sie eine Gleichung der linearen Gewinnfunktion.
- Berechnen Sie, ab welcher Stückzahl das Unternehmen Gewinn erzielt, wenn man davon ausgeht, dass alle produzierten T-Shirts auch verkauft werden.

b) Für die Produktion der Baumwollmenge für ein T-Shirt werden 20 000 L Wasser benötigt.

- Stellen Sie den Wasserverbrauch in Abhängigkeit von der Produktionsmenge für eine Produktion von bis zu 500 000 T-Shirts grafisch dar.
- Zeichnen Sie in diese Grafik den Jahresverbrauch an Wasser einer Stadt mit 100 000 Einwohnern mit einem durchschnittlichen Tagesverbrauch von 82 L pro Einwohner ein.
- Lesen Sie ab, welche Menge an produzierten T-Shirts den gleichen Wasserverbrauch wie die Einwohner dieser Stadt in einem Jahr verursacht.

c) Die nachstehende Grafik zeigt, wie sich der Preis von Markensportschuhen zusammensetzt.



Ein bestimmtes Paar Markensportschuhe kostet 150 Euro.

– Berechnen Sie für dieses Paar Markensportschuhe, wie viel Euro auf die einzelnen Bereiche entfallen, und stellen Sie diese Beträge in einer Tabelle dar.

d) In einer anderen Schuhproduktion entfallen vom Gesamtpreis 12 % auf den Profit und 0,4 % auf die Lohnkosten bei der Herstellung.

– Berechnen Sie die prozentuelle Erhöhung der Lohnkosten bei der Herstellung, wenn auf 10 % des Profits verzichtet würde und dieser Anteil zum Lohn hinzukäme.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

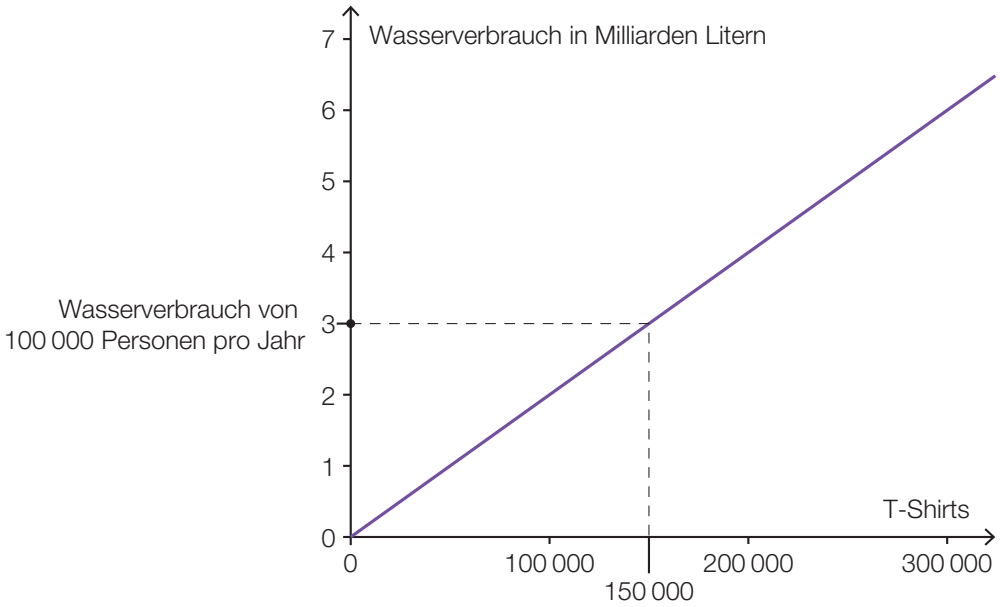
a) x ... Anzahl der produzierten und verkauften T-Shirts
$G(x)$ ... Gewinn bei der Menge x in Euro

$G(x) = (7{,}90 - 0{,}08) \cdot x - 15\,000\,000$
$G(x) = 7{,}82 \cdot x - 15\,000\,000$

$G(x) = 0$
$7{,}82 \cdot x = 15\,000\,000 \quad \Rightarrow \quad x = 1\,918\,158{,}5...$

Ab 1 918 159 T-Shirts macht das Unternehmen Gewinn.

b)



Die Produktion von rund 150 000 T-Shirts verursacht den gleichen Wasserverbrauch.

c)

Handel, Verkauf	€ 75,00
Lohn	€ 0,60
Transport, Steuern	€ 7,50
Material	€ 12,00
Fabrikgewinn	€ 3,00
Produktionskosten	€ 2,40
Marktforschung	€ 16,50
Werbung	€ 12,75
Profit	€ 20,25

d) 10 % des Profits von 12 % ergibt 1,2 %.
1,2 % sind das Dreifache von 0,4 %.
Es handelt sich also um eine Erhöhung der Lohnkosten um 300 %.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 1 Zahlen und Maße
d) 1 Zahlen und Maße

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) 5 Stochastik
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) A Modellieren und Transferieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) —
d) —

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) leicht
d) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 3
c) 1
d) 1

Thema: Wirtschaft

Quelle: http://www.stoparmut2015.ch/fileadmin/user_upload/dateien/Mitmachen/Fairteilen/Fairtrade-def_korr.pdf

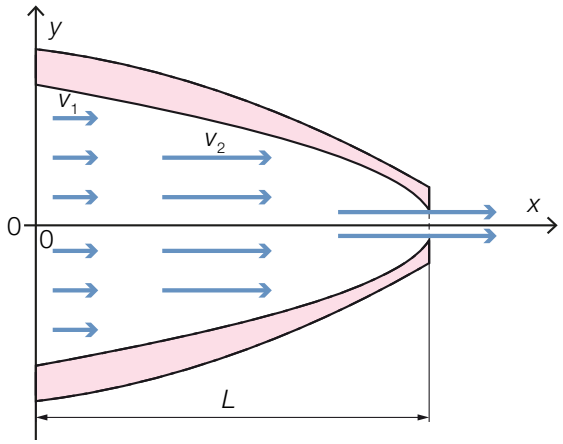
Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Der Venturi-Effekt

Aufgabennummer: B_111

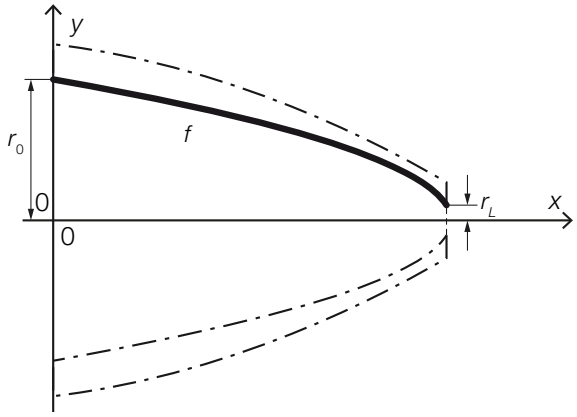
Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Der Venturi-Effekt besagt, dass sich die Strömungsgeschwindigkeit eines Fluids (Flüssigkeit oder Gas) in einem Rohr indirekt proportional zum Flächeninhalt des Querschnitts verhält, wenn die Durchflussmenge konstant bleibt.
Die abgebildete Grafik zeigt den Längsschnitt einer rotationssymmetrischen Wasserdüse mit der Länge L.



a) – Stellen Sie eine Gleichung auf, die die Strömungsgeschwindigkeiten v_1, v_2 mit den zugehörigen Querschnittsflächen A_1, A_2 in korrekte Beziehung bringt.

b) Bei einer speziellen Düse ist der Innenradius r_0 am linken Rand der Düse 5 mm. Die Austrittsöffnung (rechts) hat einen Innenradius von r_L = 0,5 mm. Die Länge der Düse L ist 25 mm. Die in der nachstehenden Grafik gekennzeichnete Begrenzungslinie lässt sich durch die Funktion f beschreiben: $f(x) = \sqrt{a - b \cdot x}$, $0\ \text{mm} \le x \le 25\ \text{mm}$.



– Berechnen Sie die Parameter a und b der Funktion f.
– Berechnen Sie das Innenvolumen der Wasserdüse.

c) Die Düse wird an einen Wasserschlauch angeschlossen und senkrecht nach oben gehalten. Die Geschwindigkeit eines Wassertropfens abhängig von der Zeit t nach dem Austritt aus der Düse wird durch die Funktion v beschrieben.

$v(t) = h'(t) = v_0 - g \cdot t$

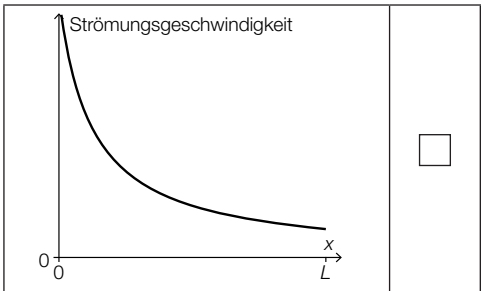
t … Zeit in s
g … Erdbeschleunigung in m/s²
v_0 … Austrittsgeschwindigkeit in m/s
$v(t)$ … Geschwindigkeit eines Wassertropfens zur Zeit t in m/s

Es soll die maximale Höhe h eines Wassertropfens über der Austrittsöffnung des Gartenschlauchs berechnet werden.

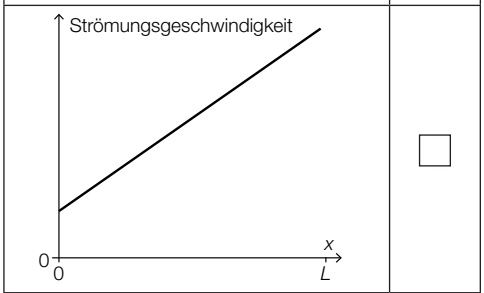
– Stellen Sie eine Formel zur Berechnung der maximalen Höhe h abhängig von der Austrittsgeschwindigkeit v_0 mit $h(0) = 0$ auf.

d) Der Verlauf der Strömungsgeschwindigkeit eines Wasserpartikels entlang der Länge *L* der oben skizzierten Wasserdüse soll dargestellt werden.

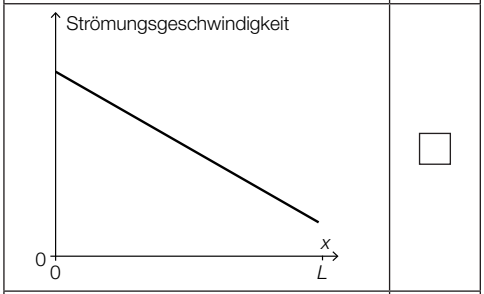
– Kreuzen Sie die Grafik an, die den Verlauf der Strömungsgeschwindigkeit korrekt darstellt. *[1 aus 5]*



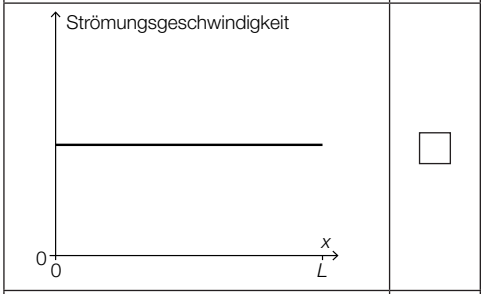
☐



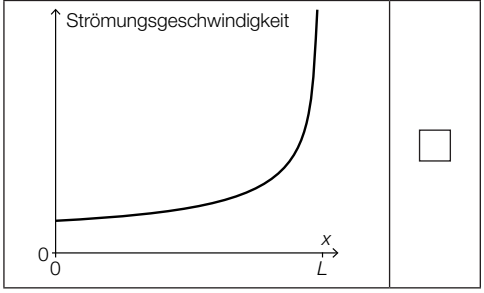
☐



☐



☐



☐

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Für indirekt proportionale Größen gilt, dass deren Produkt konstant ist:
$v_1 \cdot A_1 = v_2 \cdot A_2$

Äquivalente Gleichungen sind ebenfalls korrekt.

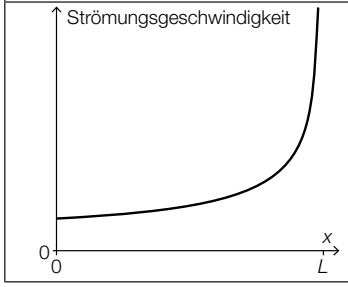
b) $f(0) = 5 \Rightarrow \sqrt{a - b \cdot 0} = 5 \Rightarrow a = 25$

$f(25) = 0{,}5 \Rightarrow \sqrt{25 - b \cdot 25} = 0{,}5 \Rightarrow b = 0{,}99$

Berechnung des Volumens:
$V = \pi \cdot \int_0^{25} \left(\sqrt{25 - 0{,}99 \cdot x}\right)^2 \mathrm{d}x \approx 992\ \mathrm{mm}^3$

c) Für die maximale Höhe h_{max} gilt $v(t) = 0$:
$0 = v_0 - g \cdot t_{max}$
$t_{max} = \frac{v_0}{g}$
Zur Berechnung der Höhe h, abhängig von der Zeit t, muss integriert werden und es gilt $h(0) = 0$:
$h(t) = v_0 \cdot t - g \cdot \frac{t^2}{2}$
Durch Einsetzen von t_{max} erhält man:
$h_{max} = \frac{v_0^2}{g} - g \cdot \frac{v_0^2}{2 \cdot g^2} = \frac{v_0^2}{2 \cdot g}$

d)

[…]	
[…]	
[…]	
[…]	
	☒

Die Austrittsgeschwindigkeit wird wegen des sich vermindernden Querschnitts immer höher. Eine umgekehrte Proportionalität hat keinen linearen Verlauf.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 4 Analysis
d) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) 3 Funktionale Zusammenhänge
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) A Modellieren und Transferieren
c) A Modellieren und Transferieren
d) —

Schwierigkeitsgrad:

a) schwer
b) mittel
c) schwer
d) mittel

Punkteanzahl:

a) 1
b) 3
c) 4
d) 1

Thema: Physik

Quellen: —

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Gerätekauf

Aufgabennummer: B_211

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Familie Kurz benötigt für ihre neue Wohnung Küchengeräte.

a) In den Preisverhandlungen mit einem Händler werden die nachstehend angeführten Teilzahlungsvarianten diskutiert. Bei allen Teilzahlungsvarianten wird mit dem gleichen konstanten Zinssatz gerechnet.
Die Familie möchte sich für die Teilzahlungsvariante mit dem niedrigsten Barwert entscheiden.

– Kreuzen Sie diese Teilzahlungsvariante an. *[1 aus 5]*

eine Anzahlung Z und 60 nachschüssige Monatsraten R	☐
eine Anzahlung Z und 60 vorschüssige Monatsraten R	☐
60 nachschüssige Monatsraten $R + \frac{Z}{60}$	☐
60 nachschüssige Monatsraten R und gleichzeitig mit der letzten Monatsrate eine Restzahlung Z	☐
eine Anzahlung $\frac{Z}{2}$, 60 vorschüssige Monatsraten R und eine Restzahlung $\frac{Z}{2}$ am Ende der Laufzeit	☐

b) Die Geräte können durch einen Bankkredit finanziert werden. Familie Kurz erhält folgendes Angebot:
Kreditbetrag: € 10.000
Bearbeitungsgebühr: 2 % des Kreditbetrags (bei Kreditabschluss fällig)
60 nachschüssige Monatsraten zu je € 185

– Berechnen Sie den zugrunde liegenden jährlichen Effektivzinssatz dieses Angebots.

c) Familie Kurz vereinbart mit ihrer Bank einen Kredit in Höhe von € 10.000. Dieser ist durch nachschüssige Monatsraten innerhalb von 5 Jahren zu begleichen. Die Bank bietet einen Zinssatz von 0,25 % p. m. an.
Nach Zahlung von 12 Raten werden ein halbes Jahr keine Rückzahlungen geleistet. Anschließend werden die vereinbarten Raten weiterbezahlt. Die versäumten Zahlungen werden durch eine Sonderzahlung 3 Jahre nach Kreditaufnahme abgegolten.

– Stellen Sie den Verlauf der Kreditrückzahlung auf einer Zeitachse dar.

– Berechnen Sie die Höhe der vereinbarten Raten.

– Berechnen Sie, wie hoch die Sonderzahlung sein muss, um die versäumten Zahlungen nachzuholen.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)

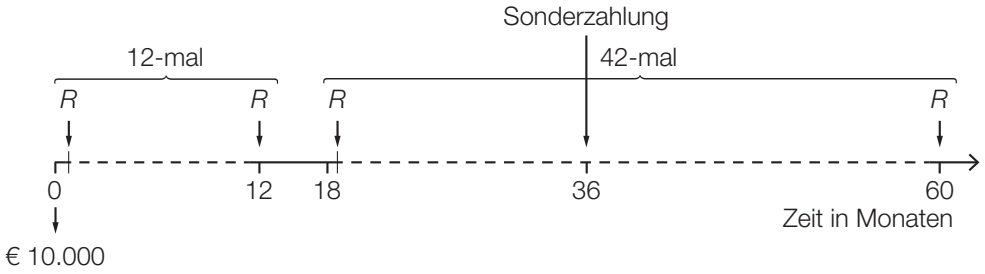
[...]	
[...]	
[...]	
60 nachschüssige Monatsraten R und gleichzeitig mit der letzten Monatsrate eine Restzahlung Z	☒
[...]	

b) $10\,000 = 200 + 185 \cdot \frac{q_{12}^{60} - 1}{q_{12} - 1} \cdot \frac{1}{q_{12}^{60}}$

Lösung mittels Technologieeinsatz:
$q_{12} = 1{,}00417...$
$q = (q_{12})^{12} = 1{,}05130\ldots$

effektiver Jahreszinssatz:
$i \approx 5{,}13\ \%$

c)



vereinbarte Ratenhöhe R:
$10\,000 = R \cdot \frac{1{,}0025^{60} - 1}{0{,}0025} \cdot \frac{1}{1{,}0025^{60}} \Rightarrow R \approx € 179{,}69$

Wert der 6 versäumten Monatsraten zum Zeitpunkt 18: $179{,}69 \cdot \frac{1{,}0025^{6} - 1}{0{,}0025} = 1\,084{,}90$
aufgezinst zum Zeitpunkt 36: $1\,084{,}90 \cdot 1{,}0025^{18} \approx 1\,134{,}77$

Die Sonderzahlung muss € 1.134,77 betragen.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) —
c) A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) leicht
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 1
b) 1
c) 4

Thema: Wirtschaft

Quellen: —

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Auf der Baustelle

Aufgabennummer: B_333

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Zur Bewegung von Lasten werden auf einer Baustelle verschiedene Hilfsmittel eingesetzt.

a) Mithilfe einer nahezu reibungsfreien festen Seilrolle soll eine Palette hochgehoben werden (siehe Abb. 1).
Auf das Seil wirkt eine Kraft von $F = 1{,}5$ kN unter einem Winkel $\alpha = 35°$.

Abb. 1

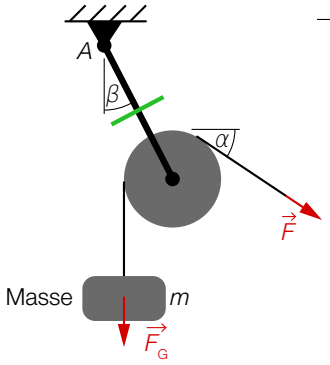
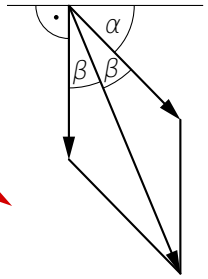


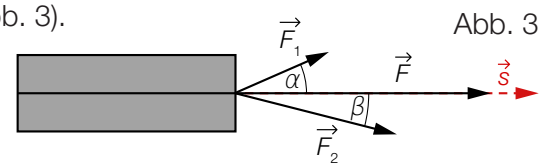
Abb. 2



– Beschriften Sie in Abb. 2 die Kräfte in der Skizze mit $\vec{F}_G$, $\vec{F}$ und $\vec{R}$, wobei $\vec{R}$ die Resultierende ist, die auf die Seilrolle wirkt.
– Berechnen Sie den Betrag der resultierenden Kraft $\vec{R}$.

b) Ein Wagen soll von 2 Bauarbeitern mit einer Kraft $\vec{F}$ gezogen werden.
$\vec{F}$ ist die Summe der Kräfte $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ (siehe Abb. 3).

Abb. 3



– Erstellen Sie eine Formel zur Ermittlung des Betrags der Kraft $\vec{F}_1$, wenn man den Betrag der Kraft $\vec{F}$ und die Winkel α und β kennt.

Beim Ziehen einer Last wird Arbeit W verrichtet.
Die Formel für die Arbeit W lautet: $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$

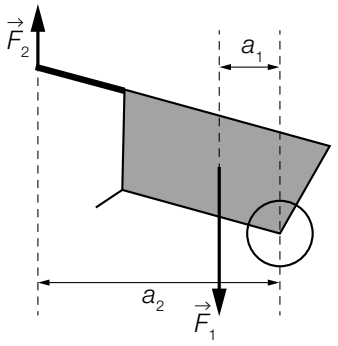
– Zeigen Sie, dass es im Fall der gegebenen Situation genügt, nur das Produkt der Beträge von $\vec{F}$ und $\vec{s}$ zu berechnen.

Wird die Last nur von einer Person gezogen, schließt die Kraft $\vec{F} = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix}$ N mit dem Weg $\vec{s} = \begin{pmatrix} 100 \\ 130 \end{pmatrix}$ m einen Winkel φ ein.

– Berechnen Sie die zu verrichtende Arbeit W.
– Berechnen Sie den Winkel φ.

c) 30 kg Schutt werden in einer Schubkarre abtransportiert. Dabei wirkt die Gewichtskraft $\vec{F}_1$ auf die Schubkarre. Zum Entladen muss die Schubkarre gekippt werden. Die Kraft $\vec{F}_2$, mit der man am äußersten Ende der Haltegriffe nach oben drücken muss, kann mithilfe des Hebelgesetzes $F_1 \cdot a_1 = F_2 \cdot a_2$ ermittelt werden. Die Gewichtskraft ist das Produkt aus Masse m und Erdbeschleunigung g.

Abb. 4



– Berechnen Sie den Betrag der Kraft $\vec{F}_2$, wenn $a_1 = 250$ mm und $a_2 = 1\,500$ mm gilt. (Rechnen Sie mit $g = 9{,}81$ m/s^2.)

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

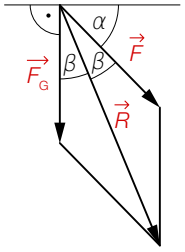
Möglicher Lösungsweg

a) $\beta = \frac{90° - \alpha}{2}$; $\cos(\beta) = \frac{\frac{R}{2}}{F}$

$R = 2 \cdot F \cdot \cos\left(\frac{90° - \alpha}{2}\right)$

$R = 2 \cdot 1{,}5 \cdot \cos(27{,}5°) = 2{,}6610\ldots \approx 2{,}66$

$R \approx 2{,}66$ kN



b) $\frac{F_1}{\sin(\beta)} = \frac{F}{\sin(180° - \alpha - \beta)}$

$F_1 = \frac{\sin(\beta) \cdot F}{\sin(180° - \alpha - \beta)}$

$W = \vec{F} \cdot \vec{s}$

$\vec{F} \cdot \vec{s} = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos(\varphi)$, φ ist der Winkel zwischen $\vec{F}$ und $\vec{s}$.

$\varphi = 0°$, da der Körper in Richtung der Kraft $\vec{F}$ gezogen wird.

$\Rightarrow \quad \cos(0°) = 1 \quad \Rightarrow \quad \vec{F} \cdot \vec{s} = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}|$

$\vec{F} \cdot \vec{s} = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 130 \end{pmatrix} = 33\,000 \qquad W = 33\,000$ Nm

$\varphi = \arccos\left(\frac{\vec{F} \cdot \vec{s}}{|\vec{F}| \cdot |\vec{s}|}\right) \qquad \varphi = 25{,}86\ldots° \approx 25{,}9°$

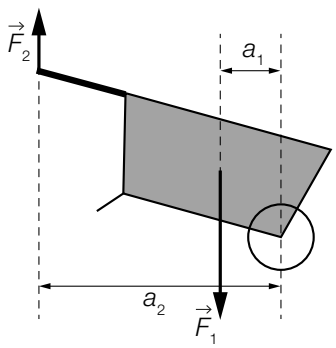
c) $F_2 = F_1 \cdot \frac{a_1}{a_2}$, $F_1 = m \cdot g$

$F_1 = 30 \cdot 9{,}81 = 294{,}3$

$F_1 = 294{,}3$ N

$F_2 = 294{,}3 \cdot (250)/(1\,500) = 49{,}05$

$F_2 = 49{,}05$ N



Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) D Argumentieren und Kommunizieren, A Modellieren und Transferieren
c) —

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) leicht

Punkteanzahl:

a) 2
b) 4
c) 2

Thema: Physik

Quellen: —

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Startkapital

Aufgabennummer: B_146

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Simon möchte sich selbstständig machen. Er setzt für die Gründung seines Unternehmens als Startkapital seine Ersparnisse und einen Kredit ein.

a) Er hat während der letzten 10 Jahre die folgenden Zahlungen auf ein mit 2,1 % p. a. verzinstes Sparbuch getätigt: Zu Beginn des 1. Jahres € 20.000, zu Beginn des 4. Jahres € 75.000 und ab dem Beginn des 8. Jahres monatlich vorschüssige Raten in Höhe von je € 450.

– Veranschaulichen Sie den Zahlungsstrom auf einer Zeitachse.

– Berechnen Sie, über welchen Betrag Simon nach diesen 10 Jahren verfügen kann.

Simon überlegt durch welche nachschüssigen Monatsraten R er in 10 Jahren denselben Betrag hätte ansparen können.

– Ermitteln Sie die Höhe dieser Rate R.

b) Simon benötigt zusätzlich zu seinen Ersparnissen ein Kapital in Höhe von € 45.000. Die Bank bietet ihm einen entsprechenden Kredit mit dem folgenden Tilgungsplan:

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0				€ 45.000,00
1	€ 1.665,00	€ 9.000,00	€ 10.665,00	€ 36.000,00
2	€ 1.332,00	€ 9.000,00		€ 27.000,00
3	€ 999,00	€ 9.000,00	€ 9.999,00	€ 18.000,00
4	€ 666,00	€ 9.000,00	€ 9.666,00	€ 9.000,00
5	€ 333,00	€ 9.000,00	€ 9.333,00	€ 0,00

– Ermitteln Sie die fehlende Zahl im Tilgungsplan.

In einem anderen Angebot soll diese Schuld bei einem Zinssatz von 4 % p. a. durch 5 nachschüssige Jahresraten getilgt werden.

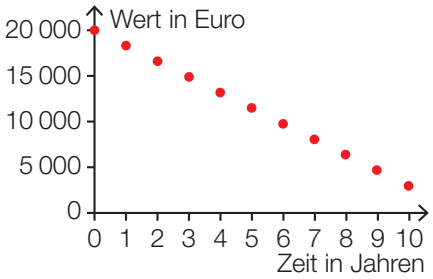
– Berechnen Sie die zugehörige Ratenhöhe.

c) Simon kauft vom Startkapital zu Beginn des Jahres für sein Unternehmen eine Maschine um € 20.000. Die Maschine verliert gegenüber dem Vorjahr jährlich 25 % ihres Wertes.

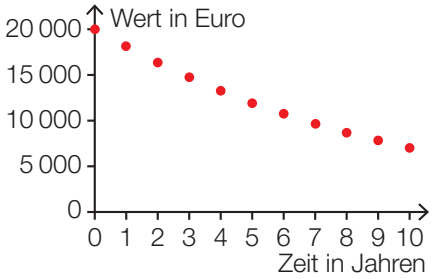
– Stellen Sie die Funktionsgleichung auf, die den Wert der Maschine jeweils zu Beginn jedes Jahres beschreibt. Wählen Sie $t = 0$ für den Beginn desjenigen Jahres, in dem die Maschine gekauft wird.
– Geben Sie eine passende Definitionsmenge zu dieser Funktion an.

Die nachstehenden grafischen Darstellungen sollen den Wert der Maschine zu Beginn jedes Jahres darstellen.

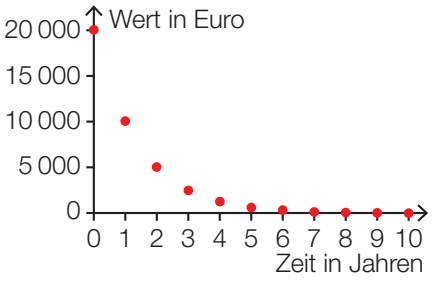
– Kreuzen Sie die korrekte Darstellung an. *[1 aus 5]*



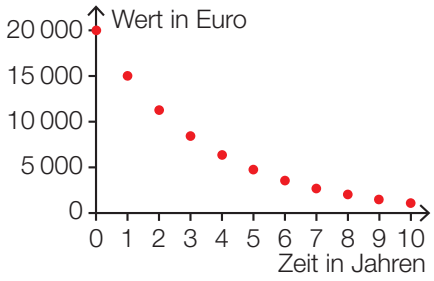
☐



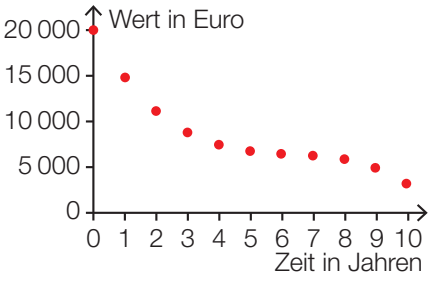
☐



☐



☐

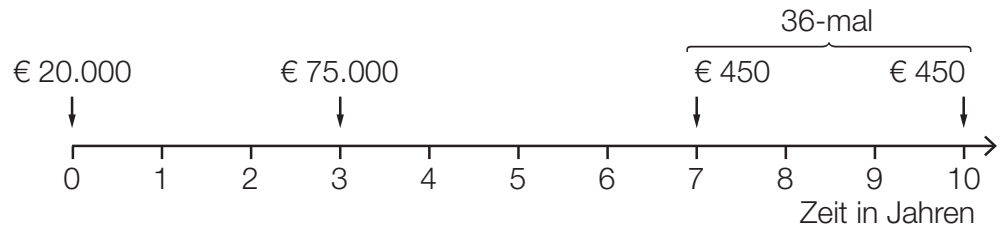


☐

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



$q_{12} = \sqrt[12]{1{,}021}$

$K_{10} = 20\,000 \cdot 1{,}021^{10} + 75\,000 \cdot 1{,}021^{7} + 450 \cdot \frac{q_{12}^{36} - 1}{q_{12} - 1} \cdot q_{12} = 128\,094{,}522...$

Simon kann nach 10 Jahren € 128.094,52 beheben.

$R \cdot \frac{q_{12}^{120} - 1}{q_{12} - 1} = 128\,094{,}52 \quad \Rightarrow \quad R = 961{,}203...$

Die Ratenhöhe beträgt € 961,20.

b) fehlende Zahl:

2. Zeile Annuität: € 10.332 (aus $Z + T = 1\,332 + 9\,000$)

$45\,000 = R \cdot \frac{1{,}04^5 - 1}{0{,}04} \cdot \frac{1}{1{,}04^5}$

$R = 10\,108{,}220...$

Die Ratenhöhe beträgt € 10.108,22.

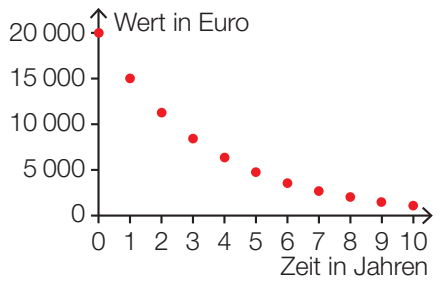
c) $W(t) = 20\,000 \cdot 0{,}75^t$ mit $t \in \mathbb{N}$

t … Anzahl der Jahre (ganzzahlig)

$W(t)$ … Wert zu Beginn des Jahres t in Euro (€)

$D = \mathbb{N}$

[...]	
[...]	
[...]	

[...]	
	☒

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) D Argumentieren und Kommunizieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 3
b) 2
c) 3

Thema: Wirtschaft

Quelle: teilweise Mitarbeit der Gruppe HUM Itemwriterschulung OÖ 2014

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Immobilienmarkt

Aufgabennummer: A_083

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) In zwei Wohnblöcken wurden die Nutzflächen der Wohnungen vermessen:

Wohnblock 1

Nutzfläche	Anzahl der Wohnungen
45 m²	13
60 m²	13
80 m²	7
95 m²	16
150 m²	4

Wohnblock 2

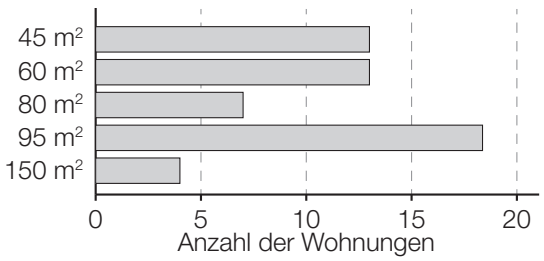
Nutzfläche	Anzahl der Wohnungen
45 m²	5
60 m²	10
80 m²	10
95 m²	3
150 m²	2

Diese Daten können auf unterschiedliche Arten grafisch dargestellt werden.

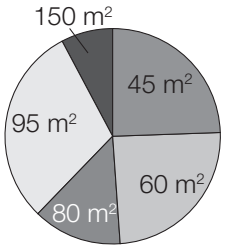
– Ordnen Sie den beiden Wohnblöcken jeweils die passende grafische Darstellung aus A bis D zu. *[2 zu 4]*

Wohnblock 1	
Wohnblock 2	

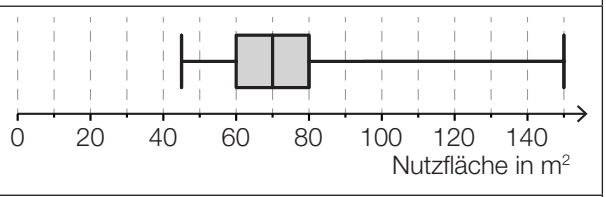
A



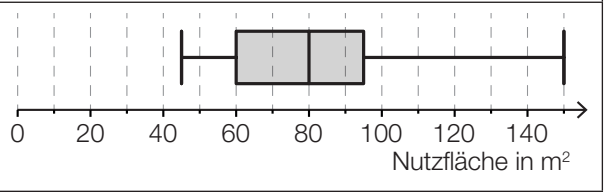
B



C



D



– Berechnen Sie für Wohnblock 1 das arithmetische Mittel der Nutzflächen.

b) In einer Wohnungsanzeige ist der Grundrissplan einer Wohnung abgedruckt. Dieser wurde im Maßstab 1 : *m* angefertigt. Ein rechteckiger Raum hat in diesem Plan eine Länge von *a* cm und eine Breite von *b* cm.

– Erstellen Sie mithilfe von *a*, *b* und *m* eine Formel zur Berechnung des tatsächlichen Flächeninhalts *A* dieses Raums in m^2.

$A =$ _____

c) Die Miete für ein Büro beträgt 1.350 Euro pro Monat. Dieser Betrag soll folgendermaßen auf 4 Mieterinnen aufgeteilt werden:
Mieterin *B* zahlt ein Drittel des Betrags von Mieterin *A*. Mieterin *C* zahlt um 50 Euro mehr als Mieterin *A*. Mieterin *D* zahlt die Hälfte des Betrags von Mieterin *C*.

– Erstellen Sie eine Gleichung zur Berechnung des Betrags von Mieterin *A*.
– Berechnen Sie den Betrag von Mieterin *A*.

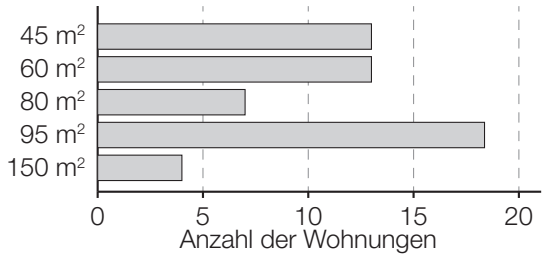
Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

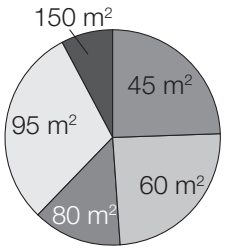
a)

Wohnblock 1	B
Wohnblock 2	C

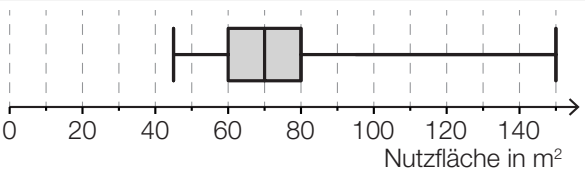
A



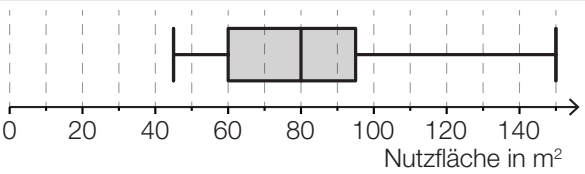
B



C



D



$$\frac{45 \cdot 13 + 60 \cdot 13 + 80 \cdot 7 + 95 \cdot 16 + 150 \cdot 4}{13 + 13 + 7 + 16 + 4} = \frac{4\,045}{53} = 76{,}32\ldots$$

Das arithmetische Mittel der Nutzflächen in Wohnblock 1 beträgt rund 76,3 m².

b) $A = \frac{a \cdot b \cdot m^2}{10\,000}$

c) x … Betrag von Mieterin A in Euro

$$x + \frac{x}{3} + x + 50 + \frac{x + 50}{2} = 1\,350$$

$x = 450$

Der Betrag von Mieterin A beläuft sich auf 450 Euro.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) 1 Zahlen und Maße
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) A Modellieren und Transferieren
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) —
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) leicht

Punkteanzahl:

a) 2
b) 1
c) 2

Thema: Sonstiges

Quellen: —

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Stadtlauf (2)

Aufgabennummer: A_079

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

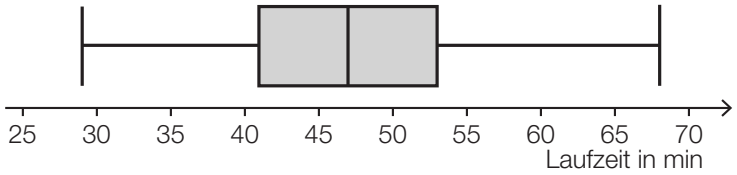
In einer Stadt findet jährlich ein Laufwettbewerb statt.

a) Eine Gruppe von Schülerinnen und Schülern einer Maturaklasse hat am Stadtlauf teilgenommen. In der folgenden Tabelle sind ihre Laufzeiten in Minuten aufgelistet:

46	50	43	49	59	61
53	54	53	56	67	39

– Ermitteln Sie das arithmetische Mittel und den Median der Laufzeiten.
– Begründen Sie, warum der Median gegenüber extremen Einzelwerten („Ausreißern") stabiler als das arithmetische Mittel ist.

b) Die nachstehende Grafik zeigt einen Boxplot, der die Laufzeiten aller Teilnehmer/innen des Stadtlaufs darstellt.



– Lesen Sie die ungefähren Werte der 5 Kenngrößen des Boxplots ab.
– Interpretieren Sie das obere Quartil q_3 in Bezug auf die erreichten Laufzeiten.
– Begründen Sie, warum man anhand des Boxplots keine Aussage über die Anzahl der Teilnehmer/innen machen kann.

c) Erfahrungsgemäß verwenden etwa 6,3 % der Hobbyläufer/innen Dopingmittel. Es werden n zufällig ausgewählte Personen auf die Verwendung von Dopingmitteln getestet.

– Erstellen Sie mithilfe von n eine Formel zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 1 dieser n Personen Dopingmittel verwendet hat.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) arithmetisches Mittel: 52,5 min
Median: 53 min

Das arithmetische Mittel wird aus allen vorkommenden Einzelwerten berechnet, daher wirken sich extreme Einzelwerte relativ stark aus.
Der Median ist „die Mitte“ der geordneten Datenliste. Extreme Einzelwerte am oberen oder unteren Ende wirken sich auf den Median nicht aus. Daher ist der Median stabiler gegenüber Ausreißern.

b) Minimum: 29 min, Maximum: 68 min, Median: 47 min, 1. Quartil: 41 min, 3. Quartil: 53 min

Mindestens 25 % der Läufer/innen haben eine Laufzeit von mindestens 53 min. Zugleich haben mindestens 75 % der Läufer/innen eine Laufzeit von höchstens 53 min.

Aus dem Boxplot kann man nur Extremwerte und Quartile ablesen. Daher kann man eine Aussage über die Verteilung der Laufzeiten machen, aber nicht über die Anzahl der Läufer/innen.

c) X … Anzahl der Personen, die Dopingmittel verwendet haben

$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1 - 0{,}063)^n$

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 5 Stochastik
c) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) —

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) leicht
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 3
c) 1

Thema: Sport

Quellen: —

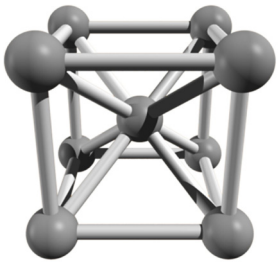
Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Atomium

Aufgabennummer: A_036

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Das *Atomium* ist ein Gebäude, das in Brüssel anlässlich der Weltausstellung 1958 errichtet wurde. Die nebenstehende Abbildung stellt ein Modell dieses würfelförmigen Gebäudes dar.



a) Das Atomium besteht aus 9 Kugeln von je 18 m Durchmesser.

– Berechnen Sie das Volumen und die Oberfläche aller 9 Kugeln (inklusive der Flächen, die durch die Röhren verdeckt werden).

b) Die Kugeln werden durch insgesamt 20 Röhren verbunden.

– Argumentieren Sie mithilfe des pythagoräischen Lehrsatzes, warum nicht alle Röhren gleich lang sein können.

c) Das Atomium ist 102 m hoch. Es stellt das Modell einer Eisen-Kristallstruktur in 165-milliardenfacher Vergrößerung dar.

– Berechnen Sie die Höhe der Eisen-Kristallstruktur in Nanometern (nm).

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $r = 9$ m

$O = 9 \cdot 4 \cdot r^2 \cdot \pi$

$O \approx 9161$ m^2

$V = 9 \cdot \frac{4 \cdot r^3 \cdot \pi}{3}$

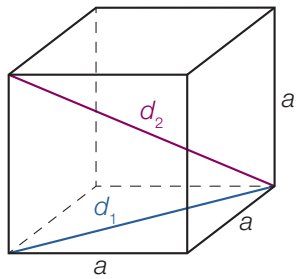
$V \approx 27483$ m^3

b) Wenn alle Röhren gleich lang wären, müsste die Raumdiagonale des Würfels doppelt so lang wie die Seitenkante a sein.

Für jeden Würfel gilt:
Die Raumdiagonale des Würfels erhält man mithilfe des Lehrsatzes von Pythagoras.

Flächendiagonale: $d_1 = \sqrt{2 \cdot a^2} = \sqrt{2} \cdot a$

Raumdiagonale: $d = \sqrt{d_1^2 + a^2} = \sqrt{2 \cdot a^2 + a^2} = \sqrt{3} \cdot a$



Dies entspricht nicht der doppelten Seitenkante $2 \cdot a$.
Daher müssen die diagonalen Röhren auf jeden Fall kürzer sein als jene an den Seitenkanten.

c) $\frac{102}{165 \cdot 10^9} = 6{,}1818... \cdot 10^{-10}$

$6{,}1818... \cdot 10^{-10}$ m $= 0{,}6181...$ nm

Die Eisen-Kristallstruktur ist rund 0,618 nm hoch.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 1 Zahlen und Maße

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) –
b) –
c) –

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) leicht

Punkteanzahl:

a) 2
b) 1
c) 1

Thema: Architektur

Quellen: –

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Oberflächenspannung von Wasser

Aufgabennummer: B_268

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Die Oberfläche von Wasser verhält sich ähnlich einer gespannten, elastischen Folie. Diese Oberflächenspannung von Wasser ist abhängig von dessen Temperatur und kann näherungsweise durch die folgende Funktion σ beschrieben werden:

$$\sigma(T) = 59{,}2 + 53{,}8 \cdot \ln\left(\frac{644 - T}{273{,}15}\right) \text{ mit } 273{,}15 \leq T \leq 370$$

T … Wassertemperatur in Kelvin (K)
$\sigma(T)$ … Oberflächenspannung bei einer Wassertemperatur T in Mikronewton pro Meter (µN/m)

273,15 Kelvin entsprechen 0 Grad Celsius (°C).
Eine Temperaturveränderung um 1 Kelvin entspricht einer Veränderung um 1 °C.

a)
- Berechnen Sie die Oberflächenspannung von Wasser bei 25 °C.
- Erklären Sie mithilfe der Funktionsgleichung, warum die Oberflächenspannung mit steigender Wassertemperatur abnimmt.
- Berechnen Sie die Funktionswerte der 1. Ableitung von σ für $T = 274$ K und für $T = 350$ K.
- Vergleichen Sie die Ergebnisse der berechneten Werte im gegebenen Sachzusammenhang.

b) Ausgehend von $\sigma(T) = 59{,}2 + 53{,}8 \cdot \ln\left(\frac{644 - T}{273{,}15}\right)$ wurden Umformungen durchgeführt.

– Kreuzen Sie diejenige Umformung an, die korrekt ist. *[1 aus 5]*

$e^{\sigma(T)} = e^{59{,}2} + 53{,}8 \cdot \left(\frac{644 - T}{273{,}15}\right)$	☐
$\sigma(T) - 59{,}2 = 53{,}8 \cdot \frac{\ln(644 - T)}{\ln(273{,}15)}$	☐
$273{,}15 \cdot e^{\frac{\sigma(T) - 59{,}2}{53{,}8}} = 644 - T$	☐
$\frac{\sigma(T)}{53{,}8} = 59{,}2 + \ln(644 - T) - \ln(273{,}15)$	☐
$\sigma(T) - 59{,}2 + \ln(273{,}15) = 53{,}8 \cdot \ln(644 - T)$	☐

c) – Modellieren Sie die Funktion σ so, dass die Temperatur in Grad Celsius eingesetzt werden kann. Verwenden Sie in der veränderten Funktion für die Temperatur in °C die Bezeichnung T_C (0 K = –273,15 °C, $\Delta T = \Delta T_C$).

d) Die Oberflächenspannung in Abhängigkeit von der Temperatur kann vereinfacht auch durch eine lineare Funktion beschrieben werden.

Temperatur in K	275	285	295	305	315	325	335	345	355
Oberflächenspannung in µN/m	75,38	73,90	72,38	70,82	69,21	67,55	65,83	64,06	62,23

– Ermitteln Sie für diese Daten eine lineare Ausgleichsfunktion.
– Interpretieren Sie die Steigung dieser Ausgleichsfunktion im gegebenen Sachzusammenhang.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $\sigma(298{,}15) = 71{,}89\ldots$

Die Oberflächenspannung beträgt bei 25 °C (298,15 K) ungefähr 71,9 µN/m.

Steigt T, wird der Bruch $\frac{644 - T}{273{,}15}$ kleiner, und damit sinkt auch $53{,}8 \cdot \ln\left(\frac{644 - T}{273{,}15}\right)$.
Es wird also ein immer kleiner werdender Wert zu 59,2 addiert.

$\sigma'(274) \approx -0{,}1454\ \frac{\mu N/m}{K}$

$\sigma'(350) \approx -0{,}183\ \frac{\mu N/m}{K}$

Die Oberflächenspannung sinkt mit steigender Wassertemperatur bei 350 K stärker als bei 274 K.

b)

[...]	
[...]	
$273{,}15 \cdot e^{\frac{\sigma(T) - 59{,}2}{53{,}8}} = 644 - T$	☒
[...]	
[...]	

c) $\sigma(T_C) = 59{,}2 + 53{,}8 \cdot \ln\left(\frac{644 - (273{,}15 + T_C)}{273{,}15}\right)$

d) Ermittlung durch lineare Regression: $\sigma(T) = -0{,}16\ldots \cdot T + 120{,}74\ldots$
Bedeutung der Steigung: Nimmt die Temperatur um 1 K zu, nimmt die Oberflächenspannung um rund 0,16 µN/m ab.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 3 Funktionale Zusammenhänge
d) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) —
c) 2 Algebra und Geometrie
d) 3 Funktionale Zusammenhänge

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) A Modellieren und Transferieren
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz, C Interpretieren und Dokumentieren
b) —
c) —
d) C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel
d) mittel

Punkteanzahl:

a) 4
b) 1
c) 1
d) 2

Thema: Sonstiges

Quellen: —

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Betonschutzwand

Aufgabennummer: A_171

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

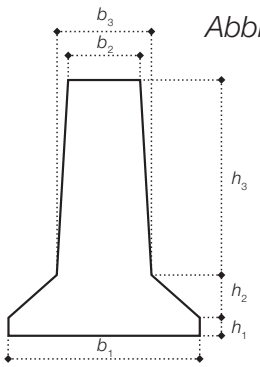
Zur Sicherung von Baustellen auf den Straßen werden verschiedene Betonschutzwände eingesetzt.

a) Der Querschnitt einer Betonschutzwand ist in der Abbildung 1 dargestellt.

– Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung des Flächeninhalts A der Querschnittsfläche.

$A =$ _____

Abbildung 1



b) Die Abbildung 2 zeigt den Querschnitt einer anderen Betonschutzwand.

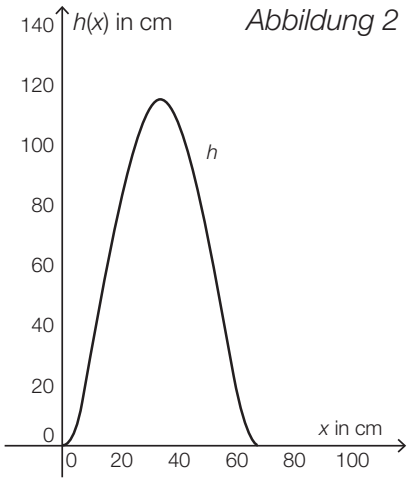
$h(x) = \frac{1}{11\,560} \cdot x^4 - \frac{1}{85} \cdot x^3 + \frac{2}{5} \cdot x^2$ mit $0 \le x \le 68$
x, $h(x)$ … Koordinaten in cm

– Berechnen Sie den Flächeninhalt der Querschnittsfläche dieser Betonschutzwand.

Die Betonschutzwand hat eine Länge von 4 m und eine Dichte von 2 400 kg/m³ (Masse = Dichte × Volumen).

– Berechnen Sie die Masse dieser Betonschutzwand in Tonnen.

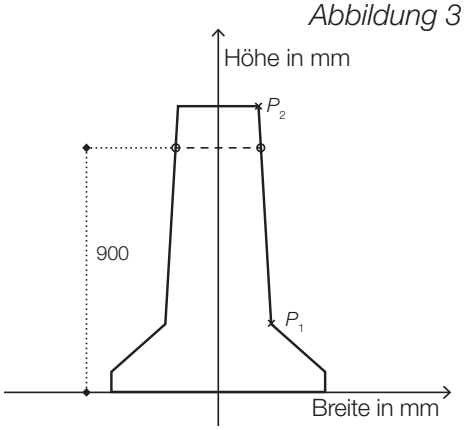
Abbildung 2



c) Bei einem Element einer Betonschutzwand wird in einer Höhe von 900 mm eine waagrechte Bohrung gemacht (siehe Abbildung 3). Die rechte Begrenzungslinie der zur y-Achse symmetrischen Querschnittsfläche geht durch die Punkte $P_1 = (200|255)$ und $P_2 = (150|1\,070)$.

– Berechnen Sie die Breite des Elements in 900 mm Höhe.

Abbildung 3



d) Auf einer Baustelle stehen zwei verschieden lange Elemente A und B der Betonschutzwände zur Verfügung. Für die Abgrenzung der Baustelle mit einer Länge von 70 m können entweder 14 Elemente A und 10 Elemente B oder 7 Elemente A und 15 Elemente B verwendet werden.

– Stellen Sie ein Gleichungssystem zur Ermittlung der Längen der Elemente A und B auf.
– Berechnen Sie die Längen der Elemente A und B.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $A = b_1 \cdot h_1 + \frac{b_1 + b_3}{2} \cdot h_2 + \frac{b_2 + b_3}{2} \cdot h_3$

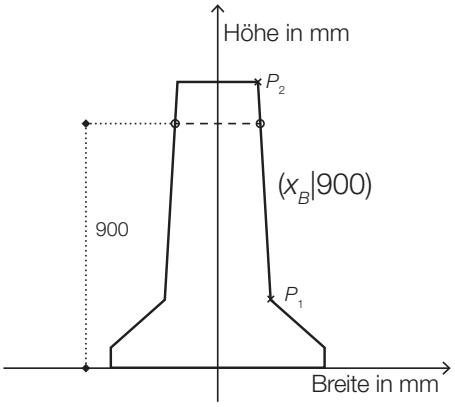
b) $A = \int_0^{68} h(x)\,dx$

$A = 4\,192{,}4\ldots \text{ cm}^2 = 0{,}41924\ldots \text{ m}^2$
$m = V \cdot \rho = 0{,}41924\ldots \cdot 4 \cdot 2\,400 = 4\,024{,}72\ldots$
$m \approx 4 \text{ t}$

Die Masse dieser Betonschutzwand beträgt rund 4 t.

c) lineare Funktion g durch die Punkte P_1 und P_2:
$g(x) = k \cdot x + d$
$255 = k \cdot 200 + d$
$1\,070 = k \cdot 150 + d$
$\Rightarrow k = -16{,}3;\ d = 3\,515$
$g(x) = -16{,}3 \cdot x + 3\,515$
$900 = -16{,}3 \cdot x_B + 3\,515 \Rightarrow x_B = 160{,}429\ldots$
$2 \cdot x_B = 320{,}858\ldots$

Die Breite auf einer Höhe von 900 mm beträgt rund 321 mm.



d) L_A … Länge des Elements A in m
L_B … Länge des Elements B in m

I: $14 \cdot L_A + 10 \cdot L_B = 70$
II: $7 \cdot L_A + 15 \cdot L_B = 70$

Lösung mittels Technologieeinsatz:
$L_A = 2{,}5$ m
$L_B = 3{,}5$ m

Die Länge des Elements A beträgt 2,5 m und die Länge des Elements B beträgt 3,5 m.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 4 Analysis
c) 3 Funktionale Zusammenhänge
d) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) 1 Zahlen und Maße
c) —
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) A Modellieren und Transferieren
d) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) —
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel
d) leicht

Punkteanzahl:

a) 1
b) 2
c) 2
d) 2

Thema: Sonstiges

Quellen: —

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Flugrouten

Aufgabennummer: B_051

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Zwei Flugzeuge fliegen mit konstanter Geschwindigkeit auf geradlinigem Kurs.
Das erste Flugzeug befindet sich zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ s im Ursprung des gewählten Koordinatensystems, zum Zeitpunkt $t_1 = 3$ s ist es in $P = (7|{-4}|8)$.
Das zweite Flugzeug befindet sich zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ s in $Q = (1|21|{-12})$ und zum Zeitpunkt $t_1 = 3$ s in $R = (4|12|{-3})$.
Für alle Koordinatenangaben gilt: 1 Einheit entspricht 10 m.

a) – Stellen Sie die beiden Geradengleichungen auf, die die jeweiligen Positionen der Flugzeuge in Abhängigkeit von der Zeit t beschreiben.
– Zeigen Sie, dass sich die beiden Flugzeuge nicht auf Kollisionskurs befinden.
(Zu zeigen ist, dass die beiden Kurse einander nicht zum gleichen Zeitpunkt schneiden.)

b) – Berechnen Sie, mit welcher Geschwindigkeit in km/h das erste Flugzeug fliegt.
– Erklären Sie, was man über die Modellierung der Geschwindigkeit und der Richtung eines Flugzeugs sagen kann, wenn der Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}$ des Flugzeugs mit einer reellen Zahl $k \neq 0$, $|k| < 1$ multipliziert wird.

c) Die Funktion f beschreibt den Abstand zweier anderer Flugzeuge voneinander in Abhängigkeit von der Zeit t.

$$f(t) = \sqrt{(1 + t)^2 + (21 - 3 \cdot t)^2 + (-12 + 3 \cdot t)^2}$$

t … Zeit nach Beginn der Betrachtung in s
$f(t)$ … Abstand der beiden Flugzeuge zum Zeitpunkt t

– Stellen Sie die Funktion f in einem geeigneten Koordinatensystem grafisch dar.

Beträgt der Abstand der beiden Flugzeuge weniger als 50 m, spricht man von einer Kollision.

– Überprüfen Sie anhand der von Ihnen erstellten Grafik, ob die beiden Flugzeuge kollidieren.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $g: \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \vec{v}$

$g_1: X = t \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$

$g_2: X = \begin{pmatrix} 1 \\ 21 \\ -12 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 9 \end{pmatrix}$

$7 \cdot t = 1 + 3 \cdot t \Rightarrow t = \frac{1}{4}$

$-4 \cdot t = 21 - 9 \cdot t \Rightarrow t = \frac{21}{5}$

$8 \cdot t = -12 + 9 \cdot t \Rightarrow t = 12$

Anhand der verschiedenen Werte für t sieht man, dass sich die beiden Flugzeuge nicht auf Kollisionskurs befinden.

Andere richtige Argumentationen sind ebenfalls möglich.

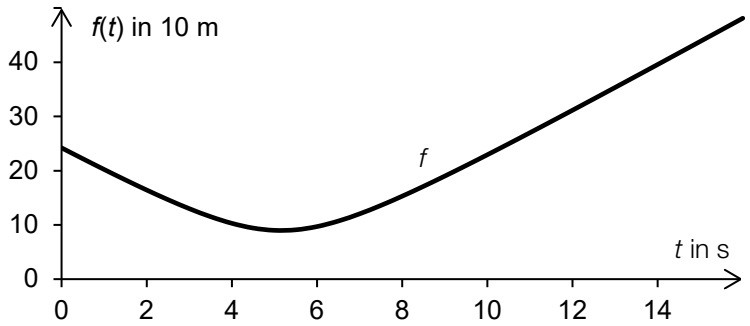
b) $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$

$\Delta s = 10 \cdot \left| \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} \right| = 10 \cdot \sqrt{49 + 16 + 64} = 113{,}57\ldots \text{ m}$

$v = \frac{113{,}57\ldots \text{ m}}{3 \text{ s}} = 37{,}85\ldots \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 136 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

$k \cdot \vec{v}$: $0 < k < 1$ … die Geschwindigkeit ist kleiner
$-1 < k < 0$ … die Geschwindigkeit ist kleiner und das Flugzeug fliegt in die entgegengesetzte Richtung

c)



Der minimale Abstand der Flugzeuge beträgt etwa 90 m, es kommt also zu keiner Kollision.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) leicht
c) leicht

Punkteanzahl:

a) 4
b) 3
c) 2

Thema: Verkehr

Quellen: –

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Goldener Schnitt

Aufgabennummer: B_291

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Eine Strecke (vgl. Abbildung 1) wird in die zwei Teile a und b geteilt ($a > b$).
Gilt $a : b = (a + b) : a$, dann bezeichnet man das Teilungsverhältnis $\phi = a : b$ als den *Goldenen Schnitt*.



Abbildung 1

a) – Zeigen Sie, dass für $b = 1$ gilt: $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

Wenn man von einem Rechteck, dessen Seitenverhältnis dem Goldenen Schnitt entspricht, ein Quadrat A abtrennt (Abbildung 2), dann entspricht das Seitenverhältnis des verbleibenden Rechtecks B ebenfalls dem Goldenen Schnitt.

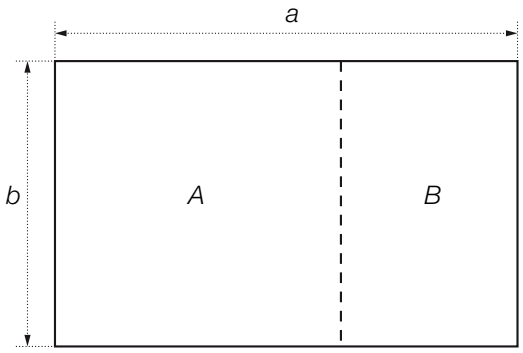


Abbildung 2

– Zeigen Sie diese Eigenschaft für den Fall $b = 1$.

b) Ein Rechteck, dessen Seitenverhältnis dem Goldenen Schnitt entspricht, wird als *Goldenes Rechteck* bezeichnet. In Abbildung 3 wird ein Goldenes Rechteck fortlaufend durch Abtrennung eines Quadrats geteilt. Anschließend wird in den einzelnen Quadraten ein Viertelkreis gezeichnet. Dadurch entsteht eine sogenannte *Goldene Spirale*.

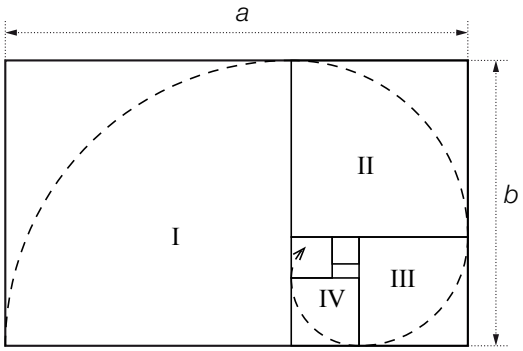


Abbildung 3

– Berechnen Sie die Länge dieser Spirale für die Quadrate I bis IV, wenn die Seitenlängen des Rechtecks a = 144 cm und b = 89 cm betragen.

c) Schon nach dem antiken Schönheitsideal gilt ein Mensch als wohlproportioniert, wenn die Höhe des Nabels die Körpergröße im Goldenen Schnitt teilt. In einer Bevölkerungsgruppe entsprechen 87 % diesem Ideal.

– Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass von 5 zufällig ausgewählten Personen dieser Bevölkerungsgruppe mindestens 3 diesem Ideal entsprechen.

In einer anderen Bevölkerungsgruppe wurden die Daten von 5 Personen erhoben:

x = Höhe bis zum Nabel in cm	105	115	108	121	114
y = Körpergröße in cm	159	174	161	182	171

– Ermitteln Sie mithilfe der gegebenen Daten eine Gleichung der zugehörigen linearen Regressionsfunktion.

d) Das Seitenverhältnis eines rechteckigen digitalen Bilderrahmens mit einer Diagonale von d = 10 Zoll entspricht mit 1,6 in etwa dem Goldenen Schnitt.

– Berechnen Sie die Breite (= längere Rechteckseite) des Bildschirms in Zentimetern (1 Zoll = 2,54 cm).

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Für $b = 1$ gilt:

$a : 1 = (a + 1) : a \Rightarrow a^2 = a + 1 \Rightarrow a^2 - a - 1 = 0$

$$a_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Die zweite Lösung $a_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ kann aufgrund der Voraussetzung $a > 1$ nicht auftreten.

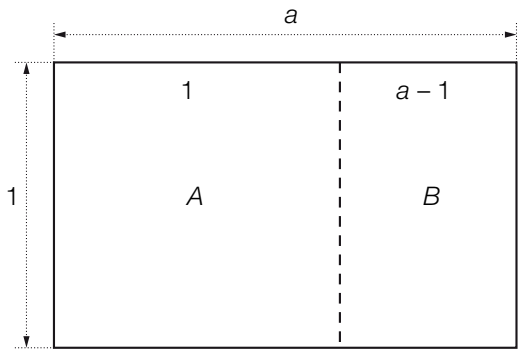
$$a : 1 = \phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Für das ursprüngliche Rechteck gilt:

$$\frac{a}{1} = \frac{a + 1}{a} \Rightarrow a - 1 = \frac{1}{a}$$

und durch den Kehrwert $1 : (a - 1) = a : 1$

Somit entspricht das Seitenverhältnis des Rechtecks B dem Goldenen Schnitt.



Alternativer Lösungsweg:

Im ursprünglichen Rechteck gilt: $a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

Das Seitenverhältnis des Rechtecks B entspricht genau dann dem Goldenen Schnitt, wenn gilt:

$$\frac{1}{a - 1} = \frac{a}{1}$$

$$\frac{1}{a - 1} = \frac{a}{1} \Leftrightarrow 1 = (a - 1) \cdot a \Leftrightarrow a^2 - a - 1 = 0$$

Diese Gleichung ist für $a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ laut Voraussetzung erfüllt.

b) Radien der Viertelkreise: $r_{I} = 89$, $r_{II} = 144 - 89 = 55$, $r_{III} = 89 - 55 = 34$, $r_{IV} = 55 - 34 = 21$
Länge der Spirale: $\frac{\pi}{2} \cdot 89 + \frac{\pi}{2} \cdot 55 + \frac{\pi}{2} \cdot 34 + \frac{\pi}{2} \cdot 21 = 99{,}5 \cdot \pi \approx 312{,}59$ cm

c) Binomialverteilung mit $p = 0{,}87$ und $n = 5$
$P(X \geq 3) = 0{,}9820\ldots \approx 98{,}2\ \%$

Ermitteln der Gleichung mittels Technologieeinsatz:
$y = 1{,}5064 \cdot x - 0{,}2163$ *(Parameter gerundet)*

d) $d = 25{,}4$ cm; $\frac{\text{Breite}}{\text{Höhe}} = \frac{b}{h} = 1{,}6 \Rightarrow h = \frac{b}{1{,}6}$

Pythagoras: $d^2 = b^2 + h^2 = b^2 + \left(\frac{b}{1{,}6}\right)^2 \Rightarrow b^2 = \frac{d^2}{1 + \left(\frac{1}{1{,}6}\right)^2}$

Breite $b = 21{,}539\ldots \approx 21{,}54$ cm

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 5 Stochastik
d) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) —
c) —
d) A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:

a) schwer
b) mittel
c) leicht
d) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 1
c) 2
d) 2

Thema: Sonstiges

Quelle: Elam, Kimberley: *Proportion und Komposition. Geometrie im Design.* New York: Princeton Architectural Press 2006.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Marillenernte

Aufgabennummer: A_139

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

In einer bestimmten Region werden Marillen geerntet.

a) Man geht davon aus, dass in dieser Region 12 % der Marillen Schäden aufweisen.

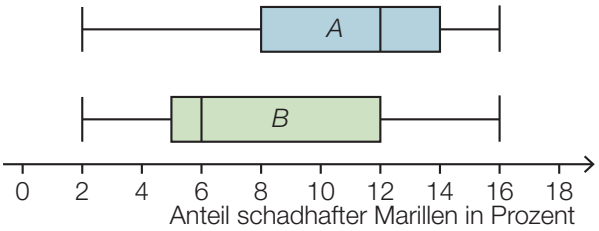
– Beschreiben Sie ein Ereignis im gegebenen Sachzusammenhang, dessen Wahrscheinlichkeit durch den Ausdruck $\binom{50}{3} \cdot 0{,}12^3 \cdot 0{,}88^{47}$ berechnet wird.

Aus der gesamten Ernte wird eine Zufallsstichprobe von n Stück Marillen ausgewählt.

– Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung folgender Wahrscheinlichkeit:

P(„keine der ausgewählten Marillen weist Schäden auf“) = _____

b) Eine mehrjährig laufende Untersuchung zur Erntequalität von Marillen in dieser Region ergab unterschiedliche Ergebnisse bei den Sorten *A* und *B*. Der relative Anteil schadhafter Marillen an der gesamten Ernte pro Erntejahr und Sorte ist in den nachstehenden Boxplots veranschaulicht.



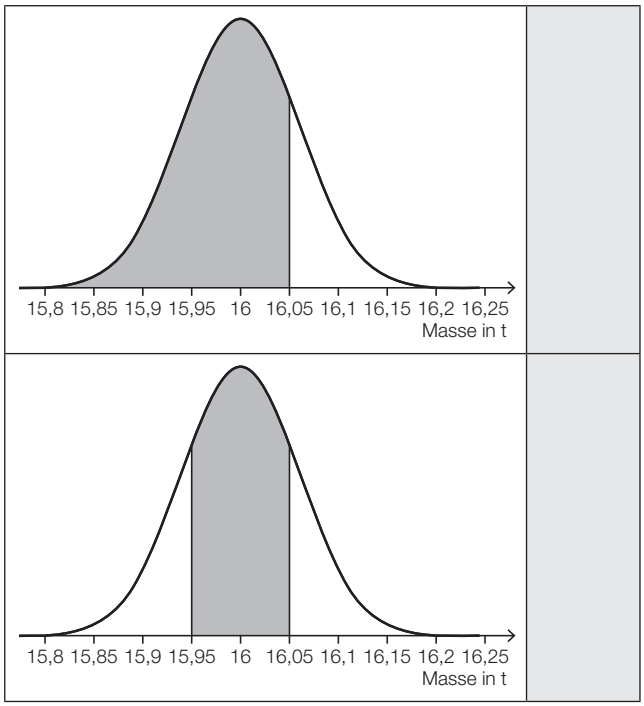
– Kreuzen Sie diejenige Aussage an, die aufgrund der obigen Boxplots sicher richtig ist. *[1 aus 5]*

Insgesamt waren in keinem Jahr weniger als 4 % der Marillen in dieser Region schadhaft.	☐
Bei Sorte *B* waren in mehr Erntejahren mindestens 6 % der Marillen schadhaft als bei Sorte *A*.	☐
Bei beiden Sorten waren in mindestens der Hälfte der Erntejahre mindestens 12 % der Marillen schadhaft.	☐
Bei Sorte *A* waren in mindestens $\frac{3}{4}$ der Erntejahre höchstens 14 % der Marillen schadhaft.	☐
In jedem Erntejahr waren zumindest bei einer der beiden Sorten weniger als 16 % der Marillen schadhaft.	☐

c) Die Masse der pro Jahr verkauften Marillen X ist normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 16$ Tonnen und der Standardabweichung $\sigma = 0{,}06$ Tonnen.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Jahr höchstens 15,9 Tonnen Marillen verkauft werden.

– Ordnen Sie den gekennzeichneten Flächen jeweils die entsprechende Wahrscheinlichkeit aus A bis D zu. *[2 zu 4]*



A	$1 - P(X \geq 16{,}05)$
B	$P(X \geq 16{,}05)$
C	$1 - 2 \cdot P(X \geq 16{,}05)$
D	$P(X \leq 15{,}95) - P(X \leq 16{,}05)$

d) Ein Obstbauer hat 30 Tonnen Marillen geerntet. 75 % seiner diesjährig geernteten Marillen sind einwandfrei und können direkt verkauft werden. 15 % der schadhaften Marillen können zur Herstellung von Marillenschnaps verwendet werden. Alle übrigen Marillen sind Abfall.

– Berechnen Sie, wie viel Prozent der Ernte Abfall ist.

1 kg einwandfreier Marillen kann um € 1,50 und 1 kg Marillen zum Schnapsbrennen kann um € 0,40 verkauft werden.

– Berechnen Sie die Einnahmen des Obstbauern.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

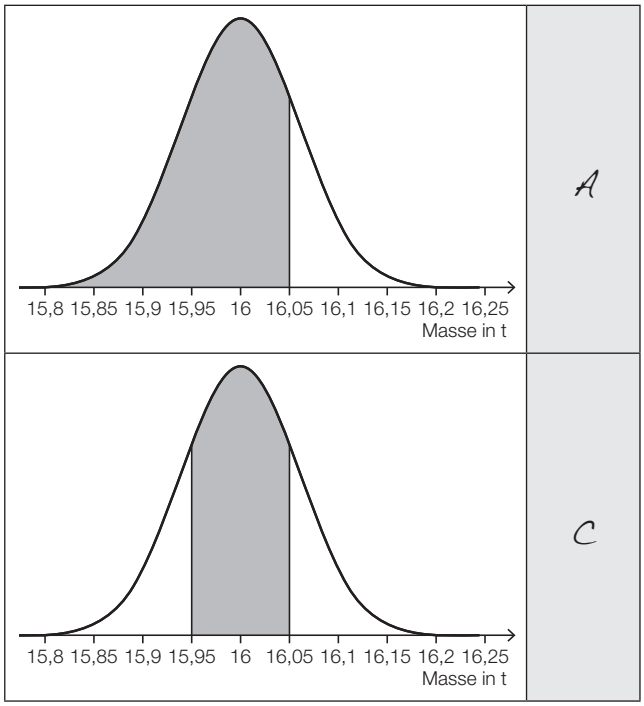
a) In einer Zufallsstichprobe von 50 Stück weisen genau 3 Marillen Schäden auf.

P(„keine der ausgewählten Marillen weist Schäden auf“) = $0{,}88^n$

b)

Bei Sorte A waren in mindestens $\frac{3}{4}$ der Erntejahre höchstens 14 % der Marillen schadhaft.	☒

c) Berechnung mit Technologieeinsatz: Normalverteilung mit $\sigma = 0{,}06$ und $\mu = 16$
$P(X \leq 15{,}9) = 0{,}0477\ldots$
Die Wahrscheinlichkeit beträgt rund 4,8 %.



A	$1 - P(X \geq 16{,}05)$
B	$P(X \geq 16{,}05)$
C	$1 - 2 \cdot P(X \geq 16{,}05)$
D	$P(X \leq 15{,}95) - P(X \leq 16{,}05)$

d) $(1 - 0{,}75) \cdot (1 - 0{,}15) = 0{,}25 \cdot 0{,}85 = 0{,}2125$
21,25 % der Ernte ist Abfall.

$30\,000 \cdot (0{,}75 \cdot 1{,}5 + 0{,}25 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}4) = 34\,200$
Die Einnahmen betragen € 34.200.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 5 Stochastik
c) 5 Stochastik
d) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) —
c) C Interpretieren und Dokumentieren
d) —

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel
d) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 1
c) 2
d) 2

Thema: Sonstiges

Quellen: —

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Körpermaße von Föten und Neugeborenen

Aufgabennummer: A_121

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Die durchschnittliche Größe und die durchschnittliche Masse von menschlichen Föten und Babys wurden statistisch erfasst.

a) Die Länge eines Fötus (vom Scheitel bis zum Steiß) kann für einen bestimmten Zeitraum während der Schwangerschaft näherungsweise durch die Funktion L beschrieben werden:

$L(t) = 1{,}3 \cdot t - 9{,}8$ mit $8 \leq t \leq 20$

t … Zeit seit Beginn der Schwangerschaft in Wochen
$L(t)$ … Länge des Fötus zur Zeit t in cm

– Interpretieren Sie die Bedeutung des Koeffizienten 1,3 im gegebenen Sachzusammenhang.

Der Ausdruck $\frac{L(t+1) - L(t)}{L(t)}$ gibt die relative Längenzunahme des Fötus im Zeitintervall $[t; t+1]$ an (für $8 \leq t \leq 19$).

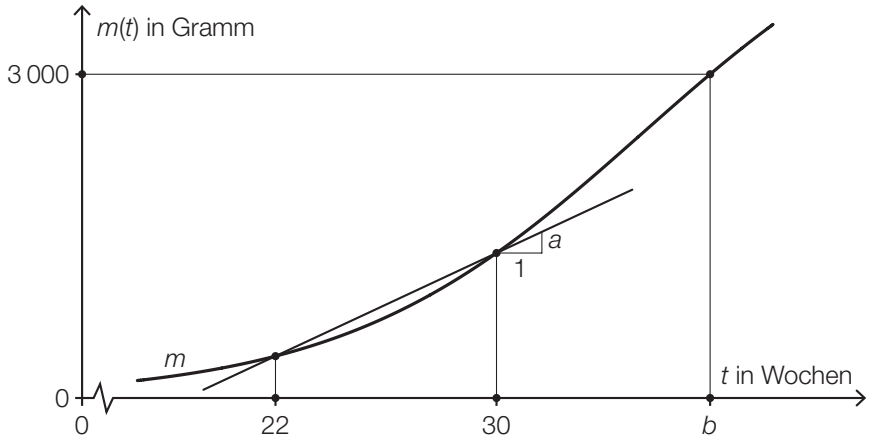
– Argumentieren Sie, dass diese relative Längenzunahme mit zunehmender Zeit t immer kleiner wird.

b) Die Masse eines Fötus kann für einen bestimmten Zeitraum während der Schwangerschaft näherungsweise durch die Funktion m beschrieben werden:

$$m(t) = \frac{4\,900}{1 + 681 \cdot e^{-0{,}185 \cdot t}} \text{ mit } 17 \le t \le 40$$

t … Zeit seit Beginn der Schwangerschaft in Wochen
$m(t)$ … Masse des Fötus zur Zeit t in Gramm

In der nachstehenden Abbildung des Graphen von m sind die zwei Größen a und b veranschaulicht.



– Berechnen Sie a.

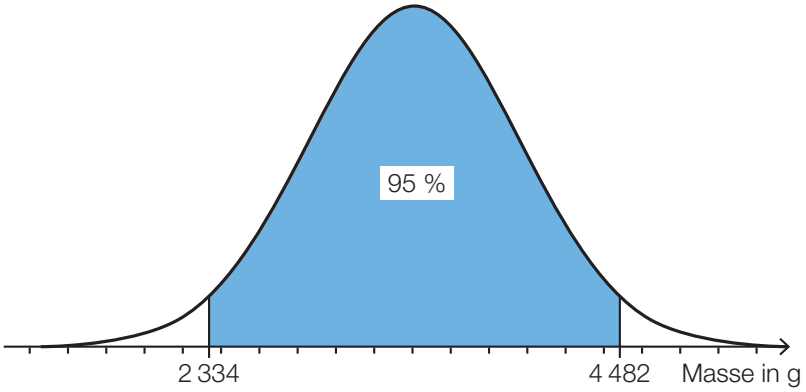
– Interpretieren Sie den Wert von a im gegebenen Sachzusammenhang.

– Berechnen Sie b.

c) Die Masse von in Österreich geborenen Mädchen bei ihrer Geburt ist annähernd normalverteilt mit einem Erwartungswert von 3276 g und einer Standardabweichung von 512 g.

– Berechnen Sie diejenige Masse, die von genau 5,5 % der neugeborenen Mädchen unterschritten wird.

d) Die Masse von in Österreich geborenen Buben bei ihrer Geburt ist annähernd normalverteilt.
Die Masse von 95 % aller Buben liegt in dem zum Erwartungswert symmetrischen Intervall [2 334 g; 4 482 g]:



f ist die Dichtefunktion, *F* die Verteilungsfunktion dieser normalverteilten Zufallsvariablen.

– Ordnen Sie den beiden Ausdrücken jeweils den richtigen Wert aus A bis D zu. *[2 zu 4]*

$\int_{2334}^{3408} f(x)\,dx =$	
$1 - F(2334) =$	

A	0,025
B	0,05
C	0,475
D	0,975

– Erstellen Sie mithilfe von *F* einen Ausdruck, der dem in der obigen Abbildung markierten Flächeninhalt entspricht.

_____ = 95 %

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Im Zeitintervall [8; 20] nimmt die Länge des Fötus pro Woche um 1,3 cm zu.

Die Differenz $L(t + 1) - L(t)$ beträgt konstant 1,3.
Daher gilt: relative Längenzunahme $= \frac{L(t + 1) - L(t)}{L(t)} = \frac{1{,}3}{L(t)}$
$L(t)$ wird mit zunehmendem t immer größer, weil L streng monoton steigend ist. Die relative Längenzunahme $\frac{1{,}3}{L(t)}$ wird somit mit zunehmendem t immer kleiner.

Auch eine Argumentation im Kontext der Prozentrechnung (konstante absolute Zunahme bei größer werdendem Grundwert) ist möglich.

b) $\frac{m(30) - m(22)}{30 - 22} = \frac{1\,343{,}4... - 387{,}9}{8} = 119{,}4...$

Im Zeitintervall [22; 30] nimmt die Masse des Fötus pro Woche im Mittel um rund 119 g zu.

oder:

Die mittlere Änderungsrate der Masse des Fötus im Zeitintervall [22; 30] beträgt rund 119 g pro Woche.

$m(b) = 3\,000 \quad \Rightarrow \quad \frac{4\,900}{1 + 681 \cdot e^{-0{,}185 \cdot b}} = 3\,000$

Lösung mittels Technologieeinsatz:
$b = 37{,}7...$ Wochen

c) X … Masse in g
$P(X \leq a) = 0{,}055$

Lösung mittels Technologieeinsatz:
$a = 2\,457{,}7…$
5,5 % der neugeborenen Mädchen haben eine Masse von weniger als rund 2 458 g.

d)

$\int_{2334}^{3408} f(x)\,dx =$	C
$1 - F(2\,334) =$	D

A	0,025
B	0,05
C	0,475
D	0,975

$F(4\,482) - F(2\,334) = 95$ %

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 5 Stochastik
d) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) 1 Zahlen und Maße
b) 4 Analysis
c) —
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) —
d) C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:

a) schwer
b) mittel
c) leicht
d) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 3
c) 1
d) 2

Thema: Alltag

Quellen: http://www.babycenter.de/l%C3%A4nge-und-gewicht-des-f%C3%B6tus-tabelle-nach-schwangerschaftswochen
http://www.statistik.at/web_de/statistiken/bevoelkerung/geburten/index.html
http://www.springermedizin.at/artikel/9393-zu-klein-zu-gross-gerade-richtig

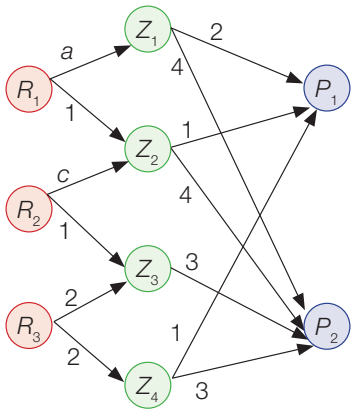
Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Kosten und Gewinn

Aufgabennummer: B_164

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein Betrieb stellt aus den Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 die Zwischenprodukte Z_1, Z_2, Z_3 und Z_4 und aus diesen die Endprodukte P_1 und P_2 her.
Die Materialverflechtung in ME wird durch den nebenstehenden Gozinto-Graphen dargestellt.



a) Für bestimmte Werte von a und c beschreibt die folgende Matrix den Mengenbedarf an Rohstoffen für die Herstellung der Endprodukte:

$$\begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 3 & 15 \\ 2 & 12 \end{pmatrix}$$

– Lesen Sie aus der Matrix ab, welche Mengen an Rohstoffen für die Herstellung von 1 ME des Endprodukts P_1 verwendet werden.

– Erstellen Sie die Matrix $\boldsymbol{A}$, die den Mengenbedarf an Rohstoffen für die Herstellung der Zwischenprodukte beschreibt.

– Berechnen Sie a und c.

b) Für $a = 2$ und $c = 1$ beschreibt die folgende Matrix den Mengenbedarf an Rohstoffen für die Herstellung der Endprodukte:

$$\begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 1 & 7 \\ 2 & 12 \end{pmatrix}$$

Der Vektor $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}$ beschreibt die Nachfrage nach den Endprodukten.
Der Materialbestand im Lager beträgt 1 460 ME von R_1, 660 ME von R_2 und 1 160 ME von R_3.

– Erstellen Sie eine Matrix-Gleichung zur Berechnung derjenigen erfüllbaren Nachfrage, bei der der gesamte Materialbestand verbraucht wird.

– Berechnen Sie diese Nachfrage.

c) Die Kostenfunktion K und die Erlösfunktion E für das Endprodukt P_2 sind bekannt:

$K(x) = 2{,}5 \cdot x^2 + 59 \cdot x + 80$
$E(x) = -6 \cdot x^2 + 187 \cdot x$

x ... produzierte und abgesetzte Menge in ME
$K(x)$, $E(x)$ ... Kosten bzw. Erlös bei der Menge x in GE

Bei einer bestimmten Menge x_{max} wird der maximale Gewinn erzielt.

– Berechnen Sie x_{max}.
– Dokumentieren Sie in Worten, wie man den Preis des Endprodukts beim Verkauf der Menge x_{max} erhalten kann.
– Ermitteln Sie mithilfe des obigen Gozinto-Graphen, wie viel Mengeneinheiten von den Zwischenprodukten für die Herstellung der Menge x_{max} des Endprodukts P_2 benötigt werden.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Von den Rohstoffen benötigt man für P_1 5 ME von R_1, 3 ME von R_2 und 2 ME von R_3.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 4 \\ 0 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot a + 1 & 4 \cdot a + 4 \\ c & 4 \cdot c + 3 \\ 2 & 12 \end{pmatrix}$$

Es gilt: $\begin{pmatrix} 2 \cdot a + 1 & 4 \cdot a + 4 \\ c & 4 \cdot c + 3 \\ 2 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 3 & 15 \\ 2 & 12 \end{pmatrix}$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$a = 2;\ c = 3$

b) $\begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 1 & 7 \\ 2 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,460 \\ 660 \\ 1\,160 \end{pmatrix}$

$5 \cdot n_1 + 12 \cdot n_2 = 1\,460$

$n_1 + 7 \cdot n_2 = 660$

$n_1 = 100;\ n_2 = 80$

Es können höchstens 100 ME von P_1 und höchstens 80 ME von P_2 hergestellt werden.

c) $G(x) = E(x) - K(x) = 128 \cdot x - 8{,}5 \cdot x^2 - 80$

$G'(x) = 0 \ \Rightarrow \ 128 - 17 \cdot x = 0 \ \Rightarrow \ x_{max} = 7{,}529\ldots$

Bei einer Menge von rund 7,53 ME wird der maximale Gewinn erzielt.

Man berechnet den Funktionswert von E an der Stelle x_{max}. Das Ergebnis dividiert man durch x_{max}.

Man benötigt jeweils die 4-fache Menge (also rund 30,12 ME) von Z_1 und Z_2 sowie die 3-fache Menge (also rund 22,59 ME) von Z_3 und Z_4.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz, C Interpretieren und Dokumentieren
b) A Modellieren und Transferieren
c) D Argumentieren und Kommunizieren, C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 3
b) 2
c) 3

Thema: Wirtschaft

Quellen: –

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Luftdruck (3)

Aufgabennummer: A_100

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Der Luftdruck der Atmosphäre nimmt mit zunehmender Höhe ab. Auf Meeresniveau beträgt der Luftdruck 1 013 Millibar. Die Abhängigkeit des Luftdrucks von der Höhe lässt sich näherungsweise durch folgende Funktion p beschreiben:

$p(h) = 1\,013 \cdot e^{-k \cdot h}$ mit $k > 0$

h … Höhe über dem Meeresspiegel (ü. d. M.) in Metern (m)
$p(h)$ … Luftdruck in der Höhe h in Millibar (mbar)
k … Konstante

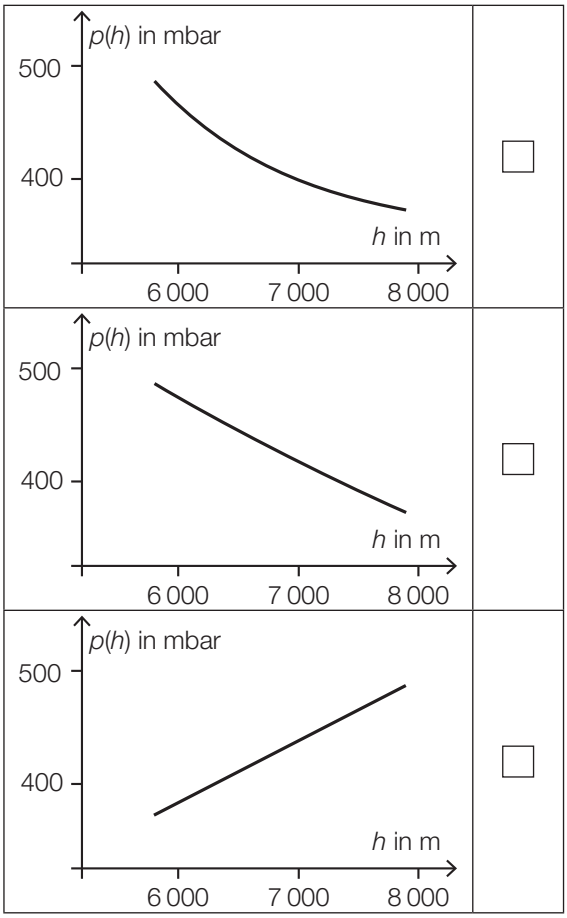
a) Ein Bergsteiger steigt vom Gipfel des Mount Everest (8 848 m ü. d. M.) auf 7 400 m ü. d. M. ab.

– Stellen Sie eine Formel zur Berechnung der Luftdruckzunahme Δp auf.

$\Delta p =$ _____

b) Auf 5 800 m ü. d. M. beträgt der Luftdruck nur noch 48 % des Luftdrucks auf Meereshöhe.

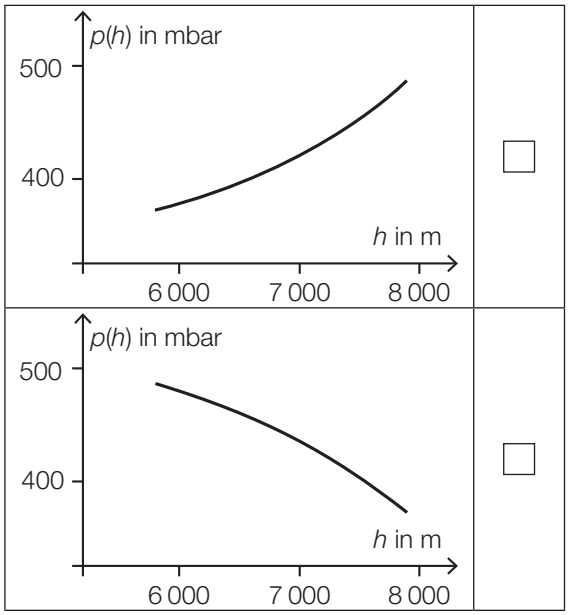
– Kreuzen Sie denjenigen Graphen an, der den richtigen Luftdruckverlauf beim Aufstieg von 5 800 m auf 7 900 m ü. d. M. beschreibt. *[1 aus 5]*



☐

☐

☐



☐

☐

c) Misst man den Luftdruck p an einer bestimmten Stelle, so kann man daraus auf die Höhe über dem Meeresspiegel h schließen.

– Kreuzen Sie denjenigen Term an, der h richtig angibt. *[1 aus 5]*

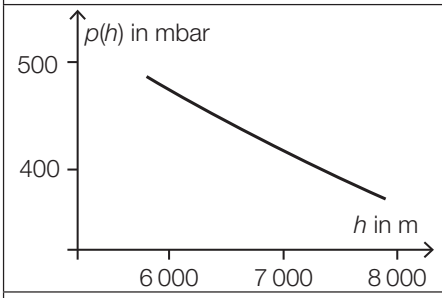
$h = \ln\left(\frac{p}{1\,013}\right) \cdot k$	☐
$h = \frac{\ln(p)}{1\,013} \cdot \frac{1}{k}$	☐
$h = \frac{\ln(1\,013) - \ln(p)}{k}$	☐
$h = \frac{\ln(p \cdot 1\,013)}{k}$	☐
$h = \frac{\ln(p)}{\ln(1\,013)} \cdot \frac{1}{k}$	☐

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $\Delta p = p(7\,400) - p(8\,848) = 1\,013 \cdot e^{-k \cdot 7\,400} - 1\,013 \cdot e^{-k \cdot 8\,848} = 1\,013 \cdot (e^{-k \cdot 7\,400} - e^{-k \cdot 8\,848})$

b)

	☒

c)

$h = \frac{\ln(1\,013) - \ln(p)}{k}$	☒

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) —
c) —

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) schwer

Punkteanzahl:

a) 1
b) 1
c) 1

Thema: Sport

Quellen: —

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Zimt

Aufgabennummer: A_164

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

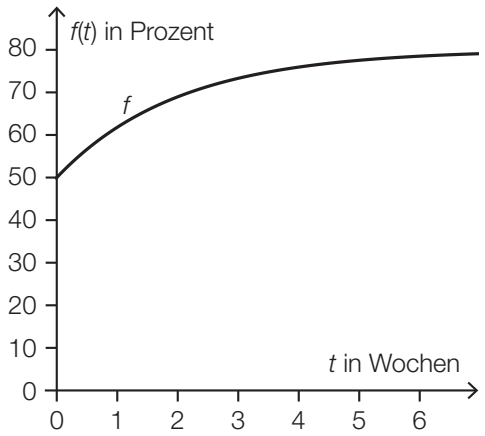
Zimt ist eines der ältesten bekannten Gewürze und wird aus der getrockneten Rinde von Zimtbäumen gewonnen.

a) Zimt gibt Feuchtigkeit ab. Werden die Zimtstangen in geschlossenen Containern transportiert, so steigt der Feuchtigkeitsgehalt im Behälter, was zu einer Beeinträchtigung der Qualität führen kann. Die in einem bestimmten Container gemessene relative Luftfeuchtigkeit kann näherungsweise durch die Funktion f beschrieben werden:

$$f(t) = 30 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{2}}\right) + b$$

t ... Zeit nach Verschluss des Containers in Wochen
$f(t)$ ... relative Luftfeuchtigkeit zur Zeit t in Prozent
b ... Parameter (in Prozent)

– Ermitteln Sie unter Verwendung des nachstehend abgebildeten Graphen der Funktion f den Parameter b.



– Beschreiben Sie die Bedeutung des Parameters b im gegebenen Sachzusammenhang.

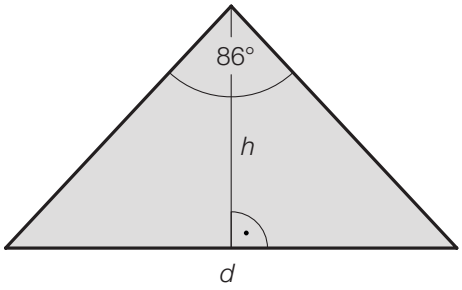
b) Zimt wird in speziellen Mühlen zur gewünschten Korngröße vermahlen. Die Durchmesser der Körner nach dem Mahlvorgang sind annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert μ = 175 µm und der Standardabweichung σ = 35 µm.

– Ermitteln Sie, wie viel Prozent aller Körner einen Durchmesser zwischen 100 µm und 250 µm haben.

Durch einen Verarbeitungsfehler hat sich der Erwartungswert der Durchmesser (bei gleichbleibender Standardabweichung) auf den Wert μ_1 = 180 µm verschoben.

– Erläutern Sie anhand einer geeigneten Skizze der Gauß'schen Glockenkurve, ob der Prozentsatz der Körner mit einem Durchmesser zwischen 100 µm und 250 µm dadurch kleiner wird, größer wird oder gleich bleibt.

c) Für die Qualitätsprüfung „rinnt" das gemahlene Gewürz aus einer Abfüllanlage und bildet einen Schüttkegel. Das Zimtpulver bildet dabei annähernd einen Drehkegel mit einem Öffnungswinkel von 86° (siehe nachstehende Abbildung).



– Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung der Höhe *h* aus dem Durchmesser *d* des Grundkreises.

h = _____

d) Das Zimtpulver wird in einer Anlage automatisch in Säckchen verpackt. Aus Erfahrung weiß man, dass 2 % der Säckchen nicht korrekt verschlossen sind. Eine Zufallsstichprobe von 50 Säckchen wird kontrolliert.

– Beschreiben Sie ein Ereignis *E* im gegebenen Sachzusammenhang, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem folgenden Ausdruck berechnet wird:

$$P(E) = 0{,}98^{50} + 50 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}98^{49} + \binom{50}{2} \cdot 0{,}02^2 \cdot 0{,}98^{48}$$

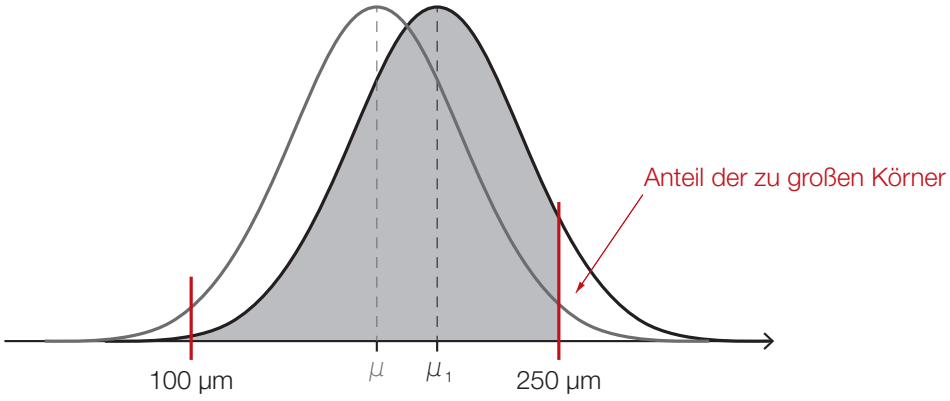
Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) An der Stelle $t = 0$ kann man ablesen: $b = 50$
Der Wert des Parameters b entspricht der relativen Luftfeuchtigkeit beim Verschließen des Containers in Prozent.

b) X … Durchmesser in µm
Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$P(100 < X < 250) = 0{,}967... \approx 97\ \%$

Der Prozentsatz der Körner mit einem Durchmesser zwischen 100 µm und 250 µm sinkt.
Begründung: Die Glockenkurve ist nun so verschoben, dass der zulässige Bereich nicht mehr symmetrisch um den Erwartungswert liegt. Dadurch steigt der Anteil der zu großen Körner stärker, als der Anteil der zu kleinen Körner sinkt.



c) $h = \dfrac{d}{2 \cdot \tan(43°)}$

d) E … in der Stichprobe befinden sich 0, 1 oder 2 Säckchen, die nicht korrekt verschlossen sind

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 5 Stochastik
c) 2 Algebra und Geometrie
d) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) A Modellieren und Transferieren
d) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) —
d) —

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) mittel
d) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2
c) 1
d) 1

Thema: Sonstiges

Quellen: http://www.prozesstechnik-online.de/widget/food/-/article/31534493/37266314/Gewürze-mundgerecht-mahlen/
http://www.tis-gdv.de/tis/ware/gewuerze/zimt/zimt.htm

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

WM-Abfahrt

Aufgabennummer: A_146

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

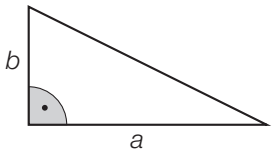
Die alpine Skiweltmeisterschaft 2015 fand in Vail/Beaver Creek (USA) statt.

a) Bei der 2623 m langen Abfahrt der Herren betrug die Siegerzeit 1 Minute und 43,18 Sekunden. Der beste Österreicher hatte auf den Sieger einen Rückstand von 92 Hundertstelsekunden.

– Berechnen Sie die mittlere Geschwindigkeit des Siegers in km/h.

– Berechnen Sie, um wie viel Promille der beste Österreicher langsamer als der Sieger war.

b) Das größte Gefälle der Abfahrtsstrecke *Birds of Prey* beträgt 45 %.
In der nebenstehenden Abbildung ist dieses Gefälle durch ein Steigungsdreieck veranschaulicht.



– Kreuzen Sie den für die Seitenlängen a und b zutreffenden Zusammenhang an. *[1 aus 5]*

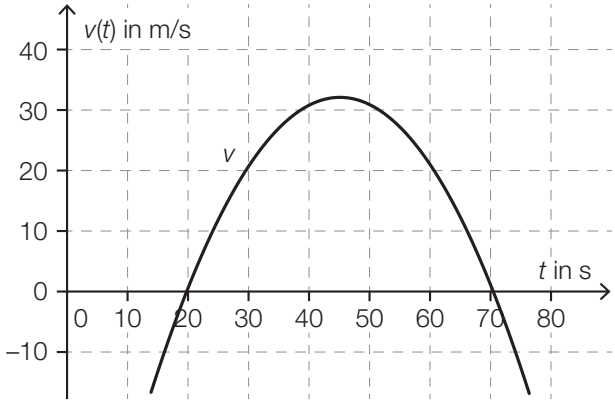
$\frac{a}{b} = 0{,}45$	☐
$\frac{b}{a} = 45$	☐
$b = \frac{45}{100} \cdot a$	☐
$b = a \cdot \tan(45°)$	☐
$\arctan\left(\frac{b}{a}\right) = 45°$	☐

c) Die Geschwindigkeit eines Rennläufers auf einem Teilabschnitt der Abfahrtsstrecke kann näherungsweise durch die Funktion v beschrieben werden:

$v(t) = -0{,}05 \cdot t^2 + 4{,}51 \cdot t - 69{,}6$ mit $30 \leq t \leq 60$

t … Zeit in s
$v(t)$ … Geschwindigkeit zur Zeit t in m/s

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Funktion v (ohne Berücksichtigung des angegebenen Definitionsbereichs) dargestellt.



– Veranschaulichen Sie in der obigen Abbildung denjenigen Weg, den der Rennläufer in diesem Teilabschnitt zurücklegt.

– Erstellen Sie mithilfe von v eine Formel zur Berechnung der mittleren Geschwindigkeit $\overline{v}$ des Rennläufers auf diesem Teilabschnitt.

$\overline{v} =$ _____

– Berechnen Sie die mittlere Geschwindigkeit des Rennläufers auf diesem Teilabschnitt.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $\frac{2623\text{ m}}{103{,}18\text{ s}} = 25{,}421\ldots\text{ m/s}$

$25{,}421\ldots\text{ m/s} = (25{,}421\ldots \cdot 3{,}6)\text{ km/h} = 91{,}517\ldots\text{ km/h}$

Die mittlere Geschwindigkeit des Siegers betrug rund 91,52 km/h.

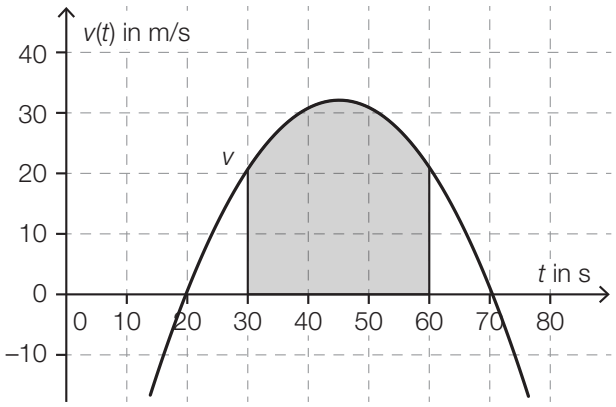
$\frac{0{,}92}{103{,}18} = 0{,}0089\ldots = 8{,}9\ldots\text{ ‰}$

Der beste Österreicher war um rund 9 Promille langsamer als der Sieger.

b)

$b = \frac{45}{100} \cdot a$	☒

c)



$\overline{v} = \frac{1}{60-30} \cdot \int_{30}^{60} v(t)\,dt$

$\overline{v} = \frac{1}{60-30} \cdot \int_{30}^{60} (-0{,}05 \cdot t^2 + 4{,}51 \cdot t - 69{,}6)\,dt = \frac{1}{30} \cdot 850{,}5 = 28{,}35$

Die mittlere Geschwindigkeit des Rennläufers auf diesem Teilabschnitt beträgt 28,35 m/s.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 1 Zahlen und Maße
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) —
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) schwer

Punkteanzahl:

a) 2
b) 1
c) 3

Thema: Sport

Quelle: http://www.vvf.org/athletics/birds-of-prey-world-cup.aspx

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Dinosaurier

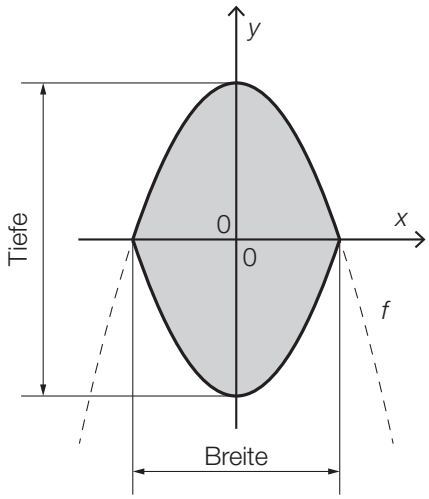
Aufgabennummer: A_142

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Um das Körpervolumen eines Dinosauriers zu schätzen, werden Messungen am Skelett durchgeführt. Die Form des Körperquerschnitts wird dann – wie in der nachstehenden Abbildung dargestellt – mithilfe einer Funktion f modelliert:

$f(x) = 1 - a \cdot x^2, \; a > 0$

Der Graph von f bildet die obere Begrenzung des Querschnitts, die untere Begrenzung verläuft dazu symmetrisch bezüglich der x-Achse.





Quelle: Etemenanki3 – own work, CC BY-SA 4.0, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Diplodocus_longus_Denver_1.jpg [15.01.2020].

Für die Bestimmung des Parameters a ist das Verhältnis von Breite und Tiefe des Körpers des untersuchten Dinosauriers ausschlaggebend.

– Zeigen Sie, dass bei der Modellierung des Querschnitts mithilfe der Funktion f gilt:
Breite : Tiefe = $1 : \sqrt{a}$

Zur Berechnung der Querschnittsfläche mithilfe des Integrals wird eine Stammfunktion von f benötigt.

– Ermitteln Sie eine Gleichung derjenigen Stammfunktion F von f, für die gilt: $F(0) = 0$

b) Aus der Körperlänge L (in Metern) eines Dinosauriers kann mithilfe der folgenden Formel seine Körpermasse M (in Kilogramm) geschätzt werden:

$M = a \cdot L^b$

Die Werte der Parameter a und b haben für verschiedene Gruppe von Dinosauriern unterschiedliche Werte. Für zwei dieser Gruppen sind die Werte in der nachstehenden Tabelle angegeben.

systematische Gruppe	a	b
Prosauropoden	12,32	2,40
Theropoden	0,73	3,63

Der Tyrannosaurus Rex gehört zur Gruppe der Theropoden. Die größten Exemplare wurden etwa 13 m lang.

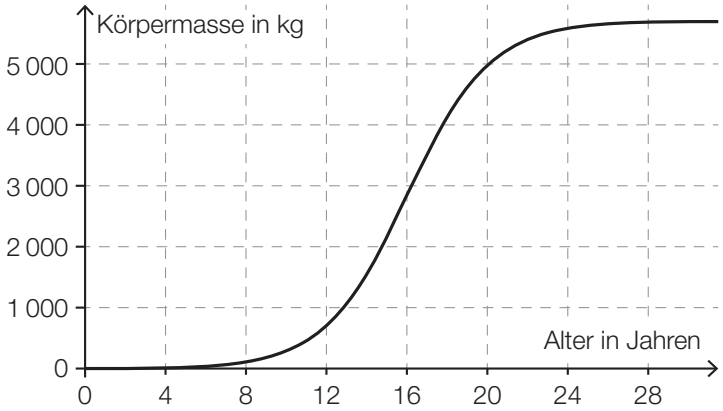
– Ermitteln Sie mithilfe der obigen Formel eine Schätzung für die Masse (in Tonnen) eines 13 m langen Tyrannosaurus Rex.

Für die Gruppe der Prosauropoden kann die Formel folgendermaßen angeschrieben werden:

$M = 12{,}32 \cdot \sqrt[5]{L^{\square}}$

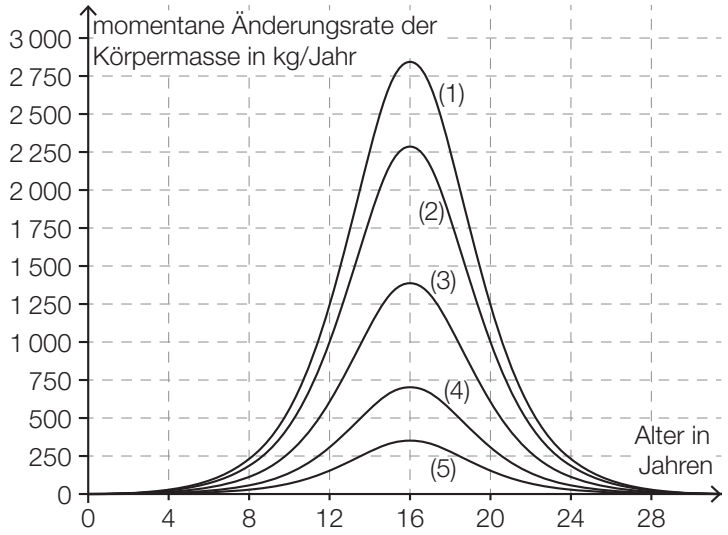
– Ergänzen Sie den fehlenden Exponenten in der obigen Formel im dafür vorgesehenen Kästchen.

c) Die nachstehende Abbildung zeigt die vermutliche Wachstumskurve für einen durchschnittlichen Tyrannosaurus Rex. Sie stellt die Körpermasse in Abhängigkeit vom Lebensalter dar.



Einer der 5 Graphen in der nachstehenden Abbildung stellt die zugehörige momentane Änderungsrate der Körpermasse richtig dar.

– Kreuzen Sie an, welcher Graph das ist. *[1 aus 5]*



Graph (1)	☐
Graph (2)	☐
Graph (3)	☐
Graph (4)	☐
Graph (5)	☐

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Die Breite ist der Abstand zwischen den beiden Nullstellen von f:

$f(x) = 0$

$1 - a \cdot x^2 = 0$

$x = \pm\sqrt{\frac{1}{a}} \quad \Rightarrow \quad \text{Breite} = 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{a}}$

Tiefe $= 2 \cdot f(0) = 2 \cdot 1 = 2$

$$\frac{\text{Breite}}{\text{Tiefe}} = \frac{2 \cdot \sqrt{\frac{1}{a}}}{2} = \sqrt{\frac{1}{a}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$$

also gilt: Breite : Tiefe $= 1 : \sqrt{a}$

$F(x) = x - \frac{a}{3} \cdot x^3$

b) $M_{\text{T-Rex}} = 0{,}73 \cdot 13^{3{,}63} = 8071{,}1...$

Die Masse beträgt gemäß der Formel etwa 8,1 Tonnen.

$M = 12{,}32 \cdot \sqrt[5]{L^{\boxed{12}}}$

c)

Graph (4)	☒

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) —

Schwierigkeitsgrad:

a) schwer
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2
c) 1

Thema: Biologie

Quellen: F. Seebacher, *Journal of Vertebrate Paleontology* 21(1), 2001
https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Tyrannosaurus&oldid=186947124#Entwicklungs-_und_Populationsbiologie

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Natur in Zahlen

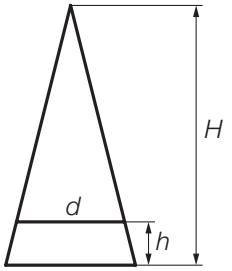
Aufgabennummer: A_136

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Bestimmte Tropfsteine wachsen mit einer Geschwindigkeit von etwa 0,8 mm pro Jahr.
In Mexiko gibt es eine Höhle mit Riesenkristallen, die Schätzungen zufolge mit einer Geschwindigkeit von $1{,}4 \cdot 10^{-5}$ nm pro Sekunde gewachsen sind.
Jemand behauptet, dass die Tropfsteine um mehr als 1 500-mal schneller wachsen als die Riesenkristalle.

– Überprüfen Sie nachweislich, ob diese Behauptung zutrifft.

b) Das Volumen eines Baumstamms kann mithilfe der folgenden Methode abgeschätzt werden:
Vereinfacht wird der Stamm als Drehkegel betrachtet. Man ermittelt die Höhe H des Stamms und misst außerdem den Stammdurchmesser d in der Höhe h über dem Boden (siehe nebenstehende Skizze). Aus diesen 3 Größen kann das Volumen V des Drehkegels berechnet werden.



– Stellen Sie mithilfe von d, h und H eine Formel für V auf.

$V =$ _____

Der *General Sherman Tree* ist – bezogen auf den Stamm – der volumenmäßig größte lebende Baum der Erde. Der Stamm ist 83,8 m hoch und hat in 1,37 m Höhe einen Durchmesser von 7,7 m.

– Schätzen Sie mithilfe der oben beschriebenen Methode das Volumen dieses Stamms.

c) Erdmännchen sind Raubtiere, die im südlichen Afrika leben. Es wird angenommen: In freier Wildbahn beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass ein Jungtier überlebt, unabhängig voneinander 25 %.
In einer Erdmännchen-Kolonie werden 20 Jungtiere geboren.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 30 % davon überleben.

Ein Erdmännchen-Weibchen bringt 3 Jungtiere zur Welt.

– Ordnen Sie den beiden Wahrscheinlichkeiten jeweils das passende Ereignis aus A bis D zu. *[2 zu 4]*

$P(E) = 0{,}25^3$	
$P(E) = 1 - 0{,}25^3$	

A	E = „alle 3 Jungtiere überleben“
B	E = „keines der Jungtiere überlebt“
C	E = „mindestens 1 Jungtier überlebt“
D	E = „mindestens 1 Jungtier überlebt nicht“

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $1{,}4 \cdot 10^{-5} \frac{\text{nm}}{\text{s}} = 60 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365 \cdot 1{,}4 \cdot 10^{-11} \frac{\text{mm}}{\text{Jahr}} = 44\,150\,400 \cdot 10^{-11} \frac{\text{mm}}{\text{Jahr}}$

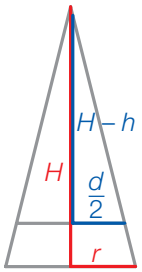
$= 4{,}41504 \cdot 10^{-4} \frac{\text{mm}}{\text{Jahr}}$

$\frac{0{,}8}{4{,}41504 \cdot 10^{-4}} = 1\,811{,}9\ldots$

Die Tropfsteine wachsen 1 812-mal schneller als die Riesenkristalle. Die Behauptung ist daher zutreffend.

b) r … Radius des Drehkegels am Boden

Anwendung des Strahlensatzes: $\frac{r}{H} = \frac{\frac{d}{2}}{H-h} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{d \cdot H}{2 \cdot (H-h)}$



$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot H$

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{d \cdot H}{2 \cdot (H-h)}\right)^2 \cdot H$

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{7{,}7 \cdot 83{,}8}{2 \cdot (83{,}8 - 1{,}37)}\right)^2 \cdot 83{,}8 = 1\,344{,}3\ldots$

Das Volumen des Stamms beträgt etwa 1 344 m^3.

c) X … Anzahl der überlebenden Jungtiere

Binomialverteilung mit $n = 20$ und $p = 0{,}25$

Berechnung mittels Technologieeinsatz: $P(X \geq 6) = 0{,}3828\ldots$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt rund 38,3 %.

$P(E) = 0{,}25^3$	A
$P(E) = 1 - 0{,}25^3$	D

A	E = „alle 3 Jungtiere überleben“
B	E = „keines der Jungtiere überlebt“
C	E = „mindestens 1 Jungtier überlebt“
D	E = „mindestens 1 Jungtier überlebt nicht“

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 1 Zahlen und Maße
c) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) 1 Zahlen und Maße
b) 2 Algebra und Geometrie
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) A Modellieren und Transferieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) mittel	a) 1
b) schwer	b) 2
c) mittel	c) 2

Thema: Biologie

Quellen: http://www.zamg.ac.at/
http://www.spektrum.de/news/mexikanische-riesenkristalle-sind-extremisten/1123070
https://en.wikipedia.org/wiki/General_Sherman_(tree)
https://www.tierparkstadthaag.at/de/tierpark_tiere/erdmaennchen/

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Diätplan

Aufgabennummer: A_134

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Zu Beginn einer Diät beträgt die Körpermasse einer Person 110,7 kg.

a) Die Hausärztin empfiehlt im Rahmen der Diät eine kontinuierliche Abnahme von 600 g pro Woche, bis eine Körpermasse von 86 kg erreicht ist.

– Erklären Sie, mit welchem mathematischen Modell sich die Körpermasse im Verlauf der Diät beschreiben lässt.

– Berechnen Sie, wie lange es dauert, bis das Diät-Ziel erreicht ist, wenn die Empfehlung der Hausärztin eingehalten wird.

b) Die Person folgt einem speziellen Diätplan. Um den Verlauf dieses Diätplans zu dokumentieren, wurden folgende Werte erhoben:

Zeit seit Beginn der Diät in Wochen	Körpermasse in kg
6	101,6
10	98,0

Die Werte der Körpermasse im Verlauf der Diät können näherungsweise durch die Funktion m beschrieben werden.

$m(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c$ mit $0 \le t \le 15$

t ... Zeit seit Beginn der Diät in Wochen
$m(t)$ ... Körpermasse in kg nach t Wochen

– Erstellen Sie mithilfe der Tabellenwerte und der Körpermasse zu Beginn der Diät ein Gleichungssystem zur Ermittlung der Koeffizienten a, b und c.

– Berechnen Sie die Koeffizienten a, b und c.

c) Der Body-Mass-Index (BMI) ist eine Maßzahl für die Bewertung der Körpermasse eines Menschen in Relation zu seiner Körpergröße. Es gilt:

$$BMI = \frac{m}{l^2}$$

m ... Körpermasse in kg
l ... Körpergröße in m

– Berechnen Sie, wie viel Kilogramm die Person abnehmen muss, wenn sie eine Körpergröße von 186 cm hat und einen BMI von 22 kg/m^2 erreichen will.

– Begründen Sie anhand der angegebenen Formel, warum auch der BMI um 10 % sinkt, wenn die Körpermasse um 10 % abnimmt.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Die Masse nimmt jede Woche um den gleichen Betrag ab, deswegen handelt es sich um ein lineares Modell.

$\frac{110{,}7 - 86}{0{,}6} = 41{,}1...$
Es dauert etwas mehr als 41 Wochen, bis das Diät-Ziel erreicht ist.

b) I: $m(0) = 110{,}7$ bzw. $c = 110{,}7$
II: $m(6) = 101{,}6$ bzw. $a \cdot 6^2 + b \cdot 6 + c = 101{,}6$
III: $m(10) = 98$ bzw. $a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c = 98$

Lösung mittels Technologieeinsatz:
$a = 0{,}061\overline{6}$, $b = -1{,}88\overline{6}$, $c = 110{,}7$

c) $22 = \frac{110{,}7 - x}{1{,}86^2} \Rightarrow x = 34{,}58\ldots$
Die Person muss rund 34,6 kg abnehmen.

$BMI_{neu} = \frac{0{,}9 \cdot m}{l^2} = 0{,}9 \cdot \frac{m}{l^2} = 0{,}9 \cdot BMI_{alt}$
Die Begründung kann auch durch eine konkrete Berechnung oder mit Verweis auf die direkte Proportionalität erfolgen.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 1 Zahlen und Maße

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) A Modellieren und Transferieren
c) D Argumentieren und Kommunizieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) leicht
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2
c) 2

Thema: Sonstiges

Quellen: —

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

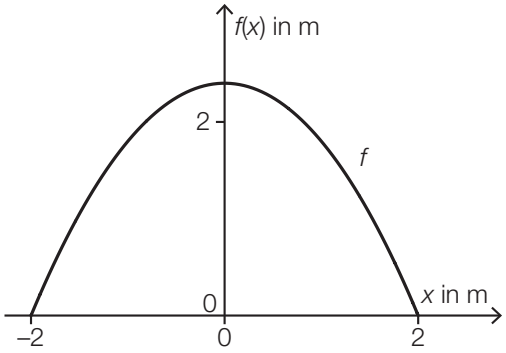
Tunnelzelte

Aufgabennummer: A_131

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Aufblasbare Tunnelzelte erfreuen sich als Messestände immer größerer Beliebtheit.

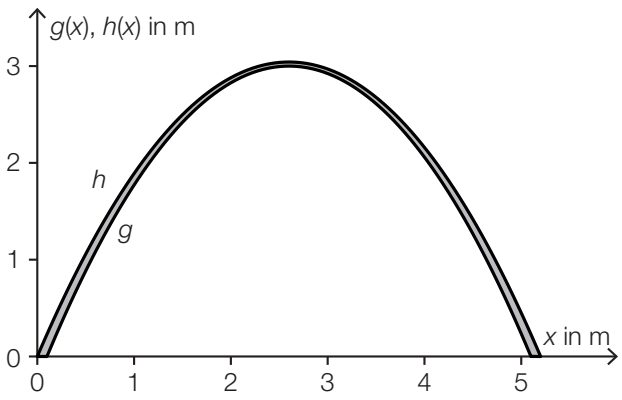
a) In der nebenstehenden Abbildung ist die innere Querschnittsfläche eines Tunnelzelts dargestellt. Sie kann durch den Graphen einer quadratischen Funktion f mit $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ beschrieben werden.



– Kreuzen Sie die für die Koeffizienten von f zutreffenden Bedingungen an. *[1 aus 5]*

$a > 0,\ b = 0,\ c > 0$	☐
$a < 0,\ b = 0,\ c > 0$	☐
$a > 0,\ b > 0,\ c < 0$	☐
$a < 0,\ b < 0,\ c > 0$	☐
$a > 0,\ b > 0,\ c > 0$	☐

b) In der nebenstehenden Abbildung ist die Querschnittsfläche eines Tunnelzelts dargestellt. Die Querschnittsfläche der Innenhaut wird durch den Graphen der Funktion g, jene der Außenhaut durch den Graphen der Funktion h beschrieben.



$g(x) = -0{,}48 \cdot x^2 + 2{,}496 \cdot x - 0{,}2448$
$h(x) = -0{,}45 \cdot x^2 + 2{,}34 \cdot x$

x, $g(x)$, $h(x)$ … Koordinaten in m

Der Bereich zwischen der Innen- und der Außenhaut muss mit Luft gefüllt werden.

– Berechnen Sie das zum Aufblasen benötigte Luftvolumen bei einer Zeltlänge von 5 m.

c) Die nachstehende *allgemeine Gasgleichung* beschreibt den Zusammenhang verschiedener physikalischer Größen für ein Gas (z. B. Luft):

$p \cdot V = n \cdot 8{,}314 \cdot T$

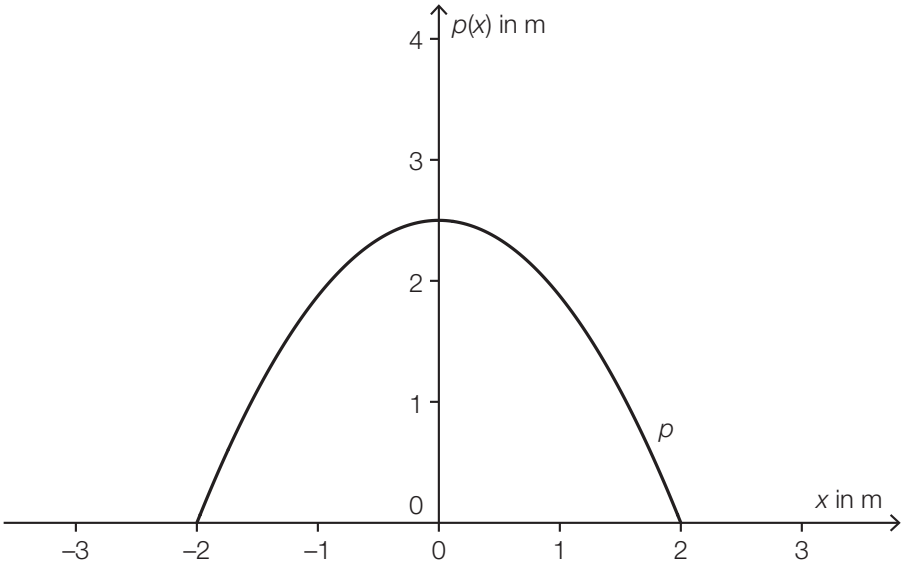
p … Druck in Pascal (Pa)
V … Volumen in m^3
n … Stoffmenge in Mol
T … Temperatur in Kelvin (K)

1 Mol Luft enthält rund $6{,}022 \cdot 10^{23}$ Teilchen.

Zum Aufblasen eines Zeltes werden 4 m^3 Luft benötigt.

– Berechnen Sie, wie viele Teilchen in diesem Luftvolumen unter einem Druck von 303 000 Pa bei einer Temperatur von 293 K enthalten sind.

d) In der nachstehenden Abbildung ist die Außenhülle eines Zeltes, die durch den Graphen einer geraden Funktion p modelliert wurde, dargestellt.



In einer Höhe von 2 m werden an der linken und an der rechten Seite der Außenhülle Seile angebracht. Diese werden so gespannt und am Boden befestigt, dass sie wie eine Tangente an die Außenhülle verlaufen.

– Zeichnen Sie in der obigen Abbildung die Seile ein.

Eine Funktion f wird *gerade* genannt, wenn für alle x aus ihrem Definitionsbereich gilt:
$f(x) = f(-x)$
Eine Funktion f wird *ungerade* genannt, wenn für alle x aus ihrem Definitionsbereich gilt:
$f(x) = -f(-x)$

Mit der folgenden Rechnung wird gezeigt, dass die Ableitung jeder geraden Funktion f ungerade ist:

$$f(x) = f(-x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) \overset{(1)}{=} f'(-x) \cdot (-1) = -f'(-x)$$

– Erklären Sie den mit (1) gekennzeichneten Rechenschritt unter Angabe der entsprechenden Ableitungsregel.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)

$a < 0,\ b = 0,\ c > 0$	☒

b) Berechnung der Nullstellen von g und h mittels Technologieeinsatz:
Nullstellen von g: $x_1 = 0{,}1$, $x_2 = 5{,}1$
Nullstellen von h: $x_3 = 0$, $x_4 = 5{,}2$

Flächeninhalt der Querschnittsfläche zwischen der Innen- und der Außenhaut:
$\int_0^{5,2} h(x)\,dx - \int_{0,1}^{5,1} g(x)\,dx = 0{,}5456$

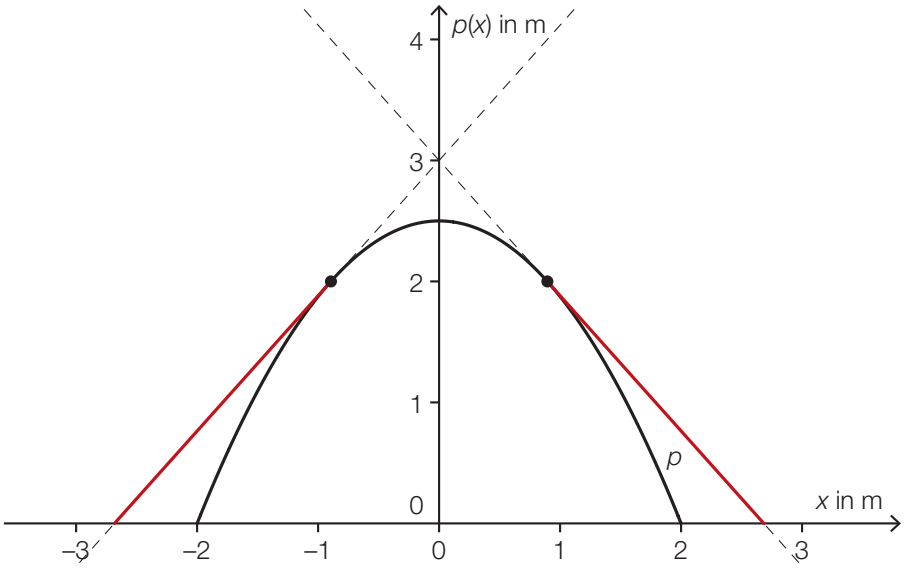
Luftvolumen: $0{,}5456 \cdot 5 = 2{,}728\ \text{m}^3$

Das benötigte Luftvolumen beträgt $2{,}728\ \text{m}^3$.

c) $n = \frac{p \cdot V}{8{,}314 \cdot T} = \frac{303\,000 \cdot 4}{8{,}314 \cdot 293} = 497{,}53...$
$497{,}53... \cdot 6{,}022 \cdot 10^{23} = 2{,}9... \cdot 10^{26}$

Es sind rund $3 \cdot 10^{26}$ Teilchen enthalten.

d)



Es wurde die Kettenregel angewendet („äußere Ableitung × innere Ableitung“).
Der Faktor (–1) ist die Ableitung der inneren Funktion: $(-x)' = -1$

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 2 Algebra und Geometrie
d) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 3 Funktionale Zusammenhänge
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) A Modellieren und Transferieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) —
d) D Argumentieren und Kommunizieren

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) mittel
d) schwer

Punkteanzahl:

a) 1
b) 2
c) 1
d) 2

Thema: Sonstiges

Quellen: —

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Helligkeit

Aufgabennummer: A_125

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Die *Leuchtdichte* ist ein Maß für den Helligkeitseindruck, der von beleuchteten Flächen ausgeht. Sie wird in der Einheit Candela pro Quadratmeter (cd/m²) angegeben.

a) Die nachstehende Funktion beschreibt den Zusammenhang zwischen der Leuchtdichte und der menschlichen Empfindungsstärke:

$E(L) = c \cdot \lg\left(\frac{L}{L_0}\right)$

L … Leuchtdichte in cd/m²
$E(L)$ … Empfindungsstärke bei der Leuchtdichte L
L_0 … minimale wahrnehmbare Leuchtdichte in cd/m²
$c > 0$ … Konstante

– Weisen Sie nach, dass die Empfindungsstärke bei der Leuchtdichte L_0 unabhängig von c ist.

Die Formel $E = c \cdot \lg\left(\frac{L}{L_0}\right)$ wird nach L_0 umgeformt.

– Kreuzen Sie denjenigen Ausdruck an, der ein richtiges Ergebnis dieser Umformung ist. *[1 aus 5]*

$L_0 = \frac{L \cdot 10^E}{10^c}$	☐
$L_0 = \frac{L \cdot c}{10^E}$	☐
$L_0 = \frac{10^L}{c \cdot 10^E}$	☐
$L_0 = \frac{L}{10^{\frac{E}{c}}}$	☐
$L_0 = \frac{c \cdot 10^L}{10^E}$	☐

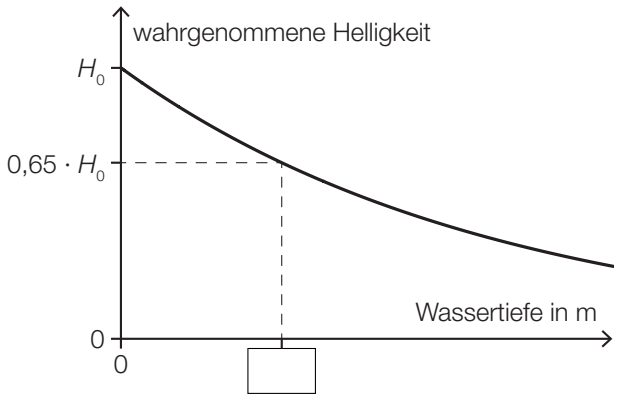
b) Das menschliche Auge kann eine Leuchtdichte im Bereich von $2 \cdot 10^{-5}$ cd/m^2 bis 10^6 cd/m^2 wahrnehmen.
Ein Unterschied der Helligkeit wird vom Menschen nur dann wahrgenommen, wenn sich die Leuchtdichte um mindestens 5 % verändert. Der wahrnehmbare Helligkeitsbereich kann daher in Helligkeitsstufen unterteilt werden. Die Leuchtdichte muss jeweils um 5 % steigen, damit die nächsthöhere Helligkeitsstufe erreicht wird.
Sebastian schätzt ab, wie viele dieser Helligkeitsstufen es gibt:

- $2 \cdot 10^{-5}$ ist fast null.
- 5 % von 10^6 sind 50 000.
- 50 000 geht 20-mal in 10^6, also muss es etwa 20 Helligkeitsstufen geben.

– Erklären Sie, warum diese Überlegung falsch ist.

– Weisen Sie nach, dass es mehr als 500 dieser Helligkeitsstufen gibt.

c) Unter bestimmten Bedingungen nimmt die wahrgenommene Helligkeit unter Wasser pro Meter Tiefe um 7 % des vorherigen Wertes ab. Die wahrgenommene Helligkeit an der Wasseroberfläche ist H_0.
In der nachstehenden Abbildung ist diese Abnahme dargestellt.



– Tragen Sie den fehlenden Wert in das dafür vorgesehene Kästchen ein.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $E(L_0) = c \cdot \lg\left(\frac{L_0}{L_0}\right) = c \cdot \lg(1) = c \cdot 0 = 0$

Die Empfindungsstärke bei der Leuchtdichte L_0 hat den Wert 0 und ist daher unabhängig von c.

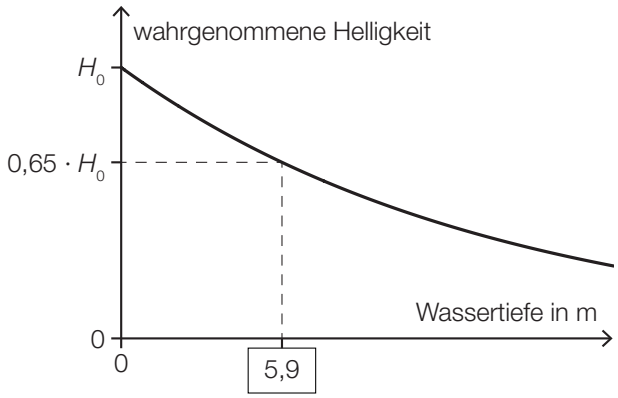
[...]	
[...]	
[...]	
$L_0 = \frac{L}{10^{\frac{E}{c}}}$	☒
[...]	

b) Sebastian hat mit einem linearen Modell gerechnet. Er hat von Stufe zu Stufe einen konstanten Zuwachs von 50 000 cd/m² angenommen. Das lineare Modell ist nicht geeignet, weil der Prozentsatz von 5 % sich jeweils auf den vorhergehenden Wert bezieht.

Die 1. Helligkeitsstufe beginnt bei einer Lichtdichte von $2 \cdot 10^{-5}$ cd/m². Jede Erhöhung um 5 % entspricht einer Multiplikation mit 1,05. Für die Untergrenze der 501. Helligkeitsstufe ergibt sich daher:
$2 \cdot 10^{-5} \cdot 1{,}05^{500} = 786\,465{,}\ldots$

$786\,465{,}\ldots$ cd/m² $< 10^6$ cd/m²
Daher gibt es mehr als 500 dieser Helligkeitsstufen.

c)



(Wert gerundet)

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 1 Zahlen und Maße
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) —
c) —

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) schwer
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2
c) 1

Thema: Physik

Quelle: http://www.solstice.de/cms/upload/pdf/Veroeffentlichungen/Weber-Fechner-PHidS-1994.pdf

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

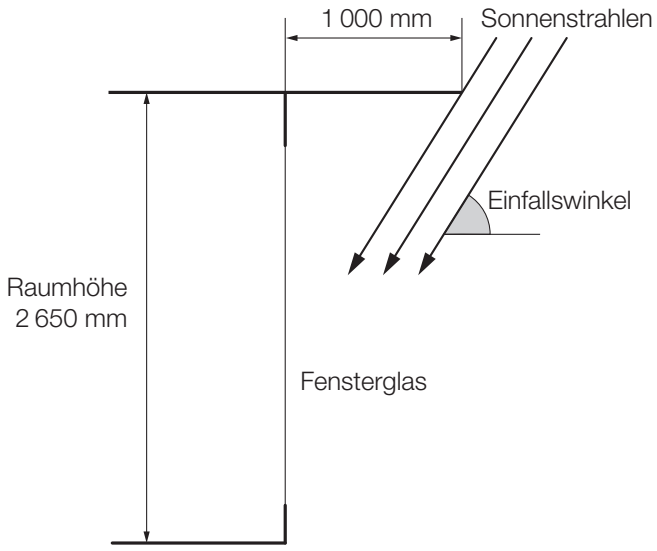
Lichtverhältnisse

Aufgabennummer: A_118

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

In verschiedenen Situationen werden unterschiedliche Lichtverhältnisse benötigt.

a) Die Decke des Untergeschoßes eines Hauses wird um 1 000 mm nach vorne gezogen, um den unteren Wohnungsbereich zu beschatten (siehe nachstehende Abbildung).



Die Sonnenstrahlen haben zu einem bestimmten Zeitpunkt einen Einfallswinkel von 65,2°.

– Berechnen Sie, wie weit die Sonne unter diesen Bedingungen in den Raum hineinstrahlt.

b) Im Zusammenhang mit Beleuchtung können manche Sachverhalte durch exponentielle Modelle beschrieben werden: beim Durchdringen von Glas nimmt die Lichtintensität exponentiell ab; die Menge an künstlichen Lichtquellen hat in der Vergangenheit annähernd exponentiell zugenommen; …

– Ordnen Sie den beiden exponentiellen Modellen jeweils die passende Funktionsgleichung aus A bis D zu. *[2 zu 4]*

exponentielles Wachstum	
exponentielle Abnahme	

A	$f(x) = \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{1}{x}}$
B	$f(x) = \left(\frac{4}{5}\right)^{x}$
C	$f(x) = \left(\frac{4}{5}\right)^{-x}$
D	$f(x) = \left(\frac{4}{5}\right)^{2}$

c) Die Beleuchtungsstärke an einem bestimmten Ort kann durch die nachstehende Formel berechnet werden.

$E = \frac{I}{r^2}$

E … Beleuchtungsstärke in Lux
I … Lichtstärke der Lichtquelle in Candela
r … Entfernung zur Lichtquelle in m

Ein Buch befindet sich in r Metern Entfernung von der Lichtquelle.

– Argumentieren Sie, wie sich die Beleuchtungsstärke verändert, wenn man die Entfernung verdoppelt.

Die Entfernung des Buches zur Lichtquelle wird um a % von r vergrößert. Die Lichtstärke der Lichtquelle bleibt unverändert. Die Beleuchtungsstärke an der neuen Position des Buches ist E_{neu}.

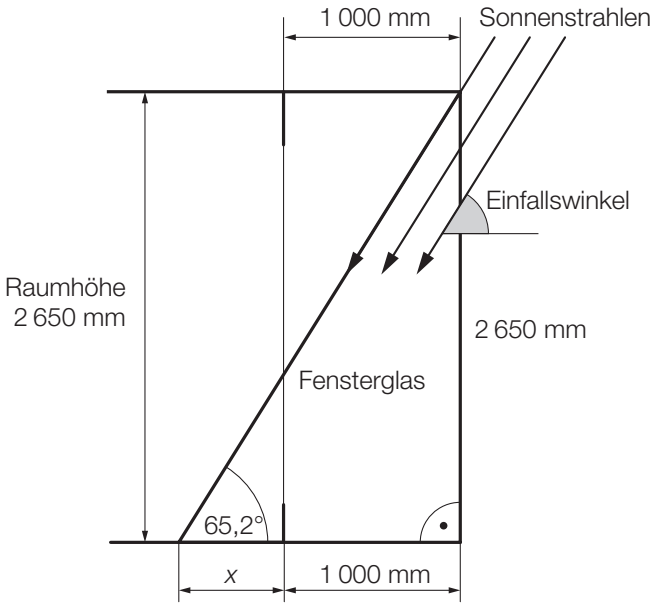
– Stellen Sie aus I, r und a eine Formel zur Berechnung von E_{neu} auf.

E_{neu} = _____

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



$$\tan(65{,}2°) = \frac{2\,650}{x + 1\,000} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2\,650}{\tan(65{,}2°)} - 1\,000 = 224{,}4\ldots$$

Die Sonne strahlt rund 224 mm in den Raum hinein.

b)

exponentielles Wachstum	C
exponentielle Abnahme	B

A	$f(x) = \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{1}{x}}$
B	$f(x) = \left(\frac{4}{5}\right)^{x}$
C	$f(x) = \left(\frac{4}{5}\right)^{-x}$
D	$f(x) = \left(\frac{4}{5}\right)^{2}$

c) Bei einer Verdoppelung der Entfernung viertelt sich die Beleuchtungsstärke, da die Beleuchtungsstärke indirekt proportional zum Quadrat der Entfernung ist.

$$E_{neu} = \frac{I}{\left(r + \frac{a}{100} \cdot r\right)^2}$$

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) 2 Algebra und Geometrie
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) D Argumentieren und Kommunizieren

Nebenhandlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) —
c) A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 1
c) 2

Thema: Sonstiges

Quellen: —

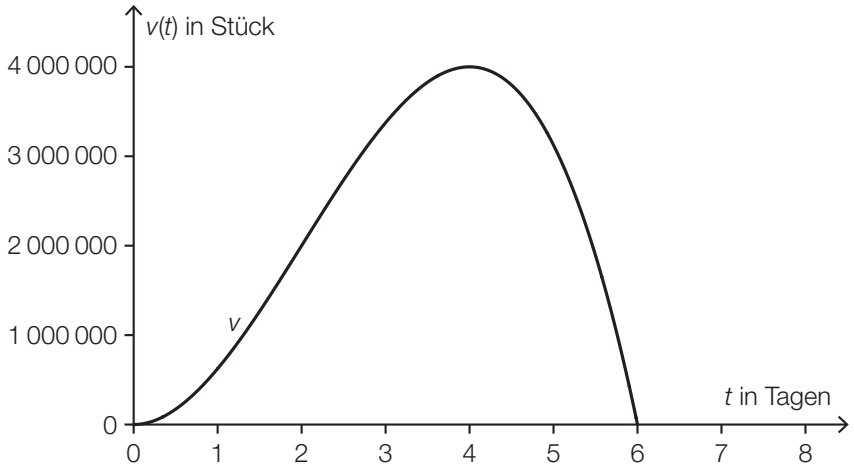
Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Virusinfektion

Aufgabennummer: A_115

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Die Anzahl der Viren in 1 ml Blut im Verlauf einer leichten Viruserkrankung lässt sich näherungsweise durch die Funktion v beschreiben:



t … Zeit seit Beginn der Erkrankung in Tagen
$v(t)$ … Anzahl der Viren in 1 ml Blut zur Zeit t

a) Die Gleichung $v(t) = 3 \cdot 10^6$ hat die positiven Lösungen t_1 und t_2 (mit $t_1 < t_2$).

– Markieren Sie die Lösungen t_1 und t_2 in der obigen Abbildung.

– Interpretieren Sie t_1 und t_2 im gegebenen Sachzusammenhang.

b) Die Funktion v ist eine Polynomfunktion.

– Argumentieren Sie unter Bezugnahme auf die obige Abbildung, dass v mindestens den Grad 3 haben muss.

c) Die Funktion v kann in folgender Form angegeben werden:

$v(t) = a \cdot (6 - t) \cdot t^2$ mit $a \in \mathbb{R}^+$

– Beweisen Sie mithilfe dieser Funktionsgleichung, dass v folgende Eigenschaften hat:
(1) v hat die Nullstellen $t = 0$ und $t = 6$.
(2) v hat die Maximumstelle $t = 4$.
(3) v hat die Wendestelle $t = 2$.

d) Die Funktion v kann in folgender Form angegeben werden:

$v(t) = a \cdot (6 - t) \cdot t^2$ mit $a \in \mathbb{R}^+$

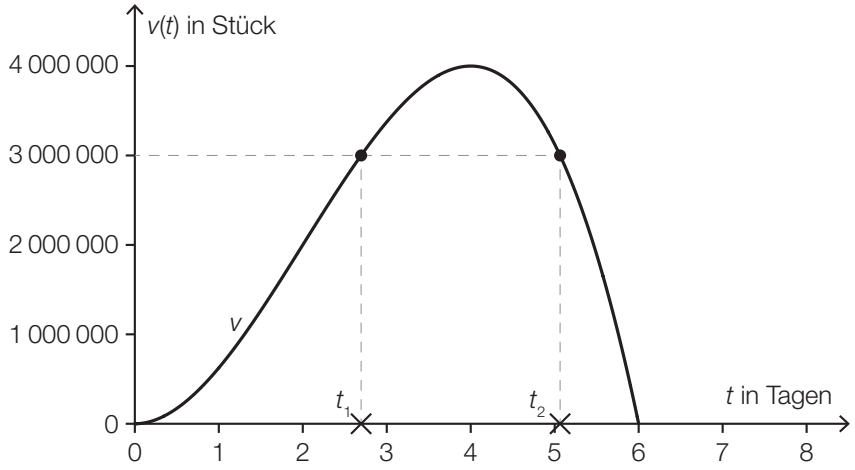
Nach 4 Tagen befinden sich 4 Millionen Viren in 1 ml Blut.

– Berechnen Sie den Parameter a.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



t_1 und t_2 sind diejenigen Zeitpunkte, zu denen in 1 ml Blut 3 Millionen Viren enthalten sind.

b) v hat eine Wendestelle. Polynomfunktionen vom Grad 1 und vom Grad 2 haben jedoch keine Wendestellen. Daher muss v mindestens den Grad 3 haben.

c) (1) $v(0) = a \cdot (6 - 0) \cdot 0^2 = a \cdot 6 \cdot 0 = 0$ und $v(6) = a \cdot (6 - 6) \cdot 6^2 = a \cdot 0 \cdot 36 = 0$
Also sind $t = 0$ und $t = 6$ Nullstellen von v.

$v(t) = a \cdot (6 - t) \cdot t^2 = 6 \cdot a \cdot t^2 - a \cdot t^3$
$v'(t) = 12 \cdot a \cdot t - 3 \cdot a \cdot t^2$
$v''(t) = 12 \cdot a - 6 \cdot a \cdot t$
$v'''(t) = -6 \cdot a$

(2) $v'(4) = 12 \cdot a \cdot 4 - 3 \cdot a \cdot 4^2 = 0$
$v''(4) = 12 \cdot a - 6 \cdot a \cdot 4 = -12 \cdot a < 0$
Wegen $v'(4) = 0$ und $v''(4) < 0$ ist $t = 4$ eine Maximumstelle von v.

(3) $v''(2) = 12 \cdot a - 6 \cdot a \cdot 2 = 0$
$v'''(2) = -6 \cdot a < 0$
Wegen $v''(2) = 0$ und $v'''(2) \neq 0$ ist $t = 2$ eine Wendestelle von v.

d) $v(4) = 4 \cdot 10^6$
$a \cdot (6 - 4) \cdot 4^2 = 4 \cdot 10^6 \quad \Rightarrow \quad a = 125\,000$

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 4 Analysis
d) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 4 Analysis
c) 3 Funktionale Zusammenhänge
d) 2 Algebra und Geometrie

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) D Argumentieren und Kommunizieren
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) —

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) leicht
c) schwer
d) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 1
c) 3
d) 1

Thema: Medizin

Quellen: —

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Im Winter

Aufgabennummer: A_114

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

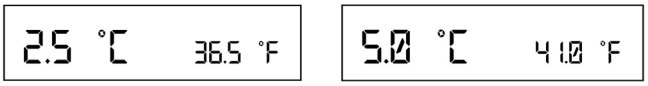
a) Aus drei unterschiedlich großen Schneekugeln wird ein Schneemann gebaut. Der Radius der untersten Kugel ist um 10 % größer als jener der mittleren Kugel. Der Radius der obersten Kugel ist um 10 % kleiner als jener der mittleren Kugel.
Das Verhältnis des Volumens der untersten Kugel V_u zu jenem der obersten Kugel V_o kann auf verschiedene Arten angegeben werden:

als ganzzahliges Verhältnis: $V_u : V_o =$ ☐ : ☐

als Verhältnis in Bezug auf 1: $V_u : V_o = 1 :$ ☐

– Ergänzen Sie in den oben angegebenen Verhältnissen jeweils die fehlenden Zahlen.

b) Zwischen der Temperatur in der Einheit Grad Celsius (°C) und der Temperatur in der Einheit Grad Fahrenheit (°F) besteht ein linearer Zusammenhang.
Ein Thermometer, das die Temperatur in beiden Einheiten anzeigt, zeigt an einem Wintertag zu verschiedenen Zeitpunkten folgende Werte:



f … Temperatur in der Einheit °F
c … Temperatur in der Einheit °C

– Argumentieren Sie unter Verwendung der angezeigten Werte, dass zwischen c und f kein direkt proportionaler Zusammenhang bestehen kann.

– Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung von f aus c.

$f =$ _____

c) Die Funktion h beschreibt näherungsweise das Höhenprofil einer Skipiste:

$h(x) = -0{,}0625 \cdot x^3 + 0{,}375 \cdot x^2 - 0{,}025 \cdot x$

x … waagrechte Entfernung von der Mittelstation in 100 m, mit $0 \leq x \leq 4$
$h(x)$ … Höhe über der Mittelstation in der waagrechten Entfernung x in 100 m

An der steilsten Stelle der Piste möchte man ein Warnschild für Schifahrer/innen anbringen.

– Berechnen Sie, wie viele Höhenmeter oberhalb von der Mittelstation diese Stelle liegt.
– Überprüfen Sie nachweislich, ob die Piste an der steilsten Stelle einen Neigungswinkel von über 30° aufweist.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Radius der mittleren Kugel … r
Radius der untersten Kugel … $1{,}1 \cdot r$
Radius der obersten Kugel … $0{,}9 \cdot r$

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

$$\frac{V_u}{V_o} = \frac{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (1{,}1 \cdot r)^3}{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (0{,}9 \cdot r)^3} = \frac{1{,}1^3}{0{,}9^3} = \frac{1{,}331}{0{,}729} = \frac{1\,331}{729}$$

$$\frac{1\,331}{729} = \frac{1}{\frac{729}{1\,331}} = \frac{1}{0{,}547\ldots}$$

$V_u : V_o =$ [1 331] : [729]

$V_u : V_o = 1 :$ [0,547...]

b) Ein direkt proportionaler Zusammenhang zwischen zwei Größen besteht dann, wenn jede Verdoppelung der einen Größe auch zu einer Verdoppelung der anderen Größe führt. Im vorliegenden Fall hat sich c verdoppelt, f jedoch nicht. Daher kann kein direkt proportionaler Zusammenhang vorliegen.

$f = 1{,}8 \cdot c + 32$

c) $h'(x) = -0{,}1875 \cdot x^2 - 0{,}75 \cdot x - 0{,}025$
$h''(x) = -0{,}375 \cdot x + 0{,}75$

$h''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad -0{,}375 \cdot x + 0{,}75 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2$

$h(2) = 0{,}95$

Die steilste Stelle liegt 95 Höhenmeter über der Mittelstation.

$h'(2) = 0{,}725$
$\arctan(0{,}725) = 35{,}9\ldots°$

Der Neigungswinkel an der steilsten Stelle beträgt rund 36° und ist daher größer als 30°.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) 1 Zahlen und Maße
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) A Modellieren und Transferieren
c) D Argumentieren und Kommunizieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2
c) 2

Thema: Sonstiges

Quellen: —

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Schiefe Türme

Aufgabennummer: A_112

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Einer Legende zufolge soll Galileo Galilei am *Schiefen Turm von Pisa* Fallversuche durchgeführt haben.
Der beim freien Fall zurückgelegte Weg einer Kugel kann näherungsweise mit der Funktion s beschrieben werden:

$s(t) = 5 \cdot t^2$

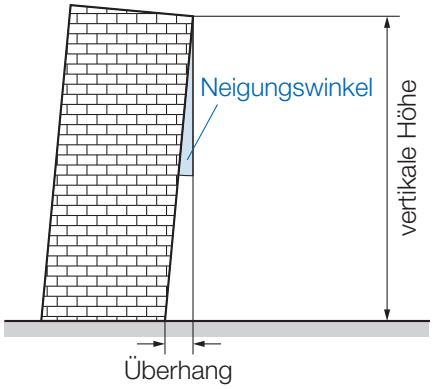
t … Zeit ab dem Loslassen der Kugel in s
$s(t)$ … bis zur Zeit t zurückgelegter Weg in m

Eine Kugel wird aus 55 m Höhe fallen gelassen. Die Funktion h beschreibt die Höhe $h(t)$ der Kugel über dem Boden (in Metern) in Abhängigkeit von der Zeit t (in Sekunden).

– Erstellen Sie eine Gleichung der Funktion h.

– Berechnen Sie die Geschwindigkeit der Kugel beim Aufprall auf den Boden.

b) Der *Schiefe Turm von Suurhusen* ist ein Kirchturm in Ostfriesland. Er hat eine vertikale Höhe von 27,37 m und einen Überhang von 2,47 m.
Der *Schiefe Turm von Pisa* hat einen Neigungswinkel von rund 4°.



– Ermitteln Sie, welcher der beiden Türme einen größeren Neigungswinkel aufweist.

c) Im Vermessungswesen werden Winkel manchmal in der Einheit Gon gemessen.
Dabei gilt: 400 gon = 360°

Der *Schiefe Turm von Dausenau* weist eine Neigung von 5,8 gon auf.

– Geben Sie diese Neigung in der Einheit Grad (°) an.

– Ergänzen Sie die fehlende Zahl in der nachstehenden Umrechnungsvorschrift, mit der von der Einheit Gon in das Bogenmaß umgerechnet werden kann.

$$1 \text{ gon} = \frac{\pi}{\square} \text{ rad}$$

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $h(t) = -5 \cdot t^2 + 55$

Zeitpunkt des Aufpralls: $5 \cdot t^2 = 55 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{11} = 3{,}3166\ldots$
Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t: $v(t) = s'(t) = 10 \cdot t$
Geschwindigkeit zum Zeitpunkt des Aufpralls: $v(3{,}3166\ldots) = 33{,}166\ldots$
Die Geschwindigkeit der Kugel beim Aufprall auf den Boden beträgt rund 33,17 m/s.

b) Neigungswinkel des Schiefen Turms von Suurhusen:
$\arctan\left(\frac{2{,}47}{27{,}37}\right) = 5{,}1...°$

Der Schiefe Turm von Suurhusen weist einen größeren Neigungswinkel auf als der Schiefe Turm von Pisa.

c) $5{,}8 \text{ gon} = 5{,}8 \cdot \frac{360°}{400} = 5{,}22°$

$1 \text{ gon} = \frac{\pi}{\boxed{200}} \text{ rad}$

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) —
c) A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) leicht
c) leicht

Punkteanzahl:

a) 2
b) 1
c) 2

Thema: Sonstiges

Quellen: —

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Erwärmung von Substanzen

Aufgabennummer: A_096

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Eine Substanz wird aus dem Kühlschrank (Temperatur T_1) genommen und in einen Raum mit der Umgebungstemperatur T_2 gebracht. Der zeitliche Verlauf der Temperatur dieser Substanz kann näherungsweise durch die Funktion T beschrieben werden:

$T(t) = T_2 - (T_2 - T_1) \cdot 0{,}94^t$ mit $T_2 > T_1$

t … Zeit seit der Entnahme aus dem Kühlschrank in min
$T(t)$ … Temperatur zur Zeit t in °C

a) – Ordnen Sie den beiden Ausdrücken jeweils die zutreffenden Eigenschaften aus A bis D zu. *[2 zu 4]*

$(T_2 - T_1) \cdot 0{,}94^t$	
$T_2 - (T_2 - T_1) \cdot 0{,}94^t$	

A	Der Ausdruck ist für alle $t \in \mathbb{R}^+$ positiv. Der Ausdruck wird mit zunehmender Zeit t immer größer. Für $t = 0$ hat der Ausdruck den Wert T_2. Für $t \to \infty$ nähert sich der Ausdruck der Zahl 0.
B	Der Ausdruck ist für alle $t \in \mathbb{R}^+$ positiv. Der Ausdruck wird mit zunehmender Zeit t immer kleiner. Für $t = 0$ hat der Ausdruck den Wert 0. Für $t \to \infty$ nähert sich der Ausdruck der Zahl T_1.
C	Der Ausdruck ist für alle $t \in \mathbb{R}^+$ positiv. Der Ausdruck wird mit zunehmender Zeit t immer größer. Für $t = 0$ hat der Ausdruck den Wert T_1. Für $t \to \infty$ nähert sich der Ausdruck der Zahl T_2.
D	Der Ausdruck ist für alle $t \in \mathbb{R}^+$ positiv. Der Ausdruck wird mit zunehmender Zeit t immer kleiner. Für $t = 0$ hat der Ausdruck den Wert $T_2 - T_1$. Für $t \to \infty$ nähert sich der Ausdruck der Zahl 0.

b) In der folgenden Berechnung wurde ein Fehler gemacht:

$T_2 - (T_2 - T_1) \cdot 0{,}94^t = T_2 - T_2 + T_1 \cdot 0{,}94^t = T_1 \cdot 0{,}94^t$

– Erklären Sie, welcher Fehler gemacht wurde.

c) Die Substanz muss bei einer Temperatur von 13 °C weiterverarbeitet werden.

– Berechnen Sie, wie lange es dauert, bis die Substanz nach Entnahme aus dem Kühlschrank diese Temperatur erreicht hat, wenn $T_1 = 6$ °C und $T_2 = 24$ °C beträgt.

d) Die Funktion T kann auch in der folgenden Form angegeben werden:

$T(t) = T_2 - (T_2 - T_1) \cdot e^{-\lambda \cdot t}$

– Berechnen Sie λ.

– Kreuzen Sie denjenigen Ausdruck an, der die 1. Ableitung von T richtig angibt. *[1 aus 5]*

$T'(t) = \lambda \cdot (T_2 - T_1) \cdot e^{-\lambda \cdot t}$	☐
$T'(t) = -\lambda \cdot (T_2 - T_1) \cdot e^{-\lambda \cdot t}$	☐
$T'(t) = -(T_2 - T_1) \cdot e^{-\lambda \cdot t}$	☐
$T'(t) = -\lambda \cdot (T_2 - T_1) \cdot e^{-\lambda \cdot t - 1}$	☐
$T'(t) = \lambda \cdot (T_2 - T_1) \cdot e^{-\lambda \cdot t - 1}$	☐

– Interpretieren Sie die Bedeutung des Ausdrucks $T'(5)$ im gegebenen Sachzusammenhang. Geben Sie dabei die zugehörige Einheit an.

e) Ergänzen Sie die fehlende Zahl in der nachstehenden Funktionsgleichung so, dass die Funktion T_{neu} einen Erwärmungsvorgang beschreibt, der langsamer verläuft als der durch die Funktion T beschriebene.

$T_{neu}(t) = T_2 - (T_2 - T_1) \cdot \square^t$

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a)

$(T_2 - T_1) \cdot 0{,}94^t$	D
$T_2 - (T_2 - T_1) \cdot 0{,}94^t$	C

A	Der Ausdruck ist für alle $t \in \mathbb{R}^+$ positiv. Der Ausdruck wird mit zunehmender Zeit t immer größer. Für $t = 0$ hat der Ausdruck den Wert T_2. Für $t \to \infty$ nähert sich der Ausdruck der Zahl 0.
B	Der Ausdruck ist für alle $t \in \mathbb{R}^+$ positiv. Der Ausdruck wird mit zunehmender Zeit t immer kleiner. Für $t = 0$ hat der Ausdruck den Wert 0. Für $t \to \infty$ nähert sich der Ausdruck der Zahl T_1.
C	Der Ausdruck ist für alle $t \in \mathbb{R}^+$ positiv. Der Ausdruck wird mit zunehmender Zeit t immer größer. Für $t = 0$ hat der Ausdruck den Wert T_1. Für $t \to \infty$ nähert sich der Ausdruck der Zahl T_2.
D	Der Ausdruck ist für alle $t \in \mathbb{R}^+$ positiv. Der Ausdruck wird mit zunehmender Zeit t immer kleiner. Für $t = 0$ hat der Ausdruck den Wert $T_2 - T_1$. Für $t \to \infty$ nähert sich der Ausdruck der Zahl 0.

b) Die Regel „Punkt vor Strich“ wurde nicht beachtet. Das Weglassen der Klammer im ersten Umformungsschritt ist nicht zulässig.

c) $T(t) = 24 - 18 \cdot 0{,}94^t$
$24 - 18 \cdot 0{,}94^t = 13 \quad \Rightarrow \quad t = 7{,}9\ldots$
Nach rund 8 Minuten hat sich die Substanz auf 13 °C erwärmt.

d) $e^{-\lambda \cdot t} = 0{,}94^t \quad \Rightarrow \quad e^{-\lambda} = 0{,}94 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\ln(0{,}94) = 0{,}0618\ldots$

$T'(t) = \lambda \cdot (T_2 - T_1) \cdot e^{-\lambda \cdot t}$	☒

$T'(5)$ ist die momentane Änderungsrate der Temperatur (in °C/min) 5 Minuten nach der Entnahme der Substanz aus dem Kühlschrank.

e) Jede Zahl aus dem Intervall]0,94; 1[ist richtig.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 3 Funktionale Zusammenhänge
d) 4 Analysis
e) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) —
c) 2 Algebra und Geometrie
d) 2 Algebra und Geometrie
e) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) C Interpretieren und Dokumentieren
e) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) —
c) —
d) B Operieren und Technologieeinsatz
e) —

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) mittel	a) 1
b) leicht	b) 1
c) leicht	c) 1
d) mittel	d) 3
e) mittel	e) 1

Thema: Sonstiges

Quellen: —

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Basketball

Aufgabennummer: A_081

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

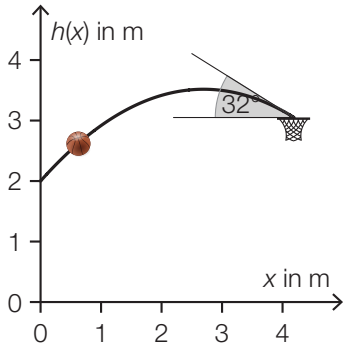
Beim Basketball versuchen die Spieler/innen, den Ball in den Korb der gegnerischen Mannschaft zu werfen.

a) Beim Freiwurf wird der Ball von der Freiwurflinie aus geworfen. Die Mitte des Korbrings hat von der Freiwurflinie eine waagrechte Entfernung von 4,191 m und ist in 3,05 m Höhe montiert. Die Flugbahn des Basketballs bei einem bestimmten Freiwurf kann annähernd durch die Funktion h beschrieben werden:

$h(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

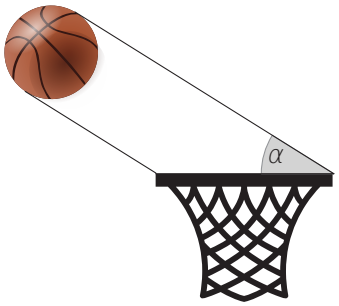
x … waagrechte Entfernung von der Freiwurflinie in m
$h(x)$ … Höhe des Balles in der Entfernung x in m

Der Ball wird aus 2 m Höhe geworfen und fällt mit einem Einfallswinkel von 32° genau durch die Mitte des Korbrings (siehe nebenstehende Abbildung).



– Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten a, b und c.

b) Bei besonders gelungenen Würfen fällt der Ball ohne Berührung des Korbrings ins Netz. Der kleinste Einfallswinkel α, bei dem dies möglich ist, ist in der nebenstehenden Abbildung dargestellt.
(Die „Dicke“ des kreisförmigen Korbrings wird bei dieser Überlegung vernachlässigt.)



– Erstellen Sie aus dem Durchmesser d des Balles und dem Durchmesser D des Korbrings eine Formel zur Berechnung von α.

$\alpha =$ _____

c) Laut Vorgabe des Weltbasketballverbands FIBA darf bei Wettkämpfen der Umfang des (kugelförmigen) Balles nicht weniger als 749 mm und nicht mehr als 780 mm betragen.

– Berechnen Sie, um wie viel dm^3 sich das Volumen des größten erlaubten Balles von jenem des kleinsten erlaubten Balles unterscheidet.

d) Auf der Basis von statistischen Aufzeichnungen geht man davon aus, dass ein bestimmter Spieler bei jedem Freiwurf mit einer Wahrscheinlichkeit von 87,7 % in den Korb trifft. Der Spieler wettet, dass er bei 10 Freiwürfen mindestens 9 Treffer erzielt.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler die Wette verliert.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

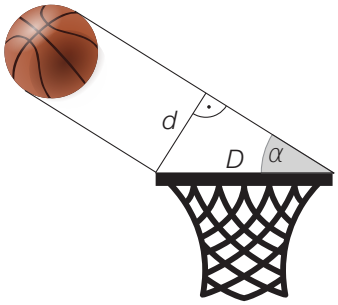
Möglicher Lösungsweg

a) I: $h(0) = 2$
II: $h(4{,}191) = 3{,}05$
III: $h'(4{,}191) = -\tan(32°)$

oder:

I: $c = 2$
II: $4{,}191^2 \cdot a + 4{,}191 \cdot b + c = 3{,}05$
III: $2 \cdot 4{,}191 \cdot a + b = -\tan(32°)$

b)



$\alpha = \arcsin\left(\frac{d}{D}\right)$

c) $u = 2 \cdot \pi \cdot r \quad \Rightarrow \quad r = \frac{u}{2 \cdot \pi}$

$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{u}{2 \cdot \pi}\right)^3$

$\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{7{,}8}{2 \cdot \pi}\right)^3 - \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{7{,}49}{2 \cdot \pi}\right)^3 = 0{,}918\ldots$

Die Volumina unterscheiden sich um rund 0,92 dm^3.

d) X … Anzahl der Treffer

Binomialverteilung mit $n = 10$ und $p = 0{,}877$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$P(X \leq 8) = 0{,}3533\ldots$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt rund 35,3 %.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 2 Algebra und Geometrie
d) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) A Modellieren und Transferieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) —
c) —
d) —

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel
d) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 1
c) 1
d) 1

Thema: Sport

Quelle: NBA.com

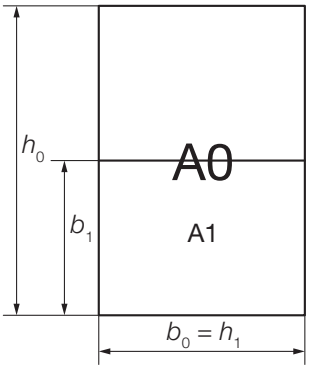
Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Papierformate

Aufgabennummer: A_074

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Die Standardgrößen für Papierformate sind genormt. In der sogenannten *A-Reihe* gibt es 11 Formatklassen (A0, A1, … , A10). Durch Halbierung eines Formats normal zur längeren Seite entsteht das nächstkleinere Format (siehe nebenstehende Abbildung).



a) Das Format A0 hat einen Flächeninhalt von 1 m². Das Verhältnis zwischen Breite und Höhe beträgt $1 : \sqrt{2}$.

– Berechnen Sie für das Format A0 die Breite und die Höhe in Millimetern.

b) Ein A0-Bogen einer bestimmten Papiersorte hat eine Masse von 80 g.
Die Funktion m ordnet jeder Formatklasse k ($k = 0$ für die Formatklasse A0 usw.) die Masse $m(k)$ in Gramm eines Bogens dieser Formatklasse zu.

– Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen des jeweils richtigen Satzteils so, dass eine korrekte Aussage entsteht. *[Lückentext]*

Eine Gleichung der Funktion m lautet _____ ① _____, ihre im gegebenen Sachzusammenhang passende Definitionsmenge ist _____ ② _____.

①	
$m(k) = 80 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k$	☐
$m(k) = 80 \cdot k^{\frac{1}{2}}$	☐
$m(k) = 80 - \frac{1}{2} \cdot k$	☐

②	
$[0; 10]$	☐
$\{x \in \mathbb{N} \mid 0 \leq x \leq 10\}$	☐
$\{x \in \mathbb{Z} \mid \lvert x \rvert \leq 10\}$	☐

c) Von einer 210 mm breiten Papierrolle werden maschinell A4-Blätter abgeschnitten. Die Längen X der abgeschnittenen Blätter sind annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 297$ mm und der Standardabweichung $\sigma = 0{,}8$ mm.

Für eine bestimmte Zahl $c > 0$ gilt: $1 - P(\mu - c \leq X \leq \mu + c) = 1{,}2\ \%$

– Interpretieren Sie das Ergebnis 1,2 % im gegebenen Sachzusammenhang.

– Veranschaulichen Sie das Ergebnis 1,2 % anhand einer Skizze der Gauß'schen Glockenkurve.

– Berechnen Sie c.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $b : h = 1 : \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot h$

$b \cdot h = 10^6$

$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot h^2 = 10^6 \quad \Rightarrow \quad h = 1\,189{,}2\ldots$

$b = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 1\,189{,}2\ldots = 840{,}8\ldots$

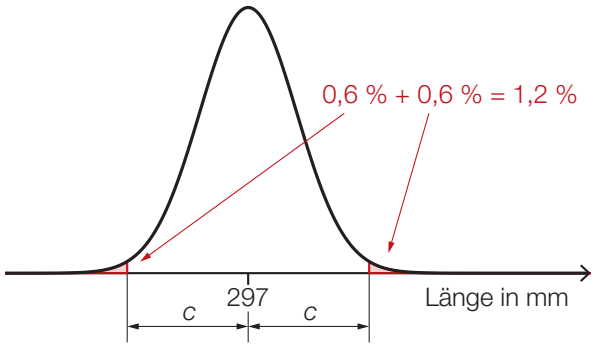
Die Breite beträgt rund 841 mm, die Höhe beträgt rund 1 189 mm.

b)

①	
$m(k) = 80 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k$	☒

②	
$\{x \in \mathbb{N} \mid 0 \leq x \leq 10\}$	☒

c) Die Längen von 1,2 % aller abgeschnittenen Blätter weichen um mehr als c mm vom Erwartungswert 297 mm ab.



$1 - P(\mu - c \leq X \leq \mu + c) = 0{,}012 \quad \Rightarrow \quad P(X \leq \mu - c) = 0{,}006$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$\mu - c = 294{,}99\ldots \quad \Rightarrow \quad c = \mu - 294{,}99\ldots = 297 - 294{,}99\ldots = 2{,}00\ldots$

$c \approx 2{,}0$ mm

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) 1 Zahlen und Maße
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) —
c) A Modellieren und Transferieren, B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) mittel	a) 2
b) mittel	b) 1
c) mittel	c) 3

Thema: Alltag

Quellen: —

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Das perfekte Ei

Aufgabennummer: A_073

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Der österreichische Physiker Werner Gruber entwickelte folgende Formel für das Kochen von Eiern:

$$t = 0{,}0016 \cdot d^2 \cdot \ln\left(\frac{2 \cdot (T_S - T_A)}{T_S - T_{Ei}}\right)$$

t … Kochzeit des Eies in min
T_A … Ausgangstemperatur des Eies in °C
d … Durchmesser des Eies an der dicksten Stelle in mm
T_S … Siedetemperatur des Wassers in °C
T_{Ei} … gewünschte Innentemperatur des Eies in °C

a) Die Siedetemperatur des Wassers nimmt mit steigender Seehöhe (Höhe über dem Meeresspiegel) ab. Eine Höhenzunahme um etwa 300 m bewirkt dabei eine Abnahme der Siedetemperatur um jeweils 1 °C.

– Ergänzen Sie die fehlende Zahl in der nachstehenden Formel zur Berechnung der Siedetemperatur.

$$T_S = \square \cdot h + 100$$

h … Seehöhe in m

Ein Ei mit einem Durchmesser von 44 mm an der dicksten Stelle und einer Ausgangstemperatur von 5 °C soll in Wien (Seehöhe 160 m) hartgekocht werden (gewünschte Innentemperatur: 82 °C).

– Berechnen Sie die Kochzeit in Minuten und Sekunden.

b) Der Ausdruck $\ln\left(\frac{2 \cdot (T_S - T_A)}{T_S - T_{Ei}}\right)$ kann in einen der folgenden Ausdrücke umgeformt werden.

– Kreuzen Sie den zutreffenden Ausdruck an. *[1 aus 5]*

$\ln\left(\frac{2 \cdot T_A}{T_{Ei}}\right)$	☐
$2 \cdot \ln\left(\frac{T_S - T_A}{T_S - T_{Ei}}\right)$	☐
$\ln(2) + \frac{\ln(T_S)}{\ln(T_A)} - \frac{\ln(T_S)}{\ln(T_{Ei})}$	☐
$\ln(2) + \ln(T_S - T_A) - \ln(T_S - T_{Ei})$	☐
$\ln(2) + \ln(T_S) - \ln(T_A) - \ln(T_S) + \ln(T_{Ei})$	☐

c) Im Kühlschrank liegt eine Zehnerpackung Eier, deren Mindesthaltbarkeitsdatum stark überschritten ist. Aus langjähriger Erfahrung weiß man, dass jedes dieser Eier mit einer Wahrscheinlichkeit von 15 % verdorben ist.

– Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit an, dass genau *n* Eier aus dieser Packung verdorben sind.

P(„es sind genau n Eier verdorben“) = _____

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $T_S = \boxed{-\frac{1}{300}} \cdot h + 100$

$T_S = -\frac{1}{300} \cdot 160 + 100 = 99{,}46\ldots$

$t = 0{,}0016 \cdot 44^2 \cdot \ln\left(\frac{2 \cdot (99{,}46... - 5)}{99{,}46... - 82}\right) = 7{,}37\ldots$

$0{,}37\ldots \text{ min} \approx 23 \text{ s}$

Die Kochzeit beträgt etwa 7 Minuten und 23 Sekunden.

b)

$\ln(2) + \ln(T_S - T_A) - \ln(T_S - T_{Ei})$	☒

c) $P(\text{„es sind genau } n \text{ Eier verdorben“}) = \binom{10}{n} \cdot 0{,}15^n \cdot 0{,}85^{10-n}$

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) —
c) —

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) leicht

Punkteanzahl:

a) 2
b) 1
c) 1

Thema: Alltag

Quellen: —

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

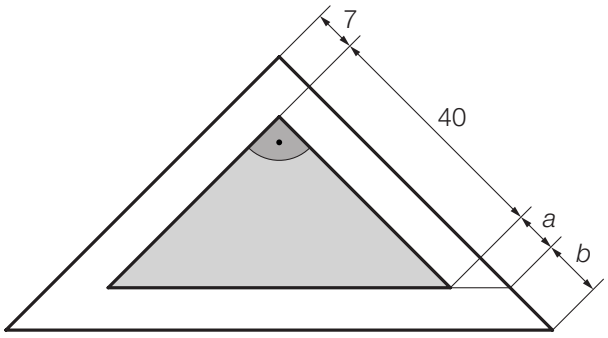
Patchwork

Aufgabennummer: A_072

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Beim Patchwork werden Stoffstücke zusammengenäht und auf diese Weise neue Textilien angefertigt. Ein Handarbeitsgeschäft bietet Patchworkkurse an.

a) Eine Patchworkarbeit enthält gleichschenkelige, rechtwinkelige Stoffdreiecke mit einer Kathetenlänge von 4 cm. Um die Dreiecke zusammennähen zu können, müssen sie jedoch größer zugeschnitten werden. Der zusätzliche Rand ist auf allen Seiten 7 mm breit (siehe nachstehende Abbildung, Maße in Millimetern).



– Weisen Sie nach, dass gilt: $a = 7$ mm und $b = 7 \cdot \sqrt{2}$ mm

– Berechnen Sie Länge der Hypotenuse des zugeschnittenen Stoffdreiecks.

b) Für eine Decke stehen 12 verschiedene Farben zur Auswahl. Die 5 teilnehmenden Personen wählen unabhängig voneinander jeweils eine Farbe aus. (Dabei kann eine Farbe auch von mehreren Personen gewählt werden.)

– Ordnen Sie den beiden Ausdrücken jeweils dasjenige Ereignis aus A bis D zu, dessen Wahrscheinlichkeit damit berechnet wird. *[2 zu 4]*

$\frac{12}{12} \cdot \frac{11}{12} \cdot \frac{10}{12} \cdot \frac{9}{12} \cdot \frac{8}{12}$	
$12 \cdot \left(\frac{1}{12}\right)^5$	

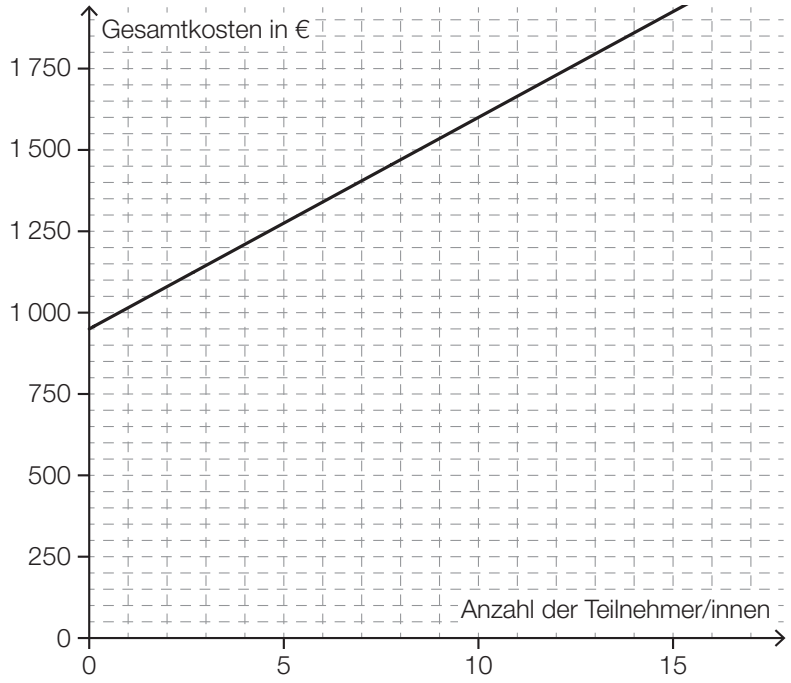
A	Alle Personen wählen unterschiedliche Farben.
B	Alle Personen wählen die gleiche Farbe.
C	Mindestens 2 Personen wählen die gleiche Farbe.
D	Höchstens 2 Personen wählen die gleiche Farbe.

c) Für einen neuen Kursraum werden n Stück Nähmaschinen benötigt. Der Preis einer solchen Maschine beträgt exklusive 20 % Mehrwertsteuer p Euro. Es wird ein Mengenrabatt von r % gewährt.

– Erstellen Sie aus n, p und r eine Formel zur Berechnung der Anschaffungskosten K inklusive Mehrwertsteuer (in Euro).

K = _____

d) In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Kostenfunktion für die Abhaltung eines Kurses dargestellt.

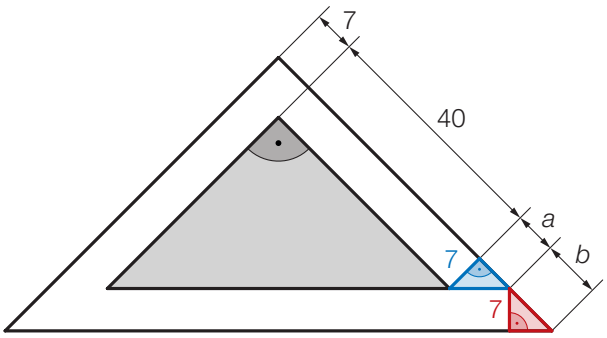


– Ermitteln Sie, welche zusätzlichen Kosten pro teilnehmender Person anfallen.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



Die beiden färbig markierten Dreiecke sind ähnlich zum gesamten Stoffdreieck und daher gleichschenkelig und rechtwinkelig.

Da die Katheten im blauen Dreieck gleich lang sind, ist $a = 7$.

Da die Katheten im roten Dreieck beide 7 mm lang sind, gilt für die Hypotenuse b:
$b = \sqrt{7^2 + 7^2} = \sqrt{2 \cdot 7^2} = 7 \cdot \sqrt{2}$

$\sqrt{2 \cdot (7 + 40 + 7 + 7 \cdot \sqrt{2})^2} = 90{,}3\ldots$

Die Hypotenuse des zugeschnittenen Stoffdreiecks ist rund 9,0 cm lang.

b)

$\frac{12}{12} \cdot \frac{11}{12} \cdot \frac{10}{12} \cdot \frac{9}{12} \cdot \frac{8}{12}$	A
$12 \cdot \left(\frac{1}{12}\right)^5$	B

A	Alle Personen wählen unterschiedliche Farben.
B	Alle Personen wählen die gleiche Farbe.
C	Mindestens 2 Personen wählen die gleiche Farbe.
D	Höchstens 2 Personen wählen die gleiche Farbe.

c) $K = n \cdot p \cdot 1{,}2 \cdot \left(1 - \frac{r}{100}\right)$

d) Ermitteln der Steigung der Funktion mithilfe eines geeigneten Steigungsdreiecks: $\frac{650}{10} = 65$
Pro teilnehmender Person fallen zusätzliche Kosten in Höhe von € 65 an.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 5 Stochastik
c) 1 Zahlen und Maße
d) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) 2 Algebra und Geometrie
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) A Modellieren und Transferieren
d) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) —
c) —
d) —

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) schwer
c) leicht
d) leicht

Punkteanzahl:

a) 2
b) 1
c) 1
d) 1

Thema: Alltag

Quellen: —

Abnehmen

Aufgabennummer: A_286

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein Mann hat eine Masse von 95 kg und möchte „abspecken“.
Die Entwicklung seiner Körpermasse durch Training und eine entsprechende Diät folgen ungefähr folgender Funktion:

$$m(t) = \left(A - \frac{D}{p}\right) \cdot (1 - p)^t + \frac{D}{p}$$

$m(t)$ … Masse in Kilogramm (kg) zum Zeitpunkt t
t … Zeit in Wochen
A … Ausgangsmasse in kg
D … wöchentliche Zunahme der Masse in kg durch Ernährung und Muskelaufbau
p … $(0 < p < 1)$ Anteil der Abnahme der Körpermasse pro Woche bezogen auf die Masse zu Wochenbeginn

a) – Zeichnen Sie den Graphen der Funktion m mit den Werten
$A = 95$ kg,
$D = 0{,}64$ kg,
$p = 0{,}01$
für $t \in [0; 200]$.
– Berechnen Sie, um wie viele Kilogramm sich die Masse in den ersten 100 Wochen verändert hat, und zeichnen Sie die Körpermasse des Mannes nach 100 Wochen in die Grafik ein.

b) – Argumentieren Sie, warum sich nach der gegebenen Funktion für m die Körpermasse laufend verringert und langfristig gegen einen unteren Grenzwert strebt.

c) Der Mann mit der Masse von 95 kg hat einen Körperfettanteil von 32 %.

– Berechnen Sie (ohne Zuhilfenahme der obigen Formel) seine Körpermasse, wenn er durch Training seinen Körperfettanteil auf 25 % verringert, zugleich aber 2,3 kg an Muskelmasse zugelegt hat.
(Die Masse der Körperteile, die nicht Fett oder Muskeln sind, bleibt konstant.)

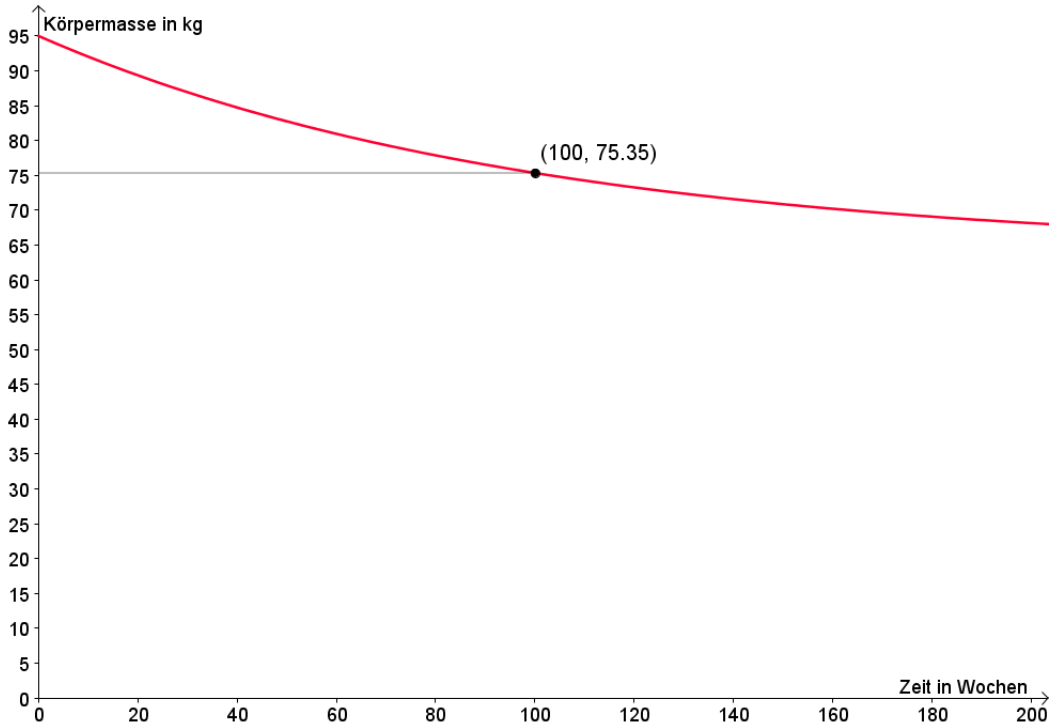
Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $m(100) = \left(95 - \frac{0{,}64}{0{,}01}\right) \cdot (1 - 0{,}01)^{100} + \frac{0{,}64}{0{,}01} = 75{,}35$

$95 - 75{,}35 = 19{,}65$

Die Masse ist in den ersten 100 Wochen um 19,65 kg geringer geworden.



b) $\frac{D}{p}$ ist ein konstanter Wert.
$(1 - p)$ liegt zwischen 0 und 1, t ist eine positive Zahl, daher geht $(1 - p)^t$ langfristig, d. h. für große t, gegen null.
Wenn der Faktor $(1 - p)^t$ für große t gegen null geht, geht auch das Produkt $\left(A - \frac{D}{p}\right) \cdot (1 - p)^t$ gegen null.
Es bleibt daher langfristig nur der konstante Wert $\frac{D}{p}$ als Grenzwert für das erreichte Körpergewicht übrig.

c) $\frac{95 \cdot (1 - 0{,}32) + 2{,}3}{1 - 0{,}25} = 89{,}2 \text{ kg}$

Die Körpermasse des Mannes beträgt 89,2 kg.

Oder:
30,4 kg Fett sowie 64,6 kg Muskeln und Sonstiges werden zu 25 % Fett und 66,9 kg Muskeln und Sonstiges, also wiegt er nunmehr 66,9 : 0,75 = 89,2 kg.

Auch andere Berechnungsmodelle, die zum richtigen Ergebnis führen, sind zulässig.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 1 Zahlen und Maße

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) —
c) —

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) schwer
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2
c) 2

Thema: Sport

Quellen: —

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

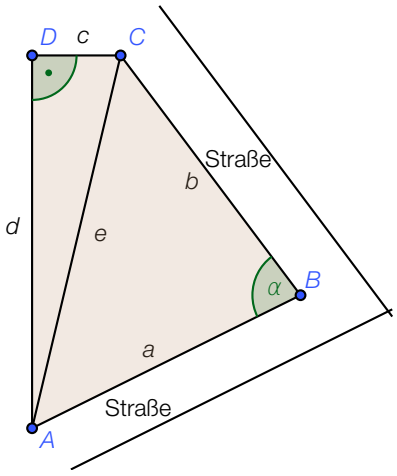
Vergnügungspark (4)

Aufgabennummer: B_293

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Ein neuer Vergnügungspark wird geplant.

a) Das zur Verfügung stehende viereckige Gelände wird an zwei Seiten durch die geradlinig verlaufenden Straßenstücke a = 486 m und b = 480 m begrenzt. Die beiden anderen Begrenzungslinien (c = 143 m und d) schließen einen rechten Winkel ein. Die Eckpunkte A und C des Geländes sind 621 m voneinander entfernt.

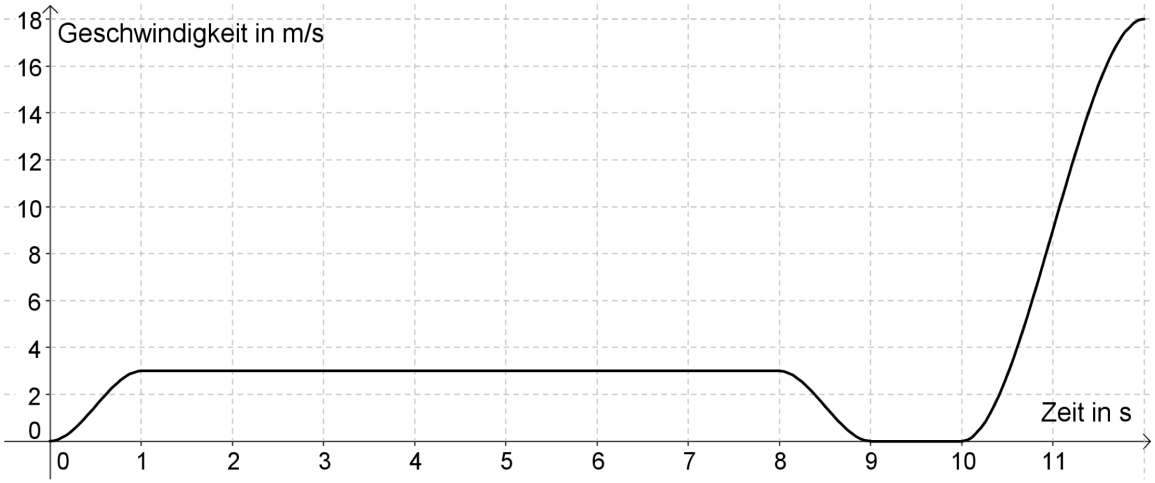


– Berechnen Sie den Winkel α, den die beiden Straßenstücke miteinander einschließen.

– Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung des Flächeninhalts A des gesamten Geländes unter Verwendung der gegebenen Größen.

A = _____

b) Im Park wird eine Achterbahn gebaut. Das nachstehende Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm zeigt den Verlauf der Geschwindigkeit für die ersten 12 s der Fahrt.



– Interpretieren Sie die Bedeutung der Fläche unter dem Graphen der Geschwindigkeit-Zeit-Funktion im Zeitintervall [0; 9] im gegebenen Sachzusammenhang.

– Beschreiben Sie die Bedeutung der negativen Steigung der Geschwindigkeit-Zeit-Funktion im Zeitintervall [8; 9].

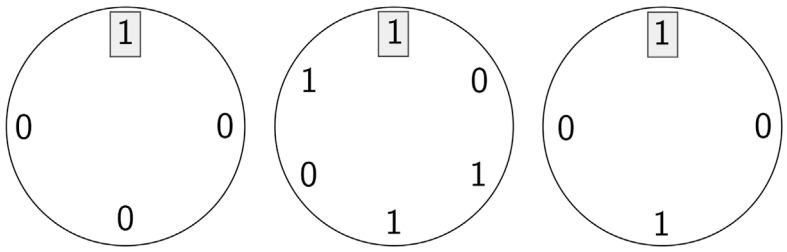
Im Zeitintervall [10; 12] kann der Verlauf der Geschwindigkeit durch die Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v beschrieben werden.

$v(t) = -4{,}5 \cdot t^3 + 148{,}5 \cdot t^2 - 1\,620 \cdot t + 5\,850$

t ... Zeit in s mit $10 \leq t \leq 12$
$v(t)$ ... Geschwindigkeit zur Zeit t in m/s

– Berechnen Sie die maximale Beschleunigung in diesem Zeitintervall.

c) Im Vergnügungspark wird es einen Glücksspielautomaten mit den 3 nachstehend dargestellten Rädern geben.



Wirft man eine 1-Euro-Münze ein, drehen sich die Räder unabhängig voneinander und kommen nach einer kurzen Zeit zum Stillstand, wobei pro Rad genau eine zufällige Zahl sichtbar ist. Die Zufallsvariable X bezeichnet die Anzahl der sichtbaren Einsen auf den 3 Rädern.

– Ordnen Sie den beiden Wahrscheinlichkeiten jeweils die passende Berechnung aus A bis D zu. *[2 zu 4]*

$P(X = 1)$	
$P(X \geq 1)$	

A	$\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$
B	$1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$
C	$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$
D	$1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$

Erscheint auf allen 3 Rädern die Zahl 1, so ist der Gewinn $G = €\ 5$. Erscheint auf allen 3 Rädern die Zahl 0, so ist der Gewinn $G = €\ 2$. Bei allen anderen Resultaten verfällt der Einsatz, also $G = €\ -1$.

– Berechnen Sie den zu erwartenden Gewinn für diesen Glücksspielautomaten.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $\alpha = \arccos\left(\frac{e^2 - a^2 - b^2}{-2 \cdot a \cdot b}\right) \approx 80°$

$A_1 = \frac{c \cdot d}{2}$

$A_2 = \frac{a \cdot b \cdot \sin(\alpha)}{2} \Rightarrow A = \frac{c \cdot d}{2} + \frac{a \cdot b \cdot \sin(\alpha)}{2}$

b) Die Fläche entspricht dem Weg, den die Bahn im Zeitintervall [0; 9] zurücklegt.

Die negative Steigung bedeutet eine Verzögerung der Geschwindigkeit.

$a(t) = v'(t) = -13{,}5 \cdot t^2 + 297 \cdot t - 1620$
$a'(t) = -27 \cdot t - 297 = 0 \Rightarrow t = 11$
$a(11) = 13{,}5 \text{ m/s}^2$

c)

$P(X = 1)$	C
$P(X \geq 1)$	B

A	$\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$
B	$1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$
C	$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$
D	$1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$

Gewinnerwartung =
$5 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} - 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\right) = € -0{,}125$

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 4 Analysis
c) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) A Modellieren und Transferieren, B Operieren und Technologieeinsatz
c) C Interpretieren und Dokumentieren, A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 4
c) 3

Thema: Sonstiges

Quellen: –

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

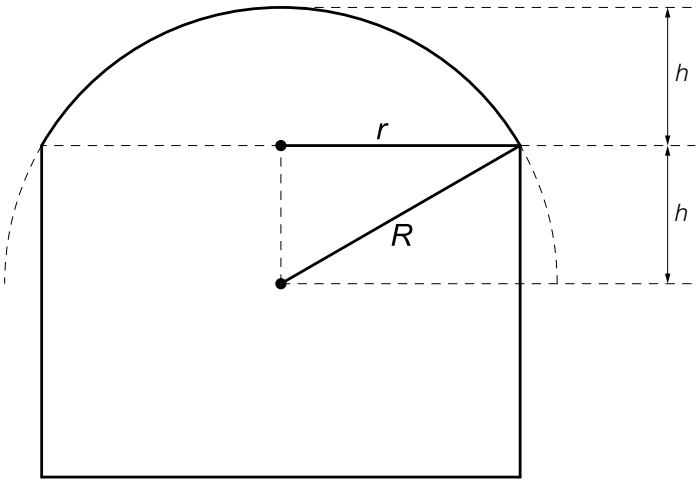
Veranstaltungszentrum

Aufgabennummer: B_036

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein neues Veranstaltungszentrum wird geplant.

a) Das Gebäude hat die Form eines Zylinders mit einer aufgesetzten Kuppel in Form eines Kugelsegments (einer abgeschnittenen Kugel).
Die Höhe h der Kuppel entspricht dem halben Kugelradius R (siehe nachstehende Abbildung).



– Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung des Radius r des Basiskreises der Kuppel aus h.

$r =$ _____

– Berechnen Sie den Flächeninhalt des Basiskreises der Kuppel für eine Kuppelhöhe von $h = 16$ m.

b) In der Planung des Veranstaltungszentrums wird eine Grundfläche von 2 500 m^2 angenommen. 17 % dieser Fläche sind für Haustechnik, Notausgänge und Personal reserviert und daher für Besucher/innen gesperrt. Die Bauvorschrift erlaubt maximal 2 Besucher/innen je Quadratmeter Grundfläche.

– Berechnen Sie die maximal erlaubte Anzahl an Besucherinnen und Besuchern für dieses Veranstaltungszentrum.

Die kreisförmige Bodenfläche des Veranstaltungszentrums wird um k % vergrößert. Einer der nachstehenden Terme gibt den Änderungsfaktor des Radius der Bodenfläche des Veranstaltungszentrums an.

– Kreuzen Sie den zutreffenden Term an. *[1 aus 5]*

$1 + \frac{k}{100}$	☐
$\frac{100}{k}$	☐
$\left(1 + \frac{k}{100}\right)^2$	☐
$\sqrt{1 + \frac{k}{100}}$	☐
$1 - \frac{k}{100}$	☐

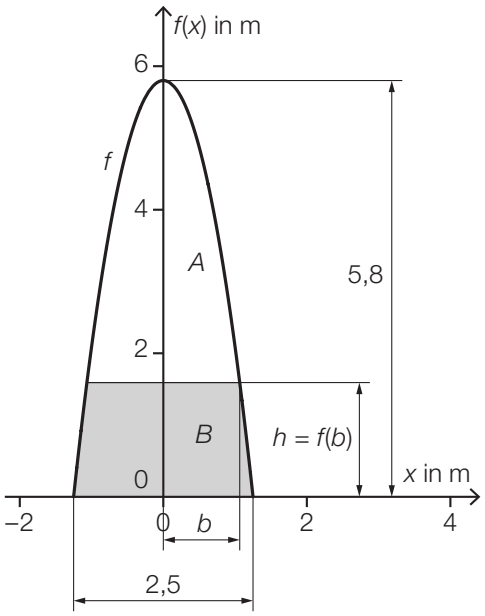
c) Die Veranstalter wissen aus Erfahrung, dass 15 % der verkauften Eintrittskarten letztendlich nicht zum Besuch der Veranstaltung genutzt werden. Für den 1 000 Besucher/innen fassenden Konzertsaal werden 1 150 Karten verkauft.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 1 000 Personen, die eine Eintrittskarte gekauft haben, tatsächlich zur Veranstaltung erscheinen.

d) Die nebenstehende Abbildung zeigt die Form eines Fensters des Veranstaltungszentrums. Die bogenförmige Begrenzungslinie des Fensters hat die Form einer Parabel.

– Erstellen Sie eine Funktionsgleichung der zugehörigen quadratischen Funktion *f*.

– Stellen Sie eine Formel zur Berechnung des Flächeninhalts *B* auf. Verwenden Sie darin die Längen *b* und *f*(*b*) und den allgemeinen Funktionsterm *f*(*x*) der Parabel.



B = _____

Die Flächeninhalte *A* und *B* verhalten sich zueinander im Verhältnis des Goldenen Schnitts $\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

– Berechnen Sie, in welcher Höhe *h* die horizontale Trennungslinie verläuft.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $r^2 = R^2 - h^2 = (2 \cdot h)^2 - h^2 = 3 \cdot h^2$
$r = \sqrt{3} \cdot h$

$h = 16$ m
$r = 27{,}7\ldots$ m
$A = 2412{,}7\ldots \approx 2413$ m^2

b) $2500 \cdot 0{,}83 = 2075$ m^2
$2075 \cdot 2 = 4150$
Die maximal erlaubte Anzahl an Besucherinnen und Besuchern beträgt 4150.

$\sqrt{1 + \frac{k}{100}}$	☒

c) X = „Anzahl der zum Besuch der Veranstaltung genutzten Eintrittskarten“
Bionominalverteilung mit $p = 0{,}85$ und $n = 1150$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$P(X > 1000) = 0{,}0270\ldots$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von rund 2,7 % erscheinen mehr als 1000 Personen zur Veranstaltung.

d) $f(x) = a \cdot x^2 + c$

$f(0) = 5{,}8 \quad \Rightarrow \quad c = 5{,}8$

$f(1{,}25) = 0 \quad \Rightarrow \quad a \cdot 1{,}252 + 5{,}8 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -3{,}712$

$f(x) = -3{,}712 \cdot x^2 + 5{,}8$

$$B = 2 \cdot \left(b \cdot f(b) + \int_b^{1{,}25} f(x)\,\mathrm{d}x \right)$$

$$\frac{\int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x - b \cdot f(b)}{b \cdot f(b) + \int_b^{1{,}25} f(x)\,\mathrm{d}x} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

Lösung mittels Technologieeinsatz: $b = 1{,}064\ldots$ m

$f(b) = 1{,}591\ldots$ m

Die Höhe h der horizontalen Trennungslinie beträgt rund 1,59 m.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 5 Stochastik
d) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) 1 Zahlen und Maße
c) —
d) 4 Analysis

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) —
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel
d) schwer

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2
c) 1
d) 4

Thema: Sonstiges

Quellen: —

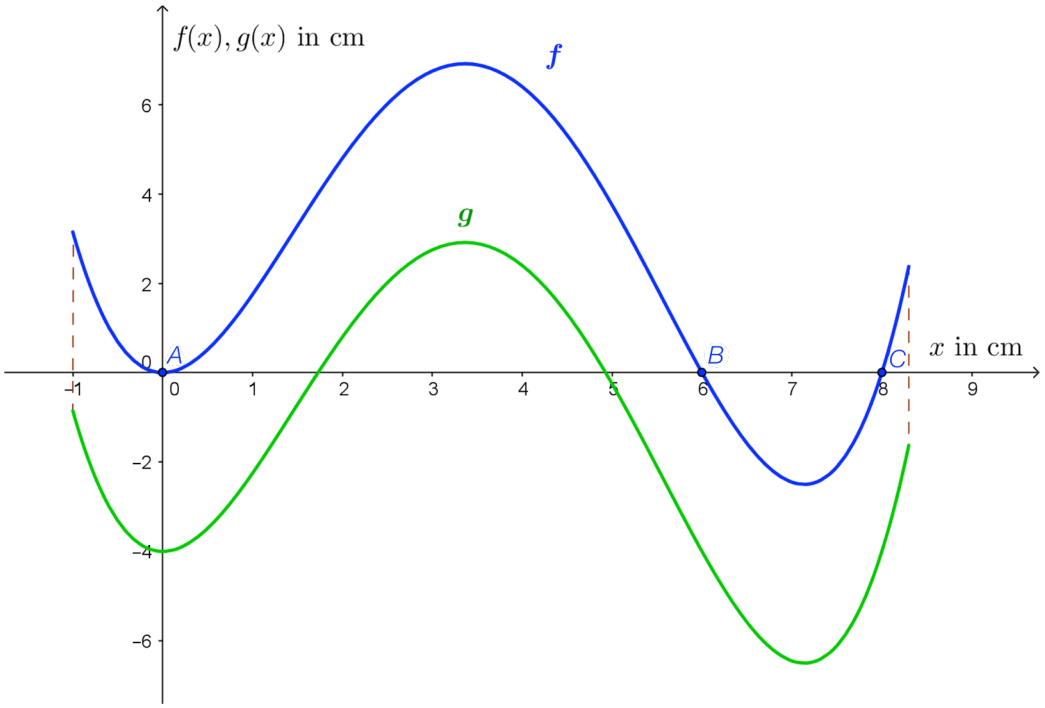
Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Schwimmverein

Aufgabennummer: B_366

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Das Logo eines Schwimmvereins kann mithilfe von Polynomfunktionen 4. Grades modelliert werden:



x, $f(x)$, $g(x)$ … Koordinaten in cm

Der Graph der Polynomfunktion f berührt die horizontale Achse im Punkt $A = (0|0)$, hat im Punkt $B = (6|0)$ eine Steigung von $-\frac{18}{5}$ und geht durch den Punkt $C = (8|0)$.

– Stellen Sie unter Verwendung dieser Informationen zu den Punkten A, B und C ein Gleichungssystem auf, mit dem die Koeffizienten der Polynomfunktion f berechnet werden können.

Die Gleichung der Polynomfunktion f lautet $f(x) = 0{,}05 \cdot x^4 - 0{,}7 \cdot x^3 + 2{,}4 \cdot x^2$.
Der Graph der Funktion g entsteht durch vertikale Verschiebung des Graphen von f um 4 Einheiten nach unten.

– Stellen Sie eine Gleichung der Funktion g auf.

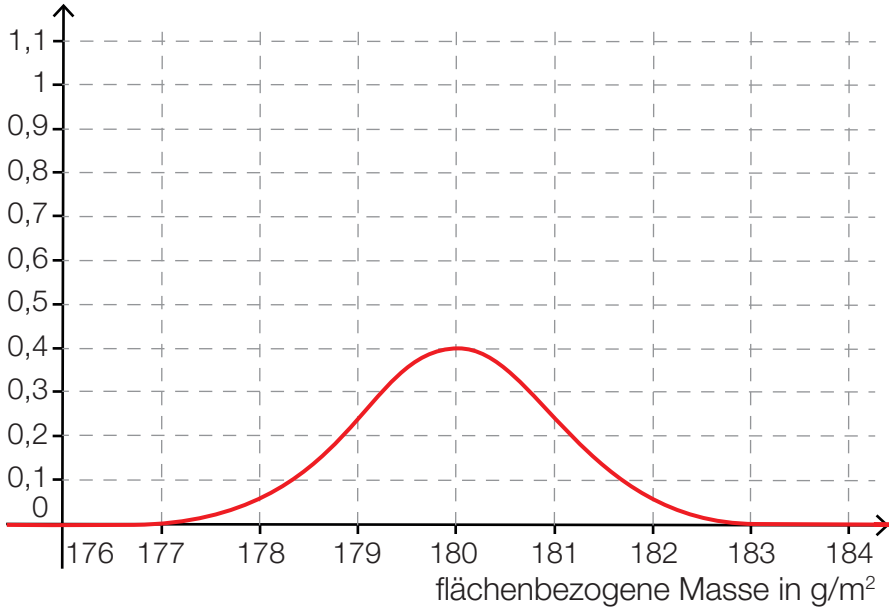
– Beschreiben Sie, was mit dem Ausdruck $\pi \cdot \int_2^4 (f(x))^2 - (g(x))^2 \, dx$ im gegebenen Sachzusammenhang berechnet wird.

b) Bei einer Druckerei werden Flyer für den Schwimmverein bestellt. Die flächenbezogene Masse des Papiers für die Flyer ist annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 170$ g/m².

– Berechnen Sie die Standardabweichung, wenn 97 % des verwendeten Papiers eine flächenbezogene Masse von mindestens 165 g/m² aufweisen.

– Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit die flächenbezogene Masse eines Papierbogens zwischen 168 g/m² und 170 g/m² liegt.

c) Für die Visitenkarten der Trainerinnen und Trainer wird ein spezieller Karton verwendet, dessen flächenbezogene Masse annähernd normalverteilt ist. Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen der zugehörigen Dichtefunktion.



– Lesen Sie aus der obigen Abbildung den Erwartungswert μ ab.

– Skizzieren Sie in die gegebene Abbildung den Graphen der zugehörigen Verteilungsfunktion.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$
$f'(x) = 4 \cdot a \cdot x^3 + 3 \cdot b \cdot x^2 + 2 \cdot c \cdot x + d$

$f(0) = 0$ bzw. $e = 0$
$f(6) = 0$ bzw. $1296 \cdot a + 216 \cdot b + 36 \cdot c + 6 \cdot d + e = 0$
$f(8) = 0$ bzw. $4096 \cdot a + 512 \cdot b + 64 \cdot c + 8 \cdot d + e = 0$
$f'(6) = -\frac{18}{5}$ bzw. $864 \cdot a + 108 \cdot b + 12 \cdot c + d = -\frac{18}{5}$
$f'(0) = 0$ bzw. $d = 0$

$g(x) = 0{,}05 \cdot x^4 - 0{,}7 \cdot x^3 + 2{,}4 \cdot x^2 - 4$

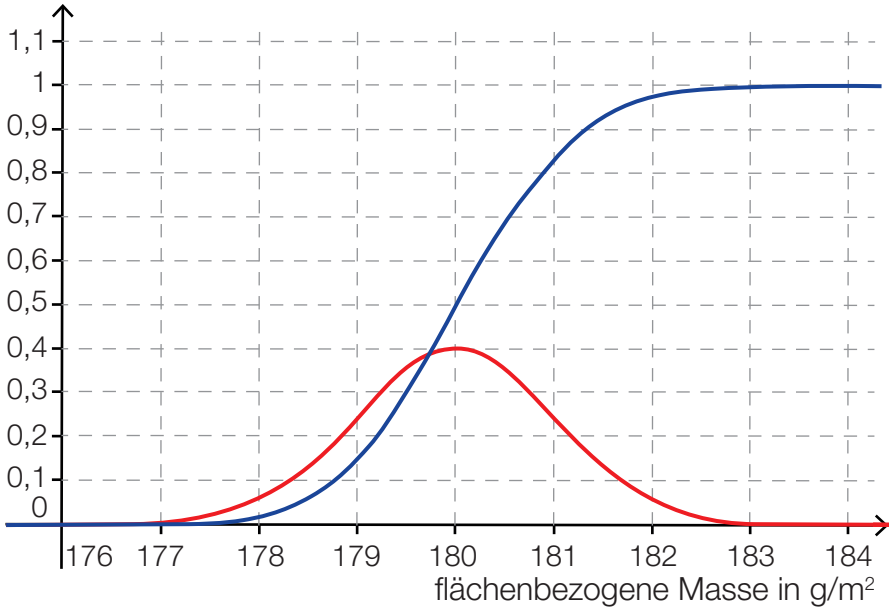
Mit dem Ausdruck wird die Differenz der Rotationsvolumina durch die beiden Funktionen f und g bei Rotation um die x-Achse im Intervall [2; 4] berechnet.

b) X … flächenbezogene Masse in g/m²
$P(X \geq 165) = 0{,}97$

Berechnung von σ mittels Technologieeinsatz:
$\sigma = 2{,}658\ldots \approx 2{,}66$ g/m²

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$P(168 \leq X \leq 170) = 0{,}274\ldots$
Die Wahrscheinlichkeit beträgt rund 27 %.

c) Der Erwartungswert beträgt 180 g/m².



Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 5 Stochastik
c) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) —
c) A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) leicht
c) leicht

Punkteanzahl:

a) 4
b) 2
c) 2

Thema: Sonstiges

Quellen: —

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

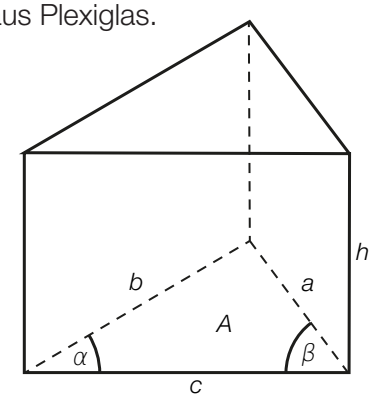
Plexiglasprismen

Aufgabennummer: B_358

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Eine Maschine produziert Prismen mit dreieckiger Grundfläche aus Plexiglas.

a) Von den Prismen sind von der Grundfläche die Maße $c = 9$ cm, $a = 5$ cm, $\alpha = 25°$ bekannt (siehe nebenstehende Skizze).



– Begründen Sie, warum mit diesen 3 Angaben das Dreieck nicht eindeutig bestimmt ist.

– Berechnen Sie die Flächeninhalt A der Grundfläche unter der Annahme, dass der Winkel $\beta < 90°$ ist.

b) Einer Produktion wurde eine Stichprobe vom Umfang $n = 7$ entnommen und es wurden die Massen der Prismen bestimmt. Für die Massen kann eine Normalverteilung angenommen werden.

Prisma	1	2	3	4	5	6	7
Masse in Gramm (g)	285,2	283,7	285,2	281,4	282,6	282,3	283,3

– Ermitteln Sie das zweiseitige 95-%-Konfidenzintervall für den Erwartungswert μ der Massen der Prismen.

– Beschreiben Sie die Auswirkungen auf das Konfidenzintervall, wenn die Irrtumswahrscheinlichkeit α größer wird.

– Erklären Sie, welche Maßnahme zu ergreifen ist, um bei gleicher Irrtumswahrscheinlichkeit ein schmäleres Konfidenzintervall zu erhalten.

c) Die Intensität I_0 des in das Prisma eintretenden Lichts nimmt mit der Eindringtiefe x exponentiell ab. Nach Durchdringen einer Schicht von 1 cm Dicke ist die Lichtintensität auf 85 % des ursprünglichen Wertes I_0 geschwächt.

Die Lichtintensität kann in Abhängigkeit von der Eindringtiefe durch eine Funktion I beschrieben werden.

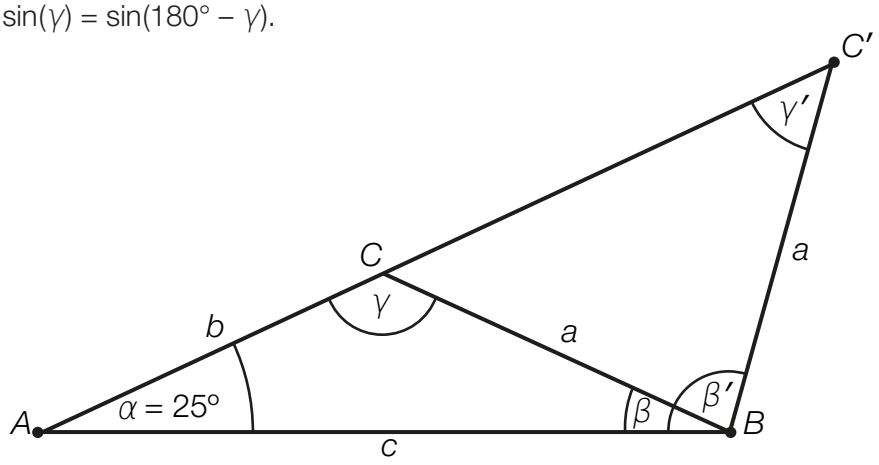
x … Eindringtiefe in cm
$I(x)$ … Lichtintensität in der Eindringtiefe x in %
$I_0 = 100$ % … Lichtintensität beim Eintritt in das Prisma

– Stellen Sie eine Gleichung der Funktion I auf.
– Zeichnen Sie den Graphen der Funktion I für $0 \leq x \leq 15$.
– Zeigen Sie, dass der Quotient $\frac{I'(x)}{I(x)}$ konstant ist.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Das Dreieck ist nicht eindeutig bestimmt, da die dem Winkel α gegenüberliegende Seite a kürzer als die Seite c ist. Bei Berechnung des Winkels γ mithilfe des Sinussatzes ergeben sich 2 mögliche Lösungen für diesen Winkel, da für $0 \leq \gamma \leq 90°$ gilt:
$\sin(\gamma) = \sin(180° - \gamma)$.



Den Winkel γ erhält man mithilfe des Sinussatzes: $\sin(\gamma) = c \cdot \frac{\sin(\alpha)}{a}$

$\gamma' = 49{,}527\ldots°$ und $\gamma = 130{,}472\ldots°$

$\beta = 180° - \gamma - 25° = 24{,}527\ldots°$

$A = \frac{a \cdot c \cdot \sin(\beta)}{2} = 9{,}340\ldots \approx 9{,}34\ \text{cm}^2$

b) Berechnung des Stichprobenmittelwerts $\bar{x}$ und der Standardabweichung s der Stichprobe mittels Technologieeinsatz: $\bar{x} = 283{,}3857\ldots$, $s = 1{,}4392\ldots$

Zweiseitiges 95-%-Konfidenzintervall mithilfe der t-Verteilung bestimmen:

$\bar{x} \pm t_{f;\,1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$

$n = 7 \Rightarrow f = 6$

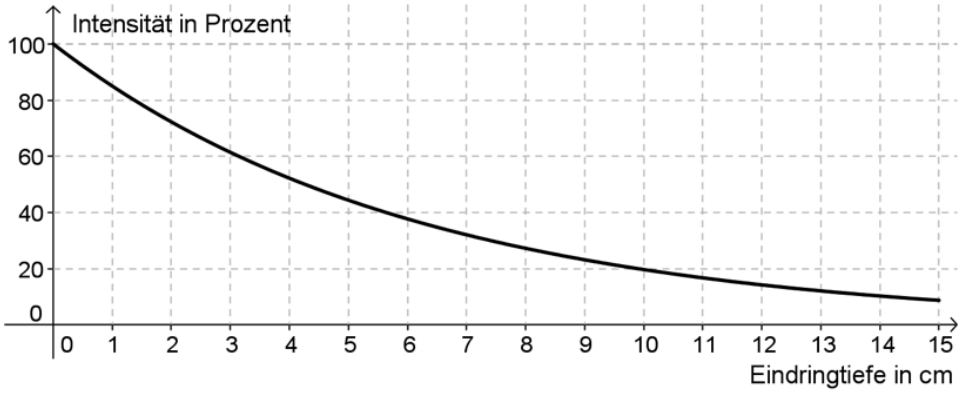
$t_{6;\,0{,}975} \approx 2{,}4469\ldots$

Daraus ergibt sich folgendes Konfidenzintervall für μ in g: [282,0546…; 284,7167…]

Wird die Irrtumswahrscheinlichkeit α größer, so wird das Konfidenzintervall schmäler.

Bei gleichbleibender Irrtumswahrscheinlichkeit muss man die Stichprobengröße erhöhen, damit das Konfidenzintervall schmäler wird.

c) $I(x) = I_0 \cdot 0{,}85^x$ oder $I(x) = I_0 \cdot e^{-\lambda \cdot x}$ mit $\lambda = -\ln(0{,}85) = 0{,}1625\ldots$



$I'(x) = \ln(0{,}85) \cdot I(x)$, womit $\frac{I'(x)}{I(x)} = \ln(0{,}85)$ konstant ist.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 5 Stochastik
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) 4 Analysis

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren, B Operieren und Technologieeinsatz
b) C Interpretieren und Dokumentieren, D Argumentieren und Kommunizieren
c) D Argumentieren und Kommunizieren, B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 3
b) 3
c) 3

Thema: Sonstiges

Quellen: Teile der hier vorliegenden Aufgabe wurden im Rahmen des Itemwriterseminars in Innsbruck im Herbst 2013 als Übungstestaufgabe für den Unterricht zur Vorbereitung für den Teil A der SRDP erstellt.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

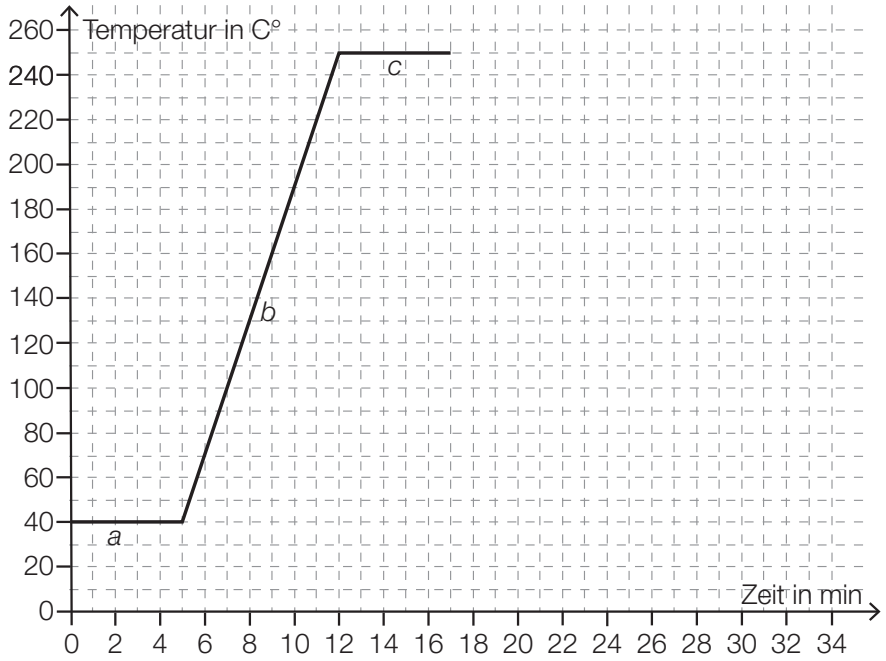
Gaschromatographie

Aufgabennummer: B_328

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Gaschromatographie ist eine Analysemethode in der analytischen Chemie. Das dafür notwendige Gerät nennt man *Gaschromatograph*.

a) Während einer Analyse durchläuft der Gaschromatograph ein Temperaturprofil. Für eine spezielle Analyse ist das nachstehend dargestellte Temperaturprofil vorgesehen.



– Stellen Sie mithilfe der Grafik eine Funktionsgleichung für den Abschnitt *b* des Temperaturprofils auf.

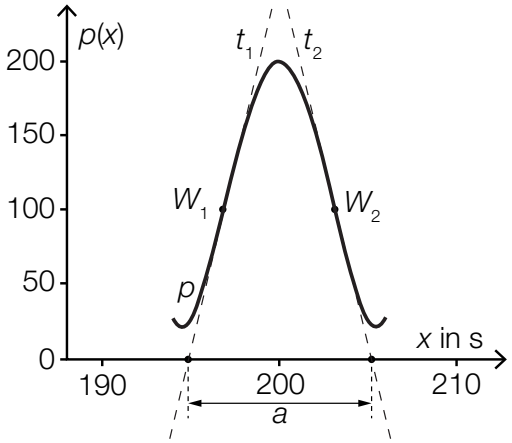
Nach Durchlaufen des Temperaturprofils beginnt der Gaschromatograph abzukühlen. Die Temperatur des Gaschromatographen nähert sich dabei immer mehr der Raumtemperatur von 20 °C an. Die Differenz zwischen der Temperatur des Gaschromatographen und der Raumtemperatur halbiert sich während des Abkühlprozesses alle 3 Minuten.

– Zeichnen Sie den Temperaturverlauf während des Abkühlvorgangs im obigen Diagramm ein.

Nach Durchlaufen des Temperaturprofils muss der Gaschromatograph bis zur nächsten Analyse wieder auf 40 °C abkühlen.

– Ermitteln Sie aus der Grafik, wie viele Minuten nach Beginn des Abkühlprozesses der Gaschromatograph wieder einsatzbereit ist.

b) Das Ergebnis einer Analyse mit dem Gaschromatographen ist ein *Chromatogramm* – eine Grafik, die mehrere Peaks (Gipfel) anzeigt. Der in der nebenstehenden Abbildung dargestellte Peak ist der Graph der Funktion p.



$p(x) = 0{,}2 \cdot (x - 200)^4 - 12 \cdot (x - 200)^2 + 200$ mit $194 \leq x \leq 206$

x … Zeit in s
$p(x)$ … Signalstärke zur Zeit x

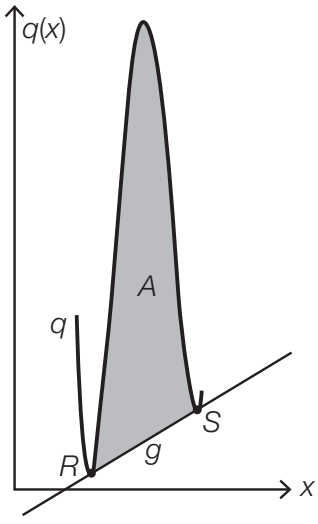
Der Graph der Funktion p ist symmetrisch bezüglich der Geraden $x = 200$, d. h., für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $p(200 + x) = p(200 - x)$

– Zeigen Sie dies.

Die Peakbreite a ist definiert als der Abstand der Nullstellen der beiden Tangenten an den Graphen von p in den Wendepunkten W_1 und W_2.

– Erstellen Sie eine Gleichung der Tangente t_1.
– Berechnen Sie die Peakbreite a.

c) Das Ergebnis einer Analyse mit dem Gaschromatographen ist ein *Chromatogramm* – eine Grafik, die mehrere Peaks (Gipfel) anzeigt. Die Fläche unter einem Peak gibt Aufschluss über die quantitative Zusammensetzung der untersuchten Probe. Dabei wird der in der nebenstehenden Skizze dargestellte Flächeninhalt A bestimmt. Die Gerade g geht durch die Tiefpunkte R und S der Funktion q.



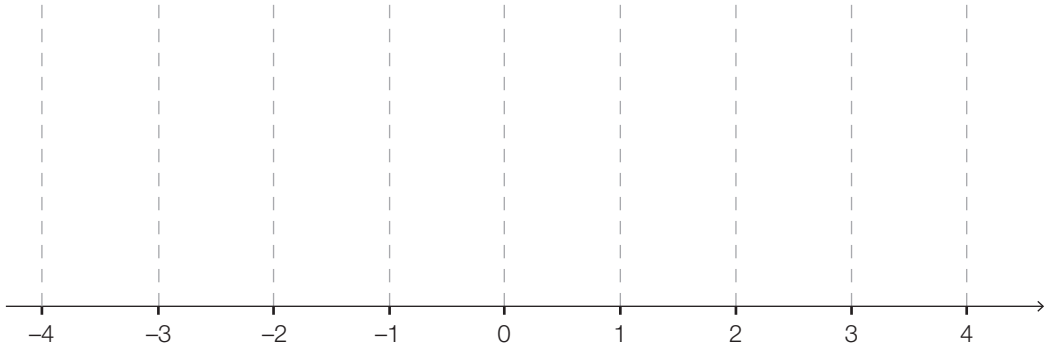
– Dokumentieren Sie in Worten die Rechenschritte, die notwendig sind, um den Flächeninhalt A bei gegebener Funktion q zu bestimmen.

d) Unter dem Blindwert *BW* versteht man denjenigen Wert, der sich bei einer Messung ergibt, wenn die gesuchte Substanz in der Probe nicht vorhanden ist. Der Blindwert ist eine annähernd normalverteilte Zufallsvariable mit dem Erwartungswert μ_{BW} und der Standardabweichung σ_{BW}.
Die Nachweisgrenze *NG* einer Analysenmethode wird folgendermaßen berechnet:

$NG = \mu_{BW} + 3 \cdot \sigma_{BW}$

Für einen bestimmten Messprozess wird der Blindwert modellhaft als normalverteilt mit $\mu_{BW} = 0$ und $\sigma_{BW} = 1$ angenommen.

– Skizzieren Sie in der nachstehenden Abbildung den Graphen der zugehörigen Dichtefunktion.



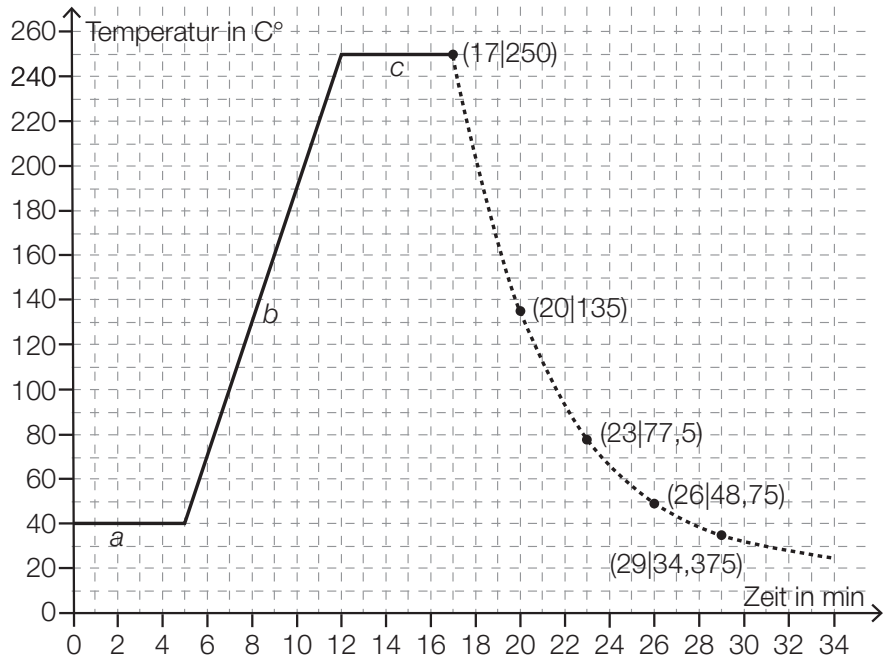
– Zeichnen Sie die Nachweisgrenze *NG* in Ihrer Skizze ein.
– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Wert größer oder gleich der Nachweisgrenze gemessen wird, wenn die gesuchte Substanz in der Probe nicht vorhanden ist.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $T(t) = 30 \cdot t - 110$

t … Zeit in Minuten
$T(t)$ … Temperatur zur Zeit t in °C



Der Chromatograph ist nach etwa 10,5 Minuten wieder einsatzbereit.

b) $p(200 + x) = 0{,}2 \cdot (200 + x - 200)^4 - 12 \cdot (200 + x - 200)^2 + 200$
$= 0{,}2 \cdot x^4 - 12 \cdot x^2 + 200$
$p(200 - x) = 0{,}2 \cdot (200 - x - 200)^4 - 12 \cdot (200 - x - 200)^2 + 200$
$= 0{,}2 \cdot (-x)^4 - 12 \cdot (-x)^2 + 200$
$= 0{,}2 \cdot x^4 - 12 \cdot x^2 + 200$

Es gilt also: $p(200 + x) = p(200 - x)$

$p'(x) = 0{,}8 \cdot (x - 200)^3 - 24 \cdot (x - 200)$
$p''(x) = 2{,}4 \cdot (x - 200)^2 - 24$

Berechnung der Wendestellen:
$p''(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 196{,}837\ldots$ und $x_2 = 203{,}162\ldots$
$p(x_1) = 100$, $W_1 = (196{,}837\ldots|100)$

Steigung der Tangente t_1: $p'(x_1) = 50{,}596\ldots$

$t_1(x) = 50{,}596\ldots \cdot x + d$
$t_1(196{,}837\ldots) = 100 \Rightarrow d = -9\,859{,}288\ldots$
$t_1(x) = 50{,}596\ldots \cdot x - 9\,859{,}288\ldots$

Nullstelle von t_1: $t_1(x) = 0 \Rightarrow x = 194{,}861\ldots$

Aufgrund der Symmetrie des Graphen von p bezüglich der Geraden $x = 200$ gilt:
$a = 2 \cdot (200 - 194{,}861\ldots) = 10{,}277\ldots$

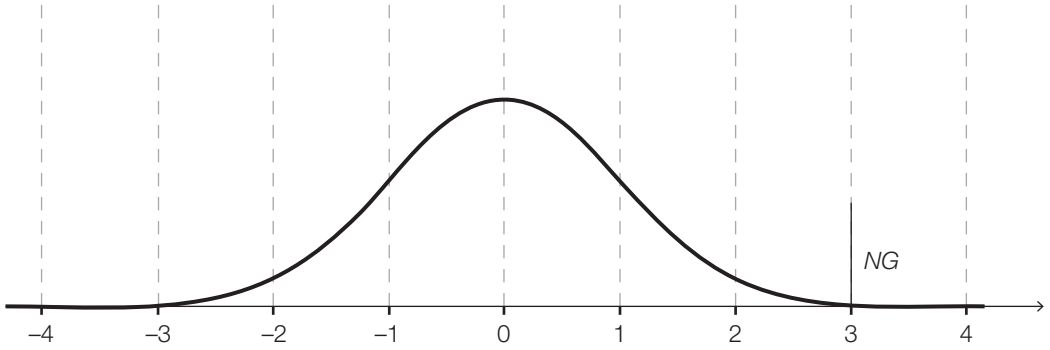
Die Peakbreite beträgt rund 10,28 s.

c) Berechnen der Tiefpunkte:
– Berechnen der Nullstellen der 1. Ableitung von q
– Einsetzen der Nullstellen in die 2. Ableitung von q zum Nachweis der Tiefpunkte
– Berechnen der y-Koordinaten der Tiefpunkte R und S durch Einsetzen in die Funktion q

Aufstellen der Gleichung der Geraden g durch die Punkte R und S

Der Flächeninhalt A ist die Differenz zwischen dem bestimmten Integral von q und dem bestimmten Integral von g zwischen den x-Koordinaten von R und S.

d)



X … gemessener Wert
Normalverteilung mit $\mu = 0$ und $\sigma = 1$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$P(X \geq 3) = 0{,}001349\ldots$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Wert größer als oder gleich der Nachweisgrenze gemessen wird, beträgt rund 0,00135.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 4 Analysis
c) 4 Analysis
d) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) —
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) C Interpretieren und Dokumentieren
d) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) A Modellieren und Transferieren, D Argumentieren und Kommunizieren
c) —
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) schwer
c) leicht
d) leicht

Punkteanzahl:

a) 3
b) 4
c) 1
d) 3

Thema: Chemie

Quellen: —

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Aufgaben mit Herz

Aufgabennummer: B_026

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Eine Druckschablone in Form eines Herzens soll gezeichnet werden (siehe Abbildung 1).

Im linken oberen Bereich für $0\ \text{dm} \leq x \leq 1\ \text{dm}$ wird die Umrisslinie durch eine quadratische Funktion f definiert, wobei sich der Scheitel der Parabel bei $x = 1$ befindet. Im rechten oberen Bereich für $1\ \text{dm} \leq x \leq 1{,}5\ \text{dm}$ ist die Herzlinie durch einen Halbkreis mit dem Mittelpunkt M und dem Radius $r = 0{,}5\ \text{dm}$ definiert. Der untere Teil der Umrisslinie entsteht durch Spiegelung des oberen Teils an der x-Achse.

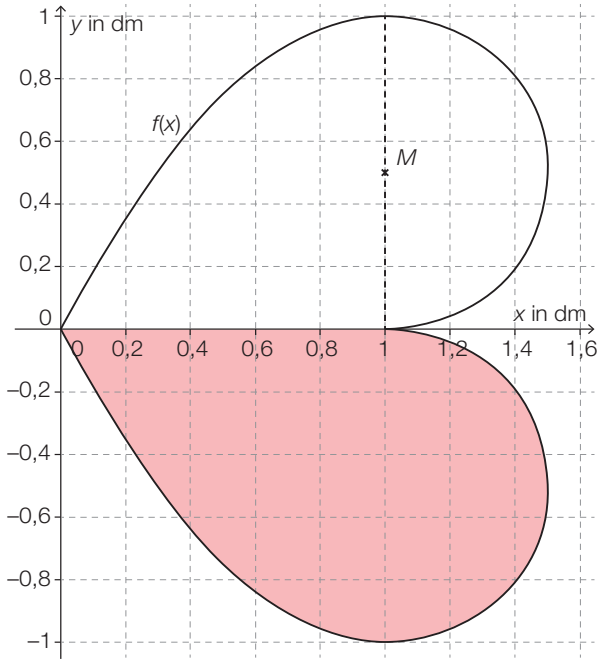


Abbildung 1

a) Die quadratische Funktion f hat die Form $f(x) = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s$, wobei x_s und y_s die Koordinaten des Scheitels sind.

– Berechnen Sie den Parameter a.

Die Koordinaten eines jeden Punktes $(x|y)$, der auf dem Kreis mit dem Mittelpunkt $M = (1|0{,}5)$ und dem Radius $r = 0{,}5$ liegt, erfüllen die Gleichung $(y - 0{,}5)^2 + (x - 1)^2 = 0{,}25$.

– Ermitteln Sie anhand dieser Gleichung die y-Koordinaten für $x = 1{,}4$.

b) Eine andere Herzkurve erhält man, wenn man im Bereich $0\ \text{dm} \leq x \leq 1\ \text{dm}$ die obige Funktion f durch die kubische Funktion g mit $g(x) = -2 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2$ ersetzt.

– Zeichnen Sie den Graphen der Funktion g in die obige Darstellung hinzu.
– Stellen Sie eine Formel zur Berechnung des gesamten Flächeninhalts A dieser neuen Herzfläche auf.

$A =$ _____

– Berechnen Sie diesen Flächeninhalt.

c) Eine Herzhälfte des in Abbildung 3 dargestellten Druckmusters erhält man durch die beiden Funktionen h_1 und h_2 (vgl. Abbildung 2):
$h_1(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1 - x^2}$ und $h_2(x) = \sqrt{x} - \sqrt{1 - x^2}$

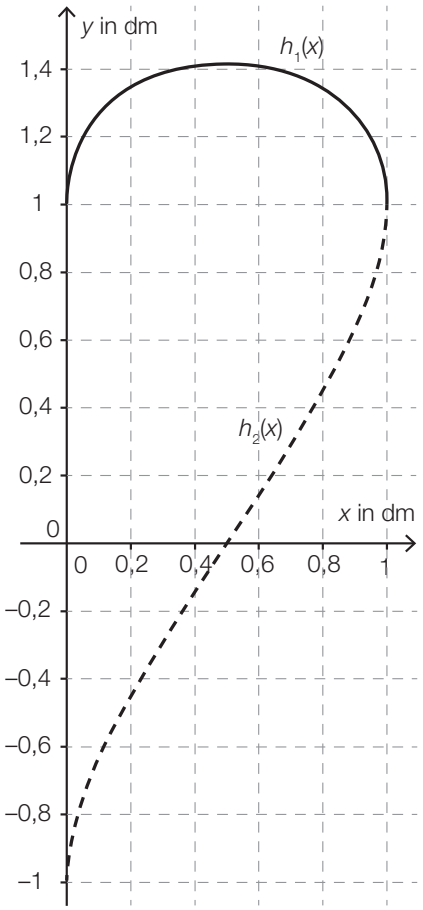


Abbildung 2



Abbildung 3

– Argumentieren Sie anhand der Funktionsgleichungen, dass der Definitionsbereich D für beide Funktionen $D = [0; 1]$ ist.

– Bestimmen Sie die Nullstelle von h_2 im Definitionsbereich.

d) Durch schrittweise Halbierung der Flächeninhalte entsteht das in Abbildung 3 dargestellte Druckmuster.

– Berechnen Sie die schwarze Fläche dieses Musters, wenn die Gesamtfläche des größten Herzens den Flächeninhalt π dm² hat.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

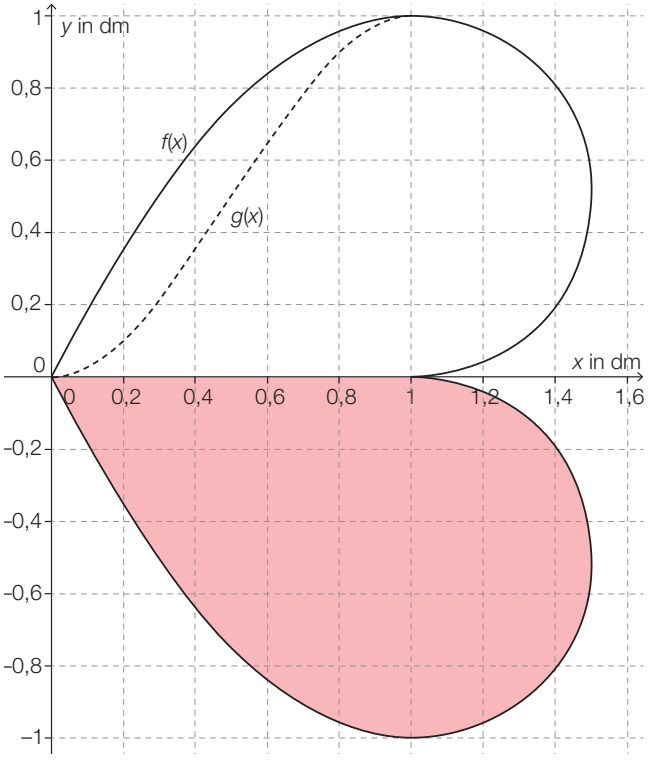
Möglicher Lösungsweg

a) $f(x) = a \cdot (x - 1)^2 + 1$
$f(0) = 0 \Rightarrow a \cdot (-1)^2 + 1 = 0 \Rightarrow a = -1$

$y_{1,2} = \pm\sqrt{0{,}25 - (x - 1)^2} + 0{,}5$

Damit erhält man: $y_1 = 0{,}2$ und $y_2 = 0{,}8$

b)



$A = 0{,}5^2 \cdot \pi + 2 \cdot \int_0^1 g(x)\,dx$
$A = \left(\frac{\pi}{4} + 1\right)$ dm^2 $\approx 1{,}785$ dm^2

c) Beide Wurzelargumente müssen positiv sein, d. h. $x \geq 0$ und $1 - x^2 \geq 0$, womit $1 \geq x^2$.
Beide Bedingungen ergeben $D = [0; 1]$.

$\sqrt{x} - \sqrt{1 - x^2} = 0$

Lösung mittels Technologieeinsatz:

$x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0{,}618$

d) Die schwarze Fläche ergibt sich durch $A_{ges} = \left(\pi - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{16}\right) = \frac{11 \cdot \pi}{16} \approx 2{,}16$ dm^2.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 3 Funktionale Zusammenhänge
d) 1 Zahlen und Maße

Nebeninhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 4 Analysis
c) —
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) D Argumentieren und Kommunizieren
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) A Modellieren und Transferieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) —

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) mittel
d) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 3
c) 2
d) 1

Thema: Sonstiges

Quellen: —

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Mopedfahrt

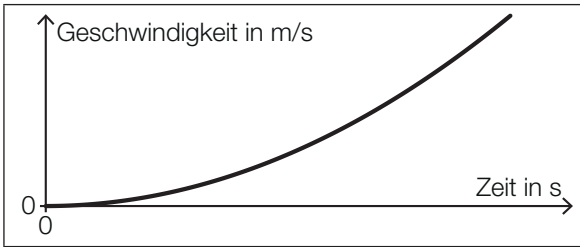
Aufgabennummer: A_120

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

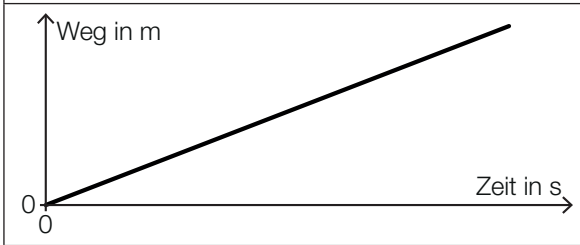
Kurt und sein Freund Bernd fahren mit ihren Mopeds zu einem Badesee.

a) Kurt beschleunigt gleichmäßig und hat 6 s nach dem Wegfahren eine Geschwindigkeit von 12,5 m/s.

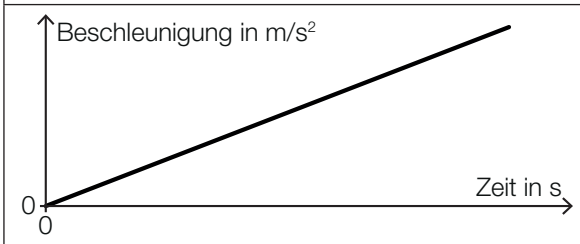
– Kreuzen Sie diejenige Grafik an, die diesen Sachverhalt richtig beschreibt. *[1 aus 5]*



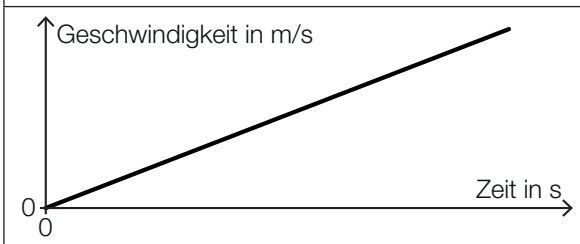
☐



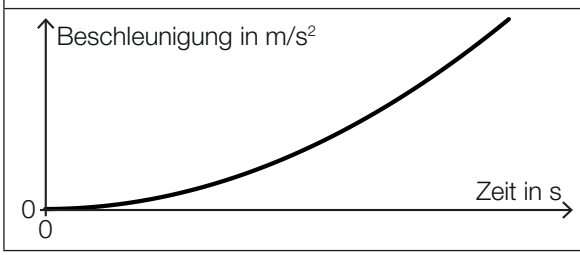
☐



☐



☐



☐

b) Auf einem Teilstück kann Bernds Geschwindigkeit näherungsweise durch folgende Funktion beschrieben werden:

$v(t) = 0{,}3 \cdot t + 0{,}8$

t … Zeit in s
$v(t)$ … Geschwindigkeit zur Zeit t in m/s

– Berechnen Sie den Weg, den Bernd innerhalb der ersten Minute zurücklegt.

c) Bernd wohnt im Ort *A*, Kurt im 10 km entfernten Ort *B*, der Badesee liegt im Ort *C*. Die Straße führt von *A* über *B* nach *C*. Kurt fährt mit einer konstanten Geschwindigkeit von 45 km/h. Bernd fährt 6 Minuten früher mit einer konstanten Geschwindigkeit von 50 km/h in Richtung *C*.

– Kreuzen Sie diejenige Gleichung an, mit der die Fahrzeit t ermittelt werden kann, die Bernd benötigt, um Kurt einzuholen. *[1 aus 5]*

$45 \cdot t - 50 \cdot (t - 0{,}1) = 0$	☐
$50 \cdot (t - 6) = 10 - 45 \cdot t$	☐
$50 \cdot t - 45 \cdot (t - 0{,}1) = 10$	☐
$5 \cdot t = 4{,}5$	☐
$50 \cdot t = 45 \cdot t - 10$	☐

d) Auf einem Teilstück erhöht Kurt – ausgehend von einer Anfangsgeschwindigkeit v_0 – seine Geschwindigkeit pro Sekunde näherungsweise um 1 % bezogen auf die Geschwindigkeit in der jeweils vorhergehenden Sekunde.

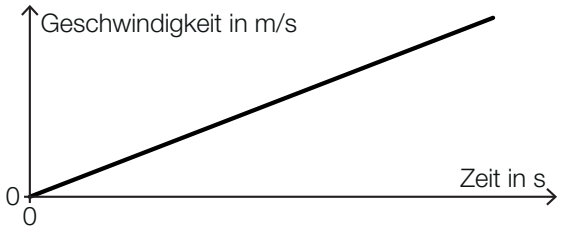
– Erstellen Sie eine Funktionsgleichung für die Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der Zeit.

– Berechnen Sie, um wie viel Prozent ausgehend von der Anfangsgeschwindigkeit v_0 die Geschwindigkeit nach 10 Sekunden zugenommen hat.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a)

[...]	
[...]	
[...]	
	☒
[...]	

b) $s = \int_0^{60} (0{,}3 \cdot t + 0{,}8)\,dt = 588$

Bernd legt innerhalb der ersten Minute 588 m zurück.

c)

[...]	
[...]	
$50 \cdot t - 45 \cdot (t - 0{,}1) = 10$	☒
[...]	
[...]	

d) $v(t) = v_0 \cdot 1{,}01^t$

t ... Zeit in s
$v(t)$ ... Geschwindigkeit zur Zeit t

$v(10) = v_0 \cdot 1{,}01^{10} = v_0 \cdot 1{,}1046...$

Die Geschwindigkeit hat um rund 10,5 % zugenommen.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 4 Analysis
c) 3 Funktionale Zusammenhänge
d) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) C Interpretieren und Dokumentieren
d) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) —
c) —
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel
d) leicht

Punkteanzahl:

a) 1
b) 1
c) 1
d) 2

Thema: Alltag

Quellen: —

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Torten

Aufgabennummer: A_054

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

In einer Konditorei werden zylinderförmige Torten mit dem Radius r und der Höhe h mit einer Schicht aus Creme oder Gelee versehen.

a) Die Cremeschicht wird auf der Torte seitlich und oben gleichmäßig dick aufgetragen. Der Bedarf an Creme wird in Litern angegeben. Das Volumen der Cremeschicht kann mithilfe der folgenden Formel berechnet werden:

$$V = [(r + d)^2 \cdot \pi + (2 \cdot r + d) \cdot \pi \cdot h] \cdot d$$

V … Volumen der Creme in L
r … Radius der Torte
h … Höhe der Torte
d … Dicke der Cremeschicht oder Geleeschicht

In einer der folgenden Abbildungen wird die Abhängigkeit des Cremevolumens V vom Radius r der Torte, in der anderen Abbildung jene von der Tortenhöhe h dargestellt. Die Dicke der Cremeschicht und die jeweils andere Unbekannte sind dabei konstant.

Abbildung 1

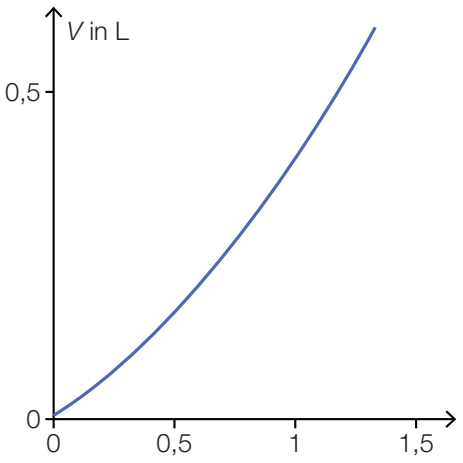
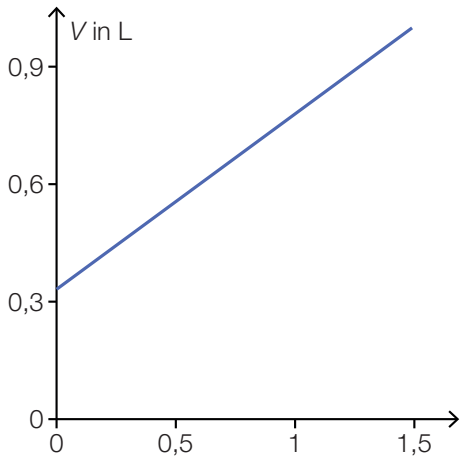


Abbildung 2



– Beschriften Sie in beiden Abbildungen die waagrechte Achse mit der jeweils richtigen Größe und deren Einheit.
– Begründen Sie Ihre Entscheidung.

b) 15 Torten mit einem Durchmesser von 28 cm sollen nur an ihrer Oberseite mit einer 5 mm dicken Geleeschicht überzogen werden.

– Berechnen Sie, wie viel Liter Gelee dazu benötigt werden.

c) Für eine Tortencreme benötigt man halb so viel Schlagobers wie Joghurt. Insgesamt machen Schlagobers und Joghurt gemeinsam $\frac{3}{4}$ des Gesamtvolumens der Creme aus.

– Erstellen Sie ein passendes Gleichungssystem für die Berechnung, wie viele Liter Schlagobers und Joghurt zur Herstellung von V Litern Creme benötigt werden.

d) Das zur Verzierung von Torten benötigte Schlagobers wird häufig mit einem Schlagobers-Bereiter aufgeschäumt. Dazu werden mit Lachgas gefüllte Kapseln verwendet. Aufgrund eines Abfüllfehlers sind 0,1 % der in Schachteln zu 8 Stück verpackten Kapseln leer.

– Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit in einer zufällig ausgewählten Schachtel genau 1 Kapsel leer ist.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Der Zusammenhang zwischen dem Volumen und dem Tortenradius ergibt aus der Formel eine quadratische Abhängigkeit. Die zugehörige Darstellung muss *Abbildung 1* sein. Auf der waagrechten Achse ist der Tortenradius r in dm aufgetragen.
Die *Abbildung 2* ist eine lineare Funktion.
Der Zusammenhang zwischen dem Volumen und der Tortenhöhe ergibt aus der Formel eine lineare Abhängigkeit. Auf der waagrechten Achse muss daher die Tortenhöhe h in dm aufgetragen sein.

b) Die benötigte Geleemasse für eine Torte entspricht dem Volumen eines Zylinders mit Durchmesser $d = 28$ cm $= 2{,}8$ dm und Höhe $h = 5$ mm $= 0{,}05$ dm.

$$V = \left(\frac{2{,}8}{2}\right)^2 \cdot \pi \cdot 0{,}05 = 0{,}307...$$

$15 \cdot 0{,}307... = 4{,}618...$

Für 15 Torten benötigt man rund 4,62 L Gelee.

c) x … Menge des benötigten Schlagobers in L
y … Menge des benötigten Joghurts in L

Gleichungssystem:
$y = 2 \cdot x$
$x + y = \frac{3}{4} \cdot V$

d) X ... Anzahl der leeren Kapseln
Binomialverteilung mit $n = 8$ und $p = 0{,}001$
$P(X = 1) = 8 \cdot 0{,}001 \cdot 0{,}999^7 = 0{,}0079...$

Die Wahrscheinlichkeit, dass genau 1 Kapsel leer ist, beträgt rund 0,8 %.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 2 Algebra und Geometrie
d) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) 1 Zahlen und Maße
b) 1 Zahlen und Maße
c) —
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) A Modellieren und Transferieren
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) —
c) —
d) A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:

a) schwer
b) leicht
c) leicht
d) leicht

Punkteanzahl:

a) 2
b) 1
c) 2
d) 1

Thema: Alltag

Quellen: —

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Zweistufige Produktion

Aufgabennummer: B_163

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

In einem Unternehmen werden aus den Rohstoffen R_1 und R_2 die Zwischenprodukte Z_1, Z_2 und Z_3 und daraus die Endprodukte E_1, E_2 und E_3 hergestellt. Die Mengenangaben erfolgen jeweils in ME.

a) Die Produktionsverflechtung wird durch die beiden nachstehenden Tabellen beschrieben.

	Z_1	Z_2	Z_3
R_1	2,1	1,2	4,3
R_2	3,4	2,5	1,6

	E_1	E_2	E_3
Z_1	2,0	1,3	0
Z_2	3,1	2,4	0
Z_3	0	4,5	2,8

– Veranschaulichen Sie die Produktionsverflechtung von den Rohstoffen bis zu den Endprodukten als Gozinto-Graph.

– Berechnen Sie den Bedarf an Rohstoffen, wenn von jedem der Endprodukte 1 ME hergestellt wird.

b) Die 2×3-Matrix $\boldsymbol{C}$ beschreibt den Mengenbedarf an Rohstoffen für die Herstellung der Endprodukte. Der Spaltenvektor $\vec{\boldsymbol{n}}$ beschreibt die Nachfrage nach den Endprodukten. Es soll der Mengenbedarf an Rohstoffen berechnet werden.

– Ordnen Sie den beiden Aussagen jeweils den geeigneten Ansatz aus A bis D zu. *[2 zu 4]*

Die benötigten Rohstoffe erhält man als Elemente eines Zeilenvektors.	
Die benötigten Rohstoffe erhält man als Elemente eines Spaltenvektors.	

A	$\boldsymbol{C} \cdot \vec{\boldsymbol{n}}^{\mathrm{T}}$
B	$\vec{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{C}$
C	$\boldsymbol{C} \cdot \vec{\boldsymbol{n}}$
D	$\vec{\boldsymbol{n}}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$

Der Vektor $\vec{p} = (20 \;\; 50)$ beschreibt die Preise der Rohstoffe in €/ME.

– Berechnen Sie die Gesamtkosten für die Rohstoffe für $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 8 & 25 & 12 \\ 15 & 18 & 5 \end{pmatrix}$ und $\vec{n} = \begin{pmatrix} 100 \\ 160 \\ 140 \end{pmatrix}$.

c) Im Lager sind Rohstoffmengen vorhanden, die bei der Produktion restlos verbraucht werden sollen. Die Nachfrage nach dem Endprodukt E_3 ist doppelt so hoch wie die Nachfrage nach dem Endprodukt E_1.

Für die Produktion kann die folgende Matrizengleichung aufgestellt werden:

$$\begin{pmatrix} 570 \\ 430 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 25 & 12 \\ 15 & 18 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ 2 \cdot n_1 \end{pmatrix}$$

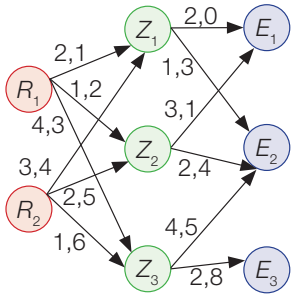
– Erklären Sie die Aussage der einzelnen Matrizen in dieser Gleichung.

– Berechnen Sie die Mengen der Endprodukte, die mit den vorhandenen Rohstoffen hergestellt werden können.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



$$\begin{pmatrix} 2{,}1 & 1{,}2 & 4{,}3 \\ 3{,}4 & 2{,}5 & 1{,}6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2{,}0 & 1{,}3 & 0 \\ 3{,}1 & 2{,}4 & 0 \\ 0 & 4{,}5 & 2{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44{,}92 \\ 36{,}65 \end{pmatrix}$$

Vom Rohstoff R_1 benötigt man 44,92 ME, vom Rohstoff R_2 benötigt man 36,65 ME.

b)

Die benötigten Rohstoffe erhält man als Elemente eines Zeilenvektors.	D
Die benötigten Rohstoffe erhält man als Elemente eines Spaltenvektors.	C

A	$\boldsymbol{C} \cdot \vec{\boldsymbol{n}}^{\mathrm{T}}$
B	$\vec{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{C}$
C	$\boldsymbol{C} \cdot \vec{\boldsymbol{n}}$
D	$\vec{\boldsymbol{n}}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$

$$\vec{\boldsymbol{p}} \cdot (\boldsymbol{C} \cdot \vec{\boldsymbol{n}}) = (20 \;\; 50) \cdot \begin{pmatrix} 6\,480 \\ 5\,080 \end{pmatrix} = 383\,600$$

Die Gesamtkosten betragen € 383.600.

c) $\begin{pmatrix} 570 \\ 430 \end{pmatrix}$ gibt die vorhandenen Rohstoffmengen an

$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ 2 \cdot n_1 \end{pmatrix}$ gibt die Nachfrage nach den Endprodukten an

$\begin{pmatrix} 8 & 25 & 12 \\ 15 & 18 & 5 \end{pmatrix}$ gibt den Mengenbedarf an Rohstoffen für die Herstellung der Endprodukte an

I: $570 = 8 \cdot n_1 + 25 \cdot n_2 + 24 \cdot n_1$
II: $430 = 15 \cdot n_1 + 18 \cdot n_2 + 10 \cdot n_1$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$n_1 = 10$; $n_2 = 10$

Von E_1 können 10 ME hergestellt werden, von E_2 10 ME und von E_3 20 ME.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) D Argumentieren und Kommunizieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 3
b) 3
c) 2

Thema: Wirtschaft

Quellen: —

Medikamentenabbau (3)*

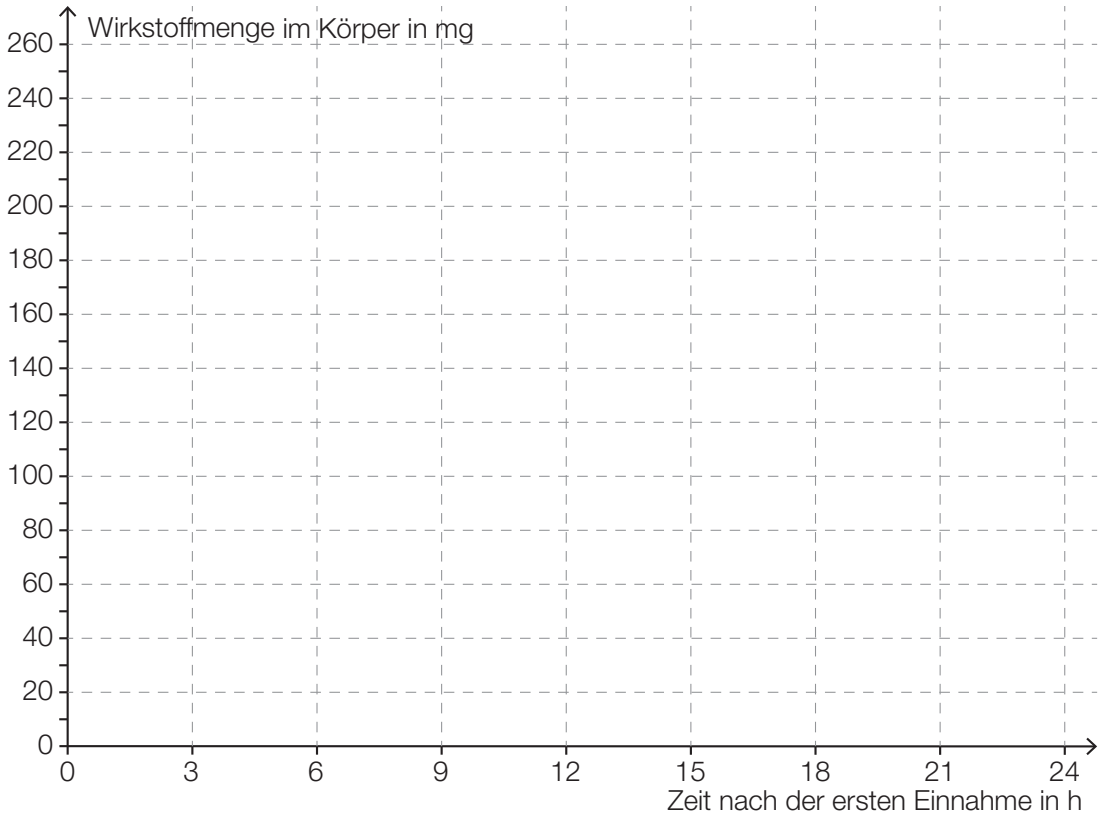
Aufgabennummer: A_278

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Eine Ärztin verschreibt einem Patienten zur Behandlung seines Bluthochdrucks ein Medikament mit einer Wirkstoffmenge von 240 mg pro Tablette, welches im Körper exponentiell mit einer Halbwertszeit von 3 Stunden abgebaut wird. Man nimmt an, dass der Wirkstoff nach Einnahme einer Tablette sofort in das Blut übergeht.

a) Ein Patient nimmt um 7 Uhr und um 19 Uhr jeweils eine Tablette ein.

1) Stellen Sie die Wirkstoffmenge des Medikaments im Körper des Patienten als Funktion der Zeit für die ersten 24 Stunden nach der ersten Einnahme in der unten stehenden Abbildung grafisch dar.



b) 1) Argumentieren Sie, weshalb der Wirkstoff bei einmaliger Einnahme nach diesem Modell nach 24 Stunden nicht vollständig aus dem Körper verschwunden sein kann.

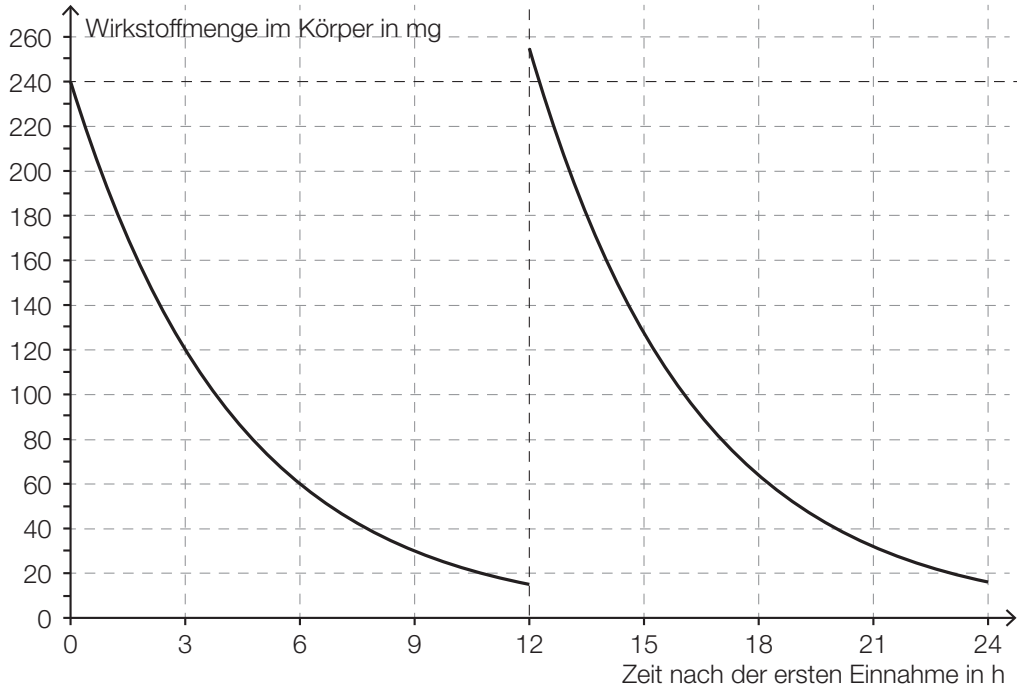
* ehemalige Klausuraufgabe

c) Ein anderer Patient nimmt einmalig nur um 7 Uhr Früh 2 Tabletten ein. Das Medikament wirkt bei einer Mindestmenge von 50 mg, darunter ist seine Wirkung vernachlässigbar.

1) Bestimmen Sie, wie lange das Medikament wirkt.

Möglicher Lösungsweg

a1)



b1) Bei Verwendung des exponentiellen Modells sinkt die im Körper vorhandene Wirkstoffmenge theoretisch niemals auf null ab. Nach 24 Stunden sind 8 Halbwertszeiten vergangen, d. h., ein Anteil von $\left(\frac{1}{2}\right)^8 > 0$ befindet sich noch im Blut.

c1) Modellierung durch eine Exponentialfunktion mit einer Halbwertszeit von 3 Stunden und einer Startmenge von 480 mg:

$N(t) = N_0 \cdot a^t$

$240 = 480 \cdot a^3$

$a = 0{,}5^{\frac{1}{3}} = 0{,}79370...$

$N(t) = 480 \cdot a^t$

Berechnung des Wirkungszeitraums:

$50 = 480 \cdot a^t$

$t = 9{,}7...$

Lösungsschlüssel

a1) 1 × A1: für die richtige Darstellung im Intervall [0; 12[
1 × A2: für die richtige Darstellung im Intervall [12; 24[

b1) 1 × D: für die richtige Argumentation

c1) 1 × A: für die richtige Modellierung der Exponentialfunktion
1 × B: für das richtige Bestimmen des Wirkungszeitraums

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Speiseeis*

Aufgabennummer: B_455

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Ein Restaurant stellt nach eigener Rezeptur Speiseeis für Nachspeisen her.

Aus den 6 Rohstoffen Milch, Obers, Eier, Zucker, Schokolade und Vanille werden die 2 Zwischenprodukte Schokoladeeis und Vanilleeis hergestellt.
Die Mengen in Gramm für die Herstellung jeweils einer Portion Eis sind in der nachstehenden Tabelle angegeben.

	Schokoladeeis Z_1	Vanilleeis Z_2
Milch R_1	10	25
Obers R_2	40	30
Eier R_3	20	15
Zucker R_4	5	10
Schokolade R_5	20	0
Vanille R_6	0	10

Das Schokoladeeis und das Vanilleeis werden für die Nachspeisen Früchtebecher und Bananensplit verwendet.
Die dazu jeweils benötigten Eisportionen sind in der nachstehenden Tabelle angegeben.

	Früchtebecher E_1	Bananensplit E_2
Schokoladeeis Z_1	2	0
Vanilleeis Z_2	1	3

Die Verflechtung, die den Bedarf an Rohstoffen für jeweils eine Nachspeise angibt, kann durch die Matrix $\boldsymbol{V}$ beschrieben werden.

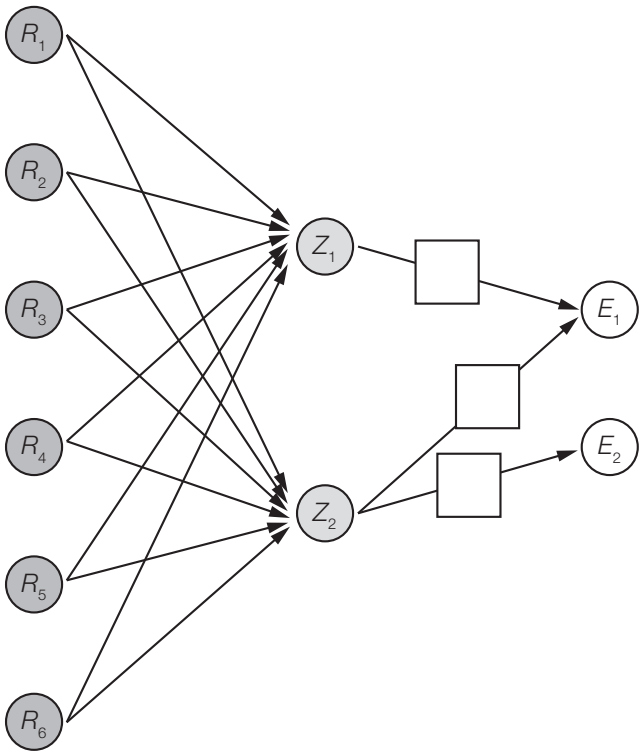
a) 1) Ermitteln Sie die Matrix $\boldsymbol{V}$.

Das Restaurant benötigt täglich 50 Früchtebecher und 30 Bananensplits.

2) Ermitteln Sie denjenigen Vektor $\vec{\boldsymbol{r}}$, der den täglichen Bedarf an Rohstoffen angibt.

* ehemalige Klausuraufgabe (adaptiert)

b) Die Verflechtung kann auch durch einen Gozinto-Graphen dargestellt werden.



1) Tragen Sie im obigen unvollständigen Gozinto-Graphen die fehlenden Zahlen in die entsprechenden Kästchen ein.

c) Die Preise für die Rohstoffe können in einem Vektor $\vec{\boldsymbol{p}} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{pmatrix}$ zusammengefasst werden.

1) Beschreiben Sie, was durch den Ausdruck $\vec{\boldsymbol{p}}^{\,\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{V}$ im gegebenen Sachzusammenhang berechnet wird.

2) Kreuzen Sie die richtige Zeilen- und Spaltenanzahl der Matrix $\vec{\boldsymbol{p}}^{\,\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{V}$ an. *[1 aus 5]*

1×2-Matrix	☐
2×1-Matrix	☐
2×6-Matrix	☐
6×1-Matrix	☐
6×2-Matrix	☐

d) Nach einer längeren Lagerung der Milch und der Eier besteht die Gefahr, dass diese Rohstoffe zu einem bestimmten Zeitpunkt *t* verdorben sind.

A bezeichnet das Ereignis, dass die Milch zum Zeitpunkt *t* verdorben ist. Das Ereignis *A* tritt mit einer Wahrscheinlichkeit von 1 % ein.
B bezeichnet das Ereignis, dass die Eier zum Zeitpunkt *t* verdorben sind. Das Ereignis *B* tritt mit einer Wahrscheinlichkeit von 2 % ein.
Mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,5 % sind beide Rohstoffe zum Zeitpunkt *t* verdorben.

Die Wahrscheinlichkeiten für die möglichen Ereignisse können in einer Vierfeldertafel dargestellt werden.

1) Vervollständigen Sie die nachstehende Vierfeldertafel so, dass sie den beschriebenen Sachverhalt wiedergibt.

	A	nicht *A*	Summe
B			
nicht *B*			
Summe			

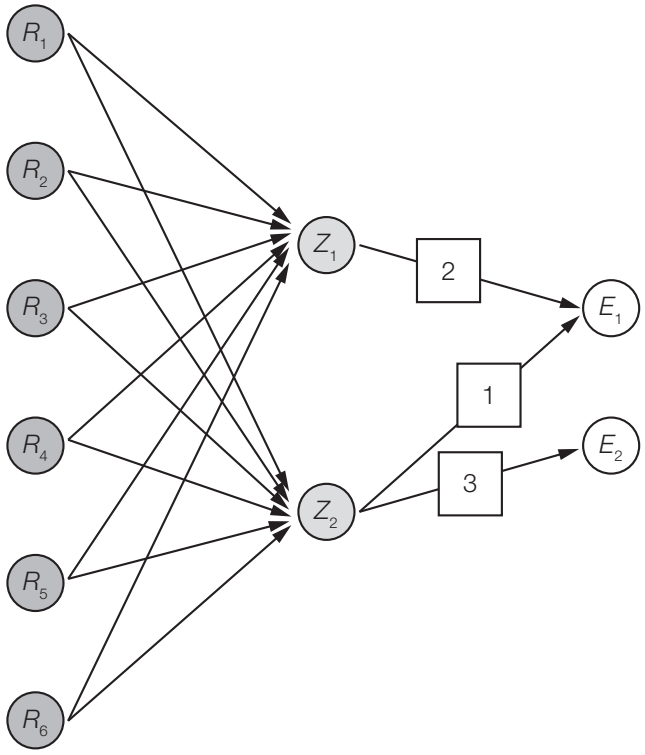
2) Zeigen Sie, dass die beiden Ereignisse *A* und *B* voneinander abhängig sind.

Möglicher Lösungsweg

a1) $\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} 10 & 25 \\ 40 & 30 \\ 20 & 15 \\ 5 & 10 \\ 20 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 & 75 \\ 110 & 90 \\ 55 & 45 \\ 20 & 30 \\ 40 & 0 \\ 10 & 30 \end{pmatrix}$

a2) $\vec{\boldsymbol{r}} = \begin{pmatrix} 45 & 75 \\ 110 & 90 \\ 55 & 45 \\ 20 & 30 \\ 40 & 0 \\ 10 & 30 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 50 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\,500 \\ 8\,200 \\ 4\,100 \\ 1\,900 \\ 2\,000 \\ 1\,400 \end{pmatrix}$

b1)



c1) Es werden die Rohstoffkosten für eine Portion Früchtebecher und für eine Portion Bananensplit berechnet.

c2)

1×2-Matrix	☒

d1)

	A	nicht A	Summe
B	0,005	0,015	0,02
nicht B	0,005	0,975	0,98
Summe	0,01	0,99	

d2) $P(A) \cdot P(B) = 0{,}01 \cdot 0{,}02 = 0{,}0002$

$P(A \cap B) = 0{,}005$

Da $P(A) \cdot P(B) \neq P(A \cap B)$ ist, sind die Ereignisse A und B voneinander abhängig.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × B1: für das richtige Ermitteln der Matrix $\boldsymbol{V}$
a2) 1 × B2: für das richtige Ermitteln des Vektors $\vec{\boldsymbol{r}}$
b1) 1 × A: für das richtige Eintragen der fehlenden Zahlen im Gozinto-Graphen
c1) 1 × C1: für die richtige Beschreibung im gegebenen Sachzusammenhang
c2) 1 × C2: für das richtige Ankreuzen
d1) 1 × A: für das richtige Vervollständigen der Vierfeldertafel
d2) 1 × D: für den richtigen Nachweis der Abhängigkeit der Ereignisse

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Medikamentenherstellung

Aufgabennummer: B_368

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein Pharmaunternehmen stellt aus den Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 die Zwischenprodukte Z_1 und Z_2 und daraus das Medikament E her.
Die Produktionsverflechtung ist im nebenstehenden Gozinto-Graphen dargestellt (alle Angaben in ME).

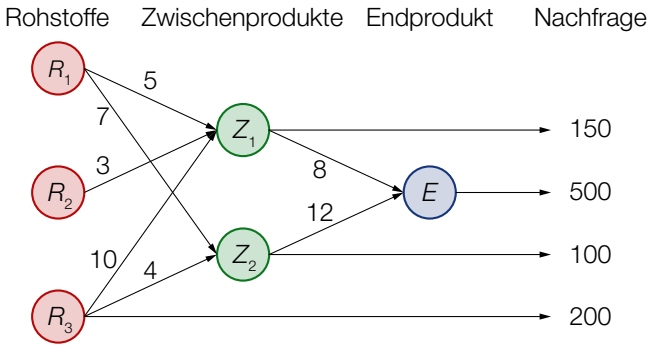


Abbildung 1

a) – Lesen Sie aus dem Gozinto-Graphen ab, aus welchen Rohstoffmengen 1 ME des Zwischenprodukts Z_2 hergestellt wird.

– Geben Sie an, welche Rohstoffe und Zwischenprodukte direkt nachgefragt werden.

– Beschreiben Sie, wie man mithilfe des Gozinto-Graphen die benötigten Rohstoffmengen für die Herstellung von 1 ME des Endprodukts berechnen kann.

– Berechnen Sie den Rohstoffbedarf für 1 ME des Medikaments E.

b) Die quadratische Matrix $\boldsymbol{A}$ beschreibt die Produktionsverflechtung zwischen Rohstoffen, den Zwischenprodukten und dem Medikament.

– Erstellen Sie die Matrix $\boldsymbol{A}$.

Der Vektor $\vec{\boldsymbol{n}}$ beschreibt die in der obigen Abbildung dargestellte Nachfrage nach R_1, R_2, R_3, Z_1, Z_2 und E.

– Erstellen Sie den Vektor $\vec{\boldsymbol{n}}$.

Der Vektor $\vec{\boldsymbol{x}}$ beschreibt die benötigten Mengen an R_1, R_2, R_3, Z_1, Z_2 und E.

– Berechnen Sie den Vektor $\vec{\boldsymbol{x}}$.

c) Der Materialbestand im Lager beträgt 80 000 ME von R_1, 20 000 ME von R_2 und 76 800 ME von R_3.
Aus diesem Materialbestand sollen 600 ME des Medikaments *E* hergestellt und keine Rohstoffe oder Zwischenprodukte an den Markt direkt abgegeben werden.
Die Matrix ***A*** beschreibt den Mengenbedarf an Rohstoffen für die Herstellung der Zwischenprodukte. Die Matrix ***B*** beschreibt den Mengenbedarf an Zwischenprodukten für die Herstellung des Medikaments.

– Erstellen Sie die beiden Matrizen ***A*** und ***B***.

– Beschreiben Sie, was mit dem Ausdruck $(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) \cdot 600$ im gegebenen Sachzusammenhang berechnet wird.

– Berechnen Sie, wie viel von den Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 im Lager übrig bleiben.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) 1 ME von Z_2 wird aus 7 ME R_1 und aus 4 ME R_3 hergestellt.

Der Rohstoff R_3 und die Zwischenprodukte Z_1 und Z_2 werden direkt nachgefragt.

Für die benötigte Menge von R_1 werden zunächst alle Pfade ausgewählt, die von R_1 zu E führen. Die Zahlen längs eines Pfades werden miteinander multipliziert. Die Produkte aller relevanten Pfade werden abschließend summiert. Für die anderen Rohstoffe wird dieser Vorgang wiederholt.

R_1: $5 \cdot 8 + 7 \cdot 12 = 124$
R_2: $3 \cdot 8 = 24$
R_3: $10 \cdot 8 + 4 \cdot 12 = 128$

Für 1 ME von E werden 124 ME von R_1, 24 ME von R_2 und 128 ME von R_3 benötigt.

b) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\vec{\boldsymbol{n}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 200 \\ 150 \\ 100 \\ 500 \end{pmatrix}$

Der Rechenweg für $\vec{\boldsymbol{x}}$ ohne Matrizen kann mithilfe der angegebenen Gleichung über das folgende lineare Gleichungssystem erfolgen:

$x_1 = 5 \cdot x_4 + 7 \cdot x_5$
$x_2 = 3 \cdot x_4$
$x_3 = 10 \cdot x_4 + 4 \cdot x_5 + 200$
$x_4 = 8 \cdot x_6 + 150$
$x_5 = 12 \cdot x_6 + 100$
$x_6 = 500$

Dabei gilt: $\vec{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}$

Die Lösung des Gleichungssystems mittels Technologieeinsatz liefert den Vektor $\vec{\boldsymbol{x}}$:
$x_1 = 63\,450$; $x_2 = 12\,450$; $x_3 = 66\,100$; $x_4 = 4\,150$; $x_5 = 6\,100$; $x_6 = 500$

Alternativer Rechenweg mit der inversen Matrix:

$$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0&-5&-7&0\\0&1&0&-3&0&0\\0&0&1&-10&-4&0\\0&0&0&1&0&-8\\0&0&0&0&1&-12\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix};\quad (\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&5&7&124\\0&1&0&3&0&24\\0&0&1&10&4&128\\0&0&0&1&0&8\\0&0&0&0&1&12\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\text{Vektor } \vec{\boldsymbol{x}}=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}\cdot\vec{\boldsymbol{n}}=\begin{pmatrix}63\,450\\12\,450\\66\,100\\4\,150\\6\,100\\500\end{pmatrix}$$

c) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5&7\\3&0\\10&4\end{pmatrix};\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}8\\12\end{pmatrix}$

Es wird der Mengenbedarf an Rohstoffen für die Herstellung von 600 ME des Medikaments *E* berechnet.

benötigte Rohstoffmengen: $\left[\begin{pmatrix}5&7\\3&0\\10&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}8\\12\end{pmatrix}\right]\cdot 600=\begin{pmatrix}74\,400\\14\,400\\76\,800\end{pmatrix}$

Von R_1 und R_2 bleiben jeweils 5 600 ME übrig, R_3 wird zur Gänze verbraucht.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) A Modellieren und Transferieren
c) C Interpretieren und Dokumentieren, B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 4
b) 3
c) 3

Thema: Wirtschaft

Quellen: –

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Elektronische Geräte

Aufgabennummer: B_367

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Für die Herstellung eines bestimmten elektronischen Geräts benötigt man die Bausteine B_1, B_2 und B_3. Daraus werden eine Platine Z als Zwischenprodukt und 2 Geräte E_1 und E_2 als Endprodukte hergestellt. Zusätzlich erfüllt das Unternehmen die direkte Nachfrage nach Bausteinen B_2 und B_3 sowie dem Zwischenprodukt Z.
Die Matrix $\boldsymbol{A}$ beschreibt die Produktionsverflechtung zwischen den Bausteinen, dem Zwischenprodukt und den Endprodukten. Der Produktionsvektor $\vec{x}$ beschreibt die benötigten Mengen an Bausteinen, Zwischenprodukten und Endprodukten. (Alle Angaben in Stück.)

$$\boldsymbol{A} = \begin{array}{c} \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ Z \\ E_1 \\ E_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} B_1 & B_2 & B_3 & Z & E_1 & E_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 30 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}; \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 32\,000 \\ 51\,000 \\ 23\,000 \\ 1\,600 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix}$$

a) – Erklären Sie, was die Zahlen in der 2. Zeile der Matrix $\boldsymbol{A}$ im gegebenen Sachzusammenhang bedeuten.

– Veranschaulichen Sie die in Matrix $\boldsymbol{A}$ beschriebene Produktionsverflechtung durch einen Gozinto-Graphen.

b) – Berechnen Sie, welche Mengen an Bausteinen, Zwischenprodukten und Endprodukten direkt nachgefragt werden.

Die direkte Nachfrage nach B_2 und jene nach Z ändern sich: Der Absatz von B_2 wird halbiert, jener von Z vervierfacht, die Matrix $\boldsymbol{A}$ bleibt gleich.

– Berechnen Sie den neuen Produktionsvektor $\vec{x}_2$.

– Beschreiben Sie die Veränderung der Produktionsmengen, die sich durch die geänderte Nachfrage ergibt.

c) B_1 kostet 0,90 €/Stück, B_2 0,70 €/Stück und B_3 0,80 €/Stück.

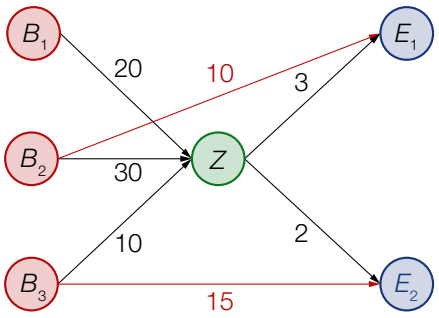
– Erstellen Sie den Vektor $\vec{r}$, der den Bedarf an den Bausteinen B_1, B_2 und B_3 für die Herstellung einer Platine Z beschreibt.
– Berechnen Sie die gesamten Kosten für die Bausteine, die bei der Herstellung einer Platine anfallen.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Die Nullen in den ersten 3 Spalten der 2. Zeile der Matrix $\boldsymbol{A}$ beschreiben, dass der Baustein B_2 mit sich selbst und mit den anderen Bausteinen nicht in Beziehung steht. In der 4. Spalte der 2. Zeile findet man die Menge der Bausteine B_2, die für die Herstellung einer Platine Z benötigt werden. In der 5. Spalte findet man die Anzahl der Bausteine B_2, die für die Herstellung eines Geräts E_1 benötigt wird. Die 6. Spalte sagt aus, dass B_2 nicht im Gerät E_2 eingesetzt wird.

Gozinto-Graph:



b) $\vec{n} = \vec{x} - \boldsymbol{A} \cdot \vec{x}$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 32\,000 \\ 51\,000 \\ 23\,000 \\ 1\,600 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 30 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 32\,000 \\ 51\,000 \\ 23\,000 \\ 1\,600 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1\,000 \\ 2\,500 \\ 400 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix}$$

Es werden 1 000 Stück der Bausteine B_2, 2 500 Stück von B_3, 400 Stück Platinen Z und 200 Geräte E_1 sowie 300 Geräte E_2 von dieser Produktion direkt nachgefragt.

Die Änderung des Nachfragevektors ergibt mit $\vec{x} = \boldsymbol{A} \cdot \vec{x} - \vec{n}$ das folgende Gleichungssystem:

$x_1 = 20 \cdot x_4$
$x_2 = 30 \cdot x_4 + 10 \cdot x_5 + 500$
$x_3 = 10 \cdot x_4 + 15 \cdot x_6 + 2\,500$
$x_4 = 3 \cdot x_5 + 2 \cdot x_6 + 1\,600$
$x_5 = 200$
$x_6 = 300$

Die Lösung des Gleichungssystems mittels Technologieeinsatz ergibt die Komponenten des neuen Produktionsvektors:

$x_1 = 56\,000$; $x_2 = 86\,500$; $x_3 = 35\,000$; $x_4 = 2\,800$; $x_5 = 200$; $x_6 = 300$

Alternativer Lösungsweg mit der inversen Matrix:

$$\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 500 \\ 2\,500 \\ 1\,600 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_2 = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 30 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right]^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 500 \\ 2\,500 \\ 1\,600 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 56\,000 \\ 86\,500 \\ 35\,000 \\ 2\,800 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix}$$

c) Nur die Anzahl der beiden Geräte E_1 und E_2 ändert sich nicht, alle übrigen Produktionsmengen müssen erhöht werden: B_1 um 24 000 Stück, B_2 um 35 500 Stück, B_3 um 12 000 Stück und Z um 1 200 Stück.

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 10 \end{pmatrix}$$

gesamte Kosten: $(0{,}9 \quad 0{,}7 \quad 0{,}8) \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 10 \end{pmatrix} = 47$

Die Bausteine für die Herstellung einer Platine kosten insgesamt € 47.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) A Modellieren und Transferieren, C Interpretieren und Dokumentieren
c) A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) schwer
c) leicht

Punkteanzahl:

a) 2
b) 4
c) 2

Thema: Wirtschaft

Quellen: —

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Ansparplan*

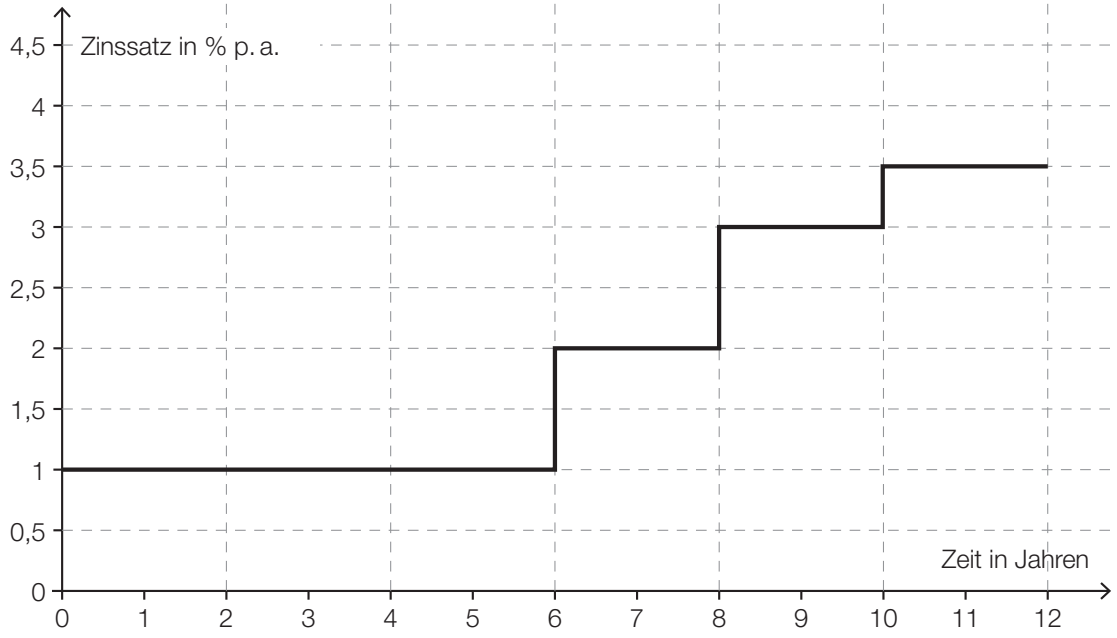
Aufgabennummer: B_185

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Monika möchte in den nächsten 12 Jahren € 20.000 ansparen.

Im Folgenden wird die Kapitalertragsteuer nicht berücksichtigt.

a) Monika betrachtet das Angebot einer Bank für eine Wohnbauanleihe mit einer Laufzeit von 12 Jahren (siehe nachstehende Grafik). Die jährliche Verzinsung steigt dabei im Laufe der Jahre an.



1) Lesen Sie aus der obigen Grafik die Höhe und die Dauer der jährlichen Zinssätze ab.
2) Berechnen Sie den mittleren jährlichen Zinssatz.
3) Berechnen Sie die Höhe desjenigen Betrags, den Monika jetzt anlegen muss, um ihr Sparziel von € 20.000 in 12 Jahren zu erreichen.

b) Auf einem Sparbuch bietet die Bank für 12 Jahre einen fixen Zinssatz von 2 % p. a. Um ihr Sparziel von € 20.000 in 12 Jahren zu erreichen, könnte Monika sofort € 8.000 einlegen und 2 gleich hohe Einzahlungen Z nach 3 Jahren und nach insgesamt 8 Jahren tätigen.

1) Veranschaulichen Sie Monikas Zahlungsplan und das Sparziel auf einer Zeitachse.
2) Berechnen Sie die Höhe der Einzahlung Z.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Monika überlegt, 12 Jahre lang zu Beginn jedes Jahres einen gleich hohen Betrag einzuzahlen, um ihr Sparziel von € 20.000 in 12 Jahren bei einem fixen Zinssatz von 2 % p. a. zu erreichen.

1) Berechnen Sie die Höhe des jährlichen Einzahlungsbetrags R.

Sie überlegt, nicht zu Beginn jedes Jahres den Jahresbetrag einzuzahlen, sondern zu Beginn jedes Monats $\frac{1}{12}$ des Jahresbetrags.

2) Argumentieren Sie, dass sie ihr Sparziel damit nicht in der vorgesehenen Zeit erreicht.

Möglicher Lösungsweg

a1) Die Anleihe wird die ersten 6 Jahre zu 1 % p. a., dann 2 Jahre zu 2 % p. a., 2 Jahre zu 3 % p. a. und schließlich 2 Jahre zu 3,5 % p. a. verzinst.

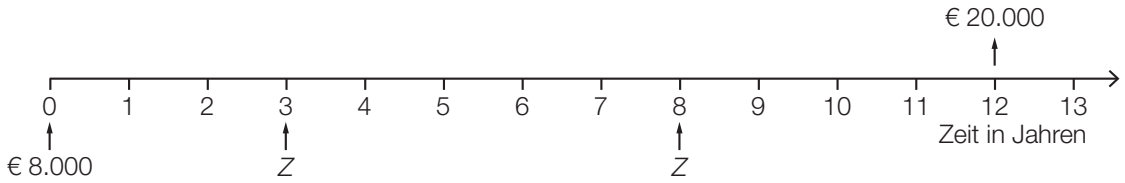
a2) $(1 + i)^{12} = 1{,}01^6 \cdot 1{,}02^2 \cdot 1{,}03^2 \cdot 1{,}035^2 \Rightarrow i = 0{,}0191...$

Der mittlere jährliche Zinssatz beträgt rund 1,9 %.
(Eine Berechnung des mittleren jährlichen Zinssatzes als gewichtetes arithmetisches Mittel ist als falsch zu werten.)

a3) $\dfrac{20\,000}{1{,}01^6 \cdot 1{,}02^2 \cdot 1{,}03^2 \cdot 1{,}035^2} = 15\,934{,}786...$

Monika muss € 15.934,79 anlegen, damit sie in 12 Jahren € 20.000 angespart hat.

b1)



b2) $8\,000 \cdot 1{,}02^{12} + Z \cdot 1{,}02^9 + Z \cdot 1{,}02^4 = 20\,000 \Rightarrow Z = 4\,326{,}655\ldots$

Die Höhe einer Einzahlung Z beträgt € 4.326,66.

c1) $20\,000 = R \cdot \dfrac{1{,}02^{12} - 1}{0{,}02} \cdot 1{,}02 \Rightarrow R = 1\,461{,}952...$

Der jährliche Ansparbetrag beträgt € 1.461,95.

c2) Sie wird damit ihr Sparziel nicht erreichen, da die Zahlungen großteils später erfolgen und sie somit weniger Zinsen erhält.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × C: für das richtige Ablesen der Zinssätze und der Verzinsungsdauer
a2) 1 × B1: für die richtige Berechnung des mittleren jährlichen Zinssatzes
(Eine Berechnung des mittleren jährlichen Zinssatzes als gewichtetes arithmetisches Mittel ist als falsch zu werten.)
a3) 1 × B2: für die richtige Berechnung der Höhe des Betrags

b1) 1 × A1: für das richtige Veranschaulichen auf einer Zeitachse
b2) 1 × A2: für einen richtigen Ansatz
1 × B: für die richtige Berechnung der Höhe der Zahlung Z

c1) 1 × B: für die richtige Berechnung des jährlichen Ansparbetrags
c2) 1 × D: für die richtige Argumentation

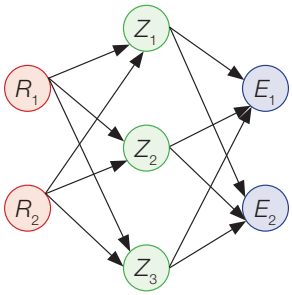
Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Rohstoffbedarf

Aufgabennummer: B_162

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

In einem Unternehmen können die Verflechtungen zwischen den Rohstoffen R_1 und R_2, den Zwischenprodukten Z_1, Z_2 und Z_3 und den beiden Endprodukten E_1 und E_2 in einem zweistufigen Produktionsverfahren durch den nachstehenden Gozinto-Graphen und mit den beiden nachstehenden Tabellen dargestellt werden. Die Tabellen geben an, wie viele ME von den jeweiligen Rohstoffen bzw. Zwischenprodukten benötigt werden, um jeweils 1 ME der Zwischenprodukte bzw. Endprodukte herzustellen.



	Z_1	Z_2	Z_3
R_1	10	5	0
R_2	15	0	25

	E_1	E_2
Z_1	30	35
Z_2	25	20
Z_3	0	10

Von E_1 werden 200 ME und von E_2 350 ME nachgefragt.

a) – Übertragen Sie die in den Tabellen angegebenen Mengen in den Gozinto-Graphen.

b) – Erstellen Sie eine Matrix, die den Mengenbedarf an Rohstoffen für die Herstellung der beiden Endprodukte beschreibt.

– Interpretieren Sie die Zahlen in der ersten Spalte dieser Matrix im gegebenen Sachzusammenhang.

c) Es sollen 200 ME von E_1 und 350 ME von E_2 verkauft werden. Die nachgefragten Mengen von E_1 werden zu einem Preis von 4 €/ME und jene von E_2 zu 3,50 €/ME verkauft.

– Ermitteln Sie den Gesamterlös.

d) – Berechnen Sie das Produkt der beiden Matrizen $\begin{pmatrix} 30 & 35 \\ 25 & 20 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 350 \end{pmatrix}$.

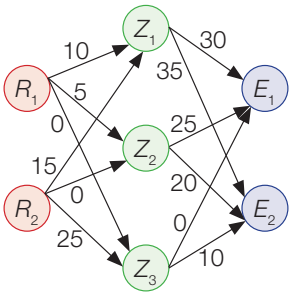
– Geben Sie an, welchen Typ von Matrix das Ergebnis darstellt.

– Interpretieren Sie, welche Aussagen über die oben beschriebene Produktion aus der berechneten Matrix abgelesen werden können.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



b) $\begin{pmatrix} 10 & 5 & 0 \\ 15 & 0 & 25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 30 & 35 \\ 25 & 20 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 425 & 450 \\ 450 & 775 \end{pmatrix}$

Vom Rohstoff R_1 werden für die Produktion von 1 ME des Endprodukts E_1 425 ME benötigt.
Vom Rohstoff R_2werden für die Produktion von 1 ME des Endprodukts E_1 450 ME benötigt.

c) $(4 \;\; 3{,}5) \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 350 \end{pmatrix} = 800 + 1\,225 = 2\,025$

Der Gesamterlös beträgt € 2.025.

d) $\begin{pmatrix} 30 & 35 \\ 25 & 20 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 350 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18\,250 \\ 12\,000 \\ 3\,500 \end{pmatrix}$

Es handelt sich um einen dreizeiligen Spaltenvektor (3×1-Matrix).

18 250 ME des Zwischenprodukts Z_1 und 12 000 ME des Zwischenprodukts Z_2 sowie 3 500 ME des Zwischenprodukts Z_3 werden benötigt, um 200 ME von E_1 und 350 ME von E_2 herstellen zu können.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 2 Algebra und Geometrie
d) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) –
d) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) A Modellieren und Transferieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) –
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) –
d) D Argumentieren und Kommunizieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) leicht
d) mittel

Punkteanzahl:

a) 1
b) 3
c) 1
d) 3

Thema: Wirtschaft

Quellen: –

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Champagner*

Aufgabennummer: B_215

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Champagner wird im französischen Weinbaugebiet *Champagne* nach streng festgelegten Regeln erzeugt.

a) Eine Flasche Champagner wird zur Zeit $t = 0$ in einen Kühlschrank mit einer Temperatur von $\vartheta_U = 4$ °C gelegt. Zu Beginn ($t = 0$) beträgt die Temperatur des Champagners 16 °C und nach 2 Stunden beträgt sie 10 °C.
Die Temperatur des Champagners in Abhängigkeit von der Zeit wird durch die Funktion ϑ beschrieben:

t ... Zeit in h
$\vartheta(t)$ ... Temperatur des Champagners zur Zeit t in °C

Die momentane Änderungsrate der Temperatur des Champagners ist dabei direkt proportional zur jeweiligen Temperaturdifferenz $\vartheta - \vartheta_U$.

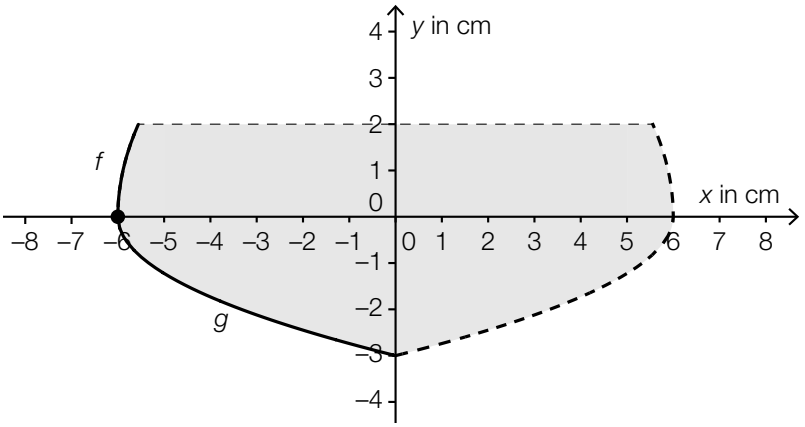
1) Stellen Sie die Differenzialgleichung für die Temperaturfunktion ϑ des Champagners auf. Bezeichnen Sie dabei den Proportionalitätsfaktor mit k.

2) Berechnen Sie die Lösung der Differenzialgleichung für den gegebenen Abkühlungsprozess.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Ein Champagnerglas (ohne Stiel, Glasdicke nicht berücksichtigt) kann näherungsweise durch die Rotation des Graphen der Wurzelfunktion f und des Graphen der Wurzelfunktion g um die y-Achse beschrieben werden (siehe nachstehende Abbildung).





Für f gilt: $y = 3 \cdot \sqrt{x + a}$
Für g gilt: $y = -\sqrt{1{,}5 \cdot x + 9}$

1) Lesen Sie aus der obigen Abbildung den Wert für a ab.

2) Berechnen Sie das Füllvolumen des Champagnerglases.

In das Champagnerglas werden 150 ml Champagner gefüllt.

3) Berechnen Sie die zugehörige Füllhöhe.

c) Ein Händler verkauft die Sorten *Tradition*, *Rosé* und *Réserve* an 3 verschiedene Kunden in folgenden Mengen:

- Sorte *Tradition*:
  120 Flaschen an Kunde *A*, 12 Flaschen an Kunde *B*, 600 Flaschen an Kunde *C*
- Sorte *Rosé*:
  84 Flaschen an Kunde *A*, 60 Flaschen an Kunde *B*, 420 Flaschen an Kunde *C*
- Sorte *Réserve*:
  36 Flaschen an Kunde *A*, 72 Flaschen an Kunde *B*, 144 Flaschen an Kunde *C*

Kunde *A* bezahlt insgesamt € 9.864, Kunde *B* € 7.344 und Kunde *C* € 47.196.

1) Stellen Sie ein Gleichungssystem in Matrizenform auf, mit dem man für jede Sorte den Preis pro Flasche berechnen kann.

Möglicher Lösungsweg

a1) $\frac{d\vartheta}{dt} = k \cdot (\vartheta - 4)$

a2) Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$\vartheta(t) = C \cdot e^{k \cdot t} + 4$

oder:

$\int \frac{\vartheta'}{\vartheta - 4} dt = \int k \, dt$
$\ln|\vartheta(t) - 4| = k \cdot t + C_1$
$\vartheta(t) - 4 = C \cdot e^{k \cdot t}$
$\vartheta(t) = C \cdot e^{k \cdot t} + 4$

$\vartheta(0) = 16$ *oder* $C \cdot e^{k \cdot 0} + 4 = 16$
$C = 12$

$\vartheta(2) = 10$ *oder* $12 \cdot e^{k \cdot 2} + 4 = 10$
$k = \frac{\ln(0{,}5)}{2} = -0{,}34657... \approx -0{,}3466$

$\vartheta(t) = 12 \cdot e^{-0{,}3466 \cdot t} + 4$

b1) $a = 6$

b2) $V_y = \pi \cdot \left(\int_0^2 \left(\frac{y^2}{9} - 6 \right)^2 dy + \int_{-3}^0 \left(\frac{y^2 - 9}{1{,}5} \right)^2 dy \right) = 396{,}2...$

Das Füllvolumen beträgt rund 396 ml.

b3) $\pi \cdot \int_{-3}^{h} \left(\frac{y^2 - 9}{1{,}5} \right)^2 dy = 150$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$h = -0{,}275...$
$3 - 0{,}275... = 2{,}724...$

Die Füllhöhe beträgt rund 2,72 cm.

Der Punkt ist auch zu vergeben, wenn nur der Wert für h *richtig ermittelt wurde.*

c1) x ... Preis für eine Flasche der Sorte *Tradition*
y ... Preis für eine Flasche der Sorte *Rosé*
z ... Preis für eine Flasche der Sorte *Réserve*

$$\begin{pmatrix} 120 & 84 & 36 \\ 12 & 60 & 72 \\ 600 & 420 & 144 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9\,864 \\ 7\,344 \\ 47\,196 \end{pmatrix}$$

Lösungsschlüssel

a1) 1 × A1: für das richtige Aufstellen der Differenzialgleichung
a2) 1 × A2: für den richtigen Ansatz (allgemeine Lösung der Differenzialgleichung)
1 × B: für die richtige Berechnung der Lösung der Differenzialgleichung für den gegebenen Abkühlungsprozess
b1) 1 × C: für das richtige Ablesen von *a*
b2) 1 × B1: für die richtige Berechnung des Füllvolumens
b3) 1 × B2: für die richtige Berechnung der Füllhöhe
c1) 1 × A: für das richtige Aufstellen des Gleichungssystems in Matrizenform

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Fahrräder*

Aufgabennummer: B_460

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Die Verkaufszahlen für E-Bikes in Österreich sind in den letzten Jahren gestiegen.
In der nachstehenden Tabelle sind die Verkaufszahlen (gerundet auf 1 000) für ausgewählte Jahre angegeben.

Jahr	2008	2010	2012	2013
Anzahl der pro Jahr verkauften E-Bikes	8 000	20 000	41 000	43 000

Die Anzahl der pro Jahr verkauften E-Bikes soll in Abhängigkeit von der Zeit t beschrieben werden.

1) Ermitteln Sie eine Gleichung der zugehörigen linearen Regressionsfunktion. Wählen Sie $t = 0$ für das Jahr 2008.

2) Interpretieren Sie den Wert der Steigung der linearen Regressionsfunktion im gegebenen Sachzusammenhang.

b) Ein Fahrradverleih möchte x E-Bikes und y Citybikes anschaffen.
Insgesamt möchte er höchstens 100 Fahrräder (E-Bikes und Citybikes) anschaffen.
Er möchte um mindestens 30 E-Bikes mehr als Citybikes anschaffen.

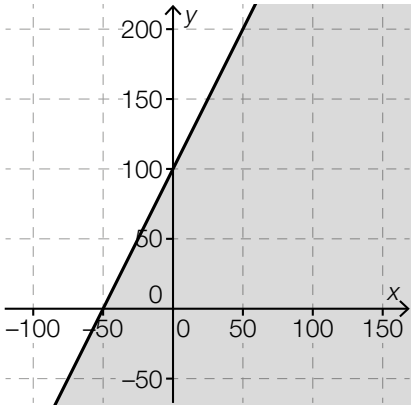
1) Erstellen Sie die beiden Ungleichungen, die diesen Sachverhalt beschreiben.

* ehemalige Klausuraufgabe

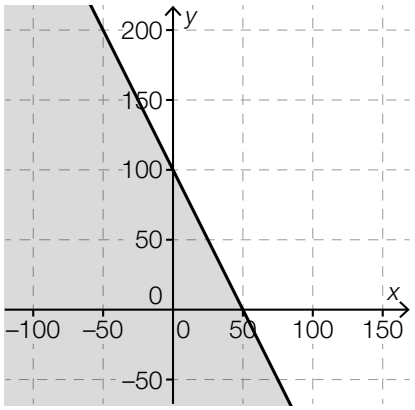
c) 1) Ordnen Sie den beiden Ungleichungen jeweils die richtige grafische Darstellung aus A bis D zu. *[2 zu 4]*

$\frac{1}{2} \cdot x \leq y + 50$	
$\frac{1}{2} \cdot y \leq x + 50$	

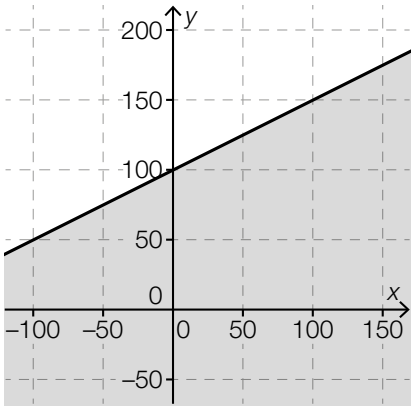
A



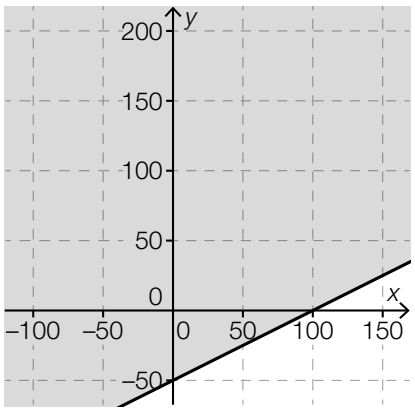
B



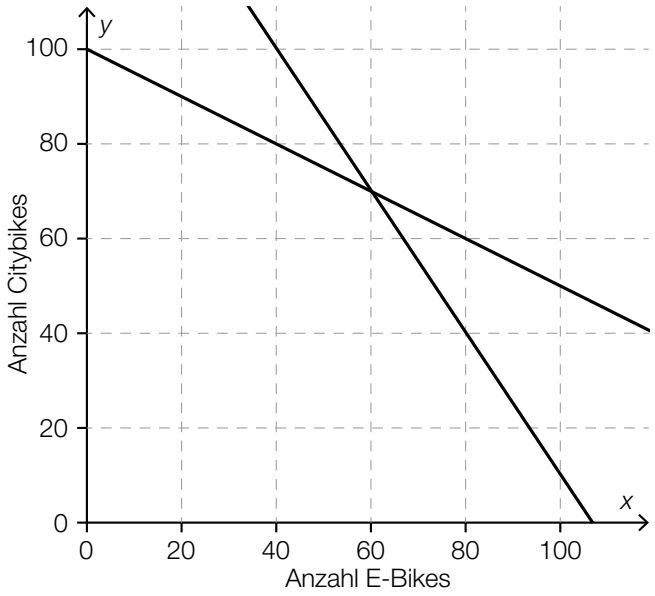
C



D



d) Ein anderer Fahrradverleih möchte x E-Bikes und y Citybikes anschaffen.
In der nachstehenden Abbildung sind bereits die beiden Begrenzungsgeraden für die Ungleichungen $y \leq -1{,}5 \cdot x + 160$ und $y \leq -0{,}5 \cdot x + 100$ eingezeichnet.

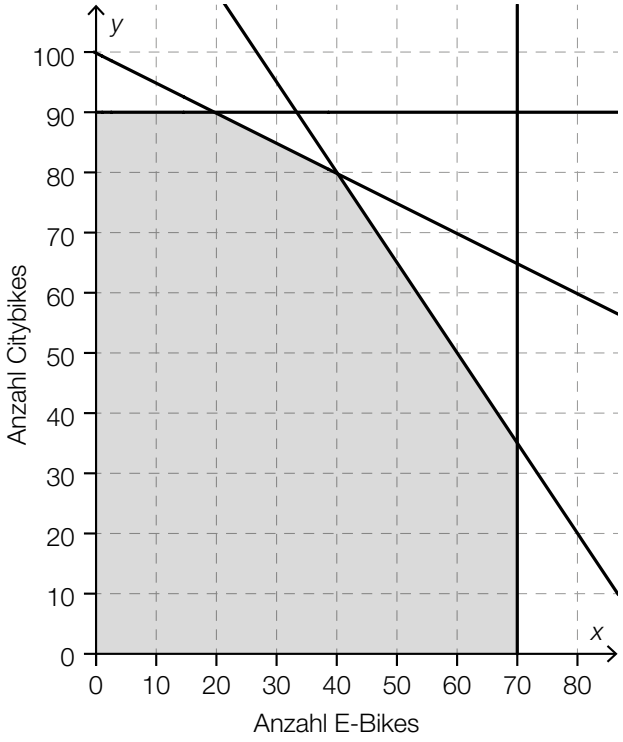


1) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung die Begrenzungsgerade für die Ungleichung $x \leq 80$ ein.

Die 3 genannten Ungleichungen bilden ein Ungleichungssystem.

2) Markieren Sie in der obigen Abbildung den Lösungsbereich dieses Ungleichungssystems.

e) In der nachstehenden Abbildung ist der Lösungsbereich für einen weiteren Fahrradverleih dargestellt.



Die Zielfunktion für den Erlös in Euro pro Tag bei diesem Fahrradverleih lautet:

$E(x, y) = 30 \cdot x + 20 \cdot y$

x ... Anzahl der E-Bikes
y ... Anzahl der Citybikes

Es soll ermittelt werden, wie viele E-Bikes und Citybikes pro Tag verliehen werden müssen, um den maximalen Erlös zu erzielen.

1) Argumentieren Sie, dass es dafür keine eindeutige Lösung gibt.

Möglicher Lösungsweg

a1) Ermittlung mittels Technologieeinsatz:
$A(t) = 7\,525 \cdot t + 7\,305$ *(Koeffizienten gerundet)*

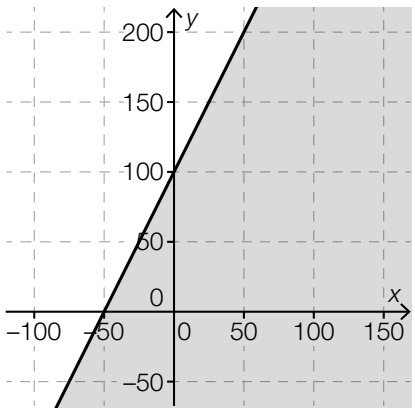
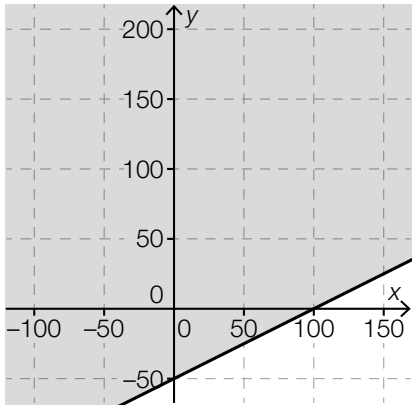
t ... Zeit ab 2008 in Jahren
$A(t)$ ... Anzahl der pro Jahr verkauften E-Bikes zur Zeit t

a2) Die Anzahl der pro Jahr verkauften E-Bikes steigt um rund 7 525 Stück pro Jahr.

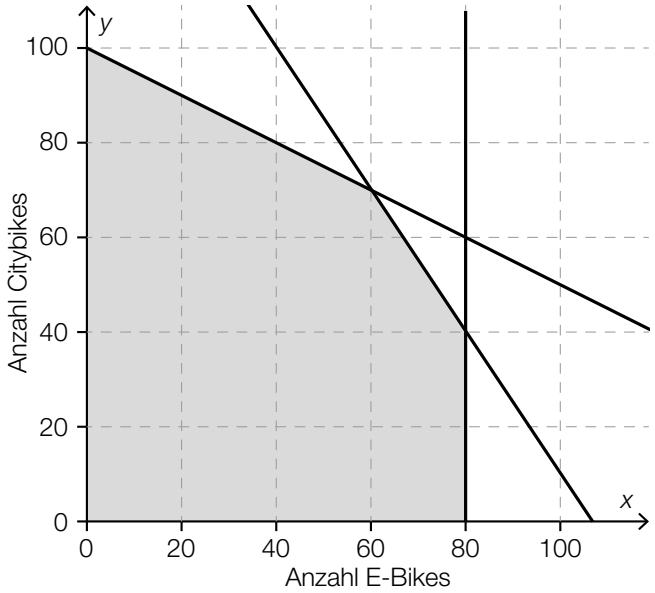
b1) $x + y \leq 100$
$x \geq y + 30$

c1)

$\frac{1}{2} \cdot x \leq y + 50$	D
$\frac{1}{2} \cdot y \leq x + 50$	A

A	
B	[...]
C	[...]
D	

d1 und d2)



e1) Die Gerade, für die die Zielfunktion im Lösungsbereich den maximalen Wert annimmt, ist identisch mit einer der Begrenzungsgeraden des Lösungsbereichs. Alle Punkte dieser Begrenzungsgeraden, die im Lösungsbereich liegen, sind mögliche Lösungen, daher gibt es keine eindeutige Lösung.

Lösungsschlüssel

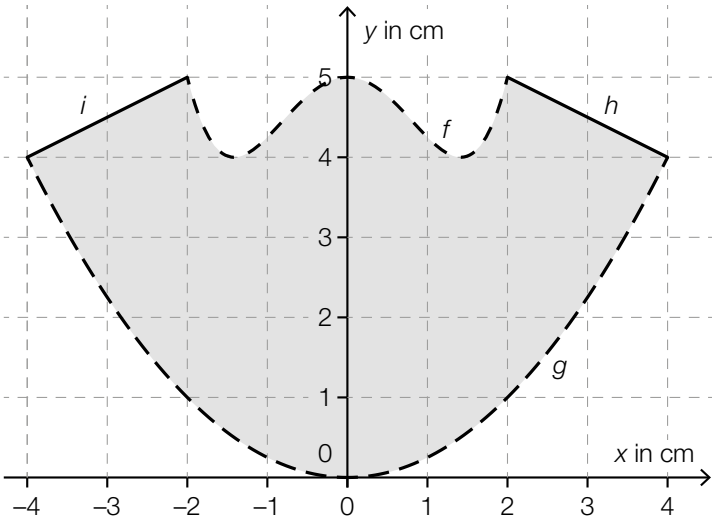
a1) 1 × B: für das richtige Ermitteln der Gleichung der linearen Regressionsfunktion
a2) 1 × C: für die richtige Interpretation des Wertes der Steigung im gegebenen Sachzusammenhang
b1) 1 × A1: für das richtige Erstellen der Ungleichung zur Bedingung „höchstens 100 Fahrräder“
1 × A2: für das richtige Erstellen der Ungleichung zur Bedingung „mindestens 30 E-Bikes mehr“
c1) 1 × C: für die richtige Zuordnung
d1) 1 × B: für das richtige Einzeichnen der Begrenzungsgeraden
d2) 1 × C: für das richtige Markieren des Lösungsbereichs
e1) 1 × D: für die richtige Argumentation

Skulptur*

Aufgabennummer: B_464

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Eine Skulptur wird von oben betrachtet. Die Deckfläche ist waagrecht und eben. Sie ist in der nachstehenden Abbildung in einem Koordinatensystem dargestellt. Dabei ist die Deckfläche symmetrisch zur y-Achse und wird durch die Graphen der Funktionen f, g, h und i begrenzt.



a) 1) Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung des Flächeninhalts A der grau markierten Deckfläche.

$A =$ _____

b) Für die Funktion f gilt:

$f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^2 + c$

Es gilt: $f'(1) = -1$

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten a, b und c.

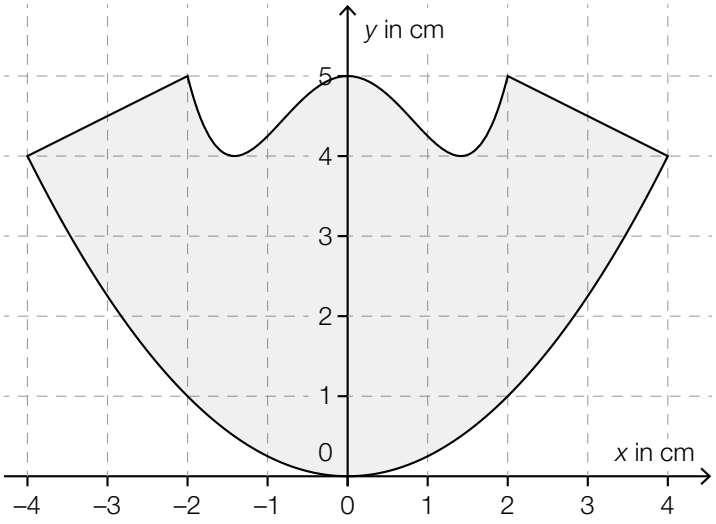
2) Berechnen Sie die Koeffizienten a, b und c.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Auf die Deckfläche der Skulptur soll ein Viereck nach bestimmten Vorgaben gemalt werden.

Ausgehend vom Punkt (0|3) wird der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ als Pfeil aufgezeichnet.
Vom Endpunkt dieses Pfeils ausgehend wird nun der Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}$ als Pfeil aufgezeichnet.

1) Zeichnen Sie in der nachstehenden Abbildung die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ wie oben beschrieben als Pfeile ein.



Der Vektor $\vec{c}$ entsteht durch Spiegelung des Vektors $\vec{a}$ an der y-Achse.

2) Ergänzen Sie die Koordinaten dieses Vektors:

$\vec{c} = \begin{pmatrix} \square \\ \square \end{pmatrix}$

Sind die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ wie oben beschrieben als Pfeile eingezeichnet und spiegelt man diese Pfeile an der y-Achse, so entsteht das Viereck.

3) Bestimmen Sie den Flächeninhalt dieses Vierecks.

Möglicher Lösungsweg

a1) $A = 2 \cdot \left(\int_0^2 (f(x) - g(x))\,dx + \int_2^4 (h(x) - g(x))\,dx \right)$

oder:

$A = \int_{-4}^{-2} (i(x) - g(x))\,dx + \int_{-2}^{2} (f(x) - g(x))\,dx + \int_2^4 (h(x) - g(x))\,dx$

b1) $f'(x) = 4 \cdot a \cdot x^3 + 2 \cdot b \cdot x$

$f(0) = 5$
$f(2) = 5$
$f'(1) = -1$

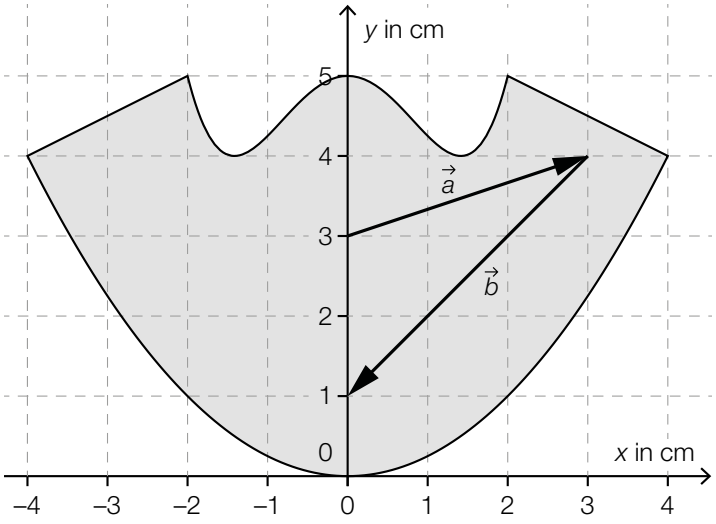
oder:

$c = 5$
$16 \cdot a + 4 \cdot b + c = 5$
$4 \cdot a + 2 \cdot b = -1$

Die Verwendung anderer Punkte auf dem Graphen von f *für das Erstellen des Gleichungssystems ist ebenfalls als richtig zu werten.*

b2) Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$a = 0{,}25$
$b = -1$
$c = 5$

c1)



c2) $\vec{c} = \begin{pmatrix} \boxed{-3} \\ \boxed{1} \end{pmatrix}$

c3) $A = 18 - 3 - 9 = 6$
Der Flächeninhalt beträgt 6 cm^2.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel zur Berechnung von A
b1) 1 × A: für das richtige Erstellen des Gleichungssystems
b2) 1 × B: für die richtige Berechnung der Koeffizienten
c1) 1 × A: für das richtige Einzeichnen der Vektoren als Pfeile
c2) 1 × C: für das richtige Ergänzen der Koordinaten des gespiegelten Vektors
c3) 1 × B: für das richtige Bestimmen des Flächeninhalts

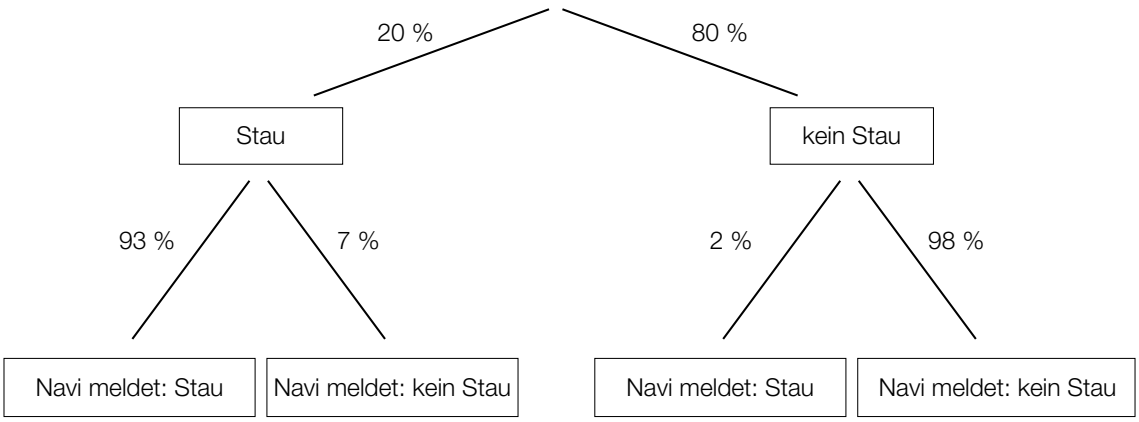
Navigationsgeräte*

Aufgabennummer: B_465

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Moderne Navigationsgeräte (Navis) haben eine Reihe von Zusatzfunktionen.

a) Für einen bestimmten Straßenabschnitt ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Stau auftritt, konstant.
Die Meldung „Stau“ oder „kein Stau“ am Navi ist jedoch nur mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit richtig. Dieser Sachverhalt ist im nachstehenden Baumdiagramm dargestellt.



1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer zufällig ausgewählten Fahrt auf diesem Straßenabschnitt ein Stau auftritt und dieser vom Navi gemeldet wird.

2) Beschreiben Sie ein Ereignis E im gegebenen Sachzusammenhang, dessen Wahrscheinlichkeit folgendermaßen berechnet wird: $P(E) = 0{,}2 \cdot 0{,}93 + 0{,}8 \cdot 0{,}02$

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Entlang einer 45 km langen Teststrecke auf einer Autobahn sind insgesamt 8 Radarboxen in gleichen Abständen zur Überwachung der Geschwindigkeit aufgestellt. Eine dieser Radarboxen steht am Anfang und eine am Ende der Strecke.

Die Abstände der Radarboxen vom Streckenanfang lassen sich durch eine Folge $(a_1, a_2, \ldots, a_8)$ modellieren.

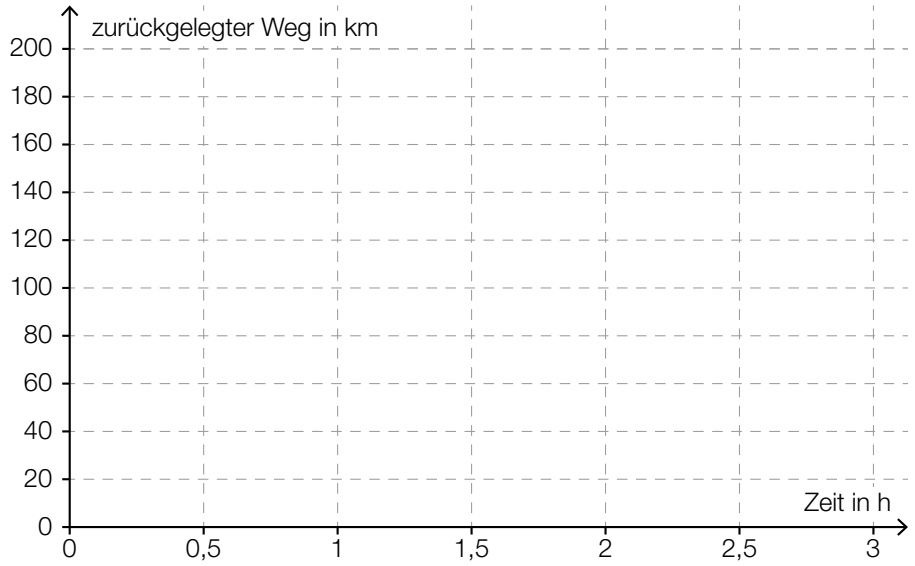
1) Geben Sie an, welche Art von Folge hierfür in Frage kommt. Begründen Sie Ihre Entscheidung.
2) Stellen Sie für diese Folge ein explizites Bildungsgesetz auf.

Die 8 Radarboxen werden unabhängig voneinander mit der Wahrscheinlichkeit 0,95 vom Navi erkannt.

3) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass genau 2 Radarboxen auf dieser Strecke nicht erkannt werden.

c) Entlang einer 200 km langen Strecke fährt jemand die erste Hälfte des Weges mit einer Geschwindigkeit von 100 km/h und die zweite Hälfte des Weges mit einer Geschwindigkeit von 50 km/h.
Die Geschwindigkeiten auf den beiden Weghälften werden dabei modellhaft als jeweils konstant angenommen.

1) Stellen Sie diese Fahrt im nachstehenden Weg-Zeit-Diagramm dar.



Jemand behauptet, dass die mittlere Geschwindigkeit für die gesamte Fahrt 75 km/h beträgt.

2) Zeigen Sie, dass diese Behauptung falsch ist.

Möglicher Lösungsweg

a1) $P(\text{„Stau tritt auf und wird vom Navi gemeldet“}) = 0{,}2 \cdot 0{,}93 = 0{,}186$

a2) E ... das Navi meldet einen Stau auf diesem Straßenabschnitt

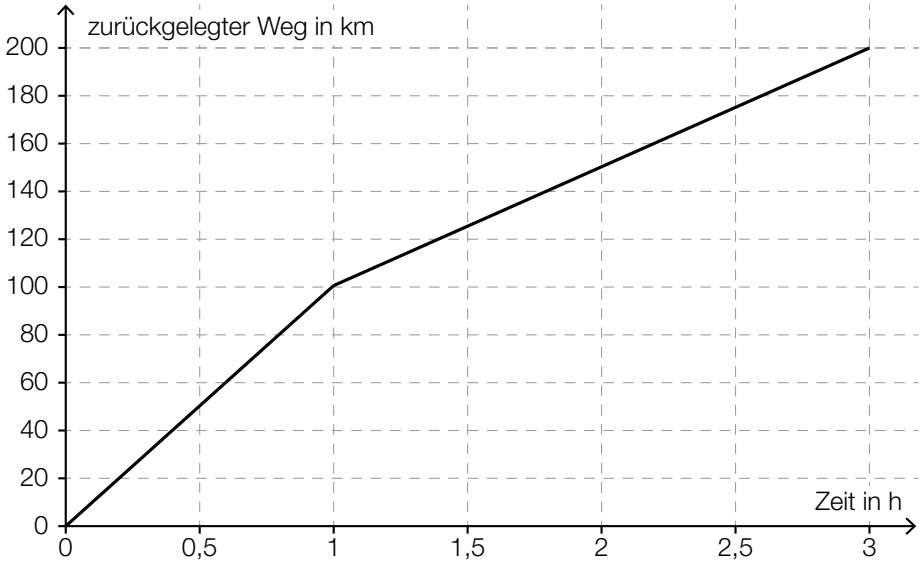
b1) Da die Abstände zwischen den Radarboxen gleich groß sind, lassen sich ihre Abstände vom Streckenanfang als arithmetische Folge modellieren.

b2) $a_n = \frac{45}{7} \cdot (n - 1)$

b3) Binomialverteilung mit $p = 0{,}05$, $n = 8$:
X ... Anzahl der nicht erkannten Radarboxen

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$P(X = 2) = 0{,}0514...$
Die Wahrscheinlichkeit beträgt rund 5,1 %.

c1)



c2) $\frac{200 \text{ km}}{3 \text{ h}} = 66{,}66... \text{ km/h} \neq 75 \text{ km/h}$

Die mittlere Geschwindigkeit beträgt rund 66,7 km/h, daher ist die Behauptung falsch.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit
a2) 1 × C: für die richtige Beschreibung des Ereignisses im gegebenen Sachzusammenhang
b1) 1 × D: für das richtige Angeben und die richtige Begründung
b2) 1 × A: für das richtige Aufstellen des expliziten Bildungsgesetzes
b3) 1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit
c1) 1 × A: für das richtige Darstellen der Fahrt im Weg-Zeit-Diagramm
c2) 1 × D: für den richtigen Nachweis

Internet (2)*

Aufgabennummer: B_467

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) In der nachstehenden Tabelle sind Daten zur weltweiten Nutzung des Internets angegeben.

Zeit t seit dem Ende des Jahres 1995 in Jahren	1	2	3	4	5
Anzahl der Internetnutzer/innen in Millionen	16	36	70	147	248

Datenquelle: https://www.internetworldstats.com/emarketing.htm [27.08.2019].

Die Anzahl der Internetnutzer/innen in Millionen soll in Abhängigkeit von der Zeit t in Jahren durch die Exponentialfunktion f beschrieben werden.

1) Ermitteln Sie mithilfe der Regressionsrechnung eine Gleichung dieser Exponentialfunktion f in der Form $f(t) = a \cdot b^t$.

2) Beschreiben Sie die Bedeutung des Parameters a im gegebenen Sachzusammenhang.

b) Im Jahr 2012 betrug die weltweit über das Internet übertragene Datenmenge 333,6 Millionen Terabyte.

1) Tragen Sie die fehlende Zahl in Gleitkommadarstellung der Form $a \cdot 10^k$ mit $1 \leq a < 10$ in der nachstehenden Umwandlung ein.

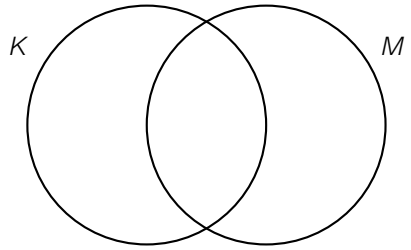
333,6 Millionen Terabyte = _____ Byte

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Eine Verbindung mit dem Internet erfolgt über ein sogenanntes *Modem*. Dieses kann eine Verbindung mit dem Internet kabelgebunden oder über ein Mobilfunknetz herstellen.

Ein bestimmtes Modem kann eine Verbindung mit dem Internet nur kabelgebunden und nicht über ein Mobilfunknetz herstellen.

1) Kennzeichnen Sie im nachstehenden Mengendiagramm denjenigen Bereich, in dem dieses Modem enthalten ist.



K ... Menge aller Modems, die eine Verbindung mit dem Internet kabelgebunden herstellen können

M ... Menge aller Modems, die eine Verbindung mit dem Internet über ein Mobilfunknetz herstellen können

Möglicher Lösungsweg

a1) Ermittlung mittels Technologieeinsatz:
$f(t) = 8{,}63 \cdot 1{,}99^t$ *(Parameter gerundet)*

t ... Zeit seit dem Ende des Jahres 1995 in Jahren
$f(t)$ ... Anzahl der Internetnutzer/innen zur Zeit t in Millionen

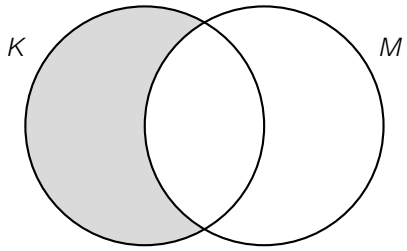
Abhängig von der verwendeten Technologie kann man geringfügig abweichende Parameter bei der Ermittlung der Regressionsfunktion erhalten.

a2) Der Parameter a gibt an, wie viele Millionen Menschen gemäß diesem Modell am Ende des Jahres 1995 (zur Zeit $t = 0$) das Internet genutzt haben.

b1) 333,6 Millionen Terabyte = $3{,}336 \cdot 10^{20}$ Byte

Auch eine Verwendung des Zusammenhangs 1 Terabyte = 1024^4 Byte ist als richtig zu werten.

c1)



Lösungsschlüssel

a1) 1 × B: für das richtige Ermitteln der Funktionsgleichung mittels exponentieller Regression
a2) 1 × C: für die richtige Beschreibung des Parameters a im gegebenen Sachzusammenhang
b1) 1 × A: für das richtige Eintragen der Zahl
c1) 1 × C: für das richtige Kennzeichnen des Bereichs

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

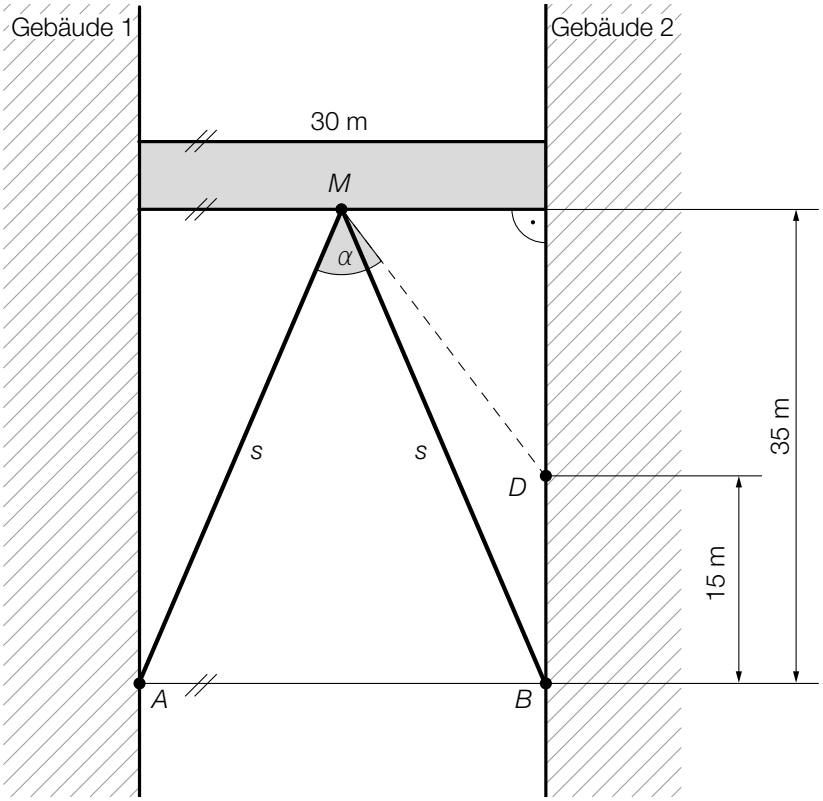
Brücken zwischen Gebäuden (2)*

Aufgabennummer: B_466

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Gebäude können durch Brücken verbunden werden.

a) Eine 30 m lange Brücke wird im Punkt *M* auf zwei Stützen der Länge *s* gelagert (siehe nachstehende Abbildung).



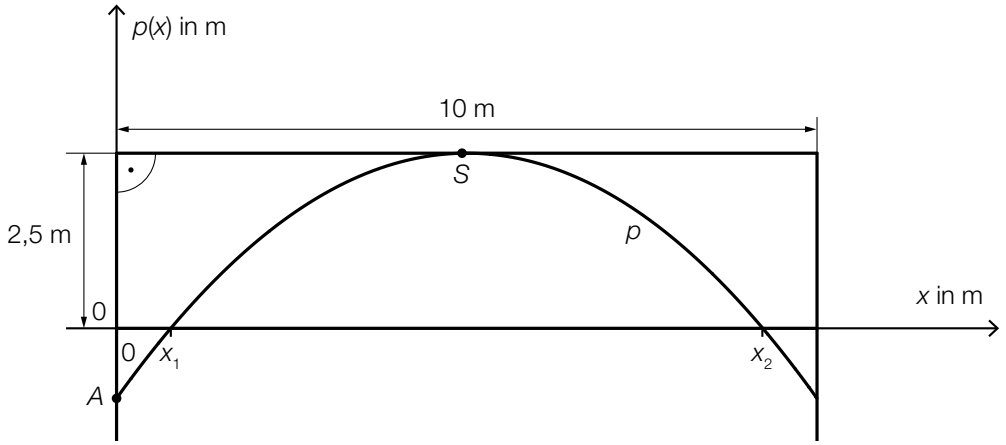
1) Berechnen Sie die Länge *s* einer Stütze.

Die Stütze *MB* soll durch eine neue Stütze *MD* ersetzt werden.

2) Berechnen Sie den Winkel α.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Eine Brücke soll zwei Gebäude verbinden. Die Brücke mit 10 m Länge wird auf einem parabelförmigen Bogen gelagert, der als Graph einer Funktion p mit $p(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ modelliert werden kann. Der Bogen wird im Punkt $A = (0|-1)$ an der linken Gebäudemauer befestigt, der Scheitel ist im Punkt $S = (5|2{,}5)$ (siehe nachstehende Abbildung).



1) Berechnen Sie die Koeffizienten der Funktion p.

2) Kennzeichnen Sie in der obigen Abbildung diejenige Fläche, deren Inhalt mit dem folgenden Ausdruck berechnet werden kann:
$10 \cdot 2{,}5 - \int_{x_1}^{x_2} p(x)\,dx$

Im Punkt A wird die Tangente an den Graphen der Funktion p gelegt. Diese Tangente schließt mit der senkrechten Achse den spitzen Winkel β ein.

3) Kreuzen Sie die zutreffende Formel zur Berechnung des Winkels β an. *[1 aus 5]*

$\beta = 90° - \arctan(p'(0))$	☐
$\beta = \arctan\left(\frac{5}{3{,}5}\right)$	☐
$\beta = p'(0)$	☐
$\beta = \tan\left(\frac{5}{p(0)}\right)$	☐
$\beta = \tan(p'(0))$	☐

Möglicher Lösungsweg

a1) $s = \sqrt{15^2 + 35^2} = \sqrt{1\,450} = 38{,}078...$

Die Länge einer Stütze beträgt rund 38,08 m.

a2) Ansatz: $\overline{AD}^2 = s^2 + \overline{MD}^2 - 2 \cdot s \cdot \overline{MD} \cdot \cos(\alpha)$

$\overline{AD} = \sqrt{15^2 + 30^2} = \sqrt{1\,125}$
$\overline{MD} = \sqrt{20^2 + 15^2} = \sqrt{625} = 25$

$1\,125 = 1\,450 + 625 - 2 \cdot \sqrt{1\,450} \cdot 25 \cdot \cos(\alpha) \quad \Rightarrow \quad \alpha = 60{,}06...°$

Der Winkel beträgt rund 60,1°.

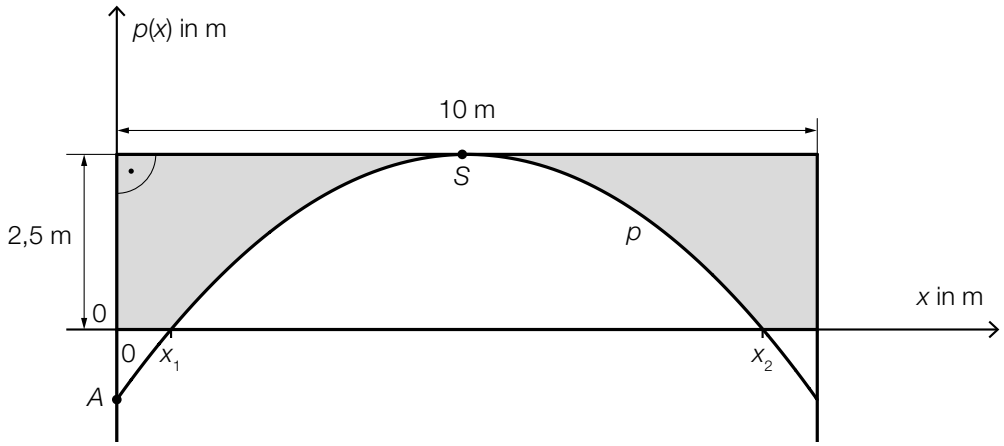
b1) $p(0) = -1$
$p(5) = 2{,}5$
$p(10) = -1$

oder:

$c = -1$
$a \cdot 5^2 + b \cdot 5 + c = 2{,}5$
$a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c = -1$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$a = -\frac{7}{50}, \; b = \frac{7}{5}, \; c = -1$

b2)



b3)

$\beta = 90° - \arctan(p'(0))$	☒

Lösungsschlüssel

a1) 1 × B1: für die richtige Berechnung der Länge s

a2) 1 × A: für den richtigen Ansatz zur Berechnung des Winkels α
1 × B2: für die richtige Berechnung des Winkels α

b1) 1 × B: für die richtige Berechnung der Koeffizienten

b2) 1 × C1: für das richtige Kennzeichnen der Fläche

b3) 1 × C2: für das richtige Ankreuzen

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

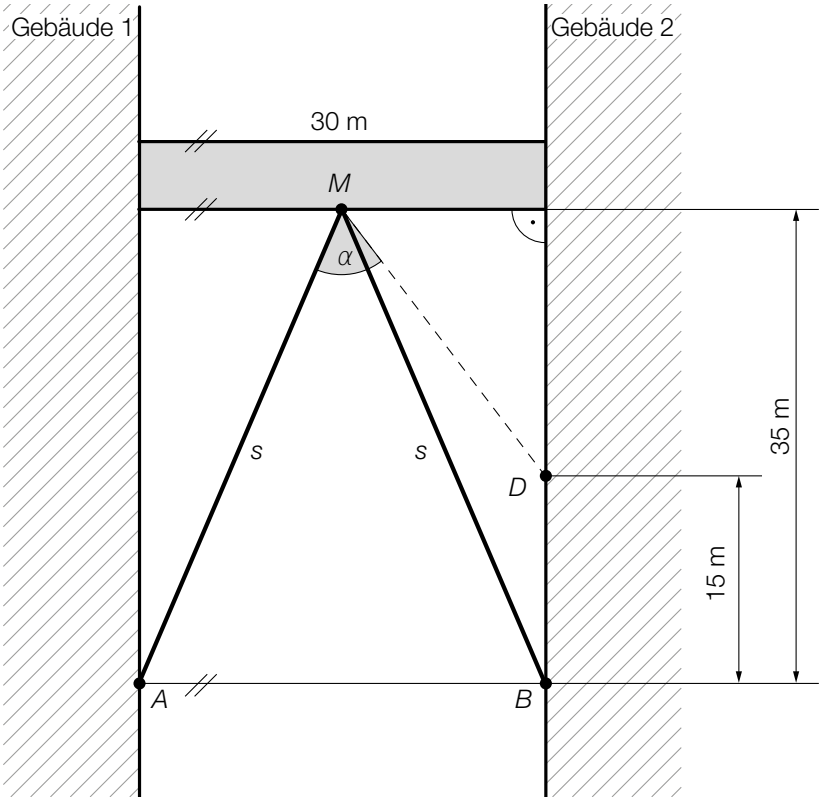
Brücken zwischen Gebäuden (1)*

Aufgabennummer: B_457

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Gebäude können durch Brücken verbunden werden.

a) Eine 30 m lange Brücke wird im Punkt *M* auf zwei Stützen der Länge *s* gelagert (siehe nachstehende Abbildung).



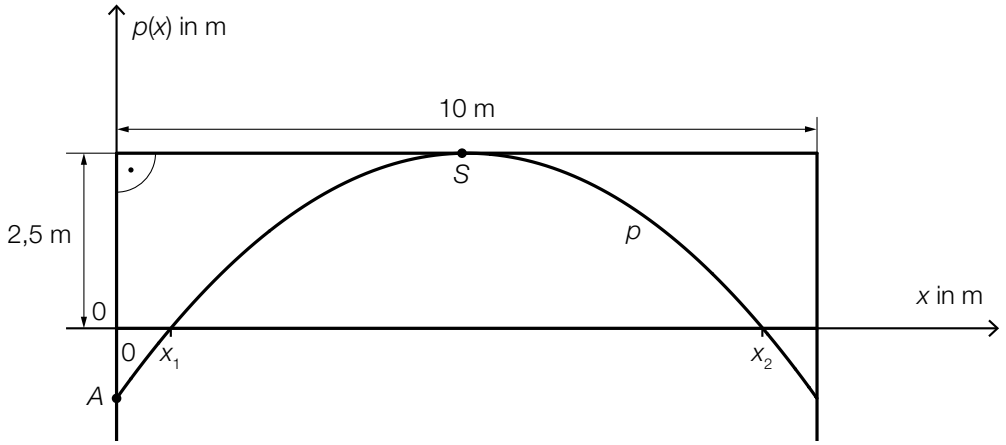
1) Berechnen Sie die Länge *s* einer Stütze.

Die Stütze *MB* soll durch eine neue Stütze *MD* ersetzt werden.

2) Berechnen Sie den Winkel α.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Eine Brücke soll zwei Gebäude verbinden. Die Brücke mit 10 m Länge wird auf einem parabelförmigen Bogen gelagert, der als Graph einer Funktion p mit $p(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ modelliert werden kann. Der Bogen wird im Punkt $A = (0|-1)$ an der linken Gebäudemauer befestigt, der Scheitel ist im Punkt $S = (5|2{,}5)$ (siehe nachstehende Abbildung).



1) Berechnen Sie die Koeffizienten der Funktion p.

2) Kennzeichnen Sie in der obigen Abbildung diejenige Fläche, deren Inhalt mit dem folgenden Ausdruck berechnet werden kann:
$10 \cdot 2{,}5 - \int_{x_1}^{x_2} p(x)\,dx$

Im Punkt A wird die Tangente an den Graphen der Funktion p gelegt. Diese Tangente schließt mit der senkrechten Achse den spitzen Winkel β ein.

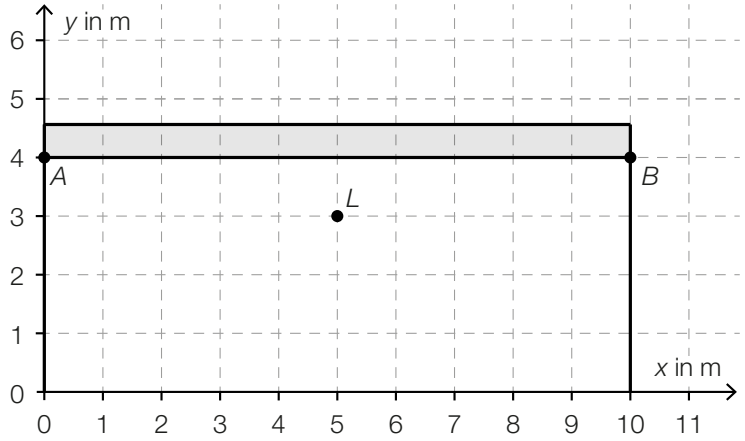
3) Kreuzen Sie die zutreffende Formel zur Berechnung des Winkels β an. *[1 aus 5]*

$\beta = 90° - \arctan(p'(0))$	☐
$\beta = \arctan\left(\frac{5}{3{,}5}\right)$	☐
$\beta = p'(0)$	☐
$\beta = \tan\left(\frac{5}{p(0)}\right)$	☐
$\beta = \tan(p'(0))$	☐

c) Unter einer Brücke zwischen zwei Gebäuden wird eine Lampe an zwei Seilen aufgehängt. Die Seile verbinden die Lampe L näherungsweise geradlinig mit dem Punkt A bzw. dem Punkt B.

Auf die Lampe wirken Kräfte, die man berechnen kann. Dabei verwendet jemand folgenden Zusammenhang:

$$\vec{a} = -\left(\overrightarrow{LA} + \overrightarrow{LB}\right)$$



1) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den Vektor $\vec{a}$ als Pfeil ausgehend von L ein.

2) Ermitteln Sie mithilfe der obigen Abbildung den Einheitsvektor von $\overrightarrow{LB}$.

Möglicher Lösungsweg

a1) $s = \sqrt{15^2 + 35^2} = \sqrt{1\,450} = 38{,}078...$

Die Länge einer Stütze beträgt rund 38,08 m.

a2) Ansatz: $\overline{AD}^2 = s^2 + \overline{MD}^2 - 2 \cdot s \cdot \overline{MD} \cdot \cos(\alpha)$

$\overline{AD} = \sqrt{15^2 + 30^2} = \sqrt{1\,125}$
$\overline{MD} = \sqrt{20^2 + 15^2} = \sqrt{625} = 25$

$1\,125 = 1\,450 + 625 - 2 \cdot \sqrt{1\,450} \cdot 25 \cdot \cos(\alpha) \quad \Rightarrow \quad \alpha = 60{,}06...°$

Der Winkel beträgt rund 60,1°.

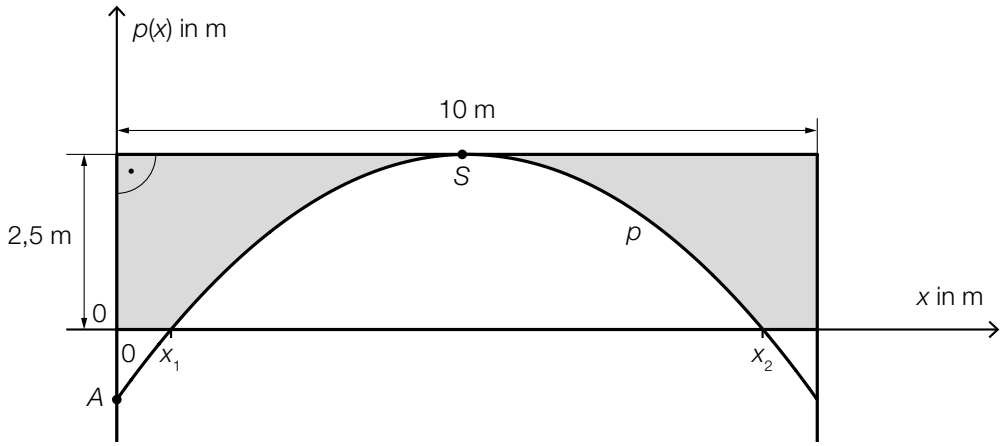
b1) $p(0) = -1$
$p(5) = 2{,}5$
$p(10) = -1$

oder:

$c = -1$
$a \cdot 5^2 + b \cdot 5 + c = 2{,}5$
$a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c = -1$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$a = -\frac{7}{50}, \; b = \frac{7}{5}, \; c = -1$

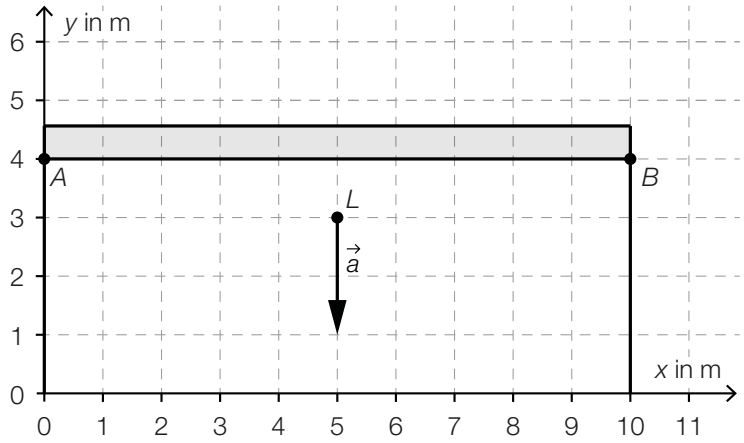
b2)



b3)

$\beta = 90° - \arctan(p'(0))$	☒

c1)



c2) $\overrightarrow{LB}_0 = \frac{1}{\sqrt{5^2 + 1^2}} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{26}} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lösungsschlüssel

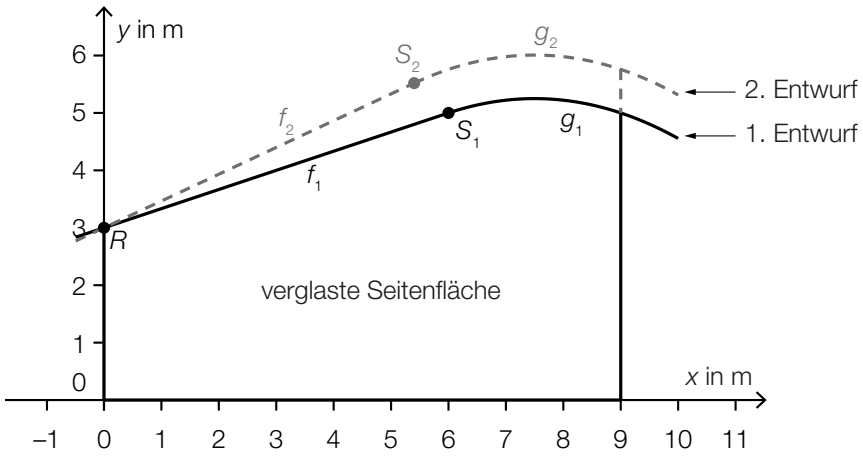
a1) 1 × B1: für die richtige Berechnung der Länge s
a2) 1 × A: für den richtigen Ansatz zur Berechnung des Winkels α
1 × B2: für die richtige Berechnung des Winkels α
b1) 1 × B: für die richtige Berechnung der Koeffizienten
b2) 1 × C1: für das richtige Kennzeichnen der Fläche
b3) 1 × C2: für das richtige Ankreuzen
c1) 1 × C: für das richtige Einzeichnen des Vektors als Pfeil ausgehend von L
c2) 1 × B: für das richtige Ermitteln des Einheitsvektors von $\overrightarrow{LB}$

Ausstellungshalle*

Aufgabennummer: B_116

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

In der nachstehenden Abbildung sind 2 verschiedene Entwürfe für eine Ausstellungshalle in der Seitenansicht dargestellt.



a) Im 1. Entwurf wird die Dachlinie mithilfe der Funktionen f_1 und g_1 beschrieben:

$f_1(x) = 3 + \frac{x}{3}$ mit $-0{,}5 \le x \le 6$

$g_1(x) = -\frac{1}{9} \cdot x^2 + \frac{5}{3} \cdot x - 1$ mit $6 \le x \le 10$

1) Berechnen Sie die Länge der Dachlinie im Intervall $[-0{,}5; 10]$.

b) Für den 1. Entwurf soll der Inhalt A der zu verglasenden Seitenfläche unterhalb der Graphen der Funktionen f_1 und g_1 im Intervall $[0; 9]$ berechnet werden.

1) Beschreiben Sie, welcher Fehler in der nachstehenden Berechnung gemacht wurde.

$$A = \int_0^6 f_1(x)\,dx + \int_6^9 g_1(x)\,dx = \int_0^9 (f_1(x) + g_1(x))\,dx$$

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Im 2. Entwurf wird die Dachlinie mithilfe der Funktionen f_2 und g_2 beschrieben.
Der Graph der linearen Funktion f_2 soll durch den Punkt $R = (0|3)$ verlaufen und einen Steigungswinkel von 25° haben.

1) Stellen Sie eine Gleichung der Funktion f_2 auf.

Die Funktion f_2 geht im Punkt $S_2 = (x_{S_2}|y_{S_2})$ knickfrei in die Funktion g_2 über, das heißt, die Funktionen g_2 und f_2 haben im Punkt S_2 den gleichen Funktionswert und die gleiche Steigung.

Die Funktion g_2 ist gegeben durch:
$g_2(x) = -\frac{1}{9} \cdot x^2 + \frac{5}{3} \cdot x + c$ mit $x_{S_2} < x < 10$

2) Berechnen Sie die x-Koordinate x_{S_2}.

3) Berechnen Sie c.

d) Der Schallpegel in der Ausstellungshalle soll durch zusätzliche Absorptionsflächen vermindert werden. Dabei gilt:

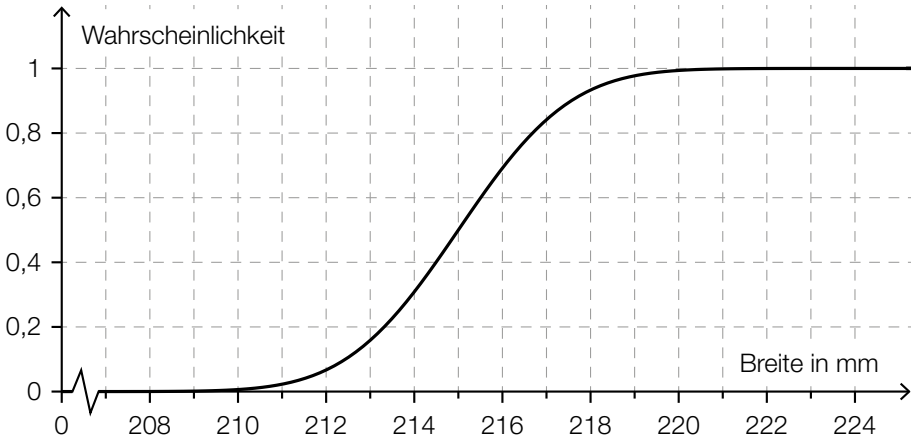
$L(A) = 10 \cdot \lg\left(1 + \frac{A}{10}\right)$
A … Inhalt der zusätzlichen Absorptionsfläche in m^2
$L(A)$ … Schallpegelminderung bei einer zusätzlichen Absorptionsfläche A in Dezibel (dB)

1) Berechnen Sie den Inhalt der zusätzlichen Absorptionsfläche, die für eine Schallpegelminderung um 10 dB benötigt wird.

e) Die Breite bestimmter Dachziegel ist annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 215$ mm und der Standardabweichung $\sigma = 2$ mm.

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Dachziegel eine Breite von mindestens 212 mm und höchstens 217 mm hat.

2) Veranschaulichen Sie diese Wahrscheinlichkeit in der nachstehenden grafischen Darstellung der zugehörigen Verteilungsfunktion.



Möglicher Lösungsweg

a1) $\int_{-0,5}^{6} \sqrt{1 + ((f_1'(x))^2}\, dx + \int_{6}^{10} \sqrt{1 + ((g_1'(x))^2}\, dx = 11{,}0...$

Die Länge der Dachlinie beträgt rund 11 m.

b1) Die beiden Integrale dürften nicht zusammengefasst werden.

c1) $f_2(x) = 3 + \tan(25°) \cdot x$

c2) $g_2'(x) = \tan(25°)$ *oder* $-\frac{2}{9} \cdot x + \frac{5}{3} = \tan(25°)$
$x_{S_2} = 5{,}40...$

c3) $g_2(5{,}40...) = f_2(5{,}40...) \quad \Rightarrow \quad c = -0{,}24...$

d1) $L(A) = 10$ *oder* $10 \cdot \lg\left(1 + \frac{A}{10}\right) = 10$
$A = 90$

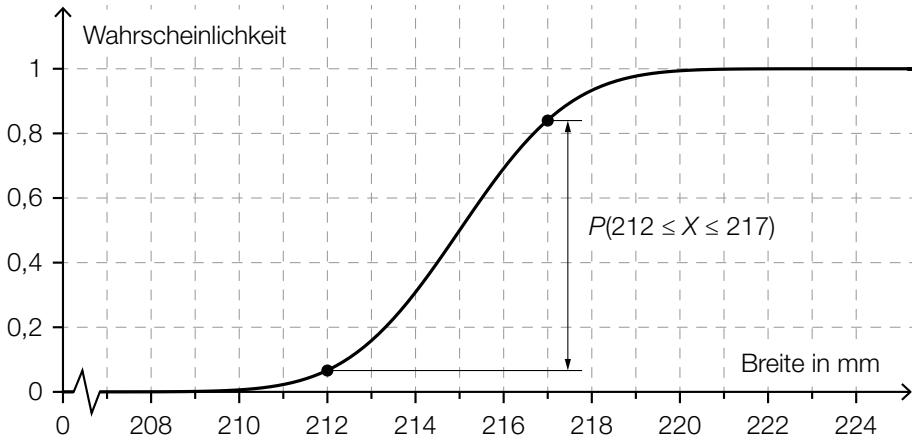
Es wird eine zusätzliche Absorptionsfläche von 90 m² genötigt.

e1) X ... Breite in mm

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$P(212 \leq X \leq 217) = 0{,}7745...$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt rund 77,5 %.

e2)



Lösungsschlüssel

a1) 1 × B: für die richtige Berechnung der Länge der Dachlinie
b1) 1 × C: für die richtige Beschreibung des Fehlers
c1) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung von f_2
c2) 1 × B1: für die richtige Berechnung der Koordinate x_{S_2}
c3) 1 × B2: für die richtige Berechnung von c
d1) 1 × B: für die richtige Berechnung des Inhalts der zusätzlichen Absorptionsfläche
e1) 1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit
e2) 1 × A: für das richtige Veranschaulichen der Wahrscheinlichkeit

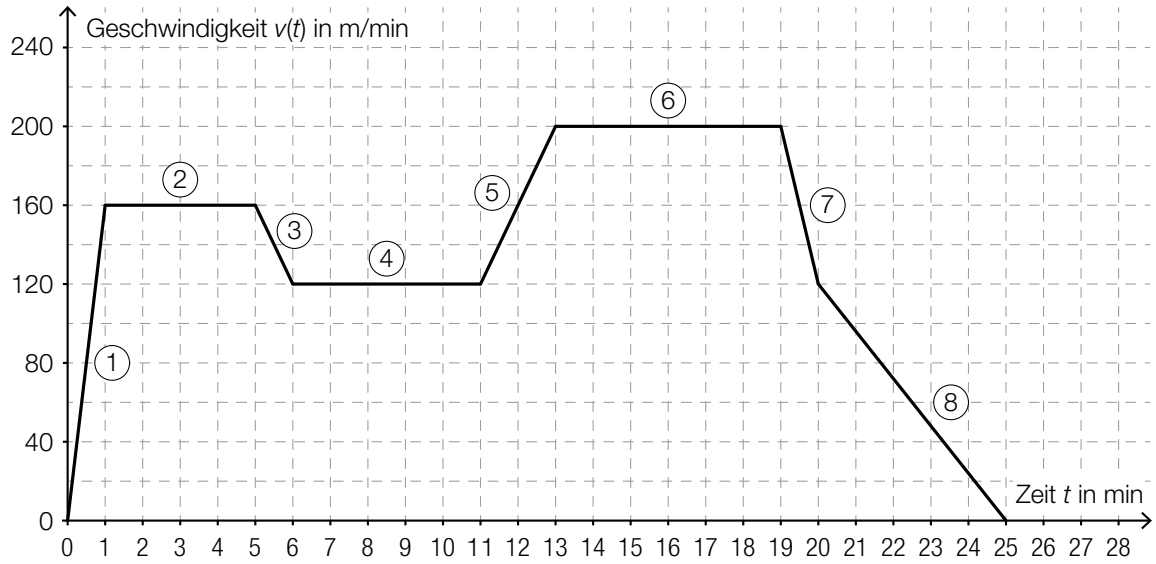
Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Auf dem Laufband (1)*

Aufgabennummer: B_456

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Die nachstehende Abbildung zeigt modellhaft den Verlauf der Geschwindigkeit eines Läufers während einer Trainingseinheit von 25 min. Die abschnittsweise definierte lineare Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v setzt sich aus 8 Abschnitten zusammen.



a) 1) Geben Sie an, in welchem der 8 Abschnitte die Beschleunigung am größten ist.

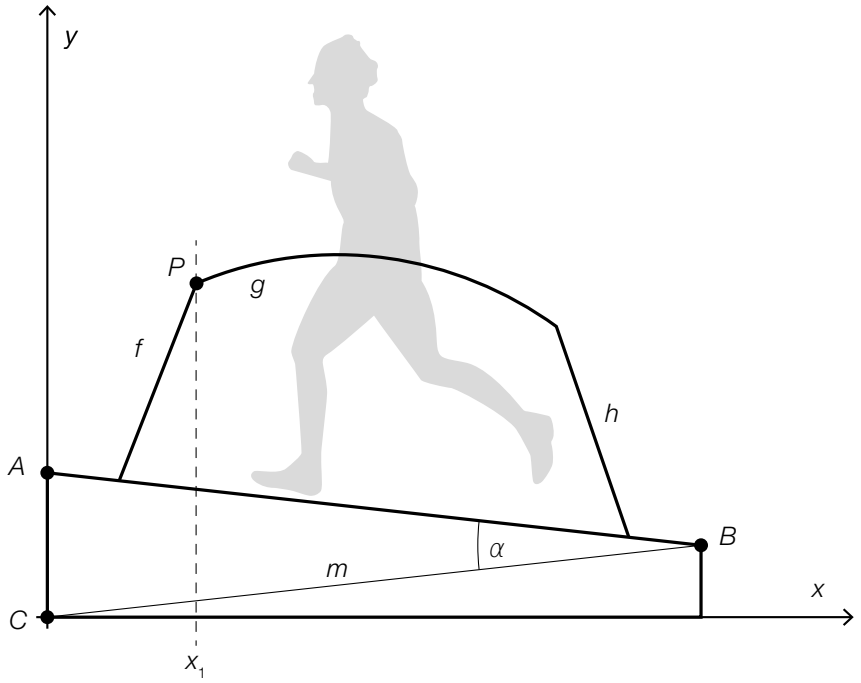
2) Erstellen Sie eine Gleichung der Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v für den Abschnitt ⑤, also für das Zeitintervall [11 min; 13 min].

b) 1) Veranschaulichen Sie in der obigen Abbildung die Länge desjenigen Weges, den der Läufer in den ersten 11 min zurücklegt.

2) Ermitteln Sie die Länge dieses Weges in Kilometern.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Die nachstehende Abbildung zeigt vereinfacht die Seitenansicht eines Laufbands.



1) Beschriften Sie im Dreieck *ABC* die Länge *z* und den Winkel φ so, dass gilt:
$\frac{m}{\sin(\varphi)} = \frac{z}{\sin(\alpha)}$

Folgende Größen sind bekannt: $m = 155$ cm, $\alpha = 13°$ und $\overline{AB} = 150$ cm

2) Berechnen Sie die Höhe $\overline{AC}$ des Laufbands.

Die Darstellung des Haltegriffs in der obigen Abbildung setzt sich aus den Graphen der Funktionen *f*, *g* und *h* zusammen.
f ist eine lineare Funktion mit der Steigung *k*.
f und *g* schneiden einander im Punkt *P*.

Der Winkel β wird mit folgender Formel berechnet:

$$\beta = \arccos\left(\frac{\begin{pmatrix}1\\k\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\g'(x_1)\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}1\\k\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}1\\g'(x_1)\end{pmatrix}\right|}\right)$$

3) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den Winkel β ein.

Möglicher Lösungsweg

a1) Die Beschleunigung ist in Abschnitt ① am größten.

a2) $v(t) = k \cdot t + d$

$$k = \frac{200 - 120}{13 - 11} = 40$$

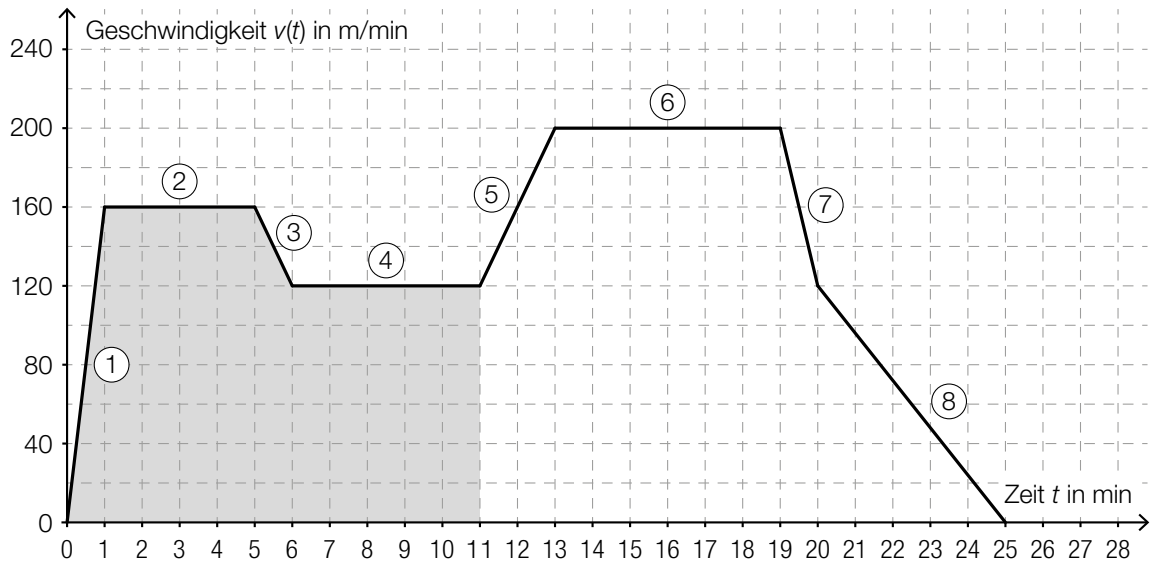
$120 = 40 \cdot 11 + d \quad \Rightarrow \quad d = -320$

$v(t) = 40 \cdot t - 320$ mit $11 \le t \le 13$

t ... Zeit in min

$v(t)$ ... Geschwindigkeit zur Zeit t in m/min

b1)

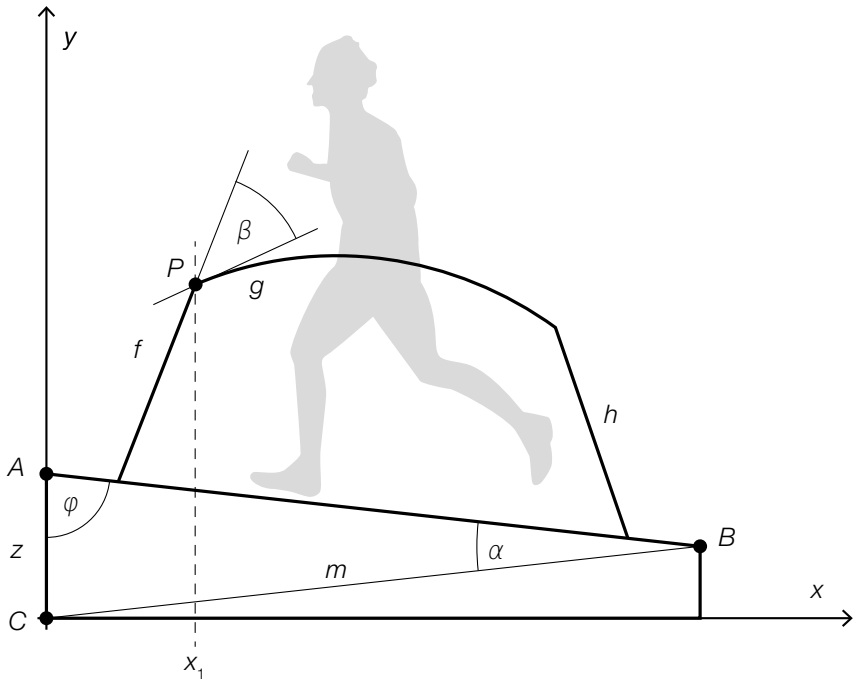


b2) Länge des im Zeitintervall [0 min; 11 min] zurückgelegten Weges in Metern:

$$\frac{160}{2} + 4 \cdot 160 + \frac{160 + 120}{2} + 5 \cdot 120 = 1\,460$$

Die Länge des in diesem Zeitintervall zurückgelegten Weges beträgt 1,46 km.

c1 und c3)



c2) $\overline{AC} = \sqrt{m^2 + \overline{AB}^2 - 2 \cdot m \cdot \overline{AB} \cdot \cos(\alpha)} = \sqrt{155^2 + 150^2 - 2 \cdot 155 \cdot 150 \cdot \cos(13°)}$
$= 34{,}88...$

Die Höhe $\overline{AC}$ beträgt rund 34,9 cm.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × C: für die richtige Angabe des Abschnitts
a2) 1 × A: für das richtige Erstellen der Funktionsgleichung
b1) 1 × A: für das richtige Veranschaulichen der Länge des zurückgelegten Weges
b2) 1 × B: für das richtige Ermitteln der Länge des zurückgelegten Weges in Kilometern
c1) 1 × C: für das richtige Beschriften von z und φ
c2) 1 × B: für die richtige Berechnung der Höhe $\overline{AC}$
c3) 1 × A: für das richtige Einzeichnen des Winkels β

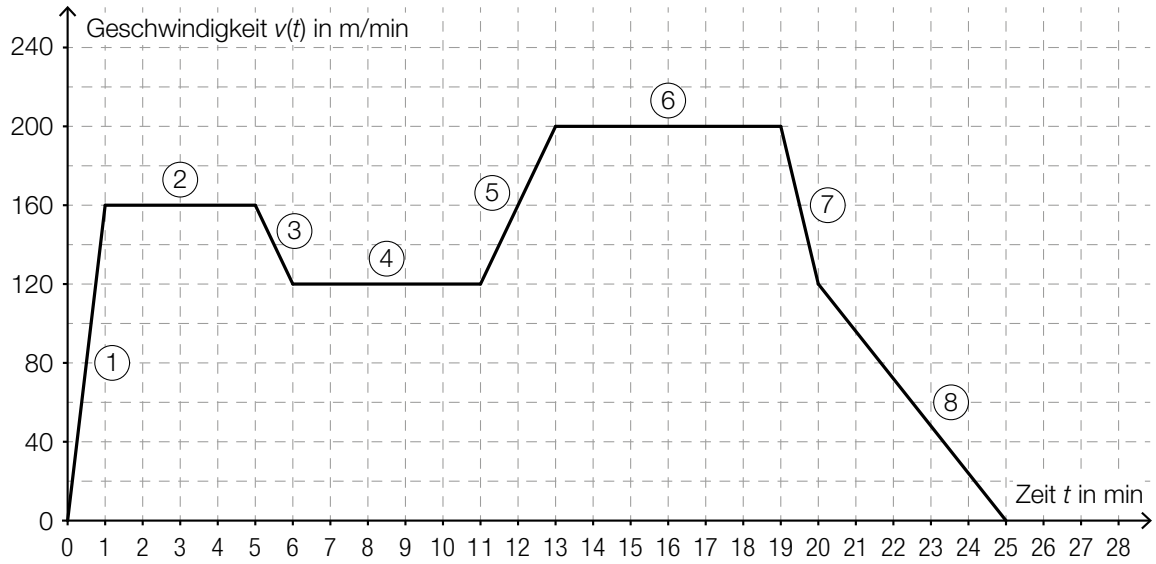
Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Auf dem Laufband (2)*

Aufgabennummer: B_458

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Die nachstehende Abbildung zeigt modellhaft den Verlauf der Geschwindigkeit eines Läufers während einer Trainingseinheit von 25 min. Die abschnittsweise definierte lineare Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v setzt sich aus 8 Abschnitten zusammen.



a) 1) Geben Sie an, in welchem der 8 Abschnitte die Beschleunigung am größten ist.

2) Erstellen Sie eine Gleichung der Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v für den Abschnitt ⑤, also für das Zeitintervall [11 min; 13 min].

b) 1) Veranschaulichen Sie in der obigen Abbildung die Länge desjenigen Weges, den der Läufer in den ersten 11 min zurücklegt.

2) Ermitteln Sie die Länge dieses Weges in Kilometern.

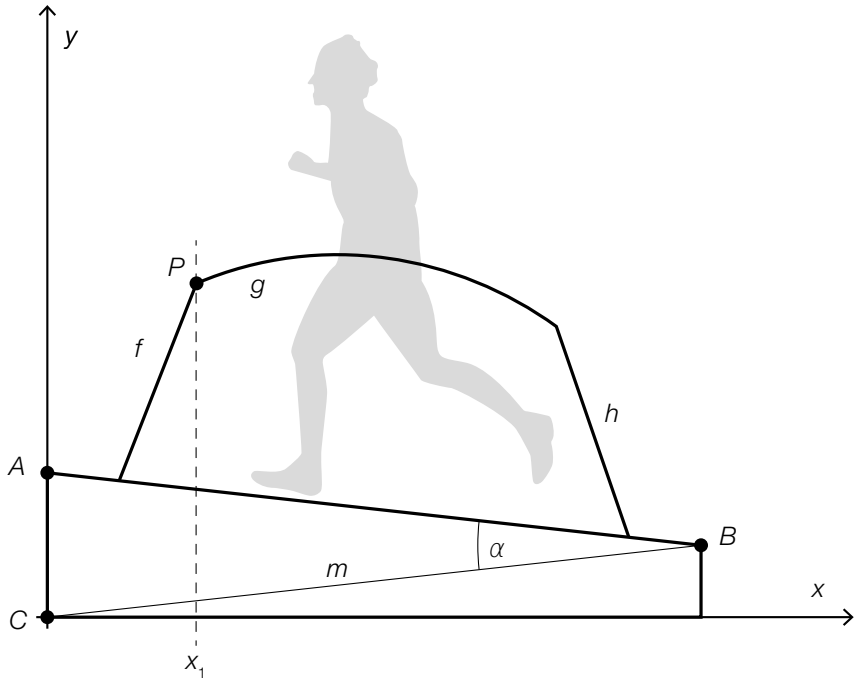
c) Der im Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm dargestellte Verlauf kann im Zeitintervall [0 min; 25 min] durch die Funktion v beschrieben werden.

1) Beschreiben Sie, was mit dem nachstehenden Ausdruck im gegebenen Sachzusammenhang berechnet wird. Geben Sie dabei die entsprechende Einheit an.

$$\frac{1}{25} \cdot \int_0^{25} v(t)\,dt$$

* ehemalige Klausuraufgabe

d) Die nachstehende Abbildung zeigt vereinfacht die Seitenansicht eines Laufbands.



1) Beschriften Sie im Dreieck *ABC* die Länge *z* und den Winkel φ so, dass gilt:
$\frac{m}{\sin(\varphi)} = \frac{z}{\sin(\alpha)}$

Folgende Größen sind bekannt: $m = 155$ cm, $\alpha = 13°$ und $\overline{AB} = 150$ cm

2) Berechnen Sie die Höhe $\overline{AC}$ des Laufbands.

Die Darstellung des Haltegriffs in der obigen Abbildung setzt sich aus den Graphen der Funktionen *f*, *g* und *h* zusammen.
f ist eine lineare Funktion mit der Steigung *k*.
f und *g* schneiden einander im Punkt *P*.

Der Winkel β wird mit folgender Formel berechnet:

$$\beta = \arccos\left(\frac{\begin{pmatrix}1\\k\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\g'(x_1)\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}1\\k\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}1\\g'(x_1)\end{pmatrix}\right|}\right)$$

3) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den Winkel β ein.

Möglicher Lösungsweg

a1) Die Beschleunigung ist in Abschnitt ① am größten.

a2) $v(t) = k \cdot t + d$

$$k = \frac{200 - 120}{13 - 11} = 40$$

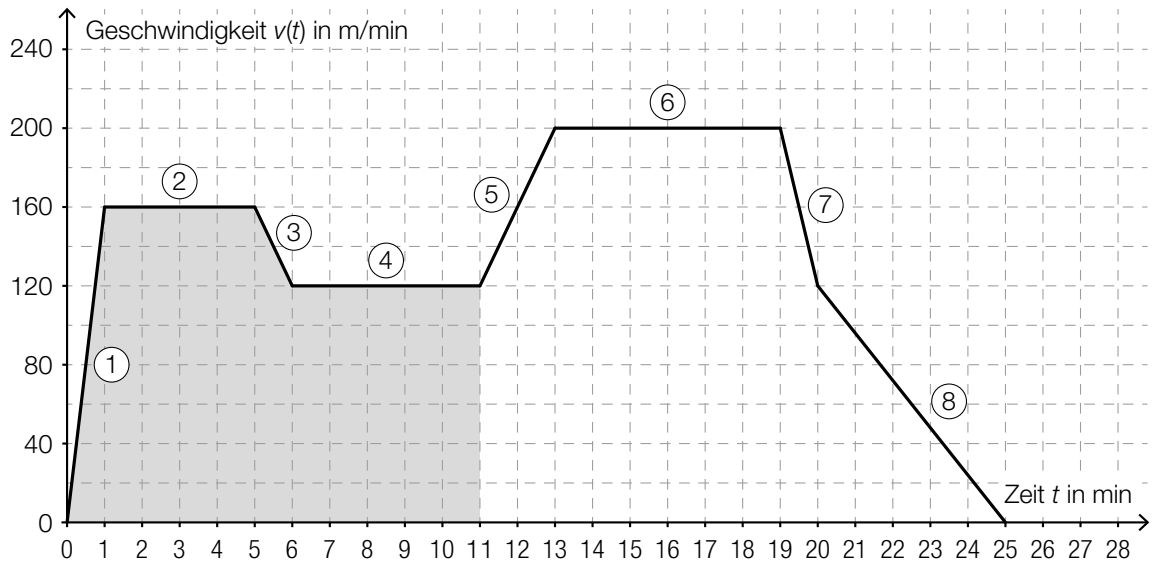
$120 = 40 \cdot 11 + d \quad \Rightarrow \quad d = -320$

$v(t) = 40 \cdot t - 320$ mit $11 \leq t \leq 13$

t ... Zeit in min

$v(t)$ ... Geschwindigkeit zur Zeit t in m/min

b1)



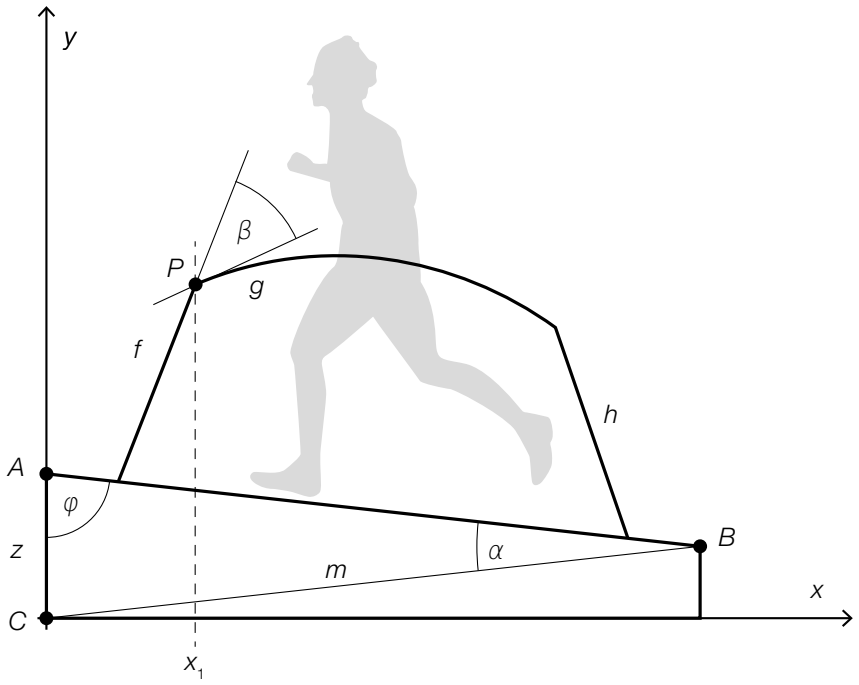
b2) Länge des im Zeitintervall [0 min; 11 min] zurückgelegten Weges in Metern:

$$\frac{160}{2} + 4 \cdot 160 + \frac{160 + 120}{2} + 5 \cdot 120 = 1\,460$$

Die Länge des in diesem Zeitintervall zurückgelegten Weges beträgt 1,46 km.

c1) Es wird die mittlere Geschwindigkeit für die Trainingseinheit in m/min berechnet.

d1 und d3)



d2) $\overline{AC} = \sqrt{m^2 + \overline{AB}^2 - 2 \cdot m \cdot \overline{AB} \cdot \cos(\alpha)} = \sqrt{155^2 + 150^2 - 2 \cdot 155 \cdot 150 \cdot \cos(13°)}$
$= 34{,}88...$

Die Höhe $\overline{AC}$ beträgt rund 34,9 cm.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × C: für die richtige Angabe des Abschnitts
a2) 1 × A: für das richtige Erstellen der Funktionsgleichung
b1) 1 × A: für das richtige Veranschaulichen der Länge des zurückgelegten Weges
b2) 1 × B: für das richtige Ermitteln der Länge des zurückgelegten Weges in Kilometern
c1) 1 × C: für die richtige Beschreibung im gegebenen Sachzusammenhang unter Angabe der entsprechenden Einheit
d1) 1 × C: für das richtige Beschriften von z und φ
d2) 1 × B: für die richtige Berechnung der Höhe $\overline{AC}$
d3) 1 × A: für das richtige Einzeichnen des Winkels β

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Autokauf (1)*

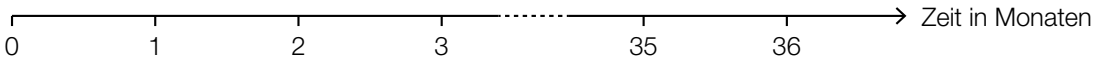
Aufgabennummer: B_459

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Frau Kopecek möchte ein neues Auto mit einem Listenpreis von € 17.100 kaufen. Dabei stehen verschiedene Finanzierungsmöglichkeiten zur Auswahl.

a) Ein Händler verlangt eine Anzahlung von € 3.420 und 36 nachschüssige Monatsraten zu je € 380.

1) Veranschaulichen Sie die Zahlungen und den Listenpreis auf der nachstehenden Zeitachse.



Der Händler behauptet, dass es sich bei dieser Finanzierung um eine „Null-Prozent-Finanzierung“ handelt.
Unter einer „Null-Prozent-Finanzierung“ versteht man, dass keine Zinsen verrechnet werden.

2) Zeigen Sie, dass die Behauptung des Händlers richtig ist.

b) Bei „Drittelfinanzierung“ muss Frau Kopecek sofort, am Ende des 2. Jahres und am Ende des 3. Jahres jeweils einen gleich hohen Betrag R bezahlen. Der Zinssatz beträgt 2 % p. a.

1) Erstellen Sie eine Gleichung zur Berechnung von R.

2) Berechnen Sie R.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Bei einer anderen Finanzierung werden am Ende des 1. Jahres und am Ende des 2. Jahres jeweils € 6.000 bezahlt. Der Zinssatz beträgt 1,5 % p. a.

1) Vervollständigen Sie den nachstehenden Tilgungsplan für die Jahre 1 und 2.

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0	– – –	– – –	– – –	€ 17.100
1				
2				

2) Berechnen Sie die Höhe der Restzahlung, mit der die Schuld am Ende des 3. Jahres vollständig getilgt ist.

d) Bei Barzahlung gewährt der Händler 8 % Preisnachlass vom Listenpreis.

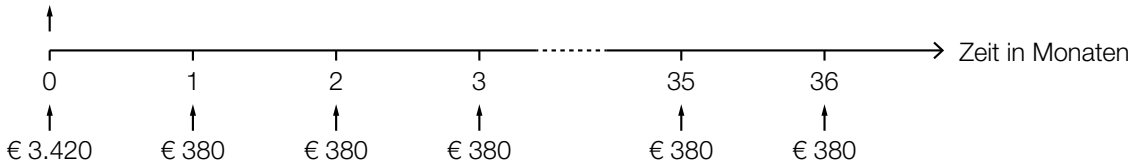
1) Berechnen Sie den Preis des Autos bei Barzahlung.

Bei einer Ratenfinanzierung verlangt der Händler eine Anzahlung von € 3.420 sowie 36 nachschüssige Monatsraten zu je € 380.
Barzahlung und Ratenfinanzierung sind bei einem bestimmten Jahreszinssatz gleichwertig.

2) Berechnen Sie diesen Jahreszinssatz.

Möglicher Lösungsweg

a1) € 17.100



a2) $3\,420 + 36 \cdot 380 = 17\,100$

Die Summe aller Zahlungen ergibt den Listenpreis. Daher ist die Behauptung des Händlers richtig.

b1) $17\,100 = R + \frac{R}{1{,}02^2} + \frac{R}{1{,}02^3}$

b2) Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$R = 5\,889{,}461...$

Es müssen jeweils € 5.889,46 bezahlt werden.

c1)

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0	– – –	– – –	– – –	€ 17.100
1	**€ 256,50**	**€ 5.743,50**	**€ 6.000,00**	**€ 11.356,50**
2	**€ 170,35**	**€ 5.829,65**	**€ 6.000,00**	**€ 5.526,85**

c2) $5\,526{,}85 \cdot 1{,}015 = 5\,609{,}75$

Die Höhe der Restzahlung beträgt € 5.609,75.

d1) $17\,100 \cdot 0{,}92 = 15\,732$

Bei Barzahlung beträgt der Preis des Autos € 15.732.

d2) $15\,732 = 3\,420 + 380 \cdot \frac{q_{12}^{36} - 1}{q_{12} - 1} \cdot \frac{1}{q_{12}^{36}}$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$q_{12} = 1{,}0058...$
$i = q_{12}^{12} - 1 = 0{,}0719...$

Der Jahreszinssatz ist rund 7,2 %.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × A: für das richtige Veranschaulichen der Zahlungen und des Listenpreises auf der Zeitachse
a2) 1 × D: für den richtigen Nachweis
b1) 1 × A: für das richtige Erstellen der Gleichung zur Berechnung von R
b2) 1 × B: für die richtige Berechnung von R
c1) 1 × A: für das richtige Vervollständigen der beiden Zeilen des Tilgungsplans
c2) 1 × B: für die richtige Berechnung der Höhe der Restzahlung
d1) 1 × B1: für die richtige Berechnung des Preises bei Barzahlung
d2) 1 × A: für den richtigen Ansatz
1 × B2: für die richtige Berechnung des Jahreszinssatzes

Zeitschriften (1)*

Aufgabennummer: B_461

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Die Kosten für die Produktion der Sport-Zeitschrift *Bike and Run* können durch eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion K modelliert werden:

$K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + 79$

x ... Produktionsmenge in ME
$K(x)$ ... Kosten bei der Produktionsmenge x in GE

Bei einer Produktion von 10 ME betragen die Kosten 100 GE und die Grenzkosten 1,5 GE/ME.

1) Erstellen Sie die beiden Gleichungen, die diesem Sachverhalt entsprechen.

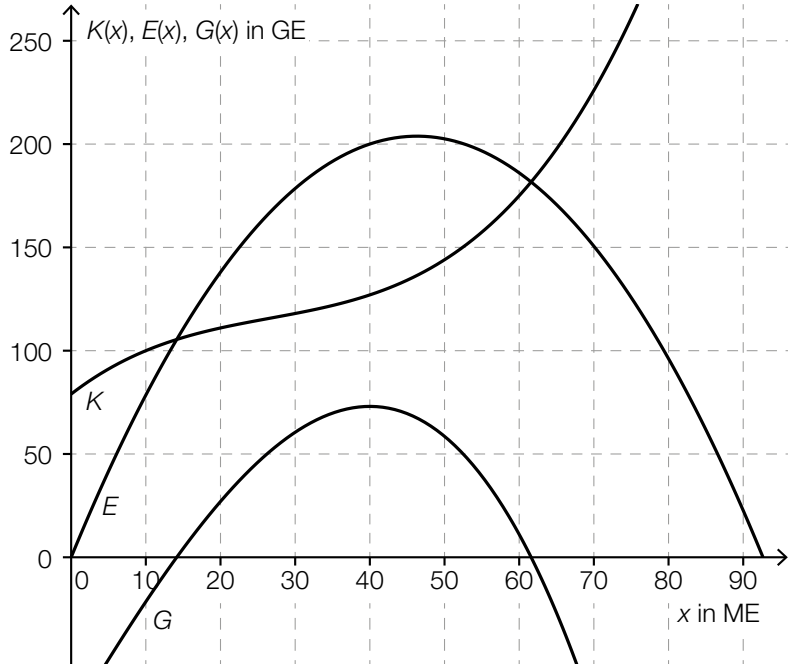
Weiters gilt: $K''(10) = -0{,}1$

2) Interpretieren Sie das Vorzeichen von $K''(10)$ in Bezug auf den Verlauf des Funktionsgraphen von K.

3) Ermitteln Sie die Koeffizienten a, b und c der Kostenfunktion K.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) In der nachstehenden Abbildung sind der Graph der Kostenfunktion K, der Graph der Erlösfunktion E und der Graph der Gewinnfunktion G für die Zeitschrift *Adventure* dargestellt.



Bei einer bestimmten Absatzmenge ist der Gewinn maximal.

1) Ermitteln Sie den Preis der Zeitschrift *Adventure* bei dieser Absatzmenge.

c) Von einer linearen Preisfunktion der Nachfrage kennt man den Höchstpreis p_h und die Sättigungsmenge x_s.

1) Kreuzen Sie den zutreffenden Ausdruck für die Steigung der Preisfunktion der Nachfrage an. *[1 aus 5]*

$\frac{p_h}{x_s}$	☐
$-\frac{p_h}{x_s}$	☐
$\frac{x_s}{p_h}$	☐
$-\frac{x_s}{p_h}$	☐
$\frac{p_h - x_s}{x_s}$	☐

Möglicher Lösungsweg

a1) $K'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x + c$

$K(10) = 100$
$K'(10) = 1{,}5$

oder:

$10^3 \cdot a + 10^2 \cdot b + 10 \cdot c + 79 = 100$
$3 \cdot 10^2 \cdot a + 2 \cdot 10 \cdot b + c = 1{,}5$

a2) Der Graph von K ist bei $x = 10$ rechtsgekrümmt (degressiv).

a3) Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$a = 0{,}001$
$b = -0{,}08$
$c = 2{,}8$

b1) $\frac{E(40)}{40} = \frac{200}{40} = 5$
Toleranzbereich: [4,8; 5,2]

Der Preis bei dieser Absatzmenge beträgt 5 GE/ME.

c1)

$-\frac{p_h}{x_s}$	☒

Lösungsschlüssel

a1) 1 × A1: für das richtige Erstellen der Gleichung mithilfe der Information zu den Gesamtkosten
1 × A2: für das richtige Erstellen der Gleichung mithilfe der Information zu den Grenzkosten
a2) 1 × C: für die richtige Interpretation des Vorzeichens
a3) 1 × B: für das richtige Ermitteln der Koeffizienten
b1) 1 × C: für das richtige Ermitteln des Preises (Toleranzbereich: [4,8; 5,2])
c1) 1 × C: für das richtige Ankreuzen

Zeitschriften (2)*

Aufgabennummer: B_463

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Die Kosten für die Produktion der Sport-Zeitschrift *Bike and Run* können durch eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion K modelliert werden:

$K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + 79$

x ... Produktionsmenge in ME
$K(x)$ ... Kosten bei der Produktionsmenge x in GE

Bei einer Produktion von 10 ME betragen die Kosten 100 GE und die Grenzkosten 1,5 GE/ME.

1) Erstellen Sie die beiden Gleichungen, die diesem Sachverhalt entsprechen.

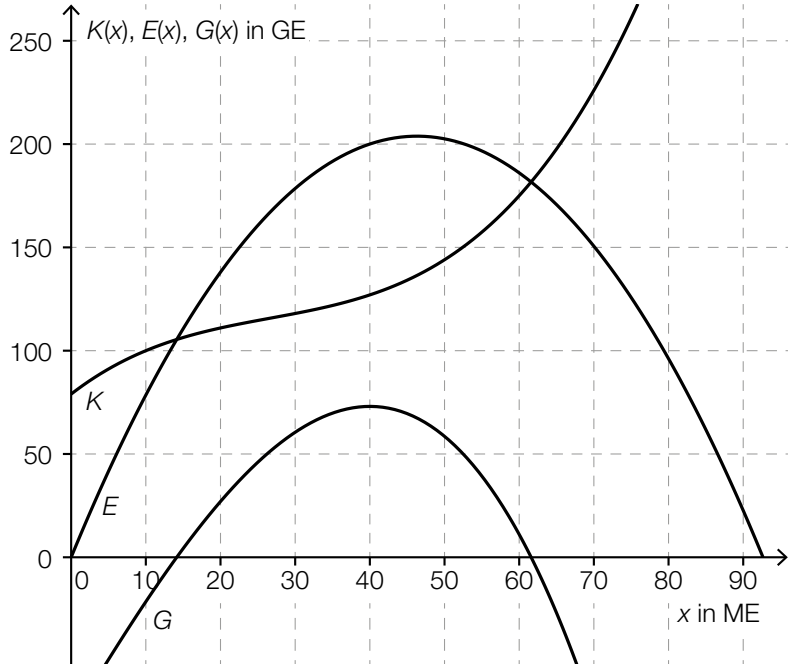
Weiters gilt: $K''(10) = -0{,}1$

2) Interpretieren Sie das Vorzeichen von $K''(10)$ in Bezug auf den Verlauf des Funktionsgraphen von K.

3) Ermitteln Sie die Koeffizienten a, b und c der Kostenfunktion K.

* ehemalige Klausuraufgabe

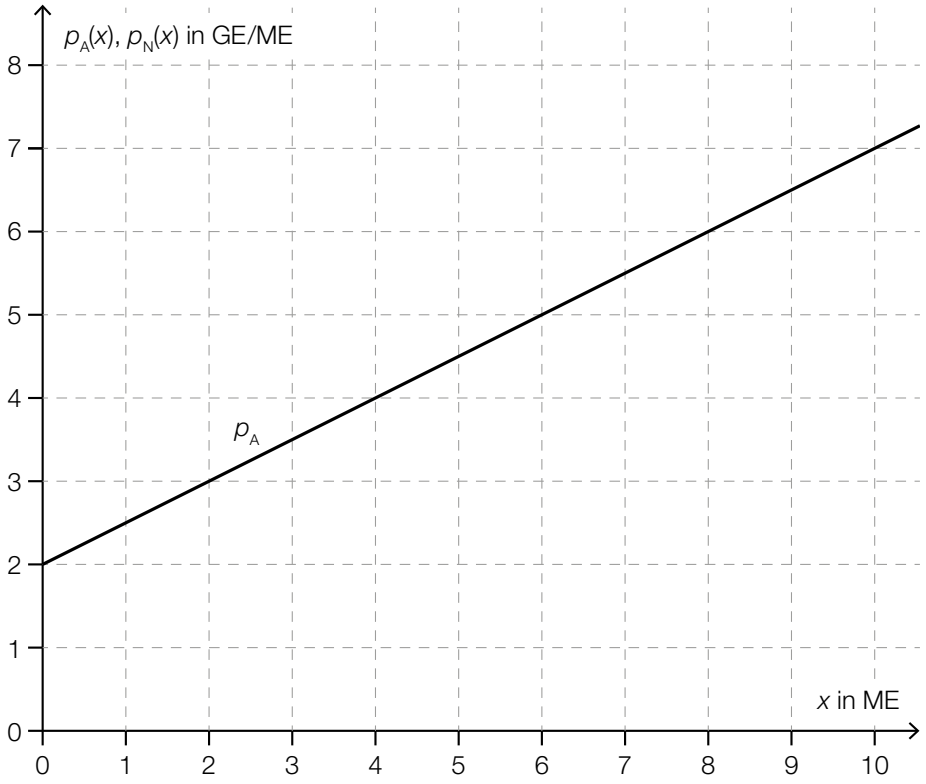
b) In der nachstehenden Abbildung sind der Graph der Kostenfunktion K, der Graph der Erlösfunktion E und der Graph der Gewinnfunktion G für die Zeitschrift *Adventure* dargestellt.



Bei einer bestimmten Absatzmenge ist der Gewinn maximal.

1) Ermitteln Sie den Preis der Zeitschrift *Adventure* bei dieser Absatzmenge.

c) In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der linearen Preisfunktion des Angebots p_A für ein Produkt dargestellt.



Hinsichtlich der Nachfrage ist bekannt: Bei einem Preis von 6 GE/ME können 2 ME abgesetzt werden. Bei einem Preis von 3 GE/ME können 6 ME abgesetzt werden.

Die Preisfunktion der Nachfrage p_N soll durch eine lineare Funktion modelliert werden.

1) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den Graphen von p_N ein.
2) Interpretieren Sie die 2. Koordinate des Schnittpunkts von p_A und p_N im gegebenen Sachzusammenhang.

d) Von einer linearen Preisfunktion der Nachfrage kennt man den Höchstpreis p_h und die Sättigungsmenge x_s.

1) Kreuzen Sie den zutreffenden Ausdruck für die Steigung der Preisfunktion der Nachfrage an. *[1 aus 5]*

$\frac{p_h}{x_s}$	☐
$-\frac{p_h}{x_s}$	☐
$\frac{x_s}{p_h}$	☐
$-\frac{x_s}{p_h}$	☐
$\frac{p_h - x_s}{x_s}$	☐

Möglicher Lösungsweg

a1) $K'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x + c$

$K(10) = 100$
$K'(10) = 1{,}5$

oder:

$10^3 \cdot a + 10^2 \cdot b + 10 \cdot c + 79 = 100$
$3 \cdot 10^2 \cdot a + 2 \cdot 10 \cdot b + c = 1{,}5$

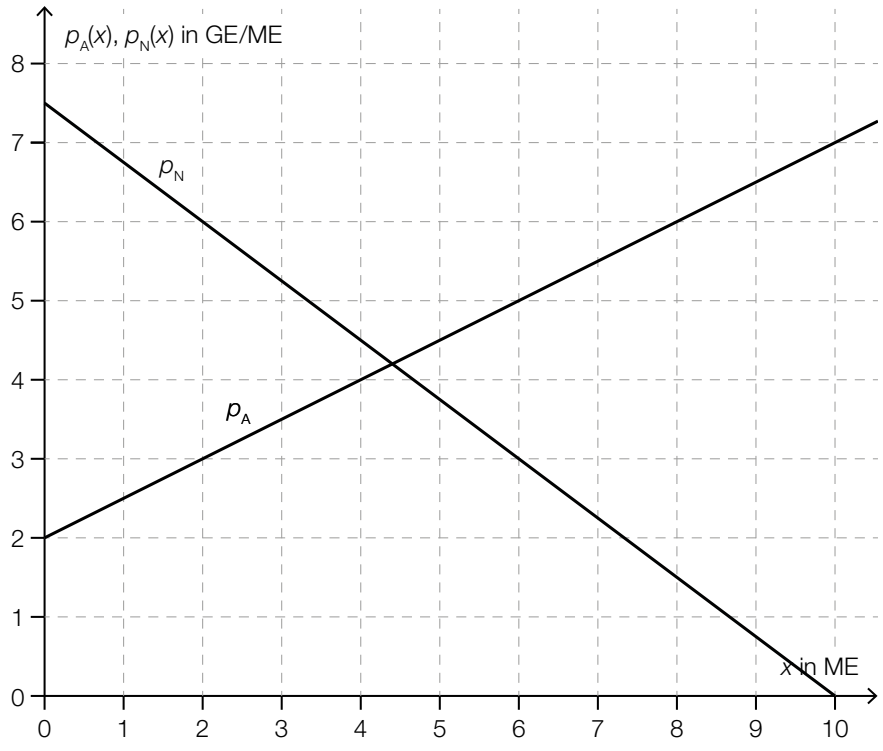
a2) Der Graph von K ist bei $x = 10$ rechtsgekrümmt (degressiv).

a3) Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$a = 0{,}001$
$b = -0{,}08$
$c = 2{,}8$

b1) $\frac{E(40)}{40} = \frac{200}{40} = 5$
Toleranzbereich: [4,8; 5,2]

Der Preis bei dieser Absatzmenge beträgt 5 GE/ME.

c1)



c2) Die 2. Koordinate des Schnittpunkts ist der Gleichgewichtspreis.

d1)

$-\frac{p_h}{x_s}$	☒

Lösungsschlüssel

a1) 1 × A1: für das richtige Erstellen der Gleichung mithilfe der Information zu den Gesamtkosten
1 × A2: für das richtige Erstellen der Gleichung mithilfe der Information zu den Grenzkosten

a2) 1 × C: für die richtige Interpretation des Vorzeichens

a3) 1 × B: für das richtige Ermitteln der Koeffizienten

b1) 1 × C: für das richtige Ermitteln des Preises (Toleranzbereich: [4,8; 5,2])

c1) 1 × A: für das richtige Einzeichnen des Graphen der Preisfunktion der Nachfrage

c2) 1 × C: für die richtige Interpretation im gegebenen Sachzusammenhang

d1) 1 × C: für das richtige Ankreuzen

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

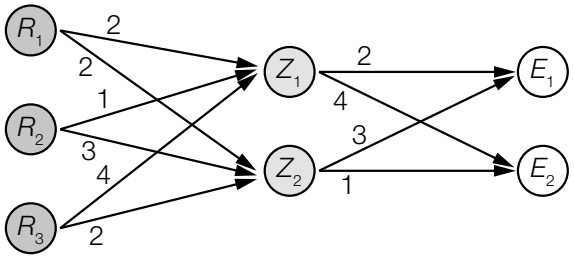
Zweistufige Produktionsprozesse*

Aufgabennummer: B_462

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Ein Produktionsbetrieb stellt aus den 3 Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 zunächst die 2 Zwischenprodukte Z_1 und Z_2 und aus diesen die 2 Endprodukte E_1 und E_2 her.

Der nachstehend dargestellte Gozinto-Graph beschreibt die Verflechtung von Rohstoffen, Zwischenprodukten und Endprodukten. Er gibt die Menge an Rohstoffen in ME an, die für jeweils 1 ME der Zwischenprodukte benötigt wird. Er gibt weiters die Menge an Zwischenprodukten in ME an, die für jeweils 1 ME der Endprodukte benötigt wird.



a) 1) Erstellen Sie eine Matrix ***A***, die den Mengenbedarf an Rohstoffen für die Herstellung der Zwischenprodukte beschreibt.

Der Mengenbedarf an Zwischenprodukten für die Herstellung der Endprodukte kann durch die Matrix ***B*** beschrieben werden.

2) Beschreiben Sie, was mit dem Matrizenprodukt $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ im gegebenen Sachzusammenhang berechnet wird.

b) Der Mengenbedarf an Rohstoffen für die Herstellung der Endprodukte wird durch die Matrix $\begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 11 & 7 \\ 14 & 18 \end{pmatrix}$ beschrieben.

In einem Produktionsprozess sollen 10 ME von E_1 und x ME von E_2 hergestellt werden und es gilt:

$$\begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 11 & 7 \\ 14 & 18 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 150 \\ 145 \\ 230 \end{pmatrix}$$

1) Interpretieren Sie die Zahl 230 im gegebenen Sachzusammenhang.

2) Ermitteln Sie x.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Eine andere Produktionsverflechtung hat folgende Eigenschaften:

Die Matrix $\boldsymbol{C}$ beschreibt den Mengenbedarf an Rohstoffen für die Herstellung der Zwischenprodukte.
Die Matrix $\boldsymbol{D}$ beschreibt den Mengenbedarf an Zwischenprodukten für die Herstellung der Endprodukte.

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Es werden e_1 ME von E_1 und e_2 ME von E_2 hergestellt.
Die Rohstoffe R_1, R_2, R_3 haben die Preise p_1, p_2, p_3 (in GE/ME).

1) Erstellen Sie mithilfe von Matrizen und Vektoren eine Formel zur Berechnung der Gesamtkosten K für diesen Produktionsprozess.

$K =$ _____

Es werden 5 ME von E_1 und 8 ME von E_2 hergestellt.

2) Ermitteln Sie die benötigten Mengen der jeweiligen Zwischenprodukte.

Möglicher Lösungsweg

a1) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

a2) Das Matrizenprodukt gibt an, welche Menge an Rohstoffen man für jeweils 1 ME der Endprodukte benötigt.

b1) Es werden 230 ME von R_3 benötigt.

b2) $10 \cdot 10 + 10 \cdot x = 150$

oder:

$11 \cdot 10 + 7 \cdot x = 145$

oder:

$14 \cdot 10 + 18 \cdot x = 230$

$x = 5$

c1) $K = (p_1\ p_2\ p_3) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$

c2) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 \\ 23 \end{pmatrix}$

Es werden 34 ME von Z_1 und 23 ME von Z_2 benötigt.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × A: für das richtige Erstellen der Matrix $\boldsymbol{A}$
a2) 1 × C: für die richtige Beschreibung im gegebenen Sachzusammenhang
b1) 1 × C: für die richtige Interpretation im gegebenen Sachzusammenhang
b2) 1 × B: für das richtige Ermitteln von x
c1) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel zur Berechnung der Gesamtkosten K
c2) 1 × B: für das richtige Ermitteln der benötigten Mengen der jeweiligen Zwischenprodukte

Pelletsheizung*

Aufgabennummer: A_068

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Pellets sind Heizmaterial aus gepressten Sägespänen.

a) Die Gesamtkosten für eine Pelletslieferung setzen sich aus einer fixen Grundgebühr und den Kosten für die Liefermenge zusammen. Dabei ist für jede Tonne Pellets der gleiche Preis zu bezahlen.

Ein Pelletshändler bietet auf seiner Website einen Online-Rechner an. Eine Kundin verwendet diesen Online-Rechner und notiert die Gesamtkosten für drei verschiedene Liefermengen:

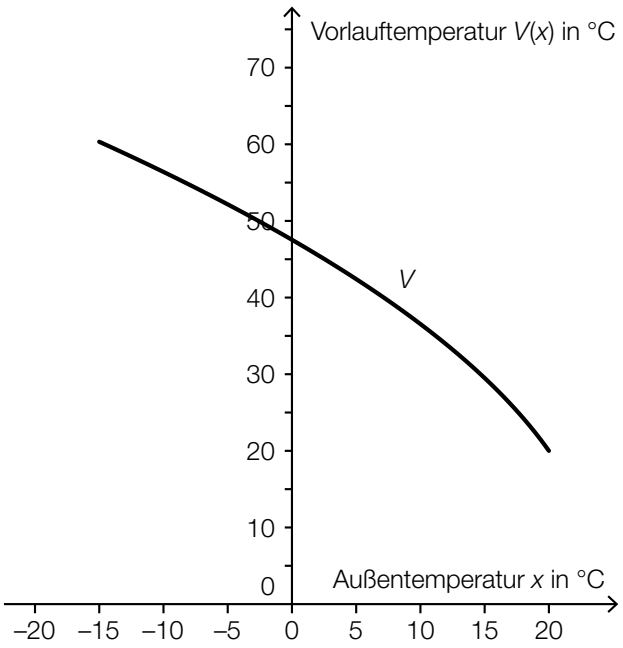
Liefermenge in Tonnen	Gesamtkosten in Euro
2	500
4	960
5,5	1 260

1) Überprüfen Sie nachweislich, ob der Online-Rechner die Gesamtkosten wie oben beschrieben berechnet.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Die Temperatur, auf die das Wasser eines Heizsystems erwärmt wird, bezeichnet man als *Vorlauftemperatur*. Bei einer Pelletsheizung ist die Vorlauftemperatur abhängig von der Außentemperatur.

Den Graphen der zugehörigen Funktion V nennt man *Heizkurve*. In der nachstehenden Abbildung ist eine solche Heizkurve für Außentemperaturen von –15 °C bis 20 °C dargestellt.



1) Kreuzen Sie die auf die Funktion V im Intervall]0; 20[zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]*

$V(x) > 0$ und $V'(x) > 0$	☐
$V'(x) > 0$ und $V''(x) < 0$	☐
$V(x) < 0$ und $V''(x) < 0$	☐
$V'(x) < 0$ und $V''(x) < 0$	☐
$V(x) < 0$ und $V''(x) > 0$	☐

Die Funktion V soll im Intervall [–15; 20] durch eine lineare Funktion ersetzt werden. Diese soll an den Randpunkten des Intervalls die gleichen Funktionswerte wie V haben.

2) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den Graphen dieser linearen Funktion ein.

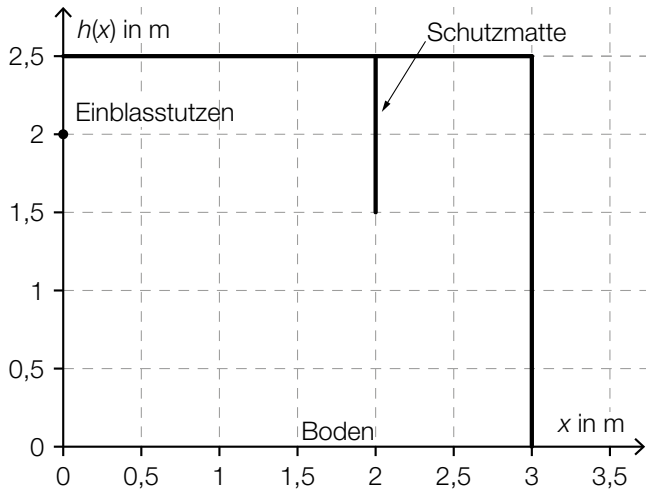
3) Geben Sie an, um wie viel Grad Celsius die Vorlauftemperatur bei einer Außentemperatur von 0 °C geringer ist, wenn anstelle der Funktion V die lineare Funktion verwendet wird.

c) Bei einer Lieferung werden die Pellets in einer Höhe von 2 m durch einen Einblasstutzen in einen Lagerraum waagrecht eingeblasen. Eine aufgehängte Schutzmatte soll dabei verhindern, dass die Pellets brechen, wenn die Einblasgeschwindigkeit zu groß ist. Die Flugbahn eines Pellets kann modellhaft durch den Graphen der folgenden quadratischen Funktion beschrieben werden:

$$h(x) = -\frac{5 \cdot x^2}{v_0^2} + 2$$

x ... waagrechte Entfernung vom Einblasstutzen in m
$h(x)$ ... Flughöhe eines Pellets über dem Boden bei der Entfernung x in m
v_0 ... Einblasgeschwindigkeit in m/s

1) Zeichnen Sie im nachstehenden Koordinatensystem den Graphen der Funktion h für eine Einblasgeschwindigkeit von $v_0 = 4$ m/s ein.



Bei einer anderen Einblasgeschwindigkeit trifft das Pellet gerade noch das untere Ende der 1 m langen Schutzmatte.

2) Bestimmen Sie diese Einblasgeschwindigkeit.

Möglicher Lösungsweg

a1) $\frac{960 - 500}{4 - 2} = 230$

$\frac{1\,260 - 960}{5{,}5 - 4} = 200$

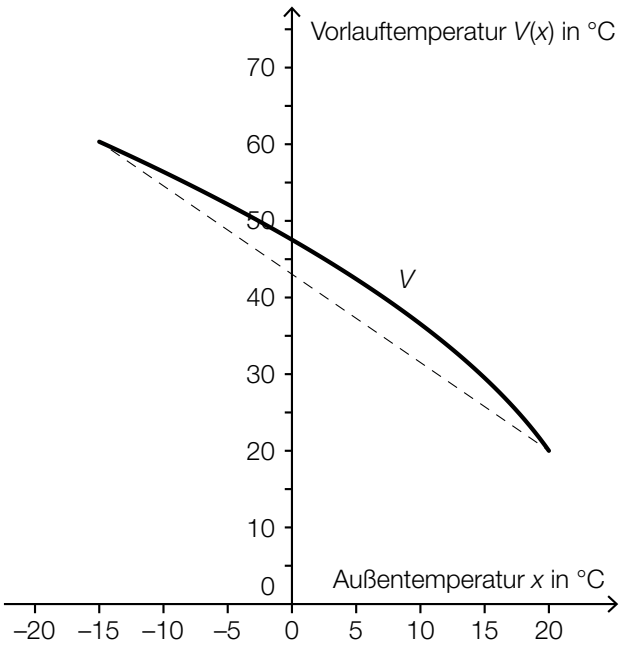
Der Online-Rechner berechnet die Gesamtkosten nicht wie oben beschrieben, weil nicht für jede Liefermenge der gleiche Preis pro Tonne zu bezahlen ist.

Ein anderer richtiger Nachweis ist ebenfalls zulässig.

b1)

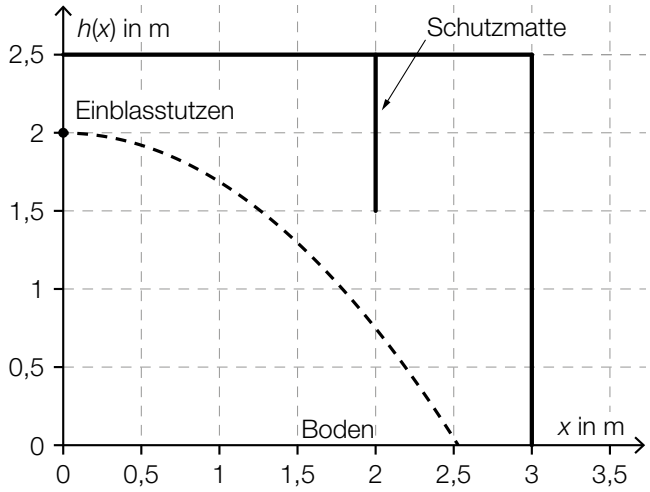
$V'(x) < 0$ und $V''(x) < 0$	☒

b2)



b3) Die Vorlauftemperatur bei einer Außentemperatur von 0 °C ist um rund 5 °C geringer.
Toleranzbereich: [3,5 °C; 6,5 °C]

c1)



c2) Das Pellet trifft gerade noch die Matte, wenn seine Bahn durch den Punkt (2|1,5) verläuft:

$1{,}5 = -\frac{5 \cdot 2^2}{v_0^2} + 2$

Lösung mittels Technologieeinsatz:

$v_{0,1} = 6{,}324...$ (*oder* $v_{0,2} = -6{,}324...$)

Bei einer Einblasgeschwindigkeit von 6,32... m/s trifft das Pellet gerade noch das untere Ende der Schutzmatte.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × D: für die richtige nachweisliche Überprüfung
b1) 1 × A1: für das richtige Ankreuzen
b2) 1 × A2: für das richtige Einzeichnen des Graphen der linearen Funktion
b3) 1 × C: für die richtige Angabe der Temperaturdifferenz (Toleranzbereich: [3,5 °C; 6,5 °C])
c1) 1 × B1: für das richtige Einzeichnen des Graphen der Funktion *h*
c2) 1 × B2: für das richtige Bestimmen der Einblasgeschwindigkeit

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

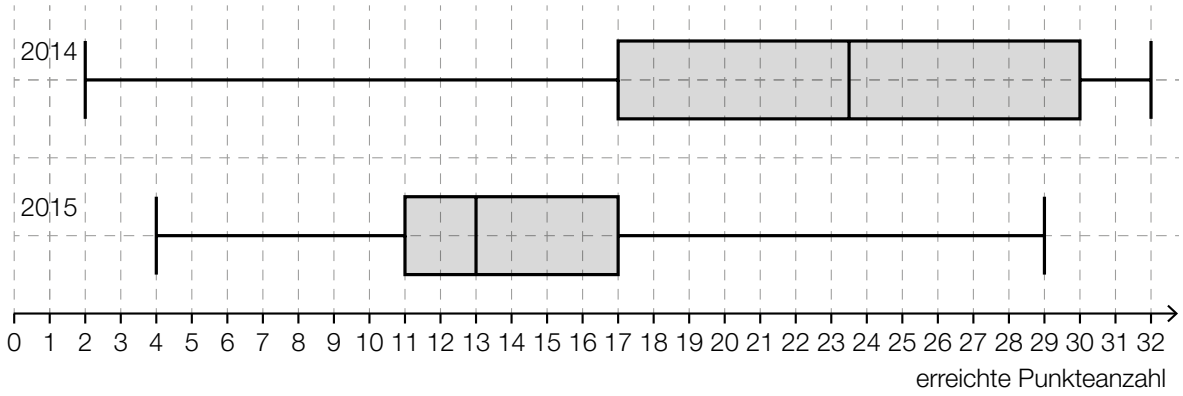
Mathematik-Olympiade*

Aufgabennummer: A_066

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Die Mathematik-Olympiade ist ein bekannter Wettbewerb für Schüler/innen.

a) Beim Bundeswettbewerb der Mathematik-Olympiade kann man im ersten Teil maximal 32 Punkte erreichen. Die nachstehenden Boxplots zeigen die erreichte Punkteanzahl der Teilnehmer/innen im Jahr 2014 und im Jahr 2015.



Lara hat in beiden Jahren beim Bundeswettbewerb teilgenommen. Im Jahr 2014 hat sie 29 Punkte erreicht, im Jahr 2015 waren es 18 Punkte.

1) Argumentieren Sie, dass Lara im Jahr 2015 im Vergleich zu den anderen Teilnehmerinnen und Teilnehmern ein besseres Ergebnis als im Jahr 2014 erzielt hat.

2) Kreuzen Sie die nicht zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]*

Der Interquartilsabstand im Jahr 2014 ist mehr als doppelt so groß wie der Interquartilsabstand im Jahr 2015.	☐
Im Jahr 2015 erreichten mindestens 75 % der Teilnehmer/innen mindestens 17 Punkte.	☐
Die Spannweite im Jahr 2015 ist um rund 17 % kleiner als die Spannweite im Jahr 2014.	☐
Im Jahr 2015 ist der Median um 10,5 Punkte kleiner als im Jahr 2014.	☐
Im Jahr 2015 erreichten mindestens 75 % der Teilnehmer/innen maximal 17 Punkte.	☐

* ehemalige Klausuraufgabe

b) 8 Jugendliche haben am Bundeswettbewerb der Mathematik-Olympiade teilgenommen. Sie möchten das arithmetische Mittel und die Standardabweichung ihrer erreichten Punkteanzahlen berechnen. Für die Varianz s^2 ergibt sich die nachstehende Berechnung.

$$s^2 = \frac{1}{8} \cdot \left((16-16)^2 + (22-16)^2 + (21-16)^2 + (30-16)^2 + (4-16)^2 + (11-16)^2 + (9-16)^2 + (15-16)^2\right)$$

1) Lesen Sie aus der obigen Berechnung das arithmetische Mittel ab.

c) Die nachstehende Häufigkeitstabelle zeigt die erreichten Punkteanzahlen der 40 Teilnehmer/innen des Bundeswettbewerbs der Mathematik-Olympiade im Jahr 2016.

erreichte Punkteanzahl	Anzahl der Teilnehmer/innen
0 – 8	7
9 – 16	22
17 – 24	9
25 – 32	2

1) Berechnen Sie, wie viel Prozent der Teilnehmer/innen mindestens 17 Punkte erreicht haben.

Möglicher Lösungsweg

a1) Lara hat im Jahr 2015 ein besseres Ergebnis erzielt, da sie mit 18 erreichten Punkten unter den besten 25 % der Teilnehmer/innen war und im Jahr 2014 mit 29 erreichten Punkten schlechter als die besten 25 % der Teilnehmer/innen war.

a2)

Im Jahr 2015 erreichten mindestens 75 % der Teilnehmer/innen mindestens 17 Punkte.	☒

b1) arithmetisches Mittel: 16

c1) $\frac{9 + 2}{40} = 0{,}275$

27,5 % der Teilnehmer/innen haben mindestens 17 Punkte erreicht.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × D: für die richtige Argumentation
a2) 1 × C: für das richtige Ankreuzen
b1) 1 × C: für das richtige Ablesen des arithmetischen Mittels
c1) 1 × B: für die richtige Berechnung des Prozentsatzes

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Luftverschmutzung*

Aufgabennummer: A_075

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Die Belastung der Luft durch Schwefeldioxid entsteht unter anderem durch Verbrennung von Heizöl und Kohle. Als gesetzliche Obergrenze für den Schwefeldioxidgehalt der Luft gilt ein Tagesmittelwert von 120 µg/m³. Im Jahr 1986 wurde dieser Wert am „schwarzen Freitag“ in Linz um 857 % überschritten.

1) Berechnen Sie den Tagesmittelwert des Schwefeldioxidgehalts der Luft in µg/m³ an diesem Tag in Linz.

b) In Linz ist die Staubbelastung der Luft im Zeitraum von 1985 bis 1996 stark zurückgegangen. Im Jahr 1985 wurde die Luft in Linz mit 11 000 t Staub belastet. Im Jahr 1996 waren es nur noch 3 000 t.

Im Zuge eines Forschungsprojekts hat man erkannt, dass die Funktion S, die die Staubbelastung $S(t)$ in Tonnen in Abhängigkeit von der Zeit t in Jahren angibt, annähernd linear ist.

1) Erstellen Sie mithilfe der obigen Daten eine Gleichung dieser linearen Funktion. Wählen Sie $t = 0$ für das Jahr 1985.
2) Berechnen Sie den Funktionswert für das Jahr 2001 gemäß diesem Modell.
3) Erklären Sie, warum der berechnete Funktionswert für das Jahr 2001 im gegebenen Sachzusammenhang nicht sinnvoll ist.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Kohlenstoffmonoxid entsteht bei Verbrennungsprozessen und ist für Menschen giftig.

Der Kohlenstoffmonoxidausstoß im Jahr t in einer Region kann näherungsweise folgendermaßen beschrieben werden:

$c(t) = 1{,}29 \cdot 0{,}9659^t$

t ... Zeit in Jahren, $t = 0$ entspricht dem Jahr 1990
$c(t)$ ... Kohlenstoffmonoxidausstoß im Jahr t in Tonnen

1) Kreuzen Sie die auf dieses Modell zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]*

Der Kohlenstoffmonoxidausstoß nimmt um 29 % pro Jahr zu.	☐
Der Kohlenstoffmonoxidausstoß nimmt im Laufe der Zeit immer schneller ab.	☐
Der Kohlenstoffmonoxidausstoß nimmt linear ab.	☐
Der Kohlenstoffmonoxidausstoß nimmt um 3,41 % pro Jahr ab.	☐
Der Kohlenstoffmonoxidausstoß nimmt um 96,59 % pro Jahr ab.	☐

Möglicher Lösungsweg

a1) $120 \cdot 9{,}57 = 1\,148{,}4$

Am „schwarzen Freitag“ betrug der Tagesmittelwert des Schwefeldioxidgehalts der Luft 1 148,4 µg/m³.

b1) $S(t) = k \cdot t + S_0$

$k = \frac{3\,000 - 11\,000}{11} = -727{,}27\ldots$

$S(t) = -727{,}3 \cdot t + 11\,000$ *(Steigung gerundet)*

b2) $S(16) = -636{,}36\ldots$

b3) Die Staubbelastung kann nicht negativ sein. Daher ist der Funktionswert für das Jahr 2001 im gegebenen Sachzusammenhang nicht sinnvoll.

c1)

Der Kohlenstoffmonoxidausstoß nimmt um 3,41 % pro Jahr ab.	☒

Lösungsschlüssel

a1) 1 × B: für die richtige Berechnung des Tagesmittelwerts
b1) 1 × A: für das richtige Erstellen der Funktionsgleichung
b2) 1 × B: für die richtige Berechnung des Funktionswerts
b3) 1 × D: für die richtige Erklärung
c1) 1 × C: für das richtige Ankreuzen

BMB
Bundesministerium
für Bildung

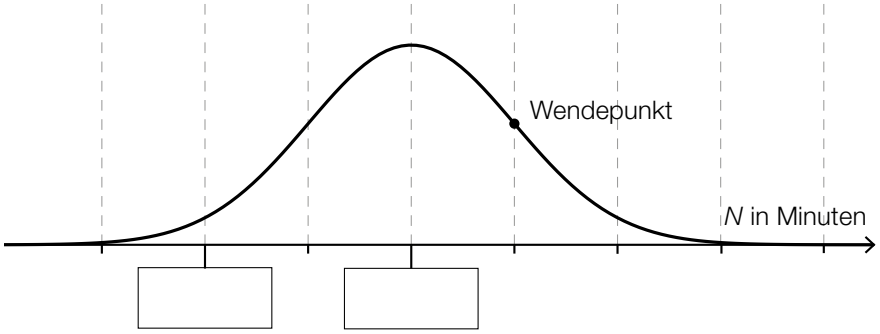
Internet (1)*

Aufgabennummer: A_190

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Eine Studie besagt, dass die durchschnittliche tägliche Internet-Nutzungsdauer *N* von Jugendlichen annähernd normalverteilt ist. Der Erwartungswert beträgt 180 Minuten und die Standardabweichung 20 Minuten. Der Graph der zugehörigen Dichtefunktion ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.

– Tragen Sie die fehlenden Zeiten in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.



– Veranschaulichen Sie in der obigen Abbildung die Wahrscheinlichkeit, dass für eine zufällig ausgewählte Person der untersuchten Altersgruppe die durchschnittliche tägliche Internet-Nutzungsdauer 200 Minuten oder weniger beträgt.

b) Selina verbringt 25 % ihrer Internet-Nutzungsdauer mit Spielen. Ein Achtel dieser Spielzeit entfällt dabei auf ein bestimmtes Spiel.

– Ermitteln Sie, wie viel Prozent ihrer Internet-Nutzungsdauer Selina für dieses bestimmte Spiel aufwendet.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Eine Umfrage unter Schülerinnen und Schülern einer Schulklasse über die durchschnittliche tägliche Internet-Nutzungsdauer ergab folgendes Ergebnis (gerundet auf halbe Stunden):

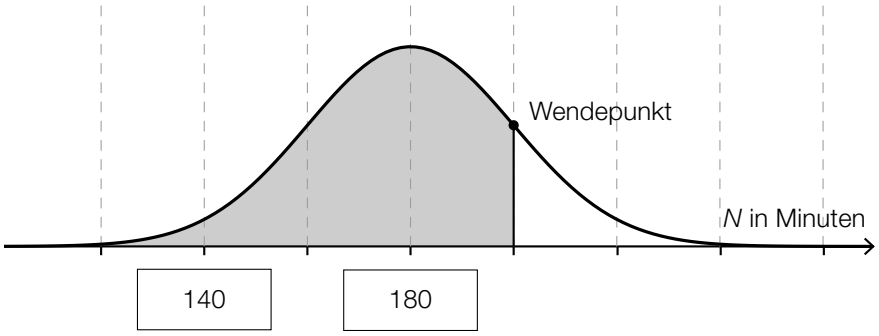
durchschnittliche tägliche Internet-Nutzungsdauer pro Person in Stunden	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	6,0	10,0
Anzahl der Personen	3	4	5	2	4	1	1

– Berechnen Sie das arithmetische Mittel und die Standardabweichung der durchschnittlichen täglichen Internet-Nutzungsdauer pro Person aus den gegebenen Daten.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



b) $0{,}25 \cdot \frac{1}{8} = 0{,}03125$

Sie wendet etwa 3 % ihrer gesamten Internet-Nutzungsdauer für dieses Spiel auf.

c) Berechnung mittels Technologieeinsatz:
arithmetisches Mittel: $\bar{x} = 3{,}95$ h
Standardabweichung: $s = 1{,}627...$ h

Auch eine Berechnung der Standardabweichung als $s_{n-1} = 1{,}669...$ *h ist als richtig zu werten.*

Lösungsschlüssel

a) 1 × A1: für das richtige Eintragen der beiden fehlenden Zeiten
1 × A2: für das richtige Veranschaulichen der Wahrscheinlichkeit in der gegebenen Abbildung

b) 1 × B: für das richtige Ermitteln des Prozentsatzes

c) 1 × B: für die richtige Berechnung des arithmetischen Mittels und der Standardabweichung (s bzw. s_{n-1})

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Gewitter*

Aufgabennummer: A_071

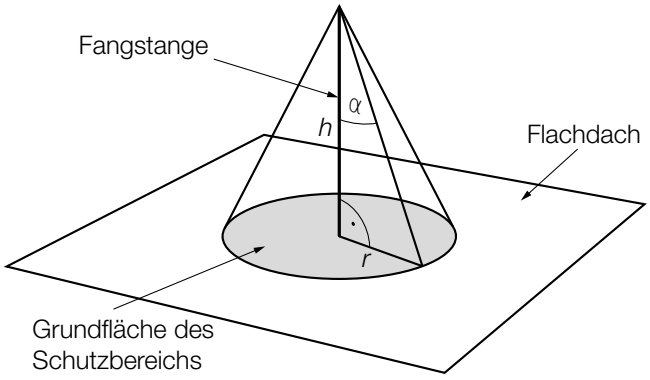
Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) In drei verschiedenen Städten – *A*, *B* und *C* – werden am Nachmittag laut Wetterprognose unabhängig voneinander mit folgenden Wahrscheinlichkeiten Gewitter auftreten:

Stadt	*A*	*B*	*C*
Wahrscheinlichkeit für ein Gewitter	50 %	80 %	80 %

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in mindestens einer der drei Städte kein Gewitter auftreten wird.

b) Um Gebäude vor Blitzeinschlägen zu schützen, werden Blitzableiter verwendet. Dabei wird eine Metallstange, die sogenannte *Fangstange*, auf dem Gebäude senkrecht montiert. Der höchste Punkt einer solchen Fangstange kann als Spitze eines drehkegelförmigen Schutzbereichs angesehen werden. Alle Objekte, die sich vollständig innerhalb dieses Schutzbereichs befinden, sind vor direkten Blitzeinschlägen geschützt.



h … Höhe der Fangstange
α … Schutzwinkel
r … Radius der Grundfläche des Schutzbereichs

1) Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung des Radius r aus α und h.

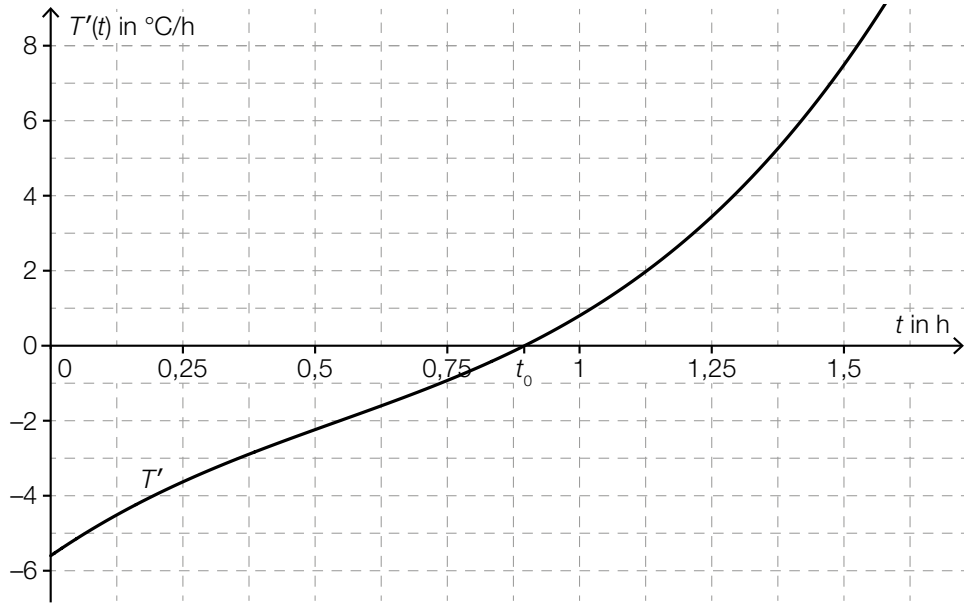
$r =$ _____

Auf einem Flachdach ist eine 2 m hohe Fangstange senkrecht montiert. 3 m vom Fußpunkt der Fangstange entfernt steht eine 1,2 m hohe Antenne senkrecht auf dem Flachdach. Der Schutzwinkel beträgt 77°.

2) Überprüfen Sie nachweislich, ob sich diese Antenne vollständig innerhalb des Schutzbereichs befindet.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Während eines Nachmittags, an dem es ein Gewitter gab, wurde die Veränderung der Temperatur ermittelt. Die Funktion T' beschreibt die momentane Änderungsrate der Temperatur in Abhängigkeit von der Zeit t (siehe nachstehende Abbildung).



t … Zeit seit Beginn der Messung in h
$T'(t)$ … momentane Änderungsrate der Temperatur zur Zeit t in °C/h

Die Funktion T' hat an der Stelle t_0 eine Nullstelle (siehe obige Abbildung).

1) Kreuzen Sie die zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]*

Jede Stammfunktion von T' hat an der Stelle t_0 eine Maximumstelle.	☐
Jede Stammfunktion von T' hat an der Stelle t_0 eine Minimumstelle.	☐
Jede Stammfunktion von T' hat an der Stelle t_0 eine Nullstelle.	☐
Jede Stammfunktion von T' hat an der Stelle t_0 eine Wendestelle.	☐
Jede Stammfunktion von T' hat an der Stelle t_0 eine positive Steigung.	☐

Die absolute Temperaturänderung in einem Zeitintervall $[t_1; t_2]$ kann durch das Integral $\int_{t_1}^{t_2} T'(t)\,dt$ berechnet werden.

2) Bestimmen Sie mithilfe der obigen Abbildung näherungsweise die absolute Temperaturänderung im Zeitintervall [1,25; 1,5].

Möglicher Lösungsweg

a1) $1 - 0{,}5 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8 = 0{,}68$

Die Wahrscheinlichkeit, dass in mindestens einer der drei Städte kein Gewitter auftritt, beträgt 68 %.

b1) $r = h \cdot \tan(\alpha)$

b2) $\frac{3}{\tan(77°)} = 0{,}69...$

$2 - 0{,}69... = 1{,}30...$

In einer Entfernung von 3 m von der Fangstange hat der Schutzbereich eine Höhe von rund 1,3 m.
Die 1,2 m hohe Antenne befindet sich daher zur Gänze im Schutzbereich.

Auch eine Überprüfung mithilfe einer exakten Zeichnung ist als richtig zu werten.

c1)

Jede Stammfunktion von T' hat an der Stelle t_0 eine Minimumstelle.	☒

c2) Die dem Integral $\int_{1{,}25}^{1{,}5} T'(t)\,dt$ entsprechende Fläche wird von rund 10,5 Kästchen mit einem Flächeninhalt von jeweils 0,125 überdeckt.
Gesamtflächeninhalt: $10{,}5 \cdot 0{,}125 \approx 1{,}3$

Die absolute Temperaturänderung im Zeitintervall [1,25; 1,5] beträgt rund 1,3 °C.
Toleranzbereich: [1,2 °C; 1,45 °C]

Lösungsschlüssel

a1) 1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit
b1) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel zur Berechnung des Radius *r*
b2) 1 × D: für die richtige nachweisliche Überprüfung
c1) 1 × C: für das richtige Ankreuzen
c2) 1 × B: für das richtige näherungsweise Bestimmen der absoluten Temperaturänderung (Toleranzbereich: [1,2 °C; 1,45 °C])

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Der Pauliberg*

Aufgabennummer: A_067

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Der Pauliberg ist Österreichs jüngster erloschener Vulkan und ein beliebtes Ausflugsziel im Burgenland.

a) Beim Pauliberg befindet sich eine Fundstätte von großen Brocken aus vulkanischem Gestein. Für die nachfolgenden Aufgaben wird vereinfacht von kugelförmigen Brocken ausgegangen.

Ein bestimmter Brocken hat eine Masse von 4,5 t.
Die Dichte des Gesteins beträgt 3000 kg/m^3.
Die Masse m ist das Produkt aus Dichte ϱ und Volumen V, also $m = \varrho \cdot V$.

1) Berechnen Sie den Durchmesser dieses Brockens.

Von zwei solchen Brocken mit gleicher Dichte und verschiedener Masse kennt man jeweils den Durchmesser:

	Brocken 1	Brocken 2
Masse in kg	m_1	m_2
Durchmesser	1 m	1 dm

2) Kreuzen Sie die zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]*

m_1 ist das Zehnfache von m_2.	☐
m_1 und m_2 stehen im Verhältnis 10000 : 1.	☐
$m_2 = 1000 \cdot \pi \cdot m_1$	☐
m_1 und m_2 stehen im Verhältnis 100 : 1.	☐
$m_1 = 1000 \cdot m_2$	☐

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Beim Pauliberg gibt es einen beliebten Wanderweg.

Sarah benötigt für die *a* Kilometer lange Wanderung *b* Stunden. Leonie wandert auf der gleichen Strecke, startet aber 1,5 Stunden später. Sarah und Leonie erreichen gleichzeitig das Ziel.

1) Erstellen Sie aus *a* und *b* eine Formel zur Berechnung der mittleren Geschwindigkeit *v* von Leonie in km/h.

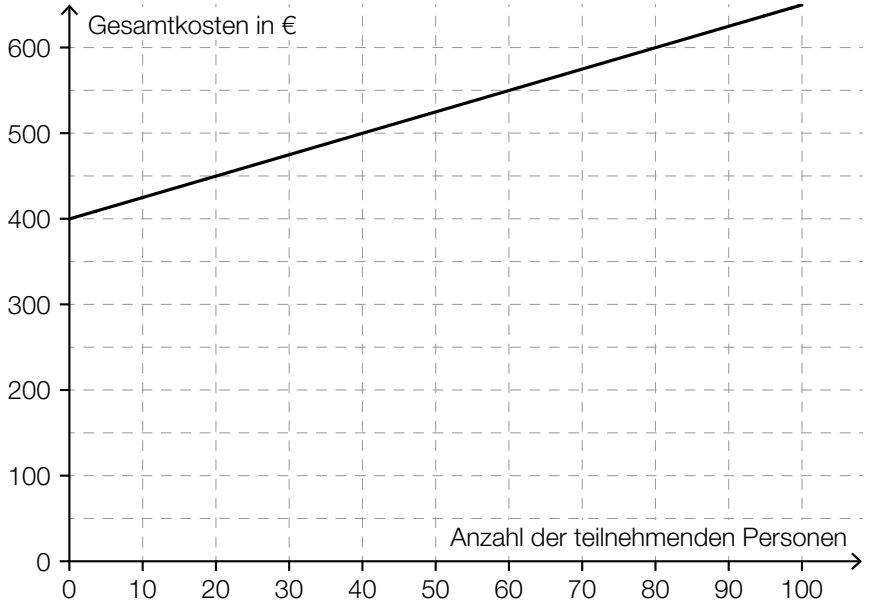
$v =$ _____

c) Unweit des Paulibergs liegt die Burgruine Landsee. Diese kann für private Veranstaltungen gemietet werden.

Die Raummiete für eine Veranstaltung beträgt € 450. Zusätzlich sind pro teilnehmender Person € 1,50 zu bezahlen.
Die Gesamtkosten (in €) sollen in Abhängigkeit von der Anzahl der teilnehmenden Personen *x* durch eine lineare Kostenfunktion *K* beschrieben werden.

1) Erstellen Sie eine Funktionsgleichung von *K*.

Der Vermieter schlägt eine neue Preisgestaltung vor. Zur Veranschaulichung wurde das folgende Diagramm erstellt:



2) Ermitteln Sie, ab welcher Anzahl an teilnehmenden Personen die Gesamtkosten mit der neuen Preisgestaltung höher als bisher sind.

Möglicher Lösungsweg

a1) $V = \frac{m}{\varrho} = \frac{4\,500\ \text{kg}}{3\,000\ \text{kg/m}^3} = 1{,}5\ \text{m}^3$

$1{,}5 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \quad \Rightarrow \quad r = 0{,}71...$

$d = 2 \cdot r = 1{,}42...$

Der Durchmesser beträgt rund 1,4 m.

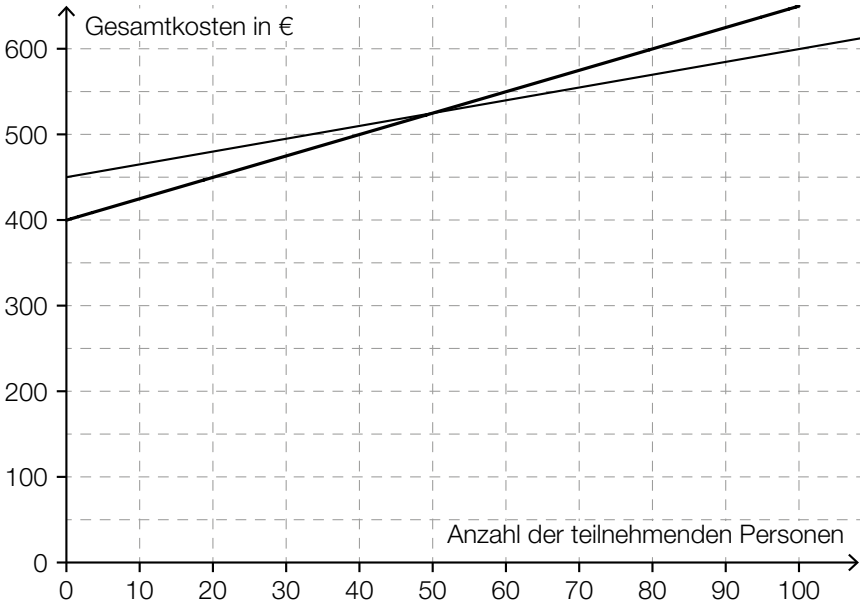
a2)

$m_1 = 1\,000 \cdot m_2$	☒

b1) $v = \frac{a}{b - 1{,}5}$

c1) $K(x) = 1{,}50 \cdot x + 450$

c2)



Bei mehr als 50 teilnehmenden Personen sind die Gesamtkosten mit der neuen Preisgestaltung höher als bisher.
Toleranzbereich: [40; 60]

Lösungsschlüssel

a1) 1 × B: für die richtige Berechnung des Durchmessers
a2) 1 × A: für das richtige Ankreuzen
b1) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel zur Berechnung von v
c1) 1 × A: für das richtige Erstellen der Funktionsgleichung von K
c2) 1 × C: für das richtige Ermitteln der Anzahl der teilnehmenden Personen
(Toleranzbereich: [40; 60])

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Blitze

Aufgabennummer: A_174

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person in Österreich innerhalb eines Jahres vom Blitz getroffen wird, wird mit p bezeichnet.
Die Wahrscheinlichkeit, dass eine vom Blitz getroffene Person stirbt, beträgt 25 %.

– Veranschaulichen Sie den Sachverhalt in einem mit den jeweiligen Wahrscheinlichkeiten beschrifteten Baumdiagramm.

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person in Österreich innerhalb eines Jahres vom Blitz getroffen wird und dabei stirbt, liegt bei 1 : 1 000 000.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit p. Geben Sie das Ergebnis als ganzzahliges Verhältnis an.

b) Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person in Österreich innerhalb eines Jahres vom Blitz getroffen wird und dabei stirbt, liegt bei 1 : 1 000 000.
Die durchschnittliche Lebenserwartung in Österreich liegt bei ungefähr 80 Jahren.

– Beschreiben Sie im gegebenen Sachzusammenhang ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit durch $P(E) = \left(\frac{999\,999}{1\,000\,000}\right)^{80}$ berechnet wird.

c) Die Ergebnisse früherer Forschungen ließen vermuten, dass die globale Erwärmung zu einer Zunahme der Blitzaktivität führen wird.
Im Jahr 2014 gab es in den USA rund 25 Millionen Blitze. In diesem Jahr wurde folgende Vermutung veröffentlicht:
„Mit jedem Grad der globalen Erwärmung steigt die Anzahl der jährlichen Blitze um 12 %."
Auf Basis dieser Vermutung soll die Anzahl der jährlichen Blitze in den USA in Abhängigkeit von der globalen Erwärmung durch eine Funktion B beschrieben werden.

T … globale Erwärmung bezogen auf die Temperatur im Jahr 2014 in °C
$B(T)$ … Anzahl der jährlichen Blitze in den USA bei der globalen Erwärmung T in Millionen

– Erstellen Sie eine Funktionsgleichung von B.

Inzwischen gehen Forscher/innen davon aus, dass die Anzahl der jährlichen Blitze im Zeitraum von 2020 bis 2100 weltweit um insgesamt 15 % zurückgehen wird. Für das Jahr 2020 wird weltweit mit etwa 1,4 Milliarden Blitzen gerechnet.
Auf Basis dieser Vermutung soll die Anzahl der jährlichen Blitze weltweit in Abhängigkeit von der Zeit durch eine lineare Funktion N beschrieben werden.

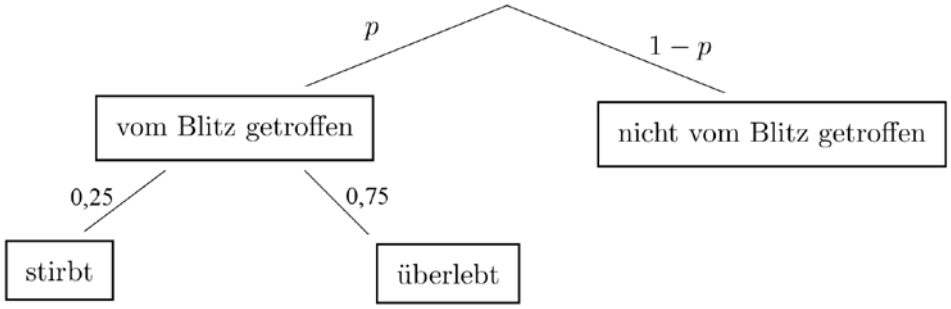
t … Zeit in Jahren mit $t = 0$ für das Jahr 2020
$N(t)$ … Anzahl der jährlichen weltweiten Blitze zur Zeit t in Milliarden

– Erstellen Sie eine Funktionsgleichung von N.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein.

Möglicher Lösungsweg

a)



P(„vom Blitz getroffen und stirbt“) = $p \cdot 0{,}25 = 0{,}000001$
$p = 0{,}000001 : 0{,}25$
$p = 1 : 250\,000$

b) E steht in diesem Sachzusammenhang für das Ereignis, dass eine Person innerhalb von 80 Jahren nie tödlich vom Blitz getroffen wird.

c) $B(T) = 25 \cdot 1{,}12^T$

Steigung der Funktion N: $\frac{-1{,}4 \cdot 0{,}15}{2100 - 2020} = \frac{-0{,}21}{80} = -0{,}002625$
$N(t) = 1{,}4 - 0{,}002625 \cdot t$

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 5 Stochastik
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) 1 Zahlen und Maße
b) –
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) –
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) leicht
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 3
b) 1
c) 2

Thema: Umwelt

Quellen: http://www.fosar-bludorf.com/schumann_gruppen/index.htm
http://www.gubi.li/wahrscheinlichkeit/index.html
https://www.vde.com/de/blitzschutz/arbeitsgebiete/faq/klimawandel
https://www.wetter-center.de/blog/weniger-gewitter-durch-globale-erwaermung/

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Wirkstoffkonzentration

Aufgabennummer: B_369

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Die Konzentration von verabreichten Wirkstoffen im Blut nimmt mit der Zeit ab.

a) In gewissen Zeitabständen wurde die Konzentration des Wirkstoffs im Blut einer Patientin gemessen. Die gemessenen Werte sind in der nachstehenden Tabelle dargestellt.

Zeit nach Beginn der Verabreichung in h	Wirkstoffkonzentration in mg/L
0	1
4	0,65
5	0,5
8	0,25
12	0,15
16	0,1

– Ermitteln Sie mithilfe von exponentieller Regression eine Funktionsgleichung, mit der die Abnahme der Konzentration näherungsweise beschrieben werden kann.
– Stellen Sie die gemessenen Werte und die ermittelte Funktionsgleichung grafisch dar.

b) Die Abnahme der Wirkstoffmenge in Abhängigkeit von der Zeit ist proportional zur jeweils im Organismus vorhandenen Wirkstoffmenge.

– Stellen Sie eine zu diesem Sachverhalt passende Differenzialgleichung auf. $W(t)$ ist dabei die Wirkstoffmenge zur Zeit t.

c) Über eine Infusion werden einem Patienten pro Minute 2,3 mg eines Wirkstoffs verabreicht. Gleichzeitig wird ein Teil des Wirkstoffs wieder ausgeschieden.
Die Änderung der Konzentration des Wirkstoffs im Blut lässt sich durch die folgende Differenzialgleichung beschreiben:

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{3}{50} \cdot \left(y - \frac{115}{3}\right)$$

t … Zeit in min
$y(t)$ … Konzentration des Wirkstoffs in mg/L

– Lösen Sie die Differenzialgleichung mithilfe der Methode *Trennen der Variablen* unter der Voraussetzung, dass sich zu Beginn der Infusion 0 mg des Wirkstoffs im Blut befinden.
– Erklären Sie, warum eine Funktion der Form $y(t) = a \cdot (1 - e^{-k \cdot t})$ für $a, k > 0$ ein beschränktes Wachstum beschreibt.

d) Für die Wirksamkeit eines Medikaments ist eine bestimmte Konzentration eines Wirkstoffs im Blut notwendig. Im Rahmen einer Versuchsreihe wurden folgende Zeiten von der Verabreichung bis zum Erreichen dieser Konzentration bei verschiedenen Personen gemessen (Zeit in Minuten):

60 48 50 65 69 53 64 57 67 56

– Berechnen Sie das arithmetische Mittel und die Standardabweichung der vorliegenden Daten.
– Ermitteln Sie den Vertrauensbereich für μ mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 1\ \%$, wenn davon ausgegangen wird, dass die Zeiten normalverteilt sind.

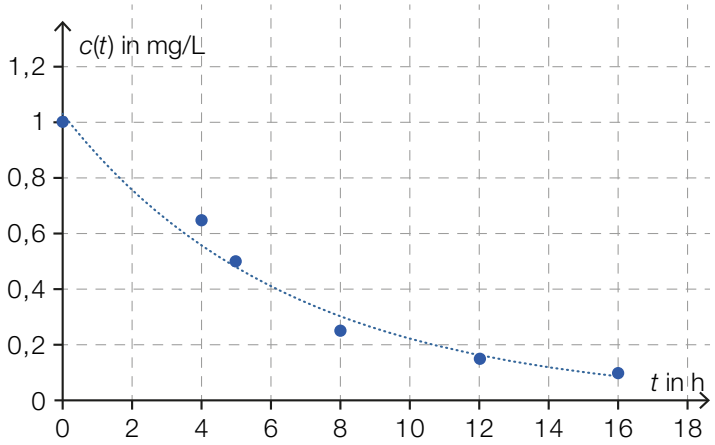
Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) t ... Zeit nach Beginn der Verabreichung in h
$c(t)$ ... Wirkstoffkonzentration zur Zeit t in mg/L

Ermittlung der Funktionsgleichung mittels Technologieeinsatz:

$c(t) = 1{,}0266 \cdot e^{-0{,}1526 \cdot t}$ oder $c(t) = 1{,}0266 \cdot 0{,}8585^t$ (Koeffizienten gerundet)



b) $\frac{dW}{dt} = -k \cdot W$

$-k$ ... Proportionalitätsfaktor ($k > 0$)

c) $\frac{dy}{dt} = -\frac{3}{50} \cdot \left(y - \frac{115}{3}\right)$

$\frac{dy}{y - \frac{115}{3}} = -\frac{3}{50} \cdot dt \quad \left(\text{oder:} \quad \frac{y'}{y - \frac{115}{3}} = -\frac{3}{50}\right)$

$\int \frac{dy}{y - \frac{115}{3}} = -\frac{3}{50} \cdot \int dt \quad \left(\text{oder:} \quad \int \frac{y'(t)}{y(t) - \frac{115}{3}} \cdot dt = -\frac{3}{50} \cdot \int dt\right)$

$\ln\left|y(t) - \frac{115}{3}\right| = -\frac{3}{50} \cdot t + C_1$

allgemeine Lösung:
$y(t) = C \cdot e^{-\frac{3}{50} \cdot t} + \frac{115}{3}$

Ermitteln der speziellen Lösung:
$y(0) = 0$
$C \cdot e^{-\frac{3}{50} \cdot 0} + \frac{115}{3} = 0 \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{115}{3}$

$y(t) = -\frac{115}{3} \cdot e^{-\frac{3}{50} \cdot t} + \frac{115}{3}$

$y(t) = a \cdot (1 - e^{-k \cdot t})$
Die Funktion wächst, weil mit steigendem t der Term $e^{-k \cdot t}$ kleiner wird und somit der Funktionswert $y(t)$ größer. Die Funktion nähert sich asymptotisch dem Wert a, weil für wachsendes t der Term $(1 - e^{-k \cdot t})$ gegen 1 strebt. Sie kann nicht über diesen Wert hinausgehen.

d) Berechnung mittels Technologieeinsatz:
arithmetisches Mittel: $\bar{x} = 58{,}9$ min
Stichprobenstandardabweichung: $s_{n-1} = 7{,}279...$ min

Zweiseitigen 99-%-Vertrauensbereich mithilfe der t-Verteilung bestimmen:
$58{,}9 \pm t_{f;1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{7{,}279...}{\sqrt{10}}$

$n = 10 \quad \Rightarrow \quad f = 9$
$t_{9;0{,}995} = 3{,}249...$

Daraus ergibt sich folgender Vertrauensbereich für μ in min:
[51,42; 66,38] (Intervallgrenzen gerundet)

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 4 Analysis
c) 4 Analysis
d) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) A Modellieren und Transferieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) —
c) D Argumentieren und Kommunizieren
d) —

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) mittel
d) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 1
c) 3
d) 2

Thema: Medizin

Quellen: –

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Windkraftanlage

Aufgabennummer: A_020

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

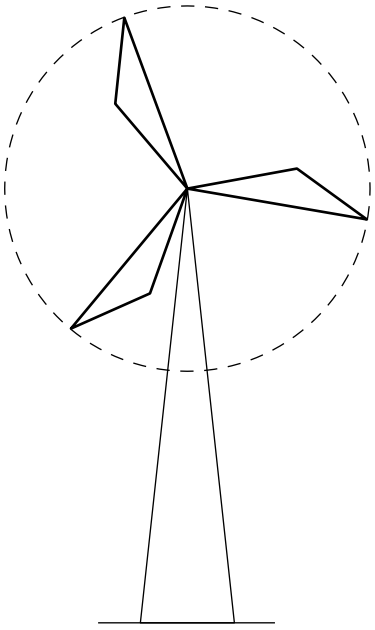
Eine Windkraftanlage setzt Bewegungsenergie in elektrische Energie um. Ihre Nennleistung (= maximal mögliche Leistung) wird in Megawatt (MW) angegeben. Die tatsächlich erreichte Leistung hängt von den Windverhältnissen vor Ort ab und liegt im Jahresdurchschnitt zwischen 20 % und 40 % der Nennleistung.

a) Eine Windkraftanlage mit einer Nennleistung von 1,5 MW erreicht an einem bestimmten Standort im Jahresdurchschnitt 28 % der Nennleistung.
Die Energie E ist das Produkt aus Leistung P und der Zeit t, also $E = P \cdot t$.

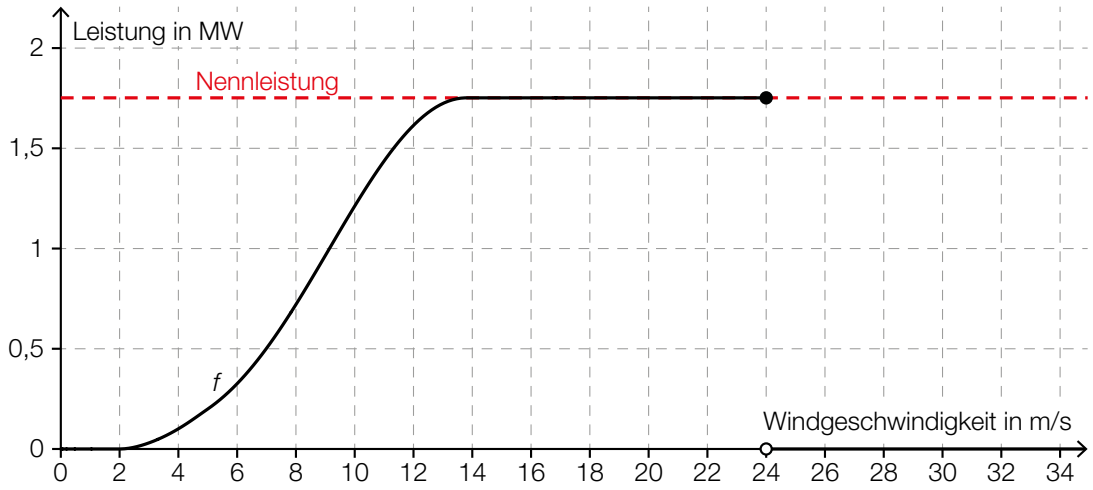
– Berechnen Sie, wie viel Energie in Megawattstunden (MWh) diese Anlage durchschnittlich pro Jahr (365 Tage) liefert.

b) Bei voller Leistung schafft der Rotor 17 Umdrehungen pro Minute.

– Berechnen Sie für diesen Fall die Geschwindigkeit, mit der sich ein Punkt am äußeren Ende eines 32 m langen Rotorblatts bewegt. Geben Sie das Ergebnis in der Einheit „km/h“ an.



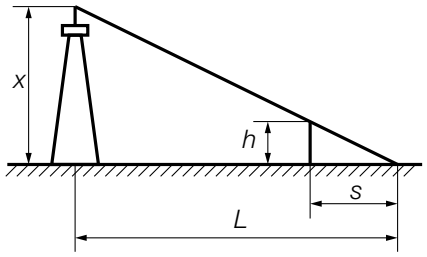
c) In der nachstehenden Abbildung ist die Leistung einer bestimmten Windkraftanlage in Abhängigkeit von der Windgeschwindigkeit durch den Graphen einer Funktion f dargestellt.



– Kreuzen Sie die zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]*

Die Funktion f ist im gesamten Definitionsbereich [0; 30] stetig.	☐
Die Funktion f hat im Definitionsbereich [0; 30] eine Polstelle.	☐
Es gibt im Intervall [8; 10] eine Windgeschwindigkeit v_1, für die gilt: $f''(v_1) = 0$	☐
Die mittlere Änderungsrate der Leistung ist im Intervall [0; 14] größer als im Intervall [2; 14].	☐
Die Ableitungsfunktion f' hat im Intervall [4; 12] mindestens eine Nullstelle.	☐

d) Der Turm einer Windkraftanlage wirft einen Schatten der Länge L. Zur selben Zeit wirft eine Person mit der Körpergröße h einen Schatten der Länge s. (Siehe nebenstehende Abbildung.)



– Erstellen Sie aus L, h und s eine Formel zur Berechnung der Turmhöhe x.

$x =$ _____

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $\underbrace{1{,}5 \cdot 0{,}28}_{\text{erreichte Leistung in MW}} \cdot \underbrace{365 \cdot 24}_{\text{Zeit in h}} = \underbrace{3\,679{,}2}_{\text{Energie in MWh}}$

Die Anlage liefert pro Jahr durchschnittlich 3 679,2 MWh.

b) Kreisumfang außen: $u = 2 \cdot r \cdot \pi = 2 \cdot 32 \cdot \pi = 201{,}06...$
17 Umdrehungen: $17 \cdot 201{,}06... = 3\,418{,}05...$
3 418,05... m/min = 3,41805... km/min = 205,08... km/h

Ein Punkt am äußeren Ende eines Rotorblatts bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von rund 205 km/h.

c)

[...]	
[...]	
Es gibt im Intervall [8; 10] eine Windgeschwindigkeit v_1, für die gilt: $f''(v_1) = 0$	☒
[...]	
[...]	

d) $x : L = h : s \quad \Rightarrow \quad x = \frac{h \cdot L}{s}$

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 1 Zahlen und Maße
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 4 Analysis
d) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) 1 Zahlen und Maße
c) 3 Funktionale Zusammenhänge
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) C Interpretieren und Dokumentieren
d) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) A Modellieren und Transferieren
c) —
d) —

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel
d) mittel

Punkteanzahl:

a) 1
b) 2
c) 1
d) 1

Thema: Umwelt

Quellen: —

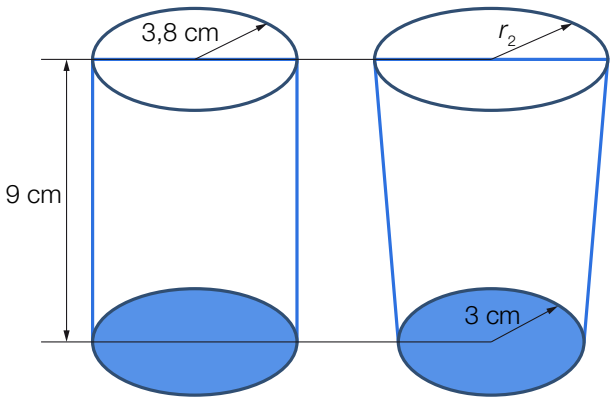
Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Wassergläser

Aufgabennummer: A_084

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

In der nachstehenden Skizze sind die inneren Formen von zwei verschiedenen Wassergläsern mit gleicher Höhe und gleichem Volumen abgebildet.



Wasserglas 1 Wasserglas 2

$V_1 = 3{,}8^2 \cdot 9 \cdot \pi$ $V_2 = 3 \cdot \pi \cdot (r_2^2 + 3 \cdot r_2 + 9)$

V_1, V_2 … Volumen des Wasserglases 1 bzw. 2 in cm^3

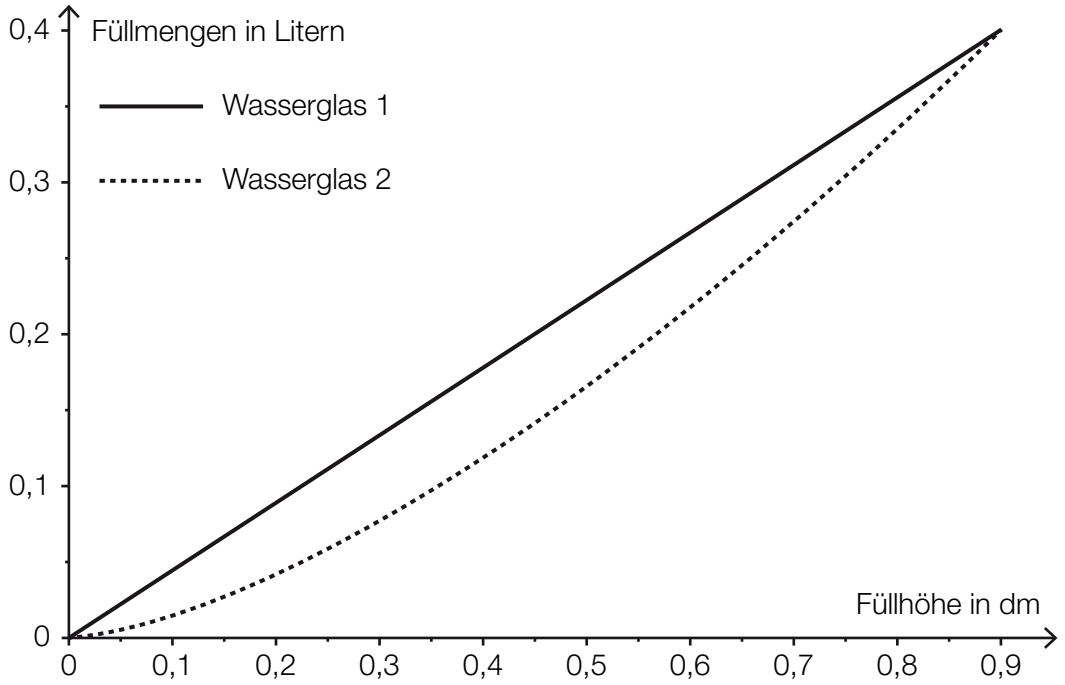
a) Das Wasserglas 1 wird durch einen konstanten Zufluss von 40 Millilitern pro Sekunde (ml/s) gefüllt.

Die Funktion h beschreibt die Flüssigkeitshöhe (in cm) in Abhängigkeit von der Füllzeit (in s).

– Stellen Sie eine Gleichung der Funktion h auf.
– Bestimmen Sie die in diesem Sachzusammenhang größtmögliche Definitionsmenge dieser Funktion.

b) – Berechnen Sie den Radius r_2 von Wasserglas 2.

c) In der nachstehenden Grafik ist für jedes der beiden Wassergläser die Füllmenge in Abhängigkeit von der Füllhöhe dargestellt.



– Begründen Sie, warum der durchgezogene Funktionsgraph dem Wasserglas 1 zugeordnet werden kann.
– Bestimmen Sie die Füllmengendifferenz von Wasserglas 1 und Wasserglas 2 bei einer Füllhöhe von 0,3 dm.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Füllmenge pro Sekunde: 40 ml = 40 cm³

$$\pi \cdot 3{,}8^2 \cdot h = 40 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{40}{\pi \cdot 3{,}8^2}$$

t ... Zeit in s
$h(t)$ ... Füllhöhe zur Zeit t in cm

$$h(t) = \frac{40}{\pi \cdot 3{,}8^2} \cdot t$$
$$h(t) = 0{,}8817... \cdot t$$

maximale Höhe = 9 cm
maximale Füllzeit:
$9 = 0{,}8817 \cdot t$
$t = 10{,}2...$
Definitionsbereich: $0 \leq t \leq 10{,}2...$

b) Wasserglas 1 und Wasserglas 2 haben gleiche Volumina:
$V_{\text{Wasserglas 1}} = V_{\text{Wasserglas 2}}$
$3{,}8^2 \cdot 9 \cdot \pi = 3 \cdot \pi \cdot (r_2^2 + 3 \cdot r_2 + 9) \quad \Rightarrow \quad r_2 = 4{,}547... \quad$ (oder $r_2 = -7{,}547...$)
$r_2 \approx 4{,}55$ cm

c) Das Wasserglas 1 hat die Form eines Drehzylinders.
Volumen eines Drehzylinders in Abhängigkeit von der Höhe: $V(h) = r^2 \cdot \pi \cdot h$
Der funktionale Zusammenhang zwischen der Füllmenge und der Füllhöhe ist linear mit dem Ordinatenabschnitt 0 und der Steigung $r^2 \cdot \pi$. Der durchgezogene Funktionsgraph hat genau diese Eigenschaften.

Füllmengendifferenz:
Füllmenge Wasserglas 1: 0,13 L
Füllmenge Wasserglas 2: 0,075 L
Toleranzbereich beim Ablesen: ±0,02 L
0,13 – 0,075 = 0,055
Füllmengendifferenz: 0,055 L

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) D Argumentieren und Kommunizieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) A Modellieren und Transferieren
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:

a) schwer
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 1
c) 2

Thema: Alltag

Quellen: –

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Wanderzeit

Aufgabennummer: A_076

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Zur Berechnung der Zeit, die ein „normaler“ Wanderer für einen Wanderweg braucht, existieren verschiedene Berechnungsmodelle.

a) In der Schweiz verwendet man folgende Faustregel:
„Im horizontalen Gelände (horizontale Distanz D) benötigt man für eine Strecke von 1 km eine Zeit von 15 min. Pro 100 m Höhenunterschied rechnet man jeweils 20 min dazu.“

– Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung der Wanderzeit t in Minuten aus der horizontalen Distanz D in Kilometern und dem Höhenunterschied H in Metern.

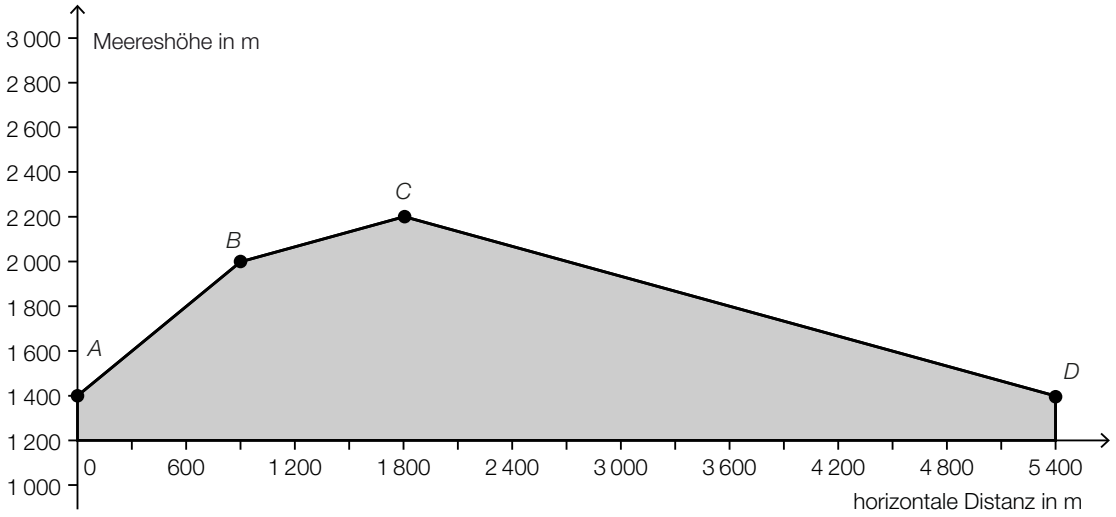
$t =$ _____

b) Ein weiteres Berechnungsmodell für die Wanderzeit rechnet die horizontale und vertikale Komponente eines Wegstücks jeweils in „Leistungskilometer“ (Lkm) um, die anschließend addiert werden.

Die Berechnung gemäß diesem Modell erfolgt so:

- Für jeden Kilometer, der in horizontaler Richtung zurückgelegt wird, rechnet man mit 1 Lkm.
- Pro 100 m, die in vertikaler Richtung bergauf zurückgelegt werden, rechnet man mit 1 Lkm.
- Pro 150 m, die in vertikaler Richtung bergab zurückgelegt werden, rechnet man mit 1 Lkm, wenn das Gefälle mindestens 20 % beträgt.
- Pro 1 Lkm wird mit einer Zeit von 15 min gerechnet.

– Ermitteln Sie für den Wanderweg mit dem nachstehend abgebildeten Höhenprofil die voraussichtliche Wanderzeit in Stunden gemäß diesem Modell.



Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $t = D \cdot 15 + \frac{H}{100} \cdot 20$

b) Von *A* nach *B* erhält man nach der Berechnung (horizontal und vertikal):
0,9 Lkm + 6 Lkm = 6,9 Lkm

Von *B* nach *C*:
0,9 Lkm + 2 Lkm = 2,9 Lkm

Von *C* nach *D* muss zuerst geprüft werden, ob ein Gefälle von mindestens 20 % vorliegt.
$\frac{0,8}{0,6}$ = 0,222... ≈ 22 %. Das Gefälle ist größer als 20 %, also:
3,6 Lkm + 5,33 Lkm = 8,933 Lkm

Gesamtsumme an Leistungskilometern: 18,73 Lkm
Das entspricht einer Gehzeit von 4,68 Stunden.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) 1 Zahlen und Maße

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel

Punkteanzahl:

a) 1
b) 2

Thema: Sport

Quellen: —

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Wählerverhalten

Aufgabennummer: A_044

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

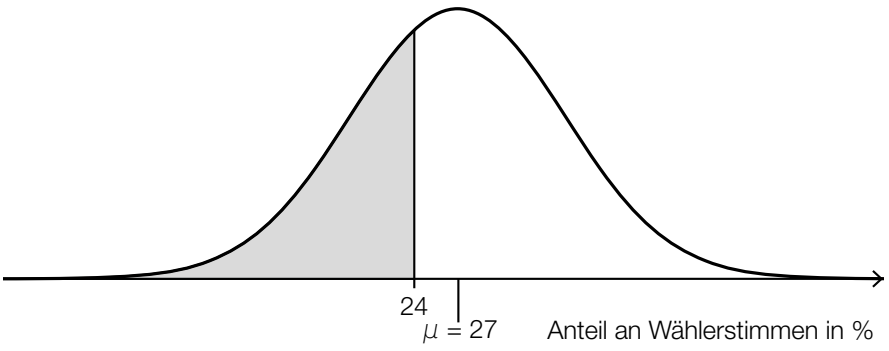
Der Anteil an Wählerstimmen für eine bestimmte Partei *A* aus den verschiedenen Wahlsprengeln war bei einer Nationalratswahl in Österreich normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 27\ \%$ und der Standardabweichung $\sigma = 4{,}48\ \%$.

a) – Erklären Sie ohne Berechnung, warum die folgenden beiden Aussagen gleich wahrscheinlich sind:

Aussage 1: „Die Partei *A* erhielt mindestens 31,5 % der Stimmen in einem zufällig ausgewählten Wahlsprengel."
Aussage 2: „Die Partei *A* erhielt höchstens 22,5 % der Stimmen in einem zufällig ausgewählten Wahlsprengel."

b) – Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Partei A mindestens 29,2 % der Stimmen in einem zufällig ausgewählten Wahlsprengel erhielt.

c) In der nachstehenden Abbildung ist die Dichtefunktion dieser Normalverteilung dargestellt.



– Interpretieren Sie die Bedeutung der grauen Fläche in der obigen Abbildung im gegebenen Sachzusammenhang.

Hinweis zur Aufgabe:
Geben Sie die Lösungen in ganzen Sätzen und mit den entsprechenden Maßeinheiten an.

Möglicher Lösungsweg

a) Die Normalverteilung ist symmetrisch um den Erwartungswert $\mu = 27\ \%$.
$31{,}5\ \% = \mu + 4{,}5\ \%$
$22{,}5\ \% = \mu - 4{,}5\ \%$
Die entsprechenden Flächen $P(X \geq 31{,}5)$ und $P(X \leq 22{,}5)$ sind gleich groß und damit auch die Wahrscheinlichkeiten.

b) Berechnung mittels Technologieeinsatz:
X ... Anteil erhaltener Stimmen in %
$P(X \geq 29{,}2) = 0{,}3116...$
Die Wahrscheinlichkeit, dass Partei A mindestens 29,2 % der Stimmen in einem zufällig ausgewählten Wahlsprengel erhielt, beträgt rund 31,2 %.

c) Die graue Fläche entspricht der Wahrscheinlichkeit, dass Partei A höchstens 24 % der Stimmen in einem zufällig ausgewählten Wahlsprengel erhielt.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 5 Stochastik
c) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) —
c) —

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) leicht
c) leicht

Punkteanzahl:

a) 1
b) 1
c) 1

Thema: Alltag

Quellen: —

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Vergessenskurve nach Ebbinghaus

Aufgabennummer: A_097

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Hermann Ebbinghaus hat das menschliche Erinnerungsvermögen untersucht. Die Vergessenskurve nach Ebbinghaus veranschaulicht, wie viel Wissen nach einer bestimmten Zeit noch abrufbar ist. Sie kann mathematisch mithilfe folgender Funktion W näherungsweise beschrieben werden:

$$W(t) = \frac{35}{1 - 0{,}65 \cdot e^{-1{,}24 \cdot t}}$$

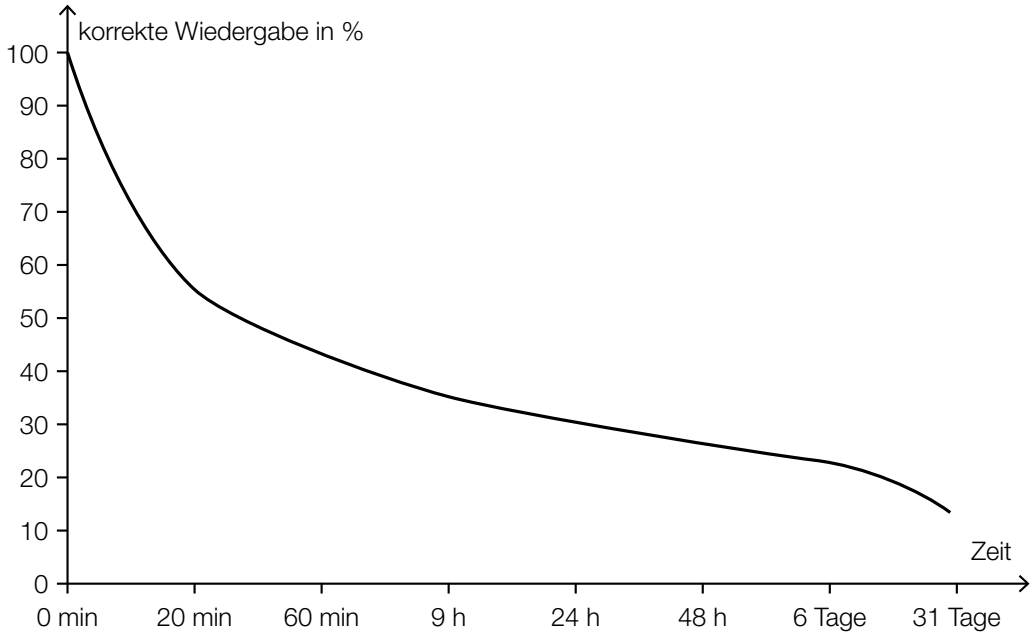
t … Zeit in h
$W(t)$ … abrufbares Wissen zur Zeit t in %

a) Bei den Versuchen, die Ebbinghaus durchführte, stellte er fest:
Der Mensch kann 20 Minuten nach dem Lernen 60 % des Erlernten abrufen.
Nach 1 Stunde sind noch 45 %, nach 1 Tag 34 % und nach 6 Tagen 23 % des Erlernten abrufbar. Dauerhaft abrufbar sind nur etwa 15 % des Erlernten.

- Erstellen Sie eine Tabelle, mit deren Hilfe Sie die Werte von $W(t)$ mit diesen Versuchsergebnissen vergleichen können.
- Beurteilen Sie, in welchem Zeitraum die Funktion W eine sinnvolle Näherung für die Versuchsergebnisse darstellt.

b)
- Berechnen Sie mithilfe der Funktion W, nach welcher Zeit noch 40 % des Erlernten abrufbar sind.
- Geben Sie das Ergebnis in Stunden und Minuten an.

c) Auf einer Internetseite findet man die folgende (von der Modellfunktion *W* unabhängige) Darstellung der Vergessenskurve:



Der Funktionsgraph verläuft zwischen 20 min und 48 h annähernd geradlinig.

– Erklären Sie, warum man daraus nicht auf einen annähernd linearen Zusammenhang schließen kann.
– Vergleichen Sie die mittlere Änderungsrate (pro Stunde) der korrekten Wiedergabe im Zeitraum von 20 min bis 60 min mit jener im Zeitraum von 60 min bis 9 h.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a)

t in h	0	1/3	1	24	144	$\to \infty$
$W(t)$ in % (gerundet)	100	61,4	43,1	35	35	35
Versuchsergebnis in %	100	60	45	34	23	15

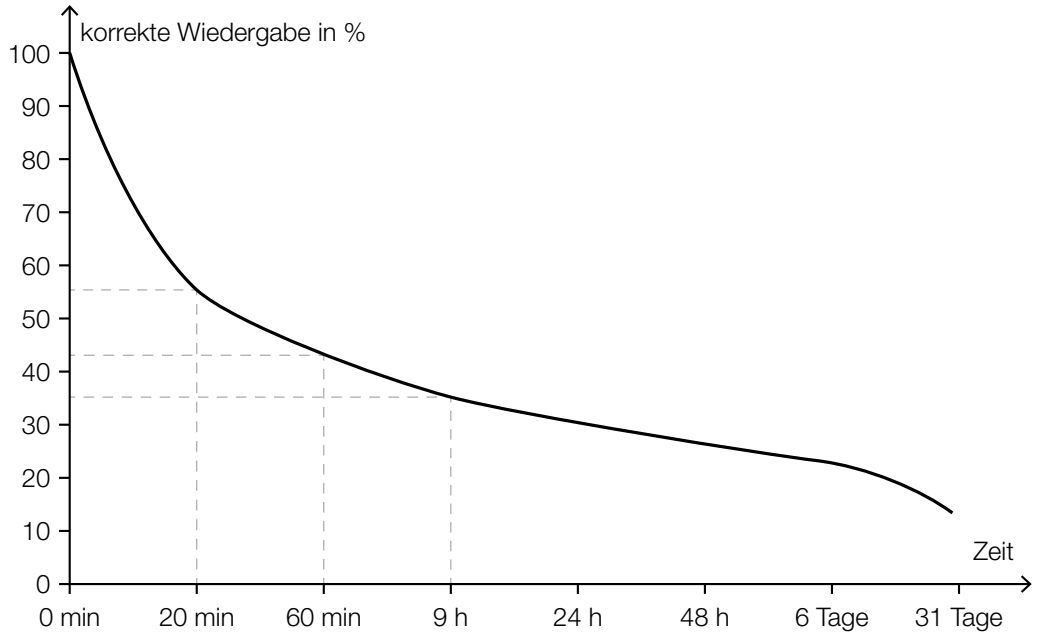
Die Funktion ergibt eine gute Näherung für die ersten 24 Stunden, die weitere Abnahme wird nicht korrekt beschrieben.

b) $40 = \frac{35}{1 - 0{,}65 \cdot e^{-1{,}24 \cdot t}}$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$t = 1{,}3295\ldots$ h

$t \approx 1$ h 20 min

c) Ein linearer Zusammenhang liegt dann vor, wenn die Funktionswerte in gleichen Zeitintervallen jeweils um den gleichen Betrag zu- oder abnehmen.
Beim Graphen aus dem Internet sind die Zeitintervalle nicht gleich groß, daher kann man aus dem Graphen nicht auf einen annähernd linearen Zusammenhang schließen.



20 min bis 60 min: $\frac{43 - 55}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{-12}{\frac{2}{3}} = -18$

60 min bis 9 h: $\frac{35 - 43}{9 - 1} = \frac{-8}{8} = -1$

Im Zeitraum vom 20 min bis 60 min beträgt die mittlere Änderungsrate der korrekten Wiedergabe –18 % pro Stunde, im Zeitraum von 60 min bis 9 h erfolgt die Abnahme deutlich langsamer mit durchschnittlich –1 % pro Stunde.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 4 Analysis

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) D Argumentieren und Kommunizieren

Nebenhandlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) —
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2
c) 2

Thema: Psychologie

Quellen: —

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Strauchwachstum

Aufgabennummer: A_094

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Die Höhe eines Strauches wird in den ersten Tagen nach dem Auspflanzen durch die Funktion h_1 beschrieben:

$h_1(t) = 0{,}08 \cdot e^{0{,}03 \cdot t}$ mit $0 \leq t < 55$

t … Zeit in Tagen
$h_1(t)$ … Höhe des Strauches zur Zeit t in m

a) – Berechnen Sie, nach wie vielen Tagen der Strauch eine Höhe von 40 cm aufweist.

b) Die Funktionsgleichung der Funktion h_1 wurde fehlerhaft logarithmiert:

$\lg(h_1(t)) = \lg(0{,}08) + 0{,}03 \cdot \lg(e) + t \cdot \lg(e)$

– Stellen Sie die logarithmierte Gleichung richtig.

c) Vom Beginn des 56. Tages an ($t = 55$) verringert sich die Wachstumsgeschwindigkeit des Strauches (Geschwindigkeit, mit der die Höhe des Strauches zunimmt). Ab diesem Zeitpunkt wird die Höhe des Strauches durch folgende Funktion h_2 beschrieben:

$h_2(t) = 1{,}2 - 1{,}8836 \cdot e^{-0{,}01595 \cdot t}$ für $t \geq 55$

t … Zeit in Tagen
$h_2(t)$ … Höhe des Strauches zur Zeit t in m

– Stellen Sie die Funktion h_2 im Intervall $55 \leq t \leq 100$ grafisch dar.
– Bestimmen Sie die mittlere Wachstumsgeschwindigkeit im Intervall $55 \leq t \leq 85$ grafisch.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

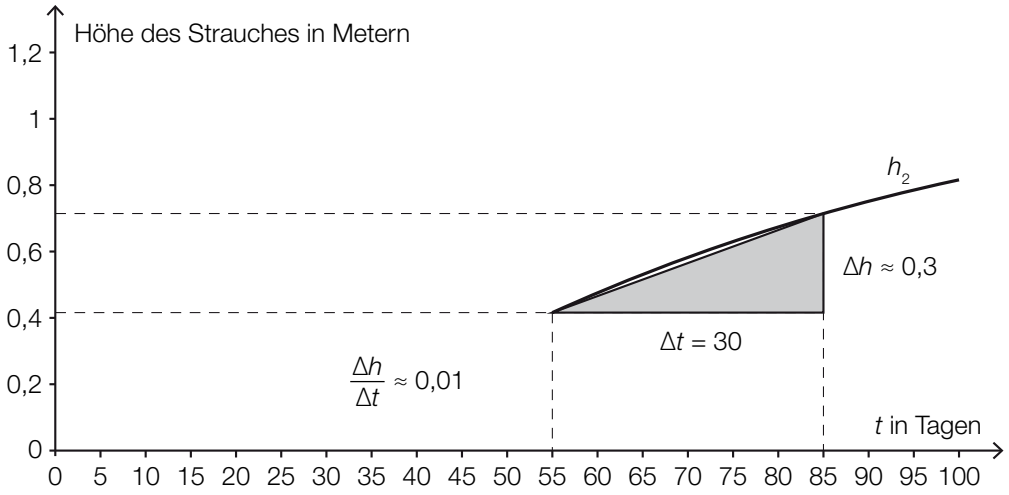
a) $h_1(t) = 0{,}4$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$t = 53{,}6\ldots$

Nach rund 54 Tagen hat der Strauch eine Höhe von 40 cm.

b) richtige Gleichung:
$\lg(h_1(t)) = \lg(0{,}08) + 0{,}03 \cdot t \cdot \lg(e)$

c)



Die mittlere Wachstumsgeschwindigkeit für das Intervall $55 \leq t \leq 85$ ist rund 0,01 m/Tag.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) 4 Analysis

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) —
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) leicht
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 1
b) 1
c) 2

Thema: Biologie

Quellen: —

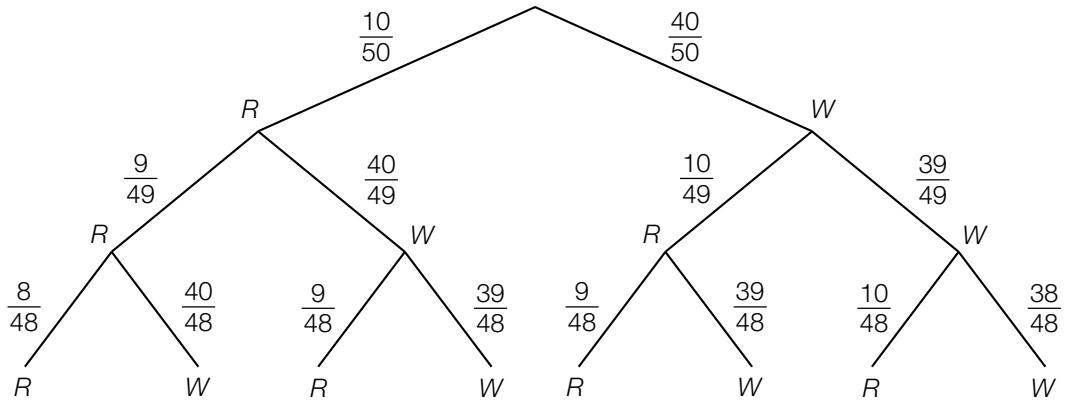
Spielefest (2)

Aufgabennummer: A_137

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Bei einem Spielefest können die teilnehmenden Kinder verschiedene Spielstationen besuchen.

a) In einer Kiste befinden sich 10 rote und 40 weiße Kugeln. Jedes Kind darf 3-mal blind hineingreifen und jeweils 1 Kugel herausholen. Dann werden die Kugeln für das nächste Kind wieder hineingelegt.
Das nachstehende Baumdiagramm stellt diesen Sachverhalt für ein Kind dar.



– Kennzeichnen Sie im Baumdiagramm alle Möglichkeiten, 2 rote Kugeln (*R*) und 1 weiße Kugel (*W*) zu ziehen.
– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kind 3 rote Kugeln zieht.

b) Bei einer Station werfen die Kinder aus einer bestimmten Entfernung 5 Tennisbälle in einen Kübel. Peter hat bei jedem Wurf eine Trefferwahrscheinlichkeit von 80 %.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Peter höchstens 4-mal trifft.

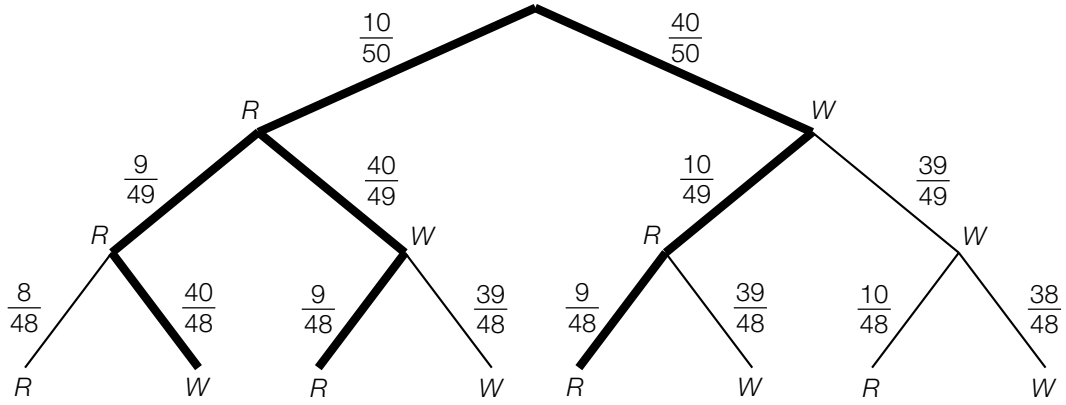
c) Beim Kirschkernweitspucken bekommt jedes Kind 2 Kirschen, deren Kerne es möglichst weit spucken soll. Die Flugbahn eines Kirschkerns kann modellhaft mit einer Polynomfunktion 2. Grades h beschrieben werden.
Thomas spuckt einen Kern aus einer Höhe von 1 m in einem Winkel von 45° nach oben weg. Der Kern fällt nach 8 m zu Boden.

– Stellen Sie mithilfe der gegebenen Bedingungen ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten von h auf.
– Berechnen Sie diese Koeffizienten.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



X … Anzahl der roten Kugeln

$$P(X = 3) = \frac{10}{50} \cdot \frac{9}{49} \cdot \frac{8}{48} = 0{,}0061\ldots$$

Die Wahrscheinlichkeit, 3 rote Kugeln zu ziehen, liegt bei rund 0,6 %.

b) X … Treffer
$p = 0{,}8$; $n = 5$

$$P(X \leq 4) = 1 - P(X = 5) = 1 - \binom{5}{5} \cdot 0{,}8^5 \cdot 0{,}2^0 = 1 - 0{,}32768 = 0{,}67232$$

Peter trifft mit einer Wahrscheinlichkeit von 67,2 % höchstens 4-mal.

Auch eine Berechnung ohne Gegenwahrscheinlichkeit ist zulässig.

c) x ... horizontale Entfernung in m
$h(x)$ ... Höhe bei der Entfernung x in m

$h(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$
$h'(x) = 2 \cdot a \cdot x + b$

$h(0) = 1$	*oder*	$c = 1$
$h(8) = 0$		$64 \cdot a + 8 \cdot b + c = 0$
$h'(0) = \tan(45°)$		$b = \tan(45°)$

$\Rightarrow \quad a = -\frac{9}{64},\ b = 1,\ c = 1$

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 5 Stochastik
c) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) A Modellieren und Transferieren
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2
c) 2

Thema: Sonstiges

Quellen: —

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Spieleabend

Aufgabennummer: A_069

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Eine Familie spielt ein Brettspiel. Bei diesem Spiel werden 2 gleiche Würfel (mit den Augenzahlen von 1 bis 6; alle Augenzahlen sind gleich wahrscheinlich) geworfen. Die geworfenen Augenzahlen der beiden Würfel werden zusammengezählt („Augensumme").

a) Max benötigt die Augensumme „6", die schon seit einigen Runden nicht mehr geworfen wurde. Er weiß, dass die Wahrscheinlichkeit, die Augensumme „6" zu werfen, bei ungefähr 14 % liegt. Daher meint er, dass die Augensumme „6" spätestens jedes 7. Mal geworfen werden müsste.

– Argumentieren Sie den Wahrheitsgehalt von Max' Aussage.

b) Die Augensumme „7" zu werfen, ist für dieses Spiel ungünstig.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit in Prozent, dass die geworfene Augensumme nicht „7" beträgt.

c) Die Wahrscheinlichkeit, die Augensumme „12" zu werfen, beträgt $\frac{1}{36}$.

– Stellen Sie die Wahrscheinlichkeiten, dass bei 100 Würfen 1-, 2-, 3- oder 4-mal die Augensumme „12" geworfen wird, in Form eines Säulendiagramms dar.

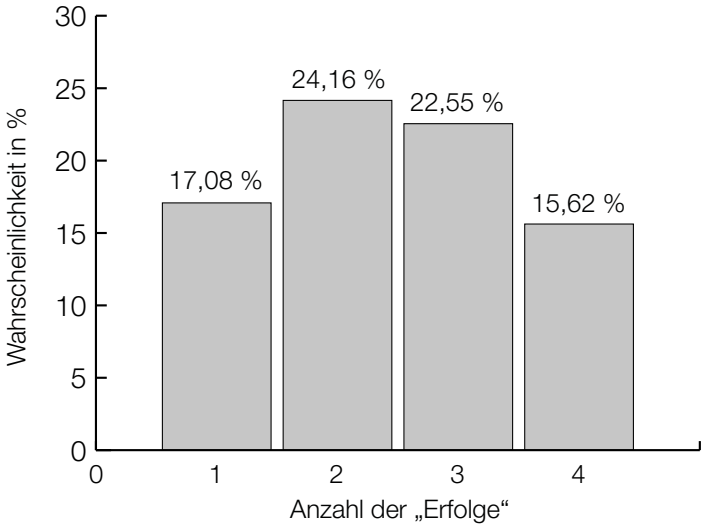
Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Max hat nicht Recht, weil das Ereignis des Würfelns jedes Mal unabhängig vom letzten Mal ist. Die relative Häufigkeit eines Zufallsereignisses nähert sich seiner Wahrscheinlichkeit zwar mit zunehmender Anzahl an Würfen an, die Wahrscheinlichkeit für jeden einzelnen Versuchsausgang ändert sich jedoch nicht.

b) Die Wahrscheinlichkeit für ein bestimmtes Zahlenpaar beträgt: $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$.
Es gibt 6 solche Zahlenpaare, die die Augensumme „7“ ergeben. Daher ist die Wahrscheinlichkeit $\frac{6}{36} = \frac{1}{6} \approx 16{,}7\ \%$.
Die Gegenwahrscheinlichkeit, also die Wahrscheinlichkeit, dass nicht die Augensumme „7“ geworfen wird, beträgt daher $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} \approx 83{,}3\ \%$.

c) Die Berechnung erfolgt über die Binomialverteilung mittels Technologie *(Technologieeinsatz dokumentieren)*.



Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 5 Stochastik
c) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) —
c) A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) leicht
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 1
b) 1
c) 1

Thema: Alltag

Quellen: —

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Sonnenlicht unter Wasser

Aufgabennummer: A_122

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Das Licht der Sonne wird beim Durchdringen durch klares Wasser schwächer. Dabei nimmt die Intensität der einzelnen Farben unter Wasser unterschiedlich schnell ab. So wird z. B. der rote Lichtanteil stärker abgeschwächt als der Lichtanteil der Farben Orange, Gelb, Grün oder Blau. Dies wird durch den „Absorptionskoeffizienten“ k beschrieben, der für das blaue Licht am kleinsten ist.

Farbe	Absorptionskoeffizient
Rot	$k_R \approx 0{,}65\ \text{m}^{-1}$
Orange	$k_O \approx 0{,}32\ \text{m}^{-1}$
Gelb	$k_{Ge} \approx 0{,}2\ \text{m}^{-1}$
Grün	$k_{Gr} \approx 0{,}025\ \text{m}^{-1}$
Blau	$k_B \approx 0{,}02\ \text{m}^{-1}$

Die Lichtintensität kann in Abhängigkeit von der Wassertiefe durch die Funktion I beschrieben werden:

$I(x) = I_0 \cdot e^{-k \cdot x}$ oder $I(x) = I_0 \cdot a^x$

x … Wassertiefe in klarem Wasser in m bezogen auf die Wasseroberfläche
$I(x)$ … Lichtintensität in der Tiefe x in %
I_0 … Lichtintensität an der Wasseroberfläche (I_0 = 100 %)
k … Absorptionskoeffizient in m^{-1}

a) – Stellen Sie den Verlauf der Lichtintensität für die Farben Rot und Blau für die ersten 60 m Wassertiefe in einem Koordinatensystem grafisch dar.

b) – Ermitteln Sie den Parameter a für den grünen Lichtanteil der oben angegebenen Abnahmefunktion.

– Berechnen Sie für den grünen Lichtanteil, wie viel Prozent der Lichtintensität innerhalb von 10 m Wassertiefe verloren gehen.

c) In Tauchkursen lernt man gelegentlich die Regel, dass die gesamte Lichtintensität des Sonnenlichts alle 6 m um die Hälfte des vorherigen Wertes abnimmt.

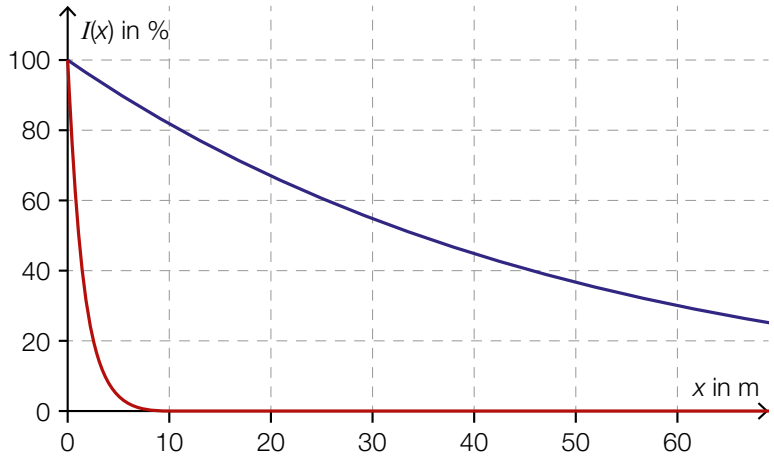
– Kreuzen Sie an, welche der nachstehenden Aussagen auf diese Regel zutrifft. *[1 aus 5]*

In einer Tiefe von 1 m ist die Lichtintensität ca. 6 % weniger als die ursprüngliche Lichtintensität.	☐
In einer Tiefe von 12 m beträgt die Lichtintensität 75 % der ursprünglichen Lichtintensität.	☐
In einer Tiefe ab 12 m beträgt die Lichtintensität 12,5 % der ursprünglichen Lichtintensität.	☐
In einer Tiefe ab 60 m ist die Lichtintensität kleiner als 1 % der ursprünglichen Lichtintensität.	☐
In einer Tiefe von 60 m beträgt die Lichtintensität $\frac{1}{10}$ der ursprünglichen Lichtintensität.	☐

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



b) $a = e^{-0,025} = 0,975...$

$I(10) = 100 \cdot e^{-0,025} = 77,88...$
$100 - 77,88... = 22,11...$
Die Abnahme für grünes Licht nach 10 m beträgt rund 22,1 %.

c)

[...]	
[...]	
[...]	
In einer Tiefe ab 60 m ist die Lichtintensität kleiner als 1 % der ursprünglichen Lichtintensität.	☒
[...]	

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) A Modellieren und Transferieren
c) —

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 1
b) 2
c) 1

Thema: Physik

Quellen: Itemwriterkurs OÖ, Oktober 2013
Tabelle: http://www.wissenschaft-technik-ethik.de/wasser_eigenschaften.html

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Skispringen (1)

Aufgabennummer: A_022

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Die Bergisel-Schanze gilt als ein Wahrzeichen Innsbrucks.

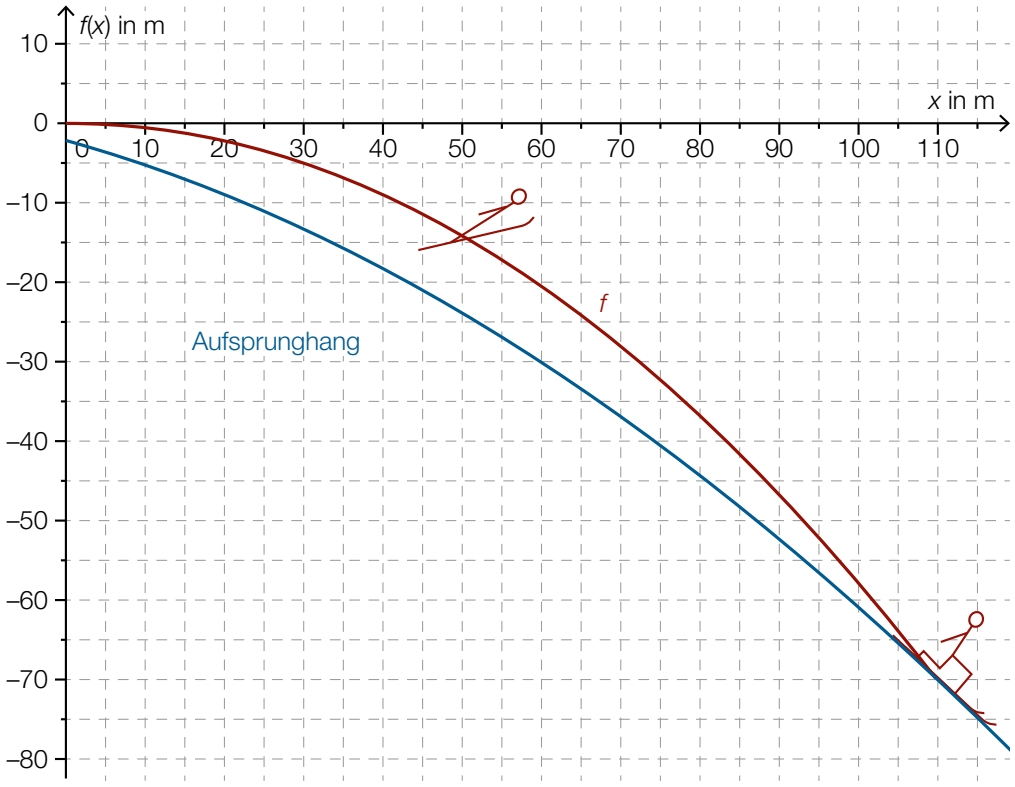
a) Vom östlichen Stadion-Eingang führt ein Schrägaufzug bis zum Schanzenturm. Dieser befördert die Besucher/innen mit einer mittleren Geschwindigkeit von 7,5 km/h in einer Zeit von 2 min zum Turm.

– Berechnen Sie, welche Strecke der Schrägaufzug dabei zurücklegt.

b) Die Flugbahn eines Skispringers lässt sich annähernd mit der Funktion f beschreiben:

$f(x) = a \cdot x^2$ mit $a \in \mathbb{R}^-$

x, $f(x)$ … Koordinaten in m



– Ermitteln Sie mithilfe der obigen Abbildung den Parameter a.
– Erklären Sie, wie man den Parameter a verändern müsste, damit eine Flugbahn mit kürzerer Sprungweite modelliert werden kann.

c) Das Profil des Aufsprunghangs lässt sich näherungsweise mit einer Polynomfunktion 3. Grades g beschreiben. Die für die Sprungwertung ausschlaggebende Landezone auf dem Aufsprunghang befindet sich dort, wo der Hang das größte Gefälle aufweist.

– Dokumentieren Sie in Worten, wie man mithilfe der Differenzialrechnung die Koordinaten des Punktes mit dem größten Hanggefälle berechnen kann.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $v = 7{,}5$ km/h

$t = \frac{1}{30}$ h

$v = \frac{s}{t} \quad \Rightarrow \quad s = v \cdot t$

$s = 7{,}5 \cdot \frac{1}{30} = 0{,}25$

0,25 km = 250 m

Der Schrägaufzug legt 250 m zurück.

b) Aus dem Graphen kann zum Beispiel der Punkt (110|–70) abgelesen werden.
Damit ergibt sich folgende Gleichung:
$f(x) = a \cdot x^2$
$-70 = a \cdot 110^2$
$a = -0{,}00578...$

Man müsste a verringern, um eine Flugbahn mit kürzerer Sprungweite zu modellieren.

c) Das größte Gefälle des Aufsprunghangs wird im Wendepunkt erreicht.
Die erste Koordinate des Wendepunkts ermittelt man durch die Berechnung der Nullstelle der 2. Ableitung der Polynomfunktion g. Diese Koordinate setzt man in die Funktion g ein, um die 2. Koordinate des Wendepunkts zu erhalten.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 1 Zahlen und Maße
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) —

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 1
b) 2
c) 1

Thema: Sport, Architektur

Quellen: http://geol43.uni-graz.at/05W/600001/skispringen.html
http://www.bergisel.info/de/besucher-information/bergisel-schanze.php
http://www.fis-ski.com/data/document/grundlagenprojektierungschanze-2005.pdf

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Öl

Aufgabennummer: A_113

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Ein Volumen von 2 500 Barrel (bbl) ausgelaufenen Erdöls bedeckt eine Meeresoberfläche von 4 250 km^2. 1 bbl Erdöl entspricht ungefähr 159 L. Es wird modellhaft angenommen, dass die Dicke der Ölschicht konstant ist.
Die Krümmung der Erdoberfläche ist zu vernachlässigen.

– Berechnen Sie die Dicke des Ölteppichs.

– Ermitteln Sie das Ergebnis in Nanometern (nm).

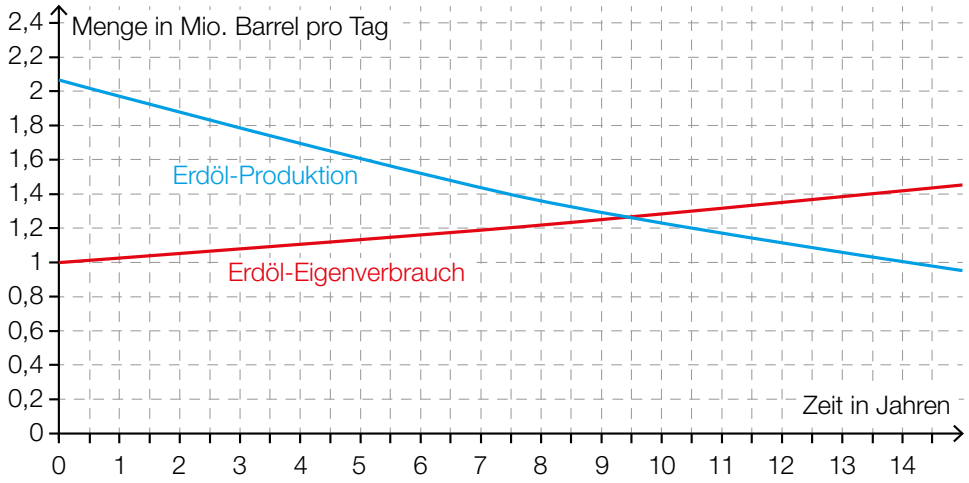
b) In der folgenden Tabelle sind einige erdölfördernde Staaten Südamerikas (in alphabetischer Reihenfolge) mit ihren täglichen Ölfördermengen im Jahre 2011 angeführt:

Staat	Ölfördermenge in 1 000 Barrel/Tag	Ölfördermenge pro Tag in Prozent relativ zur Gesamtfördermenge pro Tag
Argentinien	555	
Brasilien	2 085	
Ecuador	500	
Peru	152	

– Vervollständigen Sie die Tabelle mit den Ölfördermengen pro Tag in Prozent bezogen auf die Gesamtfördermenge pro Tag aller angeführten Staaten.

– Erstellen Sie ein Balkendiagramm der Ölfördermengen.

c) Die nachstehende Grafik stellt die Prognose zur Entwicklung von Erdölproduktionsmenge und Eigenbedarf eines Landes für die kommenden Jahre dar.



– Lesen Sie aus der obigen Grafik die Differenz zwischen Eigenverbrauch und Produktion für t = 14 Jahre ab.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $V = G \cdot h$

$V = 2\,500 \text{ bbl} = 2\,500 \cdot 159 \text{ L} = 397\,500 \text{ L} = 397\,500 \text{ dm}^3 = 397{,}5 \text{ m}^3$

$G = 4\,250 \text{ km}^2 = 4{,}25 \cdot 10^9 \text{ m}^2$

$397{,}5 = 4{,}25 \cdot 10^9 \cdot h$

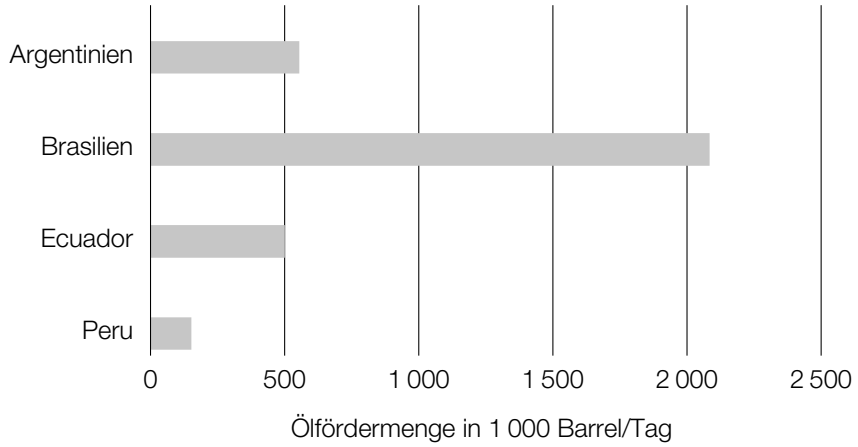
$h = 9{,}352... \cdot 10^{-8} \text{ m}$
$h \approx 9{,}35 \cdot 10^{-8} \text{ m}$

$1 \text{ nm} = 1 \cdot 10^{-9} \text{ m} \quad \Rightarrow \quad h \approx 93{,}5 \text{ nm}$

Die Dicke des Ölteppichs beträgt rund 94 nm.

b)

Staat	Ölfördermenge in 1 000 Barrel/Tag	Ölfördermenge pro Tag in Prozent relativ zur Gesamtfördermenge pro Tag
Argentinien	555	16,85...
Brasilien	2 085	63,33...
Ecuador	500	15,18...
Peru	152	4,61...



c) Die Differenz beträgt ungefähr 0,41 Millionen Barrel pro Tag.
(Als Ablesegenauigkeit sind Werte zwischen 0,4 und 0,42 Millionen Barrel zu akzeptieren.)

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 1 Zahlen und Maße
b) 5 Stochastik
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 1 Zahlen und Maße
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) A Modellieren und Transferieren
c) —

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) leicht
c) leicht

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2
c) 1

Thema: Umwelt

Quellen: Oil & Gas Journal 46/2011 (vorläufige Daten)
aus: http://www.geologie.ac.at/pdf/Erdoelreferat/erdoelref_2011.pdf

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Kfz-Kennzeichen

Aufgabennummer: A_124

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Laut einer Umfrage in Deutschland hätten 73,5 % der Autobesitzer/innen auf ihrem Auto gerne ein Wunschkennzeichen.
Es werden 8 zufällig ausgewählte Autobesitzer/innen befragt, ob sie ein Wunschkennzeichen wollen.

– Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens die Hälfte der Befragten ein Wunschkennzeichen will.

b) Die Masse bestimmter Kfz-Kennzeichen-Tafeln ist normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 249$ g und der Standardabweichung $\sigma = 2{,}4$ g.

– Berechnen Sie, wie viel Prozent der Kfz-Kennzeichen-Tafeln eine Masse von höchstens 243 g aufweisen.

c) Am Beginn des Jahres 2012 waren in Deutschland rund 43 Millionen PKWs zugelassen. Seitdem ist die Anzahl der zugelassenen PKWs jährlich um rund 1,3 % bezogen auf den Wert des jeweiligen Vorjahres angestiegen.
Die Anzahl der zugelassenen PKWs soll für den Zeitraum seit Beginn des Jahres 2012 durch die Funktion Z beschrieben werden.

– Erstellen Sie eine Gleichung der Funktion Z.
– Berechnen Sie mithilfe der Funktion Z die mittlere Änderungsrate der Anzahl der zugelassenen PKWs zwischen dem Beginn des Jahres 2015 und dem Beginn des Jahres 2018.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Binomialverteilung mit $n = 8$, $p = 0{,}735$

X ... Anzahl der Autobesitzer/innen, die ein Wunschkennzeichen wollen

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$P(X \geq 4) = 0{,}96513...$

Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens die Hälfte der Befragten ein Wunschkennzeichen will, beträgt rund 96,51 %.

b) X ... Masse der Kfz-Kennzeichen-Tafeln in g

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$P(X \leq 243) = 0{,}00620...$

Rund 0,62 % der Kfz-Kennzeichen-Tafeln haben eine Masse von höchstens 243 g.

c) $Z(t) = 43 \cdot 10^6 \cdot 1{,}013^t$

t … Zeit in Jahren, $t = 0$ entspricht dem Beginn des Jahres 2012
$Z(t)$ … Anzahl zugelassener PKWs zur Zeit t

$$\frac{Z(6) - Z(3)}{3} = 588\,672{,}4...$$

Die mittlere Änderungsrate im angegebenen Zeitintervall beträgt rund 588 672 PKWs pro Jahr.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 5 Stochastik
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) –
b) –
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) leicht
c) leicht

Punkteanzahl:

a) 1
b) 1
c) 2

Thema: Verkehr

Quellen: –

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Joghurt

Aufgabennummer: A_138

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Für die Herstellung von Joghurt werden Milchsäurebakterien verwendet. Das Wachstum der Milchsäurebakterien kann durch die folgende Funktion N beschrieben werden:

$N(t) = 20 \cdot 1{,}02337^t$

t ... Zeit in min
$N(t)$ ... Bakterienmasse zur Zeit t in Mikrogramm (µg)

– Geben Sie das prozentuelle Wachstum pro Minute an.
– Berechnen Sie die Masse der Bakterien nach 1 Stunde. Geben Sie das Ergebnis in Gramm in der Form $a \cdot 10^k$ mit $1 \leq a < 10$ an.
– Begründen Sie, warum der nachstehend dargestellte Rechenschritt falsch ist.

$$\frac{a}{20} = 1{,}02337^t$$

$$\frac{\log(a)}{\log(20)} = t \cdot \log(1{,}02337)$$

b) Die Gesamtkosten für die Produktion von 2 verschiedenen Joghurtsorten werden durch die Funktionen K_1 und K_2 beschrieben.

$K_1(x) = 0{,}4 \cdot x + 270$
$K_2(x) = 0{,}001125 \cdot x^2 + 0{,}125 \cdot x + 200$

x ... produzierte Menge in ME, $x \geq 0$
$K_1(x)$ ... Gesamtkosten bei Sorte 1 bei der Produktionsmenge x in GE
$K_2(x)$ ... Gesamtkosten bei Sorte 2 bei der Produktionsmenge x in GE

– Ermitteln Sie die Koordinaten des Schnittpunkts der Graphen von K_1 und K_2.
– Interpretieren Sie die Koordinaten des Schnittpunkts im gegebenen Sachzusammenhang.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Die Masse der Bakterien wächst um 2,337 % pro Minute.

$N(60) = 20 \cdot 1{,}02337^{60} = 79{,}9... \approx 80$
$80\ \mu g = 0{,}000080\ g = 8 \cdot 10^{-5}\ g$

Nach 1 h sind rund $8 \cdot 10^{-5}$ g vorhanden.

Bei $\frac{\log(a)}{\log(20)} = t \cdot \log(1{,}02337)$ wurden die logarithmischen Rechenregeln falsch angewendet.
Die linke Seite der Gleichung muss lauten: $\log\left(\frac{a}{20}\right)$ bzw. $\log(a) - \log(20)$

b) $0{,}4 \cdot x + 270 = 0{,}001125 \cdot x^2 + 0{,}125 \cdot x + 200$
Lösung mittels Technologieeinsatz: ($x_1 = -155{,}56$)
$x_2 = 400$

$K_1(400) = 430 \quad \Rightarrow \quad$ Schnittpunkt: $S = (400 \mid 430)$

Die 1. Koordinate des Schnittpunkts gibt diejenige Produktionsmenge (400 ME) an, bei der die Gesamtkosten bei beiden Sorten gleich hoch sind. Die 2. Koordinate des Schnittpunkts gibt diese Gesamtkosten (430 GE) an.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) 1 Zahlen und Maße
b) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren, D Argumentieren und Kommunizieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) leicht

Punkteanzahl:

a) 3
b) 2

Thema: Sonstiges

Quellen: –

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

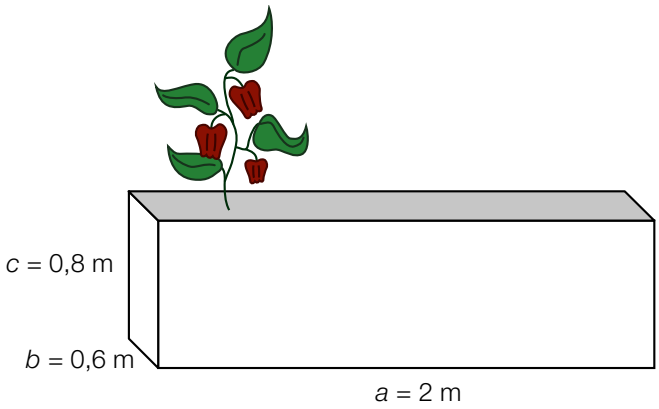
Hochbeet

Aufgabennummer: A_035

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Ein Gärtner möchte ein Hochbeet bauen. Dieses wird bis zu einer Höhe von 40 cm mit Zweigen und Laub gefüllt. Darauf kommt eine 20 cm hohe Schicht aus Gras und Kompost. Der Rest wird mit Gartenerde aufgefüllt.

a) Der Gärtner legt das Beet in Form eines Quaders mit den Maßen laut der nachstehenden Skizze an.



– Berechnen Sie die Menge an Gartenerde in Litern, die benötigt wird, um das quaderförmige Beet bis zum Rand aufzufüllen.

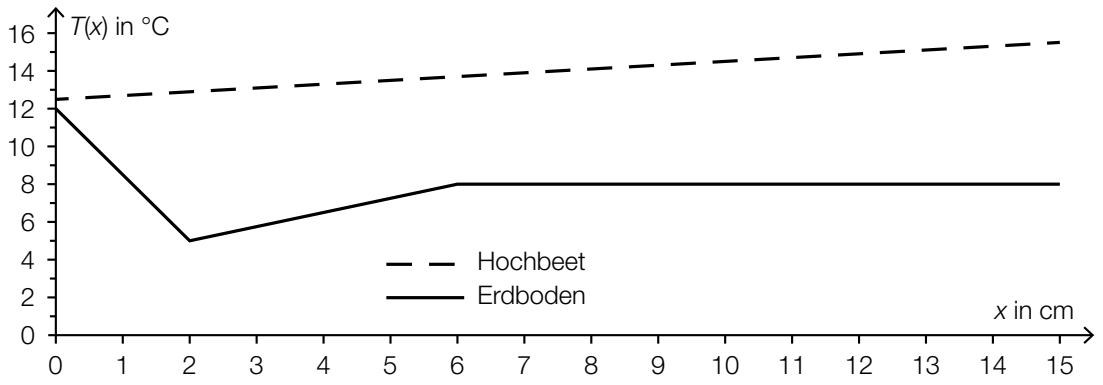
b) Der Gärtner plant, 2 gleich hohe Beete zu errichten. Ein Beet soll die Form eines Würfels haben, das andere Beet soll die Form eines Drehzylinders haben. Die Bepflanzungsfläche und die Höhe der Schichten sollen bei beiden Beeten gleich groß sein.

– Argumentieren Sie, warum der Verbrauch an Gartenerde beim zylinderförmigen Beet genau der gleiche wie beim würfelförmigen Beet ist.

– Erstellen Sie eine Formel, mit der der Radius r des Drehzylinders aus der Kantenlänge a des Würfels berechnet werden kann.

$r =$ _____

c) Die nachstehende Abbildung zeigt den unterschiedlichen Temperaturverlauf im Hochbeet und im Erdboden in Abhängigkeit von der Messtiefe.



x ... Messtiefe in cm
T(*x*) ... Temperatur in der Messtiefe *x* in °C

– Interpretieren Sie den Temperaturverlauf im Erdboden, indem Sie aus der obigen Abbildung diejenigen Bereiche ablesen, in denen die Temperatur steigt, fällt bzw. gleich bleibt.

– Erstellen Sie eine Funktionsgleichung für den Temperaturverlauf im Hochbeet.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Das Beet ist 80 cm hoch, davon werden 60 cm mit anderem Füllmaterial aufgefüllt, es bleibt also eine Höhe $c_1 = 20$ cm = 0,2 m für die Gartenerde übrig.

$V = a \cdot b \cdot c_1$
$V = 2 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}2\ \text{m}^3$
$V = 0{,}24\ \text{m}^3 = 240\ \text{L}$

Man benötigt 240 L Gartenerde.

b) Sowohl das Volumen eines Würfels als auch das Volumen eines Drehzylinders berechnet man mit der Formel $V = G \cdot h$. Da die Grundfläche und die Höhe beim Würfel und beim Zylinder laut Angabe konstant bleiben, benötigt man das gleiche Volumen an Erde.

Die Formeln für die Bepflanzungsflächen der beiden Beete lauten:

$A_{\text{Würfel}} = a^2$ $\qquad$ $A_{\text{Drehzylinder}} = r^2 \cdot \pi$

Durch Gleichsetzen der beiden Flächen und Umformen erhält man:

$a^2 = r^2 \cdot \pi \quad \Rightarrow \quad r = \frac{a}{\sqrt{\pi}}$

c) Beim Graph *Erdboden* ist die Temperatur an der Oberfläche mit 12 °C am größten und sinkt innerhalb der ersten 2 cm auf 5 °C ab. Zwischen 2 cm und 6 cm Messtiefe steigt die Temperatur auf 8 °C an und bleibt dann bis 15 cm Messtiefe konstant.

Funktionsgleichung: $T(x) = 0{,}2 \cdot x + 12{,}5$

Eine angemessene Ungenauigkeit beim Ablesen der Werte wird toleriert.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) 1 Zahlen und Maße
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) A Modellieren und Transferieren
c) A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 1
b) 2
c) 2

Thema: Biologie

Quelle: http://www.forschung-geotechnik.org/Forschung/Geothermik/temperaturmodell.htm

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Essen

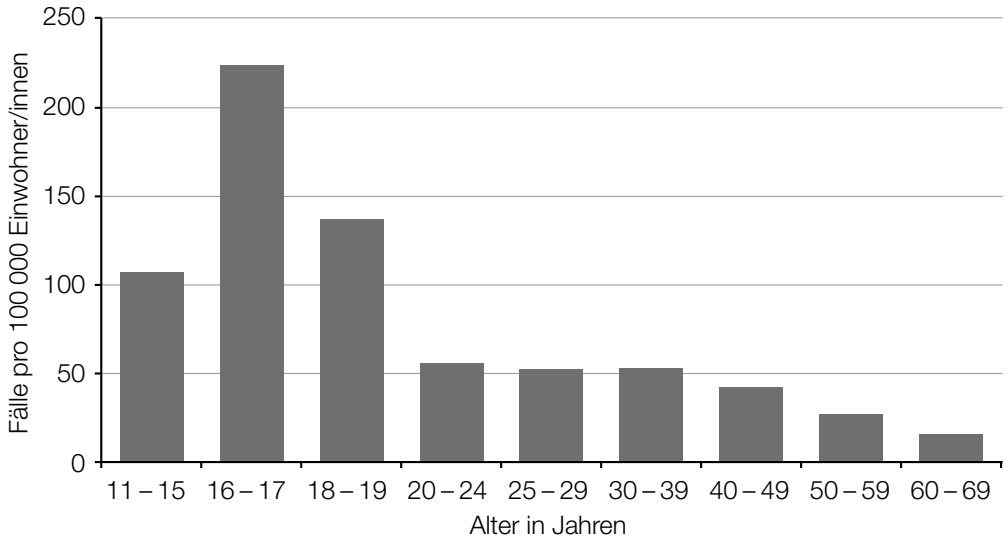
Aufgabennummer: A_090

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Schätzungen zufolge ist jede dritte neu an einer Essstörung erkrankte Person männlich.

– Beurteilen Sie, ob die folgenden Aussagen der ursprünglichen Aussage entsprechen:
1. „Doppelt so viele Frauen wie Männer erkranken neu an Essstörungen."
2. „Die Neuerkrankungsrate bei Essstörungen ist bei den Frauen um 100 % höher als bei den Männern."

b) Die nachstehende Abbildung zeigt die Altersverteilung der Personen mit Essstörungen in Oberösterreich für das Jahr 2010.



– Ermitteln Sie mithilfe der Abbildung die Anzahl der Fälle pro 100 000 Einwohner/innen für die 20- bis 29-Jährigen.

c) Laut einer Studie nehmen 25 % der 11- bis 15-jährigen Mädchen kein Frühstück zu sich. In einer Schulklasse dieser Altersgruppe mit 28 Schülerinnen/Schülern verhält sich die Anzahl der Mädchen zu der Anzahl der Burschen wie 4 zu 3.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 3 zufällig aus den Schülerinnen dieser Klasse ausgewählte Mädchen kein Frühstück zu sich genommen haben.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Die 1. Aussage ist korrekt:
Frauen → 2 Teile
Männer → 1 Teil
gesamt → 3 Teile

Frauen : Männer = 2 Teile : 1 Teil = 2 : 1

Somit sind es doppelt so viele Frauen wie Männer.

Auch die 2. Aussage ist korrekt:
1 Mann $\triangleq$ 100 %
2 Frauen $\triangleq$ 200 %

2 : 1 = Frauen : Männer

Die Differenz der Prozentsätze zwischen Frauen und Männern beträgt 100 %.

b) Man addiert die Fälle der Kategorien „20–24 Jahre“ und „25–29 Jahre“:
Es sind rund 115 Fälle auf 100 000 Einwohner/innen.

c) Anzahl der Mädchen: $\frac{4}{7} \cdot 28 = 16$
X … Anzahl der Mädchen aus dieser Schulklasse, die kein Frühstück zu sich nehmen

Binomialverteilung mit $n = 16$ und $p = 0{,}25$:
Berechnung mittels Technologieeinsatz: $P(X \geq 3) = 0{,}8028...$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von rund 80,3 % haben mindestens 3 Mädchen kein Frühstück zu sich genommen.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 1 Zahlen und Maße
b) 5 Stochastik
c) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) —
c) A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) leicht
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 1
c) 2

Thema: Alltag

Quellen: http://tvthek.orf.at/programs/1203-Zeit-im-Bild/episodes/3968934-Zeit-im-Bild
pro mente oö, factsheet [31.01.2012]
Frauengesundheitsbericht 2011

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Ernteertrag

Aufgabennummer: A_128

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Ein Landwirt will den Ertrag pro Quadratmeter für eine bestimmte Gemüsesorte steigern. Dazu prüft er den Einsatz eines Düngemittels.

a) Die Ableitungsfunktion E' der Ertragsfunktion E lautet:

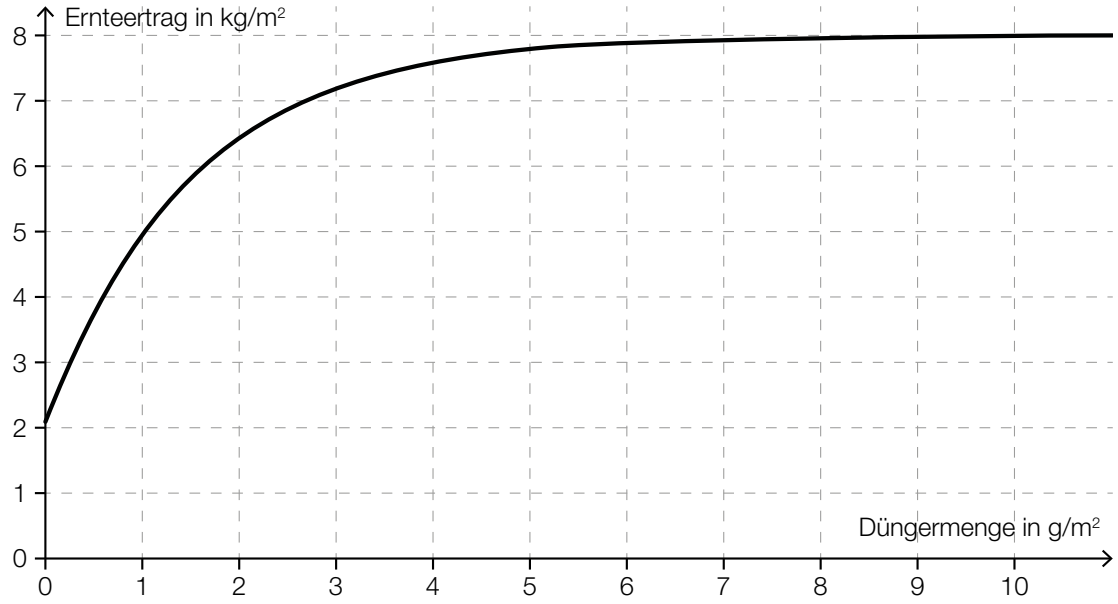
$E'(x) = -891 \cdot x^2 + 297 \cdot x$ mit $0 \le x \le 0{,}53$

x … Düngermenge in kg/m²
$E'(x)$ … lokale Ertragsänderungsrate des Ertrags bei der Düngermenge x

Ohne Düngemittel erntet der Landwirt durchschnittlich 2,5 kg Gemüse pro Quadratmeter.

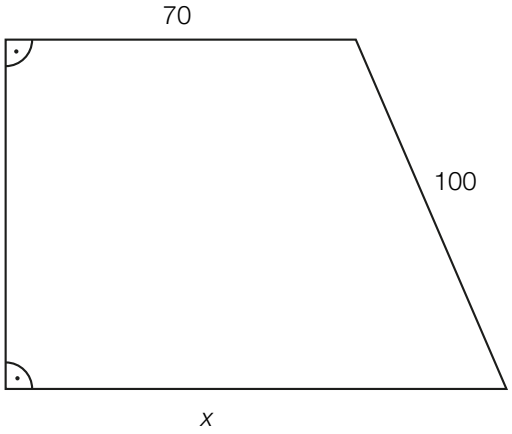
– Ermitteln Sie die Funktionsgleichung der Ertragsfunktion E.

b) Die nachstehende Grafik zeigt den Verlauf des Ernteertrags bei Anwendung eines speziellen Düngemittels, von dem maximal 11 g/m² ausgebracht werden dürfen.
Unter dem Begriff Grenzertrag bei einer bestimmten Düngermenge versteht man den Funktionswert der 1. Ableitung der Ertragsfunktion bei dieser Düngermenge.



– Lesen Sie aus der obigen Grafik den Grenzertrag bei Verwendung einer Düngermenge von 1 g/m² ab.
– Interpretieren Sie den Verlauf der Kurve ab einer Düngermenge von 8 g/m² im gegebenen Sachzusammenhang.

c) Die nachstehende Grafik zeigt ein zu düngendes Feld. Die Angabe der Seitenlängen erfolgt in Metern.



– Erstellen Sie aus x eine Formel zur Berechnung des Flächeninhalts A des Feldes.

$A =$ _____

Die Kosten für das Düngemittel betragen 50 Cent pro Kilogramm. Der Landwirt bringt 250 g Dünger pro Quadratmeter aus.

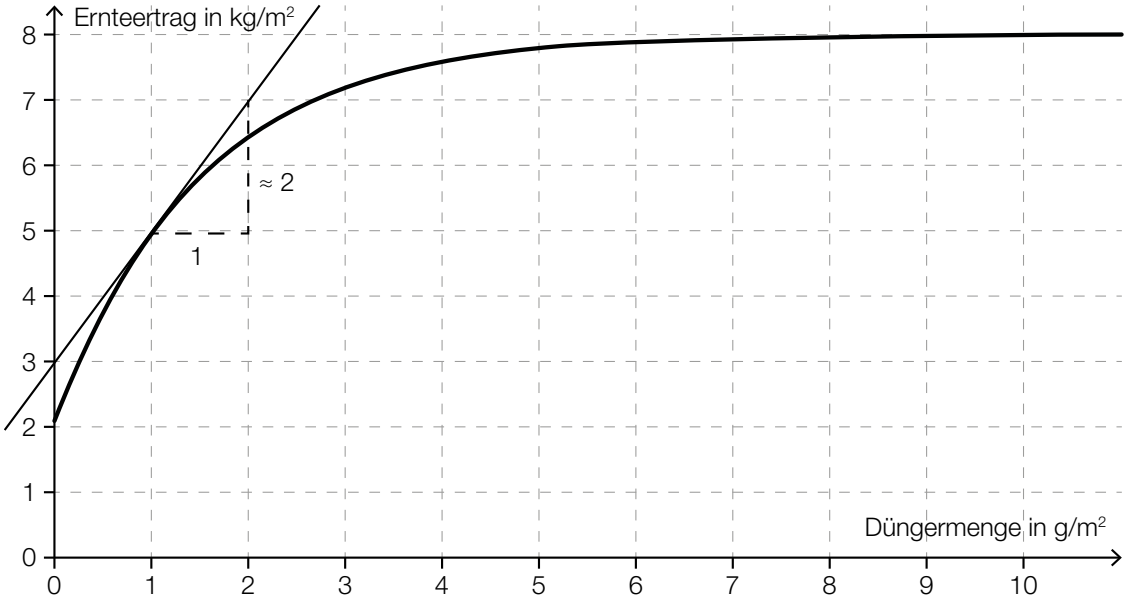
– Berechnen Sie die Kosten in Euro für die Düngung des Feldes für $x = 100$ m.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $E(x) = -297 \cdot x^3 + 148{,}5 \cdot x^2 + 2{,}5$

b)



Der Grenzertrag bei einer Düngermenge von 1 g/m² beträgt rund 2 kg Gemüse pro Gramm Düngemittel.

Ab einer Düngermenge von 8 g/m² erhöht sich der Ertrag bei höherem Düngereinsatz praktisch nicht mehr.

c) $A = \frac{(x + 70) \cdot \sqrt{100^2 - (x - 70)^2}}{2}$

$A = 8\,108{,}48...$

Kosten: $8\,108{,}48... \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}5 = 1\,013{,}56...$

Die Kosten der Düngung dieses Feldes betragen € 1.013,56.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 4 Analysis
c) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) —
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

a) schwer
b) schwer
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 1
b) 2
c) 2

Thema: Wirtschaft

Quellen: —

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Energieverbrauch und Joggen

Aufgabennummer: A_045

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Der „Energieverbrauch“ in Kilojoule pro Minute (kJ/min) beim Joggen ist unter anderem abhängig von der Körpermasse.

a) Der „Energieverbrauch“ beim Joggen durch ebenes Gelände bei einer bestimmten Geschwindigkeit wird durch die folgende Tabelle beschrieben:

Körpermasse in kg	50	60	70	80	90	100
„Energieverbrauch“ in kJ/min	58	66	73	82	90	98

– Berechnen Sie aus den Werten der obigen Tabelle die mittlere Änderungsrate des „Energieverbrauchs“ zwischen 50 kg und 100 kg.
– Erklären Sie die mathematische Bedeutung der mittleren Änderungsrate in einem linearen Modell.

b) Eine Person beginnt mit einer bestimmten Geschwindigkeit zu joggen und wird wegen Erschöpfung langsamer. Damit sinkt ihr „Energieverbrauch“ von anfänglich 73 kJ/min pro Minute um 0,5 % bezogen auf den Wert in der jeweils vorherigen Minute.

– Erstellen Sie eine Gleichung derjenigen Funktion, die den „Energieverbrauch“ dieser Person in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt.

c) Eine Joggerin joggt bergauf. Dabei kann der „Energieverbrauch“ näherungsweise durch die folgende Funktion f beschrieben werden:

$f(t) = -0{,}05 \cdot t^2 + 3 \cdot t + 66 \quad \text{mit} \quad 0 \leq t \leq 30$

t … Zeit in min
$f(t)$ … „Energieverbrauch“ zur Zeit t in kJ/min

Der „Gesamtenergieverbrauch“ (in kJ) während der ersten a Minuten des Trainings entspricht dem Inhalt derjenigen Fläche, die der Graph der Funktion f mit der Zeitachse im Intervall $[0; a]$ einschließt.

Beim Joggen in ebenem Gelände hat diese Joggerin erfahrungsgemäß einen konstanten „Energieverbrauch“ von 66 kJ/min.

– Erstellen Sie eine Gleichung, mit der man diejenige Zeitdauer t_1 berechnen kann, die die Joggerin bergauf laufen muss, um den gleichen „Gesamtenergieverbrauch“ zu haben wie bei 30 min Joggen in ebenem Gelände.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $\frac{98\ \text{kJ/min} - 58\ \text{kJ/min}}{100\ \text{kg} - 50\ \text{kg}} = \frac{40\ \text{kJ/min}}{50\ \text{kg}} = 0{,}8\ \frac{\text{kJ/min}}{\text{kg}}$

Die mittlere Änderungsrate einer linearen Funktion ist gleichbedeutend mit ihrer Steigung.

b) $f(t) = 73 \cdot 0{,}995^t$

t … Zeit in min
$f(t)$ ... „Energieverbrauch“ zur Zeit t in kJ/min

c) „Gesamtenergieverbrauch“ bei 30 min Joggen in kJ/min in ebenem Gelände:
66 kJ/min · 30 min = 1 980 kJ

$\int_0^{t_1} (-0{,}05 \cdot t^2 + 3 \cdot t + 66)\,dt = 1\,980$

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) A Modellieren und Transferieren
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) —
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) leicht
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 1
c) 2

Thema: Sport

Quelle: http://www.marchevital.de/ernaehrung/energieverbrauch.html

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Die Sonne

Aufgabennummer: A_062

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Die Sonne ist das Zentrum unseres Sonnensystems.

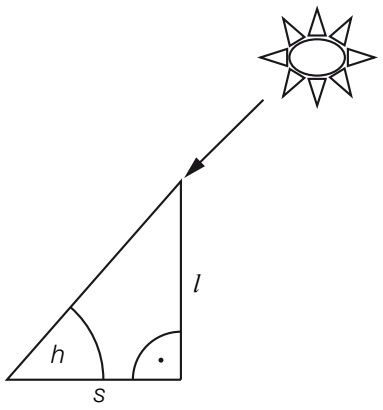
a) Das Volumen der Sonne wird mit rund $V = 1{,}41 \cdot 10^{18}\ \text{km}^3$ und ihre mittlere Dichte mit rund $\varrho = 1{,}41\ \text{g/cm}^3$ angegeben.
Die Masse m ist das Produkt aus Volumen V und Dichte ϱ, also $m = V \cdot \varrho$.

– Berechnen Sie die Masse der Sonne in Kilogramm.

b) Unter der Sonnenhöhe h versteht man den Winkel, den die einfallenden Sonnenstrahlen mit einer horizontalen Ebene bilden.

– Erstellen Sie eine Formel, mit deren Hilfe die Schattenlänge s eines Stabes der Länge l bei einer Sonnenhöhe h bestimmt werden kann (siehe nebenstehende Abbildung).

$s =$ _____



Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $V = 1{,}41 \cdot 10^{18}\ \text{km}^3 = 1{,}41 \cdot 10^{27}\ \text{m}^3 = 1{,}41 \cdot 10^{33}\ \text{cm}^3$

$m = 1{,}41 \cdot 10^{33} \cdot 1{,}41 = 1{,}9881 \cdot 10^{33}$
$1{,}9881 \cdot 10^{33}\ \text{g} = 1{,}9881 \cdot 10^{30}\ \text{kg}$

Die Masse der Sonne beträgt rund $1{,}9881 \cdot 10^{30}$ kg.

b) $s = \frac{l}{\tan(h)}$

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 1 Zahlen und Maße
b) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) —

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) leicht

Punkteanzahl:

a) 1
b) 1

Thema: Astronomie

Quellen: —

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Bevölkerungswachstum in den USA

Aufgabennummer: A_092

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Thomas Malthus gelang es, mit der folgenden Funktion B das Bevölkerungswachstum in den USA für einen bestimmten Zeitraum gut zu beschreiben.

$B(t) = 3{,}9 \cdot 1{,}0302^t$

t ... Zeit in Jahren mit $t = 0$ für das Jahr 1790
$B(t)$ ... Bevölkerungsanzahl zur Zeit t in Millionen

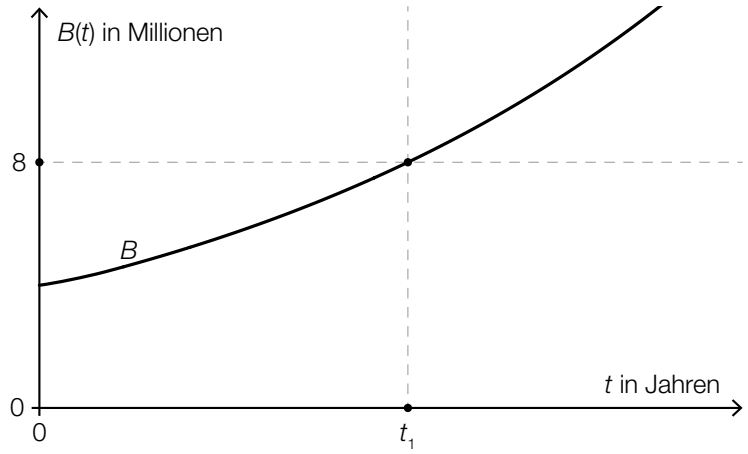
Angaben aus Volkszählungen

Jahr	1800	1810	1820
Bevölkerungsanzahl in Millionen	5,3	7,2	9,6

a) – Berechnen Sie mithilfe der Funktion B die Bevölkerungsanzahl in den USA für das Jahr 1820.

– Ermitteln Sie die prozentuelle Abweichung dieses errechneten Wertes vom erhobenen Wert aus der Volkszählung.

b) In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Funktion B in einem eingeschränkten Definitionsbereich dargestellt.



– Weisen Sie nach, dass im Intervall $[t_1; t_1 + 8]$ die relative Änderung und die mittlere Änderungsrate von B durch dieselbe Formel beschrieben werden können.

c) Es gilt:
$B'(t) = 3{,}9 \cdot \ln(1{,}0302) \cdot 1{,}0302^t$

– Interpretieren Sie den Ausdruck „$3{,}9 \cdot \ln(1{,}0302)$“ im gegebenen Sachzusammenhang.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $B(30) = 3{,}9 \cdot 1{,}0302^{30} = 9{,}52...$

Gemäß dem Modell ergibt sich eine Bevölkerungsanzahl von rund 9,52 Millionen Menschen.

Abweichung: $\frac{B(30) - 9{,}6}{9{,}6} = -0{,}0082...$

Die Abweichung des errechneten Wertes vom erhobenen Wert beträgt rund 0,8 %.

b) relative Änderung von B im Intervall $[t_1; t_1 + 8]$:
$\frac{B(t_1 + 8) - B(t_1)}{B(t_1)} = \frac{B(t_1 + 8) - 8}{8}$

mittlere Änderungsrate von B im Intervall $[t_1; t_1 + 8]$:
$\frac{B(t_1 + 8) - B(t_1)}{t_1 + 8 - t_1} = \frac{B(t_1 + 8) - 8}{8}$

Die Formeln für die beiden Änderungsmaße im Intervall $[t_1; t_1 + 8]$ stimmen also überein.

c) Das ist die momentane Änderungsrate der Bevölkerungsanzahl zum Zeitpunkt $t = 0$, also für das Jahr 1790.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 4 Analysis
c) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) —
c) —

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) schwer
c) schwer

Punkteanzahl:

a) 2
b) 1
c) 1

Thema: Demografie

Quelle: http://sinus-transfer.uni-bayreuth.de

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

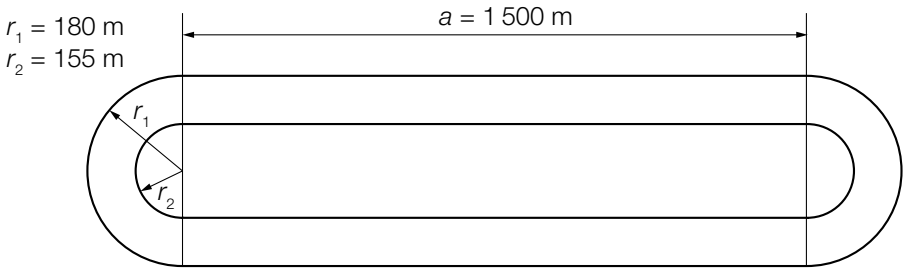
Autorennspiel

Aufgabennummer: A_087

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

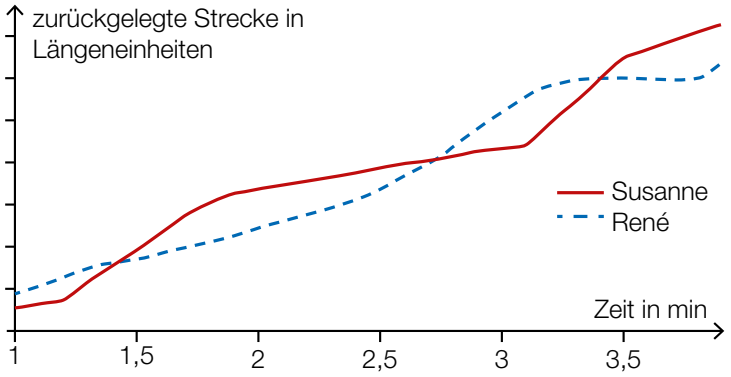
Susanne und René spielen ein Autorennspiel auf einer Spielkonsole. Dabei fahren sie mit je einem Auto einige Runden auf einem Rundkurs.

a) Der Kurs hat die in der nachstehenden Abbildung dargestellte Form.



– Berechnen Sie die Länge der Strecke, die ein Auto, das genau in der Mitte der Fahrbahn fährt, in einer Runde zurücklegt.

b) Das nachstehende Diagramm gibt einen Abschnitt des Spielverlaufs wieder.



– Kreuzen Sie die auf den im obigen Diagramm dargestellten Streckenabschnitt zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]*

Susanne liegt nach 3 Minuten vor René.	☐
Susanne überholt René genau 3-mal.	☐
Susanne liegt genau 1-mal vor René.	☐
René bleibt genau 1-mal stehen.	☐
Susanne bleibt genau 1-mal stehen.	☐

c) Bei dem Spiel kann man die Autos der Gegner mit Reißnägeln bewerfen und so deren Geschwindigkeit verringern. In einem Durchgang hat man maximal 2 Versuche zur Verfügung. Sobald man einen Treffer erzielt hat, ist der Durchgang beendet.

1. Versuch: 70 % Trefferwahrscheinlichkeit
2. Versuch: 40 % Trefferwahrscheinlichkeit

– Veranschaulichen Sie die möglichen Ausgänge dieses Zufallsexperiments in einem mit den jeweiligen Wahrscheinlichkeiten beschrifteten Baumdiagramm.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Auto genau einmal in einem Durchgang getroffen wird.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

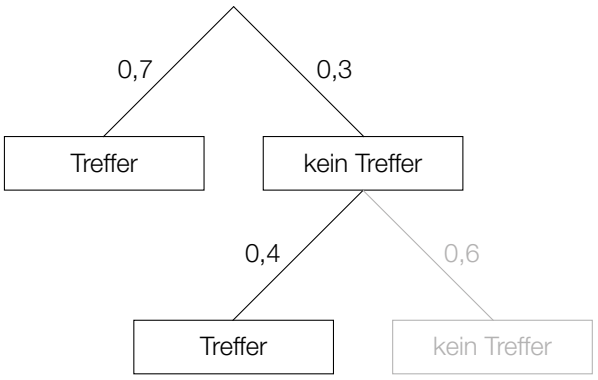
a) Radius der halbkreisförmigen Teile der Strecke: $r = \frac{r_1 + r_2}{2} = 167{,}5$
Länge der Strecke: $l = 2 \cdot a + 2 \cdot r \cdot \pi = 2 \cdot 1\,500 + 2 \cdot 167{,}5 \cdot \pi = 4\,052{,}4...$

Die Länge der Strecke beträgt rund 4 052 m.

b)

René bleibt genau 1-mal stehen.	☒

c)



P(„Treffer mit Reißnägeln“) = 0,7 + 0,3 · 0,4 = 0,82

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Auto getroffen wird, beträgt 82 %.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) –
b) –
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) leicht
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 1
b) 1
c) 2

Thema: Freizeit

Quellen: –

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Wirksame Substanz eines Medikaments

Aufgabennummer: A_085

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Einem Patienten werden Medikamente mit einer bestimmten wirksamen Substanz verabreicht.

a) Einem Patienten wird ein Medikament verabreicht. In jedem Zeitintervall der Länge 6 Stunden halbiert sich die Menge der wirksamen Substanz dieses Medikaments im Körper. Nach 18 Stunden befinden sich im Blut des Patienten noch 10 mg der wirksamen Substanz.

– Erklären Sie, mit welchem Funktionstyp der zeitliche Verlauf der Menge der wirksamen Substanz beschrieben werden kann.

– Berechnen Sie, welche Menge an wirksamer Substanz zu Beginn in diesem Medikament enthalten war.

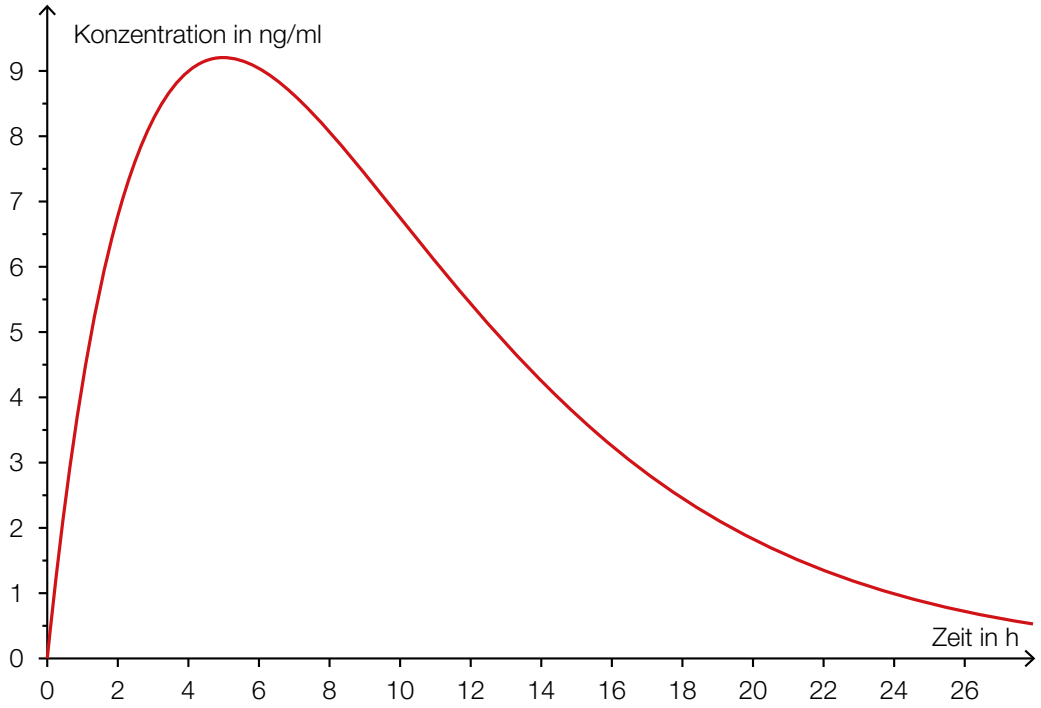
b) Die Abnahme der Konzentration der wirksamen Substanz eines anderen Medikaments im Blut kann mit der folgenden Funktion W beschrieben werden:

$W(t) = 45 \cdot e^{-0{,}223 \cdot t}$

t … Zeit nach Einnahme des Medikaments in h
$W(t)$ … Konzentration der wirksamen Substanz zur Zeit t in Nanogramm pro Milliliter (ng/ml) Blut

– Formen Sie die Gleichung $W = 45 \cdot e^{-0{,}223 \cdot t}$ nach t um.
– Berechnen Sie diejenige Zeit, nach der noch 20 % der ursprünglichen Konzentration vorhanden sind.

c) Der nachstehende Graph zeigt die Konzentration einer wirksamen Substanz im Blut in Abhängigkeit von der Zeit. Das Medikament wirkt bei einer Konzentration von mindestens 4 ng/ml.



– Kreuzen Sie die auf diesen Sachverhalt zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]*

Das Medikament ist erst dann wirksam, wenn die Konzentration der wirksamen Substanz im Blut mindestens 10 ng/ml beträgt.	☐
Ungefähr 10 Stunden nach der Einnahme wurde die maximale Konzentration an wirksamer Substanz erreicht.	☐
Die wirksame Substanz wird nach ungefähr 10 Stunden am stärksten abgebaut.	☐
Die Abbaurate der wirksamen Substanz beträgt rund 10 ng/ml pro Stunde.	☐
Das Medikament wirkt höchstens 10 Stunden lang.	☐

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Der zeitliche Verlauf der Menge der wirksamen Substanz kann durch eine Exponentialfunktion beschrieben werden, da bei diesem Funktionstyp die Funktionswerte in gleich langen Zeitintervallen immer um denselben Faktor zu- oder abnehmen.

18 Stunden entsprechen 3-mal der Halbwertszeit. Der Wert 10 mg ist somit der 8. Teil der Anfangsmenge. Diese beträgt daher 80 mg.

b) $\frac{W}{45} = e^{-0{,}223 \cdot t}$

$\ln\left(\frac{W}{45}\right) = -0{,}223 \cdot t$

$t = -\frac{1}{0{,}223} \cdot \ln\left(\frac{W}{45}\right)$

$0{,}2 \cdot 45 = 45 \cdot e^{-0{,}223 \cdot t}$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$t = 7{,}217\ldots$ h $\approx$ 7 h 13 min

c)

Die wirksame Substanz wird nach ungefähr 10 Stunden am stärksten abgebaut.	☒

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 4 Analysis

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) —
c) —

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2
c) 1

Thema: Medizin

Quellen: —

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Kinderhort

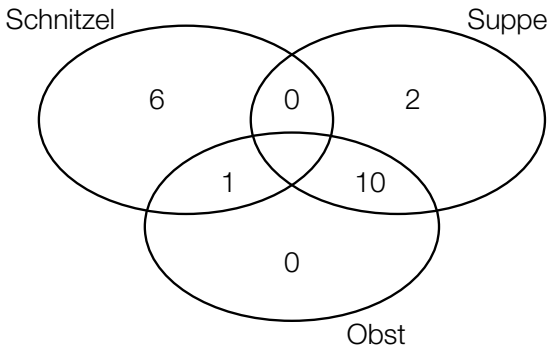
Aufgabennummer: B_234

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

In einem Kinderhort sind 36 Kinder für die Nachmittagsbetreuung angemeldet. 22 Kinder kommen aus der Volksschule, 7 aus der Neuen Mittelschule (NMS), 4 aus der AHS-Unterstufe und 3 aus der Sonderschule.

a) – Berechnen Sie die relativen Häufigkeiten der Kinder aus den verschiedenen Schulen.
– Erstellen Sie ein geeignetes Diagramm, das die Schultypen der Kinder wiedergibt.

b) An einem bestimmten Tag sind beim Mittagessen 26 Kinder anwesend. Es gibt als Mittagessen Nudelsuppe, Schnitzel und Obst. Im untenstehenden Venn-Diagramm ist dargestellt, wie sich die Kinder ihr Menü zusammenstellen. Es gibt kein Kind, das überhaupt nichts isst.



– Vervollständigen Sie das obige Mengendiagramm durch Eintragen der fehlenden Anzahl.
– Ermitteln Sie, wie viele Portionen Suppe, Hauptspeise und Nachspeise verzehrt wurden, wenn auch die beiden Hortpädagoginnen alle 3 Gerichte essen.

c) An einem anderen Tag notiert ein Praktikant, wie viele Minuten die Kinder für die Hausübung brauchen:

70, 32, 25, 15, 18, 20, 60, 22, 15, 30, 27, 30, 60, 12, 33, 75, 33, 35, 40, 48, 30, 20, 65, 10, 35, 95, 18, 32, 23, 29, 24

– Ermitteln Sie das arithmetische Mittel, den Median, die Standardabweichung und die Quartile.
– Argumentieren Sie, ob in diesem Fall das arithmetische Mittel oder der Median aussagekräftiger ist.

d) Unter den Hortkindern aus der NMS und der AHS werden 2 Karten für ein Konzert verlost. Ein Kind darf höchstens 1 Karte gewinnen.

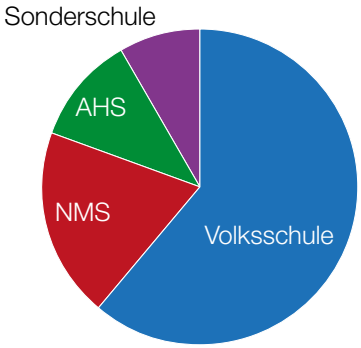
– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass
(1) beide Kinder, die eine Konzertkarte gewinnen, aus der NMS sind,
(2) das 1. Kind, das bei der Verlosung gewinnt, aus der AHS und das 2. Kind, das bei der Verlosung gewinnt, aus der NMS ist.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

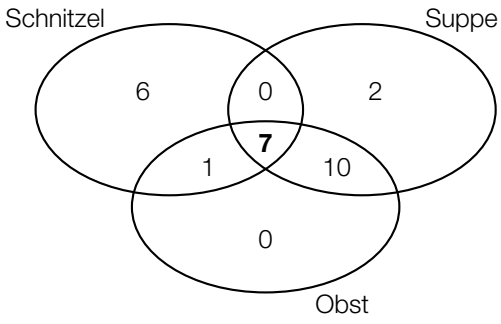
a)

VS	NMS	AHS	SS
22	7	4	3
$\frac{22}{36} \approx 61{,}11\ \%$	19,44 %	11,11 %	8,33 %



(Auch Säulen- oder Balkendiagramm möglich. Bei grafikfähigem Taschenrechner reicht eine Handskizze.)

b)



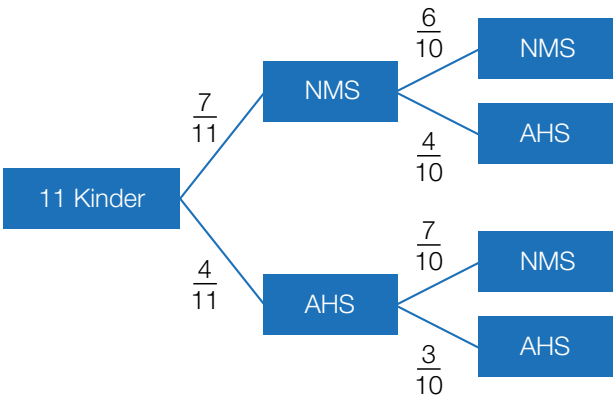
2 Kinder essen nur Suppe, 10 Kinder essen nur Suppe und Obst, 6 Kinder essen nur Schnitzel, 1 Kind isst nur Schnitzel und Obst. 7 Kinder essen alle 3 Gerichte.
Es werden insgesamt 16 Portionen Schnitzel, 21 Portionen Suppe und 20 Portionen Obst verzehrt.

c) arithmetisches Mittel: $\bar{x} = 34{,}87$ min
Median: 30 min
Standardabweichung $s = 20{,}07$ min
$Q_1 = 20$ min*, Q_2 = Median = 30 min, $Q_3 = 40$ min*

* Die Ergebnisse für Q_1 und Q_3 können von den angegebenen Werten abweichen, da verschiedene Technologien mit unterschiedlichen Definitionen rechnen.

In diesem Fall ist der Median aussagekräftiger, weil es offensichtlich einige Kinder gibt, die sehr lange brauchen. Es liegt eine schiefe Verteilung vor, die vom arithmetischen Mittel nicht gut repräsentiert wird.

d) 7 Kinder aus der NMS, 4 Kinder aus der AHS



$\frac{7}{11} \cdot \frac{6}{10} = \frac{42}{110}$

Wahrscheinlichkeit, dass beide aus der NMS sind: ≈ 38,2 %

$\frac{4}{11} \cdot \frac{7}{10} = \frac{28}{110}$

Wahrscheinlichkeit, dass das 1. Kind aus der AHS und das 2. Kind aus der NMS ist: ≈ 25,5 %

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 1 Zahlen und Maße
c) 5 Stochastik
d) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) —
c) D Argumentieren und Kommunizieren
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) leicht
d) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2
c) 4
d) 2

Thema: Alltag

Quelle: —

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Verdoppelungszeit von Bakterien

Aufgabennummer: A_234

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Die Masse eines *Escherichia-coli*-Bakteriums beträgt 10^{-12} g. Die Verdoppelungszeit des Bakteriums beträgt unter bestimmten Voraussetzungen 17 min.

– Berechnen Sie die Masse in Tonnen, die aus 1 Bakterium dieser Art nach 17 Stunden (theoretisch) entstanden ist.

b) Eine Menge von 100 *Lactobacillus-acidophilus*-Bakterien vermehrte sich innerhalb von 6 Stunden auf eine Anzahl von 3 533 Bakterien.

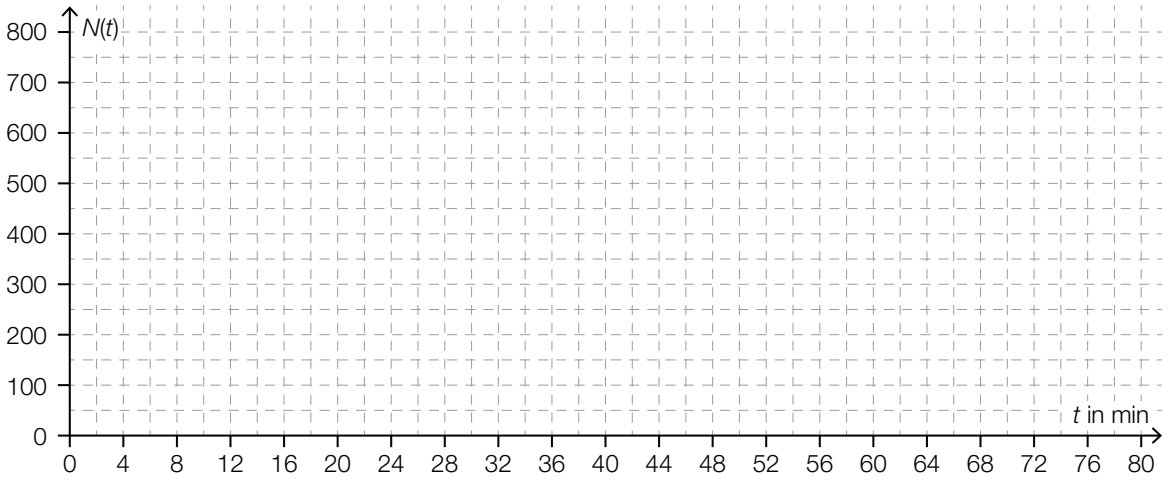
– Ermitteln Sie unter Annahme eines exponentiellen Wachstums die Verdoppelungszeit in Minuten.

c) Die Verdoppelungszeit des *Streptococcus-lactis*-Bakteriums beträgt 26 min.
Zu Beginn ($t = 0$) sind 100 Bakterien vorhanden.

Die Anzahl der Bakterien soll in Abhängigkeit von der Zeit durch eine Exponentialfunktion N beschrieben werden.

t … Zeit in min
$N(t)$ … Anzahl der Bakterien zur Zeit t

– Erstellen Sie eine Gleichung der Funktion N.
– Zeichnen Sie im nachstehenden Diagramm den Graphen von N ein.



d) In einer bestimmten Wachstumsphase kann man die Anzahl der Bakterien in Abhängigkeit von der Zeit näherungsweise durch eine Exponentialfunktion B beschreiben:

$B(t) = B_0 \cdot e^{\lambda \cdot t}$ mit $t \geq 0$

t … Zeit in Minuten, $t = 0$ ist Beobachtungsbeginn
$B(t)$ … Anzahl der Bakterien zur Zeit t
B_0 … Anzahl der Bakterien zur Zeit $t = 0$, $B_0 > 0$
λ … Konstante, $\lambda > 0$

– Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen des jeweils richtigen Satzteils so, dass eine korrekte Aussage entsteht.

Die Funktion B ist _____①_____, weil _____②_____.

①	
streng monoton steigend	☐
konstant	☐
streng monoton fallend	☐

②	
sie kein Maximum hat	☐
sie nur für positive t definiert ist	☐
B_0 und λ positiv sind	☐

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Masse in Gramm: $10^{-12} \cdot 2^{60} \approx 1\,152\,921{,}5$ g.
Dies entspricht einer Masse von rund 1,15 t.

b) $3\,533 = 100 \cdot a^{6 \cdot 60}$

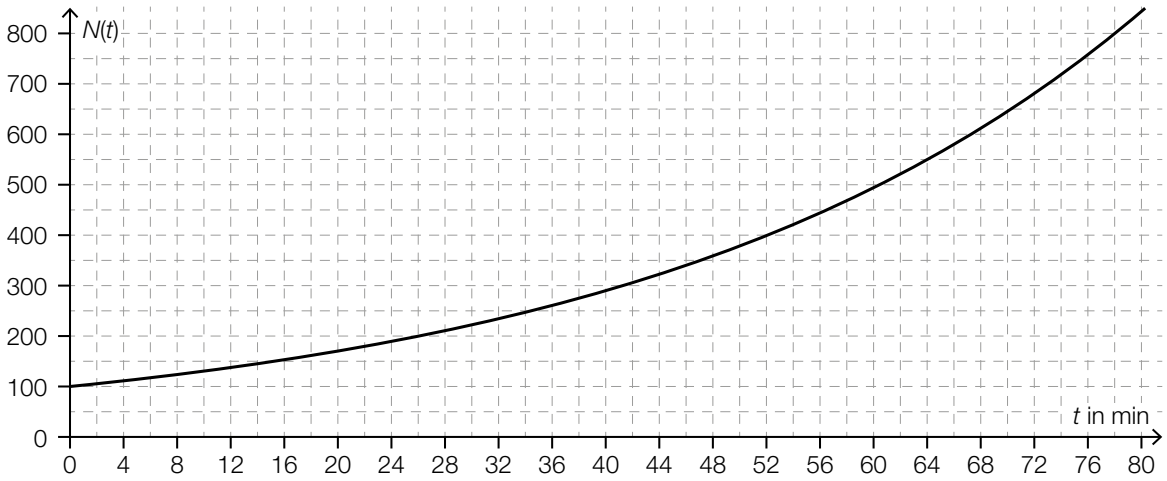
$a = \sqrt[360]{35{,}33} = 1{,}0099...$ (Änderungsfaktor pro min)

$2 = 1{,}0099...^{t_V}$

$t_V = \dfrac{\ln(2)}{\ln(1{,}0099...)} = 70{,}0...$

Die Verdoppelungszeit beträgt rund 70 min.

c) $N(t) = 100 \cdot 2^{\frac{1}{26} \cdot t}$ *oder* $N(t) = 100 \cdot 1{,}0270...^{t}$



d)

①	
streng monoton steigend	☒

②	
B_0 und λ positiv sind	☒

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 1 Zahlen und Maße
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 3 Funktionale Zusammenhänge
d) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 2 Algebra und Geometrie
c) –
d) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) A Modellieren und Transferieren
d) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) –
b) –
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) –

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) leicht
d) mittel

Punkteanzahl:

a) 1
b) 1
c) 2
d) 1

Thema: Biologie

Quellen:
Fuchs, G. Allgemeine Mikrobiologie. Thieme Verlag, 2014
http://book.bionumbers.org/ (Feb. 2016)
http://www.textbookofbacteriology.net/ (Feb. 2016)

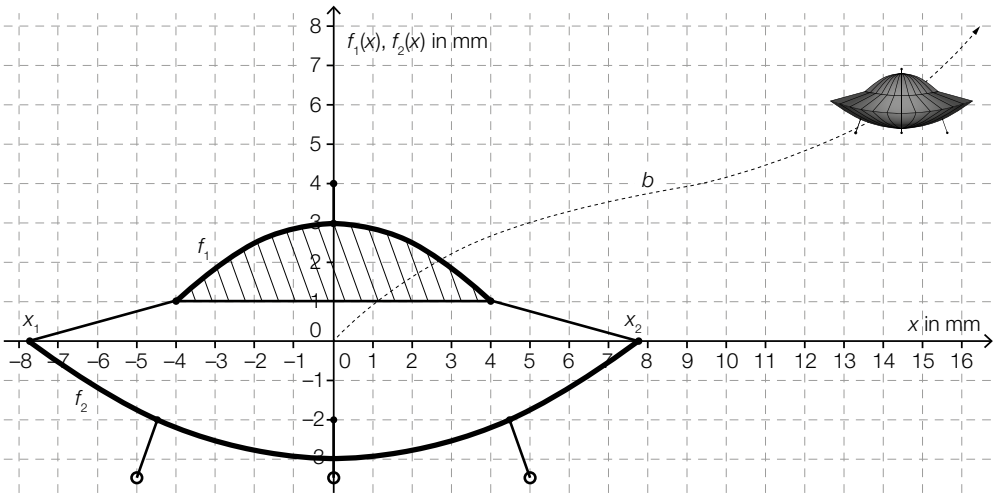
Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

UFO

Aufgabennummer: A_188

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Für ein Computerspiel wurde ein einfaches UFO gezeichnet. Die Kuppel und der Unterbau werden durch die quadratischen Funktionen f_1 und f_2 modelliert (siehe nachstehende Abbildung).



$f_2(x) = \frac{x^2}{20} - 3$

x, $f_2(x)$ ... Koordinaten in mm

a) – Stellen Sie mithilfe der obigen Abbildung eine Funktionsgleichung von f_1 auf.
– Berechnen Sie den Inhalt der in der obigen Abbildung schraffierten Fläche.

b) – Ermitteln Sie die beiden Nullstellen x_1 und x_2 der Funktion f_2.
– Interpretieren Sie, was durch das Integral $\int_{x_1}^{x_2} f_2(x)\,dx$ berechnet wird.

c) Die Steigung der dargestellten Flugbahn b des UFOs erhält man durch folgende Ableitungsfunktion:

$b'(x) = \frac{x^2}{80} - \frac{x}{5} + 1$

– Ermitteln Sie eine Funktionsgleichung der Funktion b.

Folgende Gleichung wurde aufgestellt:

$\frac{x}{40} - \frac{1}{5} = 0$

– Interpretieren Sie, was durch die Lösung dieser Gleichung in Bezug auf den Graphen von b bestimmt wird.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $f_1(x) = a \cdot x^2 + 3$

$f_1(4) = 1 \quad \Rightarrow \quad a \cdot 4^2 + 3 = 1 \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{1}{8}$

$f_1(x) = -\frac{1}{8} \cdot x^2 + 3$

$2 \cdot \left(\int_0^4 f_1(x)\,dx - 4 \right) = 10{,}66\ldots$

Der Inhalt der schraffierten Fläche beträgt rund 10,7 mm^2.

b) $0 = \frac{x^2}{20} - 3 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \pm\sqrt{60} = \pm 7{,}74...$

Das Integral entspricht dem orientierten Flächeninhalt (in diesem Fall negativ) zwischen x-Achse und dem Funktionsgraphen von f_2.

c) $b(x) = \int \left(\frac{x^2}{80} - \frac{x}{5} + 1 \right) dx = \frac{x^3}{240} - \frac{x^2}{10} + x + C$, wobei die Konstante C null ist, da der Graph durch den Koordinatenursprung verläuft.

$b(x) = \frac{x^3}{240} - \frac{x^2}{10} + x$

Die gegebene Gleichung entspricht $b''(x) = 0$. Die Lösung ist die Wendestelle der Funktion b.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 4 Analysis
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) leicht
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2
c) 2

Thema: Sonstiges

Quellen: —

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Schmuckstücke

Aufgabennummer: A_241

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein Goldschmied fertigt Schmuckstücke nach kreisrunden Designvorlagen.

a) Die kreisrunde Designvorlage für einen Ohrring wird durch eine Trennlinie geteilt, die durch den Graphen einer Polynomfunktion 3. Grades f beschrieben werden kann (siehe Abbildung 1).

– Stellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten von f auf.

– Berechnen Sie diese Koeffizienten.

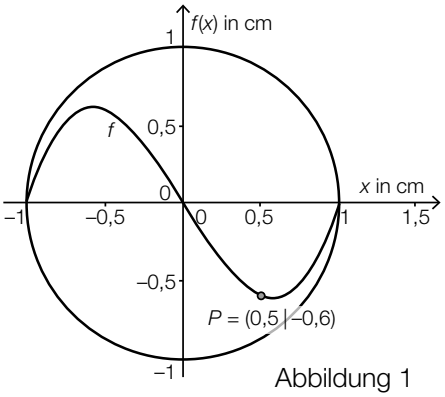


Abbildung 1

b) Die kreisrunde Designvorlage für einen Armbandanhänger wird durch die in Abbildung 2 veranschaulichte Fläche zwischen den beiden Funktionsgraphen von g und h geteilt.

$h(x) = \frac{8}{9} \cdot x^3 - \frac{8}{9} \cdot x$

$g(x) = a \cdot h(x)$ mit $a > 0$

x, $g(x)$, $h(x)$ … Koordinaten in cm

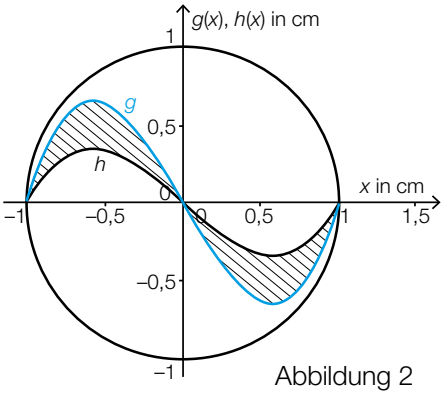


Abbildung 2

– Erklären Sie, was eine Multiplikation einer Funktion mit einem Faktor $a > 1$ bewirkt.

– Begründen Sie, warum gilt: $\int_{-1}^{1} (g(x) - h(x))\,dx = 0$

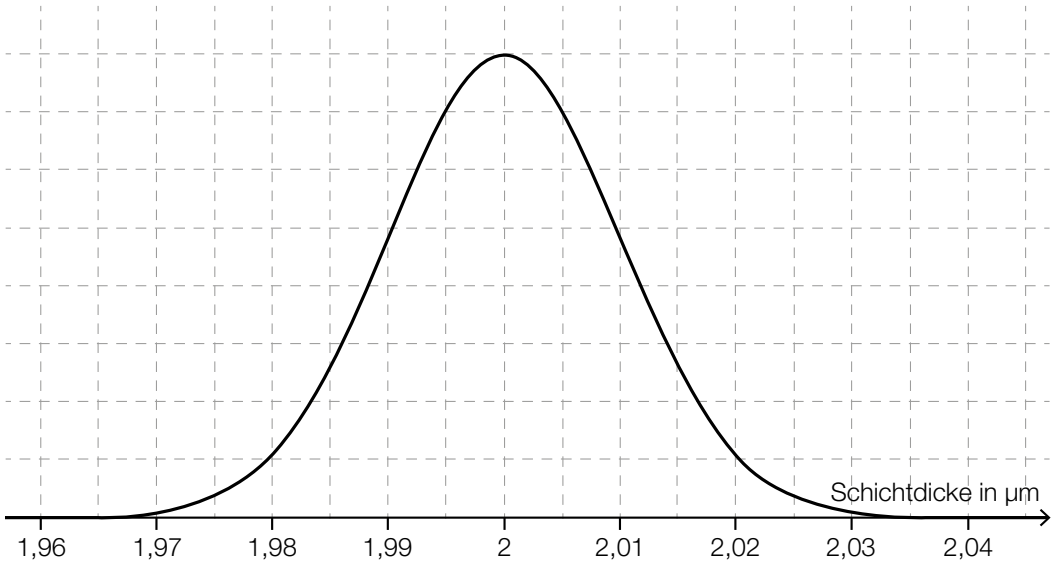
– Bestimmen Sie den Faktor a so, dass der schraffierte Flächeninhalt 0,4 cm² beträgt.

c) – Ordnen Sie den beiden Satzanfängen jeweils das richtige Satzende aus A bis D zu.
[2 zu 4]

Wird der Radius einer kreisrunden Designvorlage um 50 % vergrößert, ...	
Wird der Radius einer kreisrunden Designvorlage verdoppelt, ...	

A	… so verdoppelt sich der Flächeninhalt.
B	… so steigt der Flächeninhalt auf das 1,5-Fache an.
C	… so vervierfacht sich der Flächeninhalt.
D	… so steigt der Flächeninhalt auf das 2,25-Fache an.

d) Die Schmuckstücke werden mit einer Goldschicht überzogen. Die Schichtdicke in Mikrometern (µm) aller produzierten Schmuckstücke ist annähernd normalverteilt. In der nachstehenden Grafik ist der Graph der zugehörigen Dichtefunktion dargestellt.



– Lesen Sie den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ ab.

– Veranschaulichen Sie in der obigen Grafik die Wahrscheinlichkeit, dass die Schichtdicke eines zufällig ausgewählten Schmuckstücks maximal 1,995 µm beträgt.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$

I:	$f(-1) = 0$	$-a + b - c + d = 0$
II:	$f(0) = 0$	$d = 0$
III:	$f(1) = 0$	$a + b + c + d = 0$
IV:	$f(0{,}5) = -0{,}6$	$0{,}125 \cdot a + 0{,}25 \cdot b + 0{,}5 \cdot c + d = -0{,}6$

oder

Lösung mittels Technologieeinsatz:
$a = 1{,}6,\ b = 0,\ c = -1{,}6,\ d = 0$

b) Die Multiplikation einer Funktion mit einem Faktor $a > 1$ bewirkt eine vertikale Streckung des Graphen um den Faktor a. (Die Null-, Extrem- und Wendestellen bleiben an der gleichen Stelle, nur deren y-Koordinaten werden mit a multipliziert.)

$\int_{-1}^{1} (g(x) - h(x))\,dx = 0$, da die Fläche rechts von der y-Achse genau der Fläche links von der y-Achse, jedoch mit negativem Vorzeichen entspricht.

$$\int_{-1}^{0} \left(\frac{8 \cdot a \cdot x^3}{9} - \frac{8 \cdot a \cdot x}{9} - \frac{8 \cdot x^3}{9} + \frac{8}{9} \cdot x \right) dx = 0{,}2$$

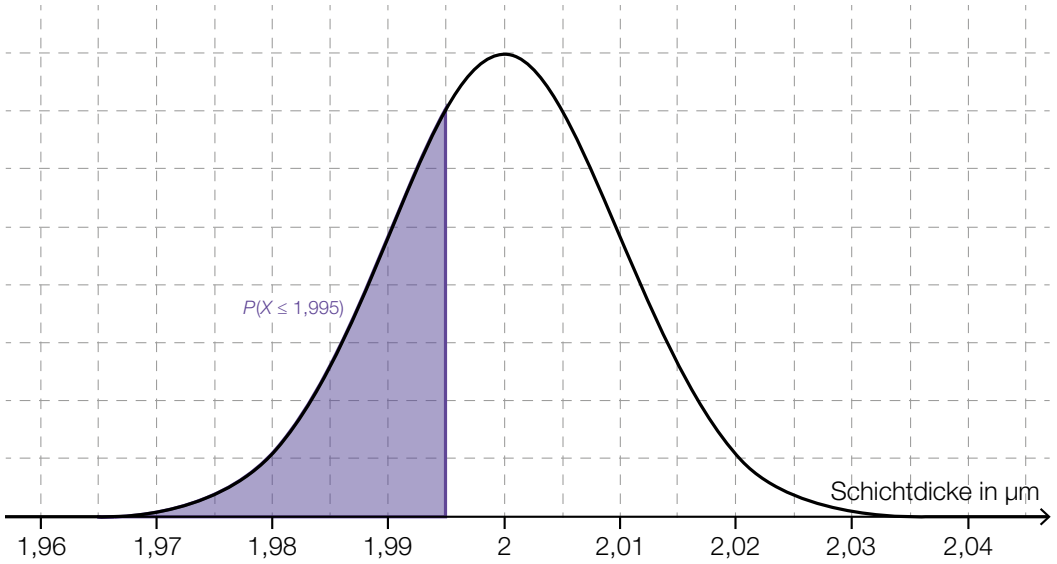
Lösung mittels Technologieeinsatz:
$a = 1{,}9$

c)

Wird der Radius einer kreisrunden Designvorlage um 50 % vergrößert, ...	D
Wird der Radius einer kreisrunden Designvorlage verdoppelt, ...	C

A	… so verdoppelt sich der Flächeninhalt.
B	… so steigt der Flächeninhalt auf das 1,5-Fache an.
C	… so vervierfacht sich der Flächeninhalt.
D	… so steigt der Flächeninhalt auf das 2,25-Fache an.

d) μ = 2 µm (Extremstelle) und σ = 0,01 µm (Entfernung Extremstelle – Wendestelle)
Toleranzbereich für σ: [0,005 µm; 0,015 µm]



Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 2 Algebra und Geometrie
d) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 4 Analysis
c) —
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) C Interpretieren und Dokumentieren
d) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) A Modellieren und Transferieren, B Operieren und Technologieeinsatz
c) —
d) A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) schwer
c) leicht
d) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 3
c) 1
d) 2

Thema: Design

Quellen: —

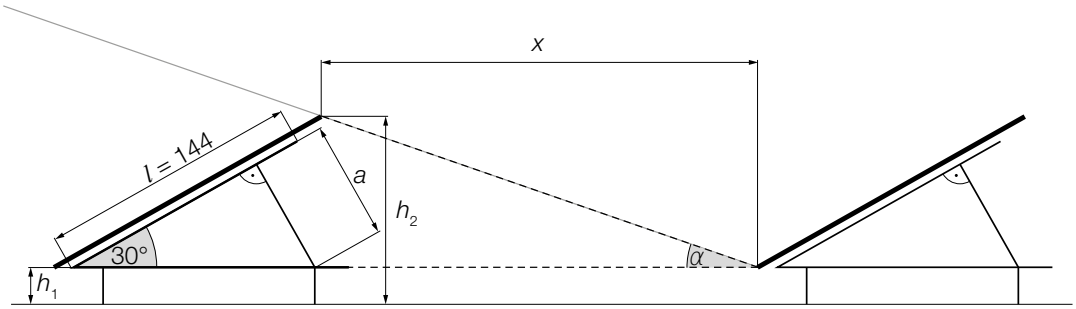
Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Montagekonstruktion

Aufgabennummer: A_176

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Auf einem Flachdach soll eine Montagekonstruktion für die Module einer Photovoltaikanlage angebracht werden (siehe nachstehende schematische Abbildung).



a) Die Module sollen dabei jeweils so angebracht werden, dass sie keinen Schatten auf das dahinter angebrachte Modul werfen, wenn die Sonne unter einem Höhenwinkel α einfällt.

– Stellen Sie eine Formel zur Berechnung des dafür erforderlichen Abstands x aus h_1, h_2 und α auf.

$x =$ _____

b) Bei der Montagekonstruktion wird das Tragprofil mit der Länge a normal auf das Tragprofil mit der Länge l = 144 cm angebracht (siehe obige Abbildung). Die Länge l wird dadurch im Verhältnis 5 : 1 geteilt.

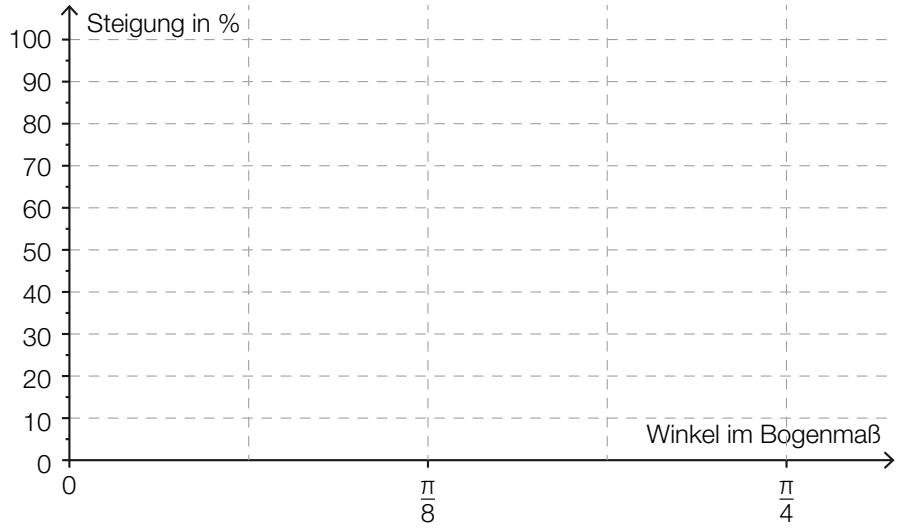
– Berechnen Sie die Länge a in mm.

c) Der Zusammenhang zwischen dem Neigungswinkel α und der zugehörigen Steigung in Prozent wird durch die Funktion g beschrieben:

$g(\alpha) = \tan(\alpha) \cdot 100$

α … Winkel im Bogenmaß
$g(\alpha)$ … Steigung beim Winkel α in %

– Zeichnen Sie den Graphen der Funktion g im Intervall $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ in das gegebene Koordinatensystem ein.



d) Für die Montage eines bestimmten Moduls wird ein Listenpreis von € 208,50 angegeben. Unternehmen *A* bietet einen Rabatt von 10 % auf den Listenpreis an. Ein Kunde kauft x dieser Module bei Unternehmen *A*.

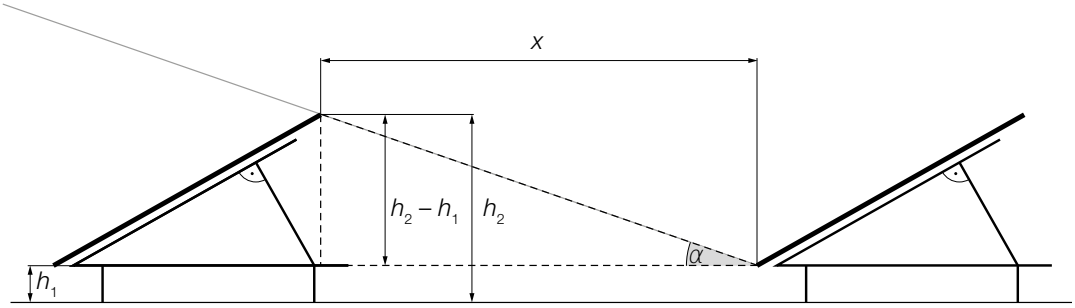
– Erstellen Sie mithilfe von x eine Formel für den Gesamtbetrag B, den der Kunde zahlen muss.

$B =$ _____

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $x = \dfrac{h_2 - h_1}{\tan(\alpha)}$



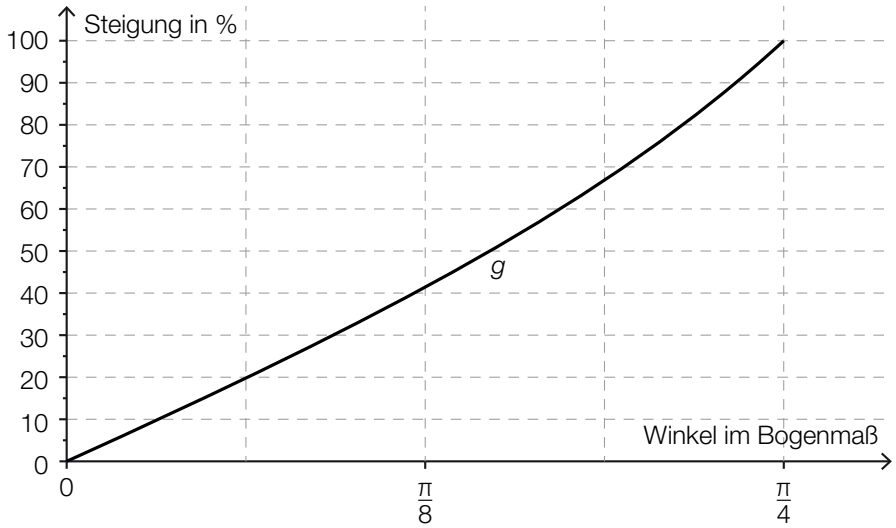
b) $\frac{5}{6} \cdot 144 = 120$

$\tan(30°) = \dfrac{a}{120}$

$a = \tan(30°) \cdot 120 = 69{,}28...$

Die Länge a beträgt rund 693 mm.

c)



d) $B = 208{,}5 \cdot 0{,}9 \cdot x$

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 3 Funktionale Zusammenhänge
d) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) A Modellieren und Transferieren
c) —
d) —

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) leicht
d) leicht

Punkteanzahl:

a) 1
b) 2
c) 1
d) 1

Thema: Sonstiges

Quellen: —

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Erweiterung der Produktpalette

Aufgabennummer: B_142

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein Unternehmen möchte sein Angebot um ein neues Produkt erweitern. Im Zuge dessen werden die Gesamtkosten untersucht und es wird die Aufnahme eines Kredits in die Wege geleitet.

a) Die Gesamtkosten lassen sich näherungsweise durch eine Polynomfunktion 3. Grades K mit $K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ beschreiben. Die Kostenkehre liegt bei 100 Stück. Die Grenzkosten an der Kostenkehre betragen € 0,30/Stück. Die Fixkosten betragen € 5.000. Eine Produktion von 250 Stück verursacht Kosten in Höhe von € 10.000.

– Erstellen Sie das Gleichungssystem, mit dem man die Koeffizienten dieser Kostenfunktion ermitteln kann.
– Berechnen Sie die Koeffizienten der Kostenfunktion.

b) Der Unternehmer benötigt einen Kredit in Höhe von € 400.000. Die Rückzahlung erfolgt durch nachschüssige Monatsraten der Höhe R über einen Zeitraum von 10 Jahren bei einem Jahreszinssatz von 3,7 %.

– Veranschaulichen Sie den Kreditbetrag und die Raten auf einer Zeitachse.
– Berechnen Sie die Höhe der Monatsraten.

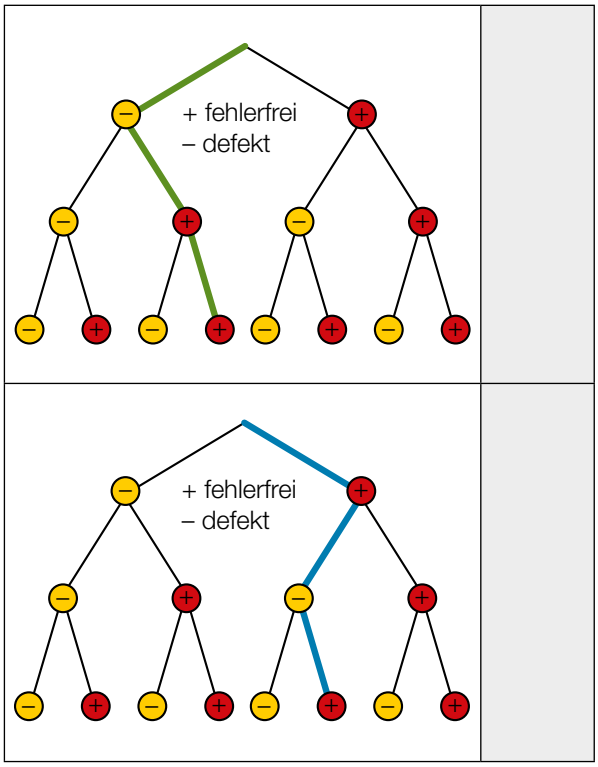
c) Eine Gewinnminderung ergibt sich für den Unternehmer durch die Tatsache, dass bei der Produktion erwartungsgemäß 10 % fehlerhafte Artikel auftreten.

Man entnimmt der Produktion 10 Stück.

– Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit mindestens 2 fehlerhafte Stück unter diesen 10 auftreten werden.

Gegeben sind zwei Baumdiagramme. Der markierte Ast des jeweiligen Baumdiagramms gibt bei Entnahme von 3 Stück aus der Produktion die Wahrscheinlichkeit einer fehlerhaften bzw. fehlerfreien Produktionsreihe wieder.

– Ordnen Sie den beiden Diagrammen jeweils die zutreffende Aussage aus A bis D zu. *[2 zu 4]*



A	Nur das 2. Stück ist fehlerhaft.
B	Das 2. und das 3. Stück sind fehlerhaft.
C	Das 1. und das 3. Stück sind fehlerhaft.
D	Nur das 1. Stück ist fehlerhaft.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

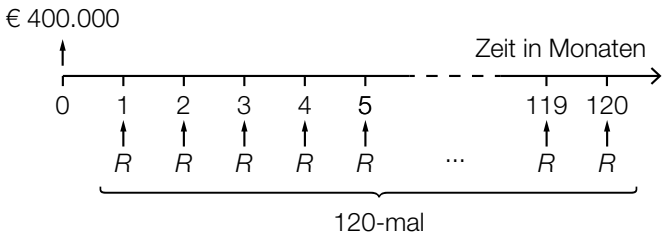
Möglicher Lösungsweg

a) $K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$
$K'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x + c$
$K''(x) = 6 \cdot a \cdot x + 2 \cdot b$

Kostenkehre: $600 \cdot a + 2 \cdot b = 0$
Grenzkosten: $3 \cdot a \cdot 100^2 + 2 \cdot b \cdot 100 + c = 0{,}3$
Fixkosten: $d = 5\,000$
Kosten für 250 Stück: $a \cdot 250^3 + b \cdot 250^2 + c \cdot 250 + d = 10\,000$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$a = 0{,}001125$
$b = -0{,}3377\ldots$
$c = 34{,}0714$
$d = 5\,000$

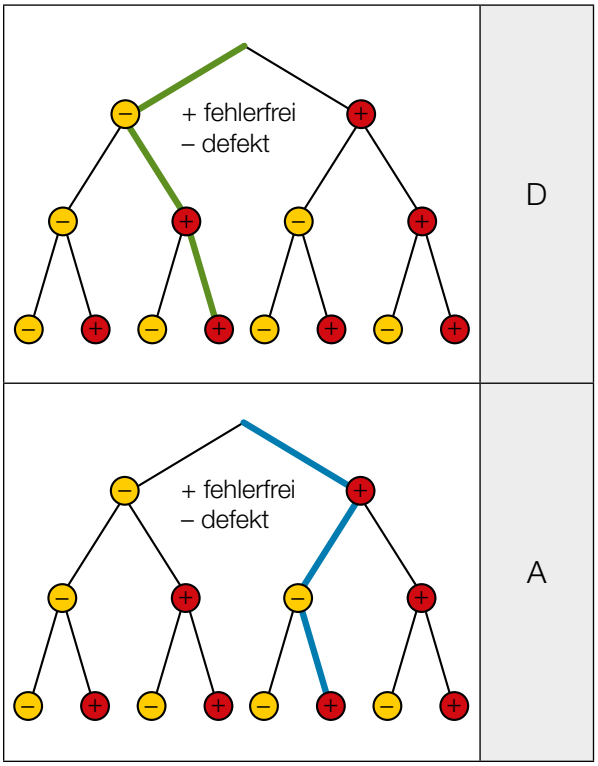
b)



$400\,000 = R \cdot \frac{q_{12}^{120} - 1}{q_{12} - 1} \cdot \frac{1}{q_{12}^{120}}$ mit $q_{12} = \sqrt[12]{1{,}037}$
$R = 3\,981{,}476\ldots$

Die Höhe der Monatsraten beträgt € 3.981,48.

c) $P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \approx 26{,}4\ \%$



A	Nur das 2. Stück ist fehlerhaft.
B	Das 2. und das 3. Stück sind fehlerhaft.
C	Das 1. und das 3. Stück sind fehlerhaft.
D	Nur das 1. Stück ist fehlerhaft.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) A Modellieren und Transferieren
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 4
b) 3
c) 2

Thema: Wirtschaft

Quellen: —

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Wohnungsrenovierung

Aufgabennummer: B_139

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Im Zuge einer Wohnungsrenovierung benötigt Thomas einen Kredit in Höhe von € 30.000.

a) Seine Bank bietet ihm einen Kredit mit einer Laufzeit von 10 Jahren, der bei einem Quartalszinssatz von 1 % p. q. durch nachschüssige Monatsraten getilgt werden soll.

– Ermitteln Sie den äquivalenten Monatszinssatz.
– Erstellen Sie eine Gleichung, mit der die Ratenhöhe berechnet werden kann.
– Berechnen Sie die Ratenhöhe.

b) Thomas holt sich für diesen Kredit ein weiteres Angebot von einer anderen Bank. Diese verlangt eine Bearbeitungsgebühr von 2 % vom Kreditbetrag, die bei der Auszahlung einbehalten wird.
Die Rückzahlung des Kredits erfolgt in 12 Jahren durch nachschüssige Quartalsraten in Höhe von je € 800.

– Veranschaulichen Sie den Zahlungsstrom auf einer Zeitachse.
– Berechnen Sie den effektiven Jahreszinssatz.

c) Das Angebot einer dritten Bank ist in folgendem Tilgungsplan dargestellt:

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0	0	0	0	€ 30.000,00
1	€ 1.350,00	€ 491,75	€ 1.841,75	€ 29.508,25
2	€ 1.327,88	€ 513,87	€ 1.841,75	€ 28.994,38

– Erklären Sie die Begriffe und den Zusammenhang von Zinsanteil und Tilgungsanteil.
– Berechnen Sie den Jahreszinssatz, der dem Tilgungsplan zugrunde liegt.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

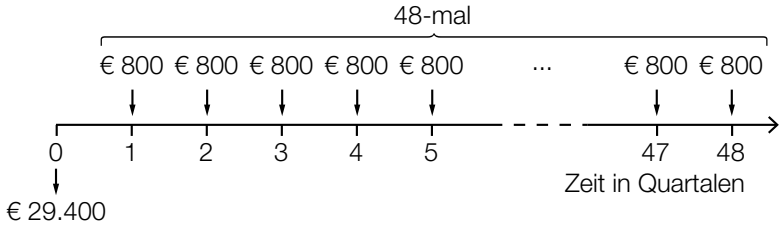
Möglicher Lösungsweg

a) $i_{12} = \sqrt[12]{1{,}01^4} - 1 = \sqrt[3]{1{,}01} - 1 = 0{,}00332...$
Der äquivalente Monatszinssatz beträgt rund 0,33 %.

$$30\,000 = R \cdot \frac{q_{12}^{120} - 1}{q_{12} - 1} \cdot \frac{1}{q_{12}^{120}} \quad \text{mit} \quad q_{12} = \sqrt[3]{1{,}01}$$

$R = 303{,}546...$
Die Ratenhöhe beträgt € 303,55.

b)



$$30\,000 - 600 = 800 \cdot \frac{q_4^{48} - 1}{q_4 - 1} \cdot \frac{1}{q_4^{48}}$$

$q_4 = 1{,}01147...$
$i_{\text{eff}} = 1{,}01147...^4 - 1 = 0{,}04669...$
Der effektive Jahreszinssatz des Angebots beträgt rund 4,67 % p. a.

c) Zusammenhang:

Den **Zinsanteil** einer Periode berechnet man durch Multiplikation der Restschuld der vorangegangenen Periode mit dem angegebenen Zinssatz.

Der **Tilgungsanteil** ist derjenige Teil der Annuität, der zur Tilgung der Schuld beiträgt. (Zinsanteil und Tilgungsanteil ergeben in Summe die Annuität.)

Berechnung des Zinssatzes: $i = \frac{1\,350}{30\,000} = 0{,}045 = 4{,}5\ \%$

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) A Modellieren und Transferieren
c) D Argumentieren und Kommunizieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 3
b) 3
c) 3

Thema: Wirtschaft

Quellen: –

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Durchhängende Kette

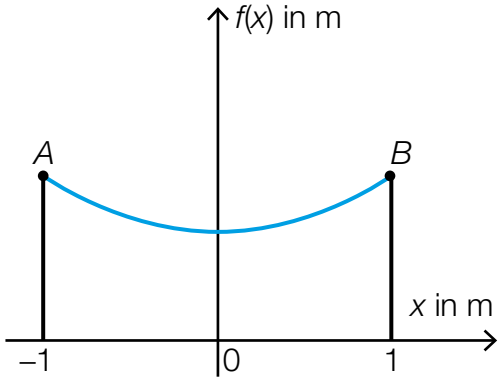
Aufgabennummer: A_214

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Eine durchhängende Kette zwischen 2 Masten gleicher Höhe, die 2 m voneinander entfernt sind, kann mit der Funktion f beschrieben werden.

$f(x) = e^x + e^{-x}$

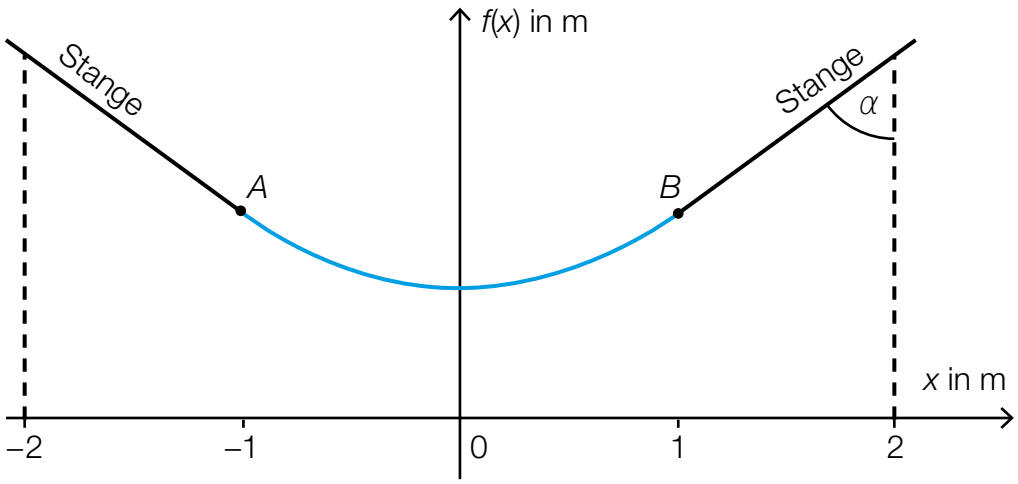
$|x|$ ... Abstand von der vertikalen Achse in m
$f(x)$ ... Höhe der Kette über dem Boden in m



a) Die Funktion f ist symmetrisch bezüglich der vertikalen Achse und kann näherungsweise auch durch eine quadratische Funktion g beschrieben werden. Der Graph der Funktion g enthält ebenfalls die Punkte A und B und hat den gleichen Tiefpunkt wie die Funktion f.

– Stellen Sie ein Gleichungssystem auf, das zur Ermittlung der Koeffizienten von g benötigt wird.
– Stellen Sie eine Gleichung der Funktion g auf.

b) Die oben beschriebene Kette soll an den Punkten A und B an 2 Stangen befestigt werden, die an den 2 Punkten die gleichen Steigungswinkel wie die Kette haben.



– Berechnen Sie denjenigen Winkel α, den die Stangen mit der Senkrechten einschließen.

c) Für eine Abstandsberechnung wurden ausgehend von der Gleichung $e^x + e^{-x} = 2{,}5$ folgende Umformungsschritte durchgeführt:

(1) $e^x + \frac{1}{e^x} = 2{,}5$

(2) $e^{2 \cdot x} + 1 = 2{,}5 \cdot e^x$

(3) $\ln(e^{2 \cdot x}) + \ln(1) = \ln(2{,}5 \cdot e^x)$

(4) $2 \cdot x + 0 = \ln(2{,}5) + x$

(5) $x = \ln(2{,}5)$

In der Umformung von Zeile 2 auf Zeile 3 wurde ein Fehler gemacht.

– Erklären Sie, worin der Fehler besteht.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Eine quadratische Funktion g, die symmetrisch zur vertikalen Achse ist, hat die allgemeine Funktionsgleichung $g(x) = a \cdot x^2 + c$.

$B = (1|f(2)) = (1|3{,}086...)$
Tiefpunkt $= (0|f(0)) = (0|2)$

Die Lösung des Gleichungssystems:
I: $g(1) = 3{,}086\ldots \Rightarrow a + c = 3{,}086\ldots$
II: $g(0) = 2 \Rightarrow c = 2$
$\Rightarrow a = 1{,}086\ldots$
$g(x) = 1{,}086\ldots \cdot x^2 + 2$

Das Einsetzen von 3 Punkten in die Funktionsgleichung der allgemeinen quadratischen Funktion ist ebenfalls richtig.

b) Der Steigungswinkel am Punkt B ist $\arctan(f'(1))$.
$f'(x) = e^x - e^{-x}$
$f'(1) = 2{,}350\ldots$, Steigungswinkel $= \arctan(2{,}350\ldots) = 66{,}952...°$
$\alpha = 180° - 90° - 66{,}952\ldots° = 23{,}047\ldots° \approx 23{,}05°$

c) Es wurde nicht die Summe logarithmiert, sondern die Summanden.
Richtig müsste es heißen: $\ln(e^{2 \cdot x} + 1) = \ln(2{,}5 \cdot e^x)$.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 4 Analysis
c) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) 2 Algebra und Geometrie
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) D Argumentieren und Kommunizieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) —
c) —

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) schwer
c) leicht

Punkteanzahl:

a) 2
b) 1
c) 1

Thema: Sonstiges

Quellen: —

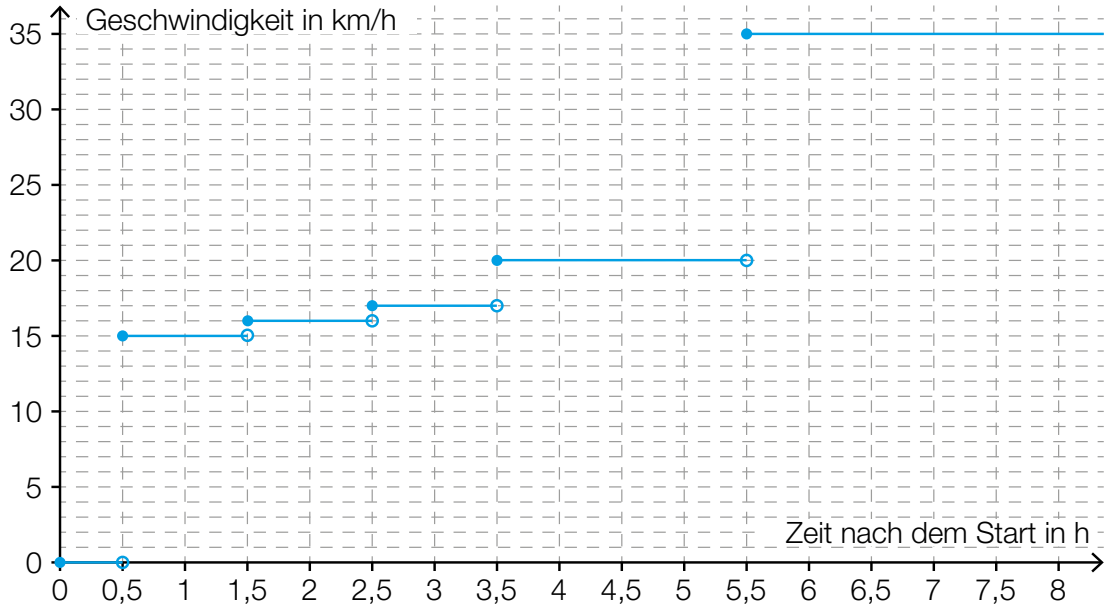
Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Wings for Life

Aufgabennummer: A_217

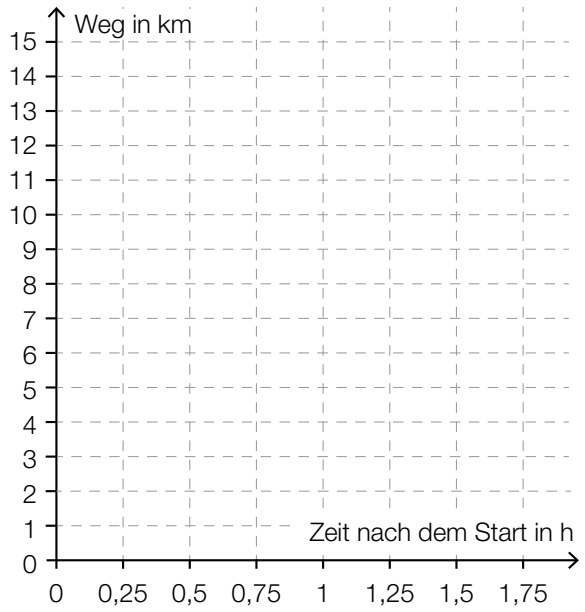
Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Der *Wings for Life World Run* ist ein Lauf, bei dem der Start in vielen Städten auf der ganzen Welt genau zur selben Zeit erfolgt. Die Läufer/innen laufen jeweils solange, bis sie vom sogenannten Catcher-Car überholt werden. Die nachstehende Grafik beschreibt die Fahrt des Catcher-Cars während des Rennens. (Die Zeiten, die das Auto zur Beschleunigung benötigt, werden vernachlässigt.)



a) – Berechnen Sie, welchen Weg das Auto nach 2 Stunden zurückgelegt hat.
– Erklären Sie, mit welcher Durchschnittsgeschwindigkeit Sie laufen müssen, damit Sie genau nach 15 km vom Catcher-Car eingeholt werden.

b) – Zeichnen Sie das Weg-Zeit-Diagramm des Catcher-Cars für die ersten 1,5 Stunden des Laufes in das nachstehende Koordinatensystem.
– Ermitteln Sie mithilfe des Weg-Zeit-Diagramms, nach wie vielen Kilometern eine Läuferin vom Catcher-Car eingeholt wird, wenn sie mit einer konstanten Geschwindigkeit von 9 km/h läuft.



c) Im Jahr 2015 starteten beim *Wings for Life Run* weltweit 101 280 Personen. Die Ergebnisse der 10 besten Läufer sind in der Tabelle dargestellt:

Rang	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
gelaufene Kilometer	79,90	78,31	78,20	78,06	74,81	74,56	73,51	73,46	72,15	70,66

– Berechnen Sie das arithmetische Mittel und die Standardabweichung der gelaufenen Kilometer der 10 besten Läufer.
– Berechnen Sie, um wie viel Prozent die Person auf Rang 1 weiter gelaufen ist als die Person auf Rang 10.

d) Im Jahr 2015 starteten in Österreich 6 408 Personen beim *Wings for Life Run*, weltweit waren es 101 280 Personen. Es werden aus dem weltweiten Teilnehmerfeld nacheinander 2 Personen zufällig ausgewählt. P ist die Wahrscheinlichkeit, dass nur die erste dieser Personen in Österreich gelaufen ist.

– Kreuzen Sie den korrekten Term an. *[1 aus 5]*

$P = \frac{101\,280}{6\,408}$	☐
$P = \frac{6\,408}{101\,280}$	☐
$P = \frac{6\,408}{101\,280} \cdot \frac{94\,872}{101\,279}$	☐
$P = \frac{6\,408}{101\,280} \cdot \frac{6\,407}{101\,279}$	☐
$P = \frac{6\,408 \cdot 94\,872}{101\,280}$	☐

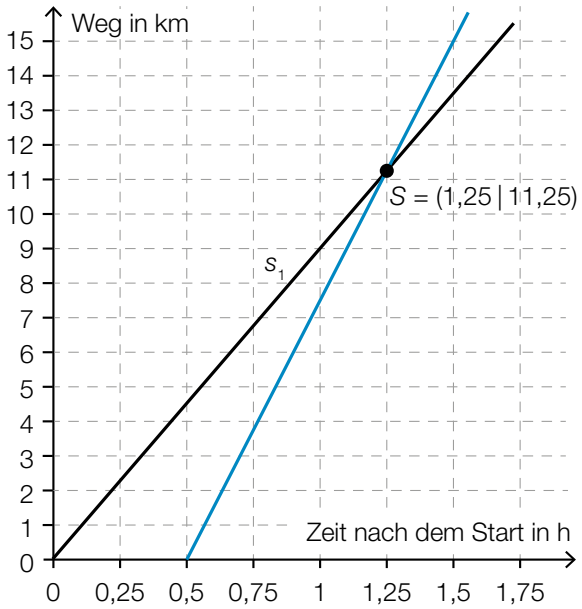
Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $s = 1 \cdot 15 + 0{,}5 \cdot 16 = 23$ km
Das Auto hat nach 2 Stunden 23 km zurückgelegt.

Das Catcher-Car braucht für 15 km genau 1,5 Stunden, da es in den ersten 0,5 Stunden 0 km zurücklegt und in der nächsten Stunde genau 15 km. Man muss also mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von 10 km/h laufen, um nach 15 km vom Catcher-Car überholt zu werden.

b)



Man zeichnet den Graphen der Weg-Zeit-Funktion s_1 mit $s_1(t) = 9 \cdot t$ der Läuferin in die Grafik ein und ermittelt die y-Koordinate des Schnittpunkts grafisch.

Sie wird nach 11,25 km vom Catcher-Car überholt.

c) Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$\bar{x} \approx 75{,}36$ km $\quad\quad$ $s \approx 3{,}07$ km

$\frac{9{,}24}{70{,}66} = 0{,}130\ldots \approx 13\ \%$

Der Läufer auf Rang 1 ist um rund 13 % weiter gelaufen als der Läufer auf Rang 10.

d)

[...]	
[...]	
$P = \frac{6\,408}{101\,280} \cdot \frac{94\,872}{101\,279}$	☒
[...]	
[...]	

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 5 Stochastik
d) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) 1 Zahlen und Maße
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) A Modellieren und Transferieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) —
d) —

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) schwer
c) mittel
d) leicht

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2
c) 2
d) 1

Thema: Sonstiges

Quellen: —

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Planetenbahnen

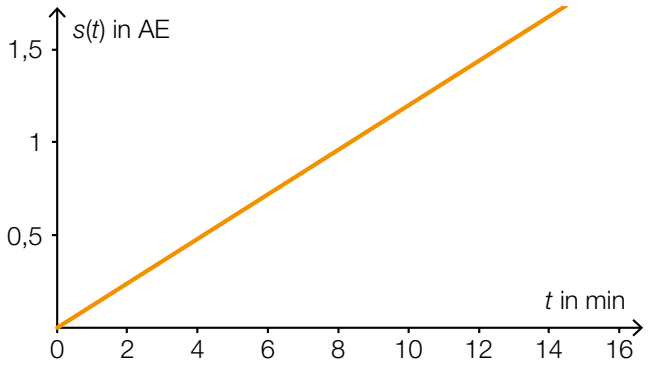
Aufgabennummer: A_017

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Der mittlere Abstand der Erde von der Sonne beträgt rund 150 Millionen km = 1 astronomische Einheit (AE). Das Licht der Sonne breitet sich mit einer Geschwindigkeit von rund 300 000 km/s aus.

– Berechnen Sie, welchen Weg das Licht in einem Jahr (= 365 Tage) zurücklegt.
– Geben Sie das Ergebnis in Gleitkommadarstellung in km an.

b) Die nachstehende Abbildung zeigt ein Weg-Zeit-Diagramm für die Ausbreitung von Licht. Der Weg $s(t)$ ist in astronomischen Einheiten (AE) und die Zeit t in Minuten angegeben.



– Ermitteln Sie mithilfe der obigen Abbildung die Lichtgeschwindigkeit in AE pro Minute.

c) Die Planeten unseres Sonnensystems bewegen sich auf elliptischen Bahnen um die Sonne. Johannes Kepler formulierte das Gesetz, welches einen Zusammenhang zwischen den Umlaufzeiten und den großen Bahnachsen von 2 Planeten herstellt:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$$

a_1, a_2 … große Bahnachsen in km
T_1, T_2 … Umlaufzeiten in Jahren

Für die Planeten Uranus und Erde gilt:

	große Bahnachse in km	Umlaufzeit in Jahren
Uranus	a_1	84
Erde	$1{,}496 \cdot 10^8$	1

– Berechnen Sie die große Bahnachse a_1 des Uranus.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

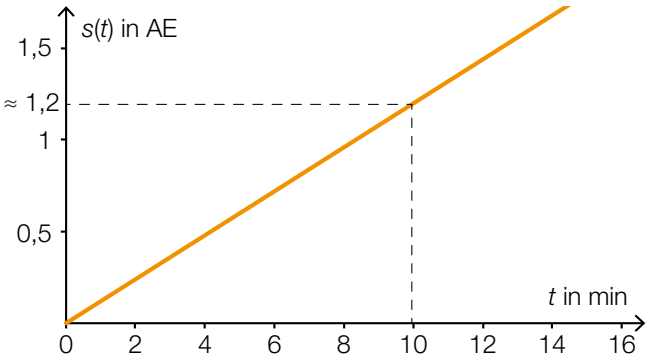
a) 1 Jahr hat $365 \cdot 24 \cdot 3600$ Sekunden

Weg in einer Sekunde: $300\,000 \text{ km} = 3 \cdot 10^5 \text{ km}$

Weg in einem Jahr: $365 \cdot 24 \cdot 3600 \cdot 3 \cdot 10^5 = 9{,}4608 \cdot 10^{12} \text{ km}$

Das Licht legt in einem Jahr einen Weg von $9{,}4608 \cdot 10^{12}$ km zurück.

b)



Die Lichtgeschwindigkeit beträgt rund $\frac{1{,}2}{10}$ AE/min = 0,12 AE/min.

c) $\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$

$\frac{84^2}{1^2} = \frac{a_1^3}{(1{,}496 \cdot 10^8)^3}$

$a_1 = \sqrt[3]{84^2 \cdot 1{,}496^3 \cdot 10^{24}} \approx 2{,}869 \cdot 10^9$

Die große Bahnachse des Uranus beträgt rund $2{,}869 \cdot 10^9$ km.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 1 Zahlen und Maße
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) 1 Zahlen und Maße

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) —
c) —

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) leicht
c) leicht

Punkteanzahl:

a) 2
b) 1
c) 1

Thema: Astronomie

Quellen: —

Stadtlauf (1)

Aufgabennummer: B_245

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

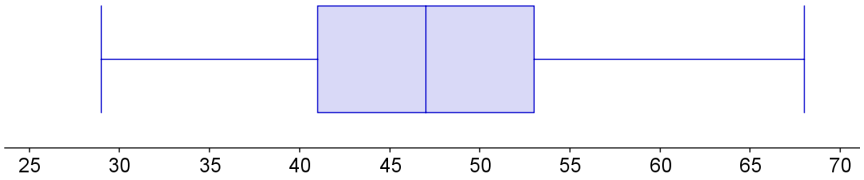
In einer Stadt findet jährlich ein Laufwettbewerb statt.

a) Eine Gruppe von Schülerinnen und Schülern einer Maturaklasse hat am Stadtlauf teilgenommen. In der folgenden Tabelle sind ihre Laufzeiten in Minuten aufgelistet:

46	50	43	49	59	61
53	54	53	56	67	39

– Berechnen Sie das arithmetische Mittel und den Median der Laufzeiten.
– Begründen Sie, warum der Median gegenüber extremen Einzelwerten („Ausreißern“) stabiler ist als das arithmetische Mittel.

b) Die nachstehende Grafik zeigt einen Boxplot über die Laufzeiten aller Teilnehmer/innen des Stadtlaufs. Die Laufzeiten sind in Minuten angegeben.

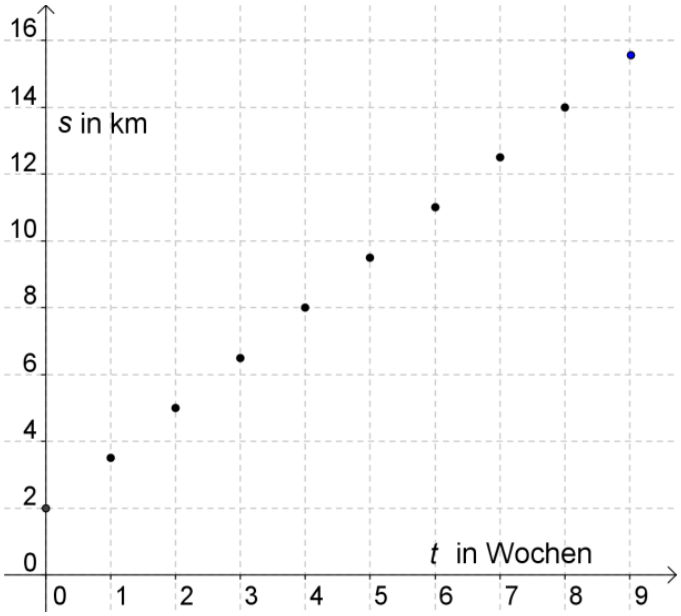


– Lesen Sie die ungefähren Werte der 5 Kenngrößen des Boxplots ab.
– Interpretieren Sie anhand der abgelesenen Kenngrößen das obere Quartil in Bezug auf die erreichten Laufzeiten.
– Begründen Sie, warum man anhand des Boxplots keine Aussage über die Anzahl der Teilnehmer/innen machen kann.

c) Erfahrungsgemäß nehmen etwa 6,3 % der Hobbyläufer/innen Dopingmittel.

– Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit, mit der mindestens 1 Person Dopingmittel verwendet hat, wenn n zufällig ausgewählte Personen getestet werden.

d) Sabine und Tobias absolvieren ein Trainingsprogramm für den nächsten Stadtlauf.
Sabines tägliches Training ist für einen Zeitraum von 9 Wochen in der nebenstehenden Grafik dargestellt.
Tobias beginnt ebenfalls mit 2 km täglich und erhöht seine Laufstrecke jede Woche um 30 % in Bezug auf den jeweils vorigen Wert.



– Erstellen Sie mithilfe der Grafik eine Formel für Sabines Trainingsprogramm.
– Erstellen Sie eine Formel, mit der Sie die Laufstrecke von Tobias nach beliebig vielen Wochen berechnen können.
– Zeichnen Sie das Trainingsprogramm von Tobias in die Grafik ein.
– Lesen Sie ab, in welcher Trainingswoche Sabine und Tobias ungefähr das gleiche Laufpensum absolvieren.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) arithmetisches Mittel: 52,5 Minuten
Median: 53 Minuten

Das arithmetische Mittel wird aus allen vorkommenden Einzelwerten berechnet, daher wirken sich extreme Einzelwerte relativ stark aus.
Der Median ist die Mitte der geordneten Datenliste. Extreme Einzelwerte am oberen oder unteren Ende wirken sich auf den Median nicht aus. Daher ist der Median stabiler gegenüber Ausreißern.

Auch andere sinngemäß richtige Erklärungen sind zulässig.

b) Minimum: 29 Minuten (min), Maximum: 68 min, Median: 47 min, 1. Quartil: 41 min, 3. Quartil: 53 min

Mindestens 25 % der Läufer/innen haben Laufzeiten zwischen 53 min und 68 min erreicht (Spanne: 15 min). Die langsamste Laufzeit lag bei 68 min.

Aus dem Boxplot kann man nur Extremwerte und Quartile ablesen. Daher kann man eine Aussage über die Verteilung der Laufzeiten machen, aber nicht über die Anzahl der Läufer/innen.

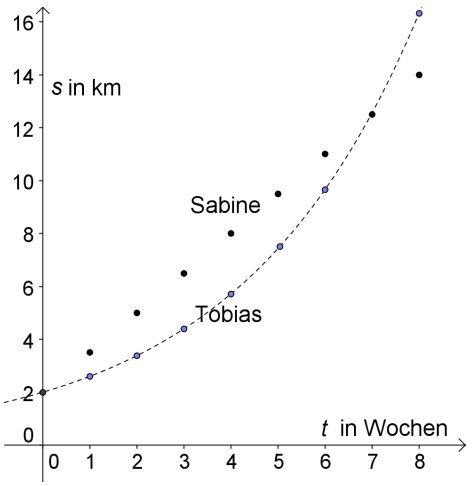
Auch andere sinngemäß richtige Interpretationen und Begründungen sind zulässig.

c) X … Anzahl der Personen, die Dopingmittel verwendet haben

$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1 - 0{,}063)^n$

d) Sabine: arithmetische Folge
$s_{Sabine}(t) = 1{,}5 \cdot t + 2$ t … Anzahl der Trainingswochen

Tobias: geometrische Folge
$s_{Tobias}(t) = 2 \cdot 1{,}3^t$ t … Anzahl der Trainingswochen



In der 7. Woche absolvieren beide das gleiche Laufpensum.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 5 Stochastik
c) 5 Stochastik
d) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) A Modellieren und Transferieren
d) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) —
d) B Operieren und Technologieeinsatz, C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) leicht
c) mittel
d) leicht

Punkteanzahl:

a) 2
b) 3
c) 1
d) 4

Thema: Sport

Quellen: —

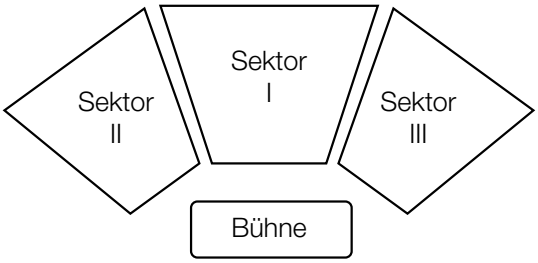
BMB
Bundesministerium
für Bildung

Sitzreihen*

Aufgabennummer: B_436

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Eine Schule plant eine Theateraufführung im Turnsaal. Der Schulwart hat die Idee, die Zuschauerstühle wie folgt um die Bühne aufzubauen (siehe nachstehende Abbildung).



a) Im Sektor I stehen in der ersten Sitzreihe 8 Stühle. In jeder folgenden Sitzreihe erhöht sich die Anzahl der Stühle jeweils um 3.

– Begründen Sie mathematisch, warum die Anzahlen der Stühle in den jeweiligen Sitzreihen eine arithmetische Folge a_n bilden.
– Stellen Sie ein rekursives Bildungsgesetz für a_n auf.

b) Im Sektor II stehen in der ersten Sitzreihe 5 Stühle, in jeder folgenden Sitzreihe erhöht sich die Anzahl der Stühle jeweils um 1.

– Stellen Sie ein explizites Bildungsgesetz auf, mit dem man die Anzahl der Stühle in der n-ten Sitzreihe berechnen kann.

Die Gesamtanzahl der Stühle in den ersten n Sitzreihen des Sektors II ist $\frac{(9 + n) \cdot n}{2}$.

– Berechnen Sie, aus wie vielen Sitzreihen der Sektor II besteht, wenn 126 Stühle für diesen Sektor verwendet werden.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Für den Sektor III ist eine Sitzordnung vorgesehen, bei der die Anzahl der Stühle in der n-ten Sitzreihe durch folgendes explizites Bildungsgesetz beschrieben wird:

$a_n = 5 + (n - 1) \cdot 4$

– Interpretieren Sie die Bedeutung der Zahlen 5 und 4 im gegebenen Sachzusammenhang.
– Berechnen Sie, wie viele Stühle in der 7. Sitzreihe stehen.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Die Differenz der Anzahlen der Stühle zweier aufeinanderfolgender Sitzreihen ist konstant.

$a_1 = 8$ und $a_{n+1} = a_n + 3$

b) $a_n = 5 + (n - 1) \cdot 1$
$a_n = 4 + n$

$126 = \frac{(9 + n) \cdot n}{2}$
$n^2 + 9 \cdot n - 252 = 0$

Lösung mittels Technologieeinsatz:
$n_1 = 12$ (und $n_2 = -21$)

Der Sektor II besteht aus 12 Sitzreihen.

c) 5 … Anzahl der Stühle in der ersten Sitzreihe
4 … in jeder folgenden Sitzreihe erhöht sich die Anzahl der Stühle jeweils um 4

$a_7 = 5 + (7 - 1) \cdot 4 = 29$

Es stehen 29 Stühle in der 7. Sitzreihe.

Lösungsschlüssel

a) 1 × D: für die richtige mathematische Begründung
1 × A: für das richtige Aufstellen des rekursiven Bildungsgesetzes

b) 1 × A: für das richtige Aufstellen des expliziten Bildungsgesetzes
1 × B: für die richtige Berechnung der Anzahl der Sitzreihen in Sektor II

c) 1 × C: für die richtige Interpretation im gegebenen Sachzusammenhang
1 × B: für die richtige Berechnung der Anzahl der Stühle in der 7. Sitzreihe

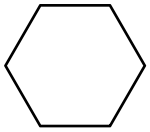
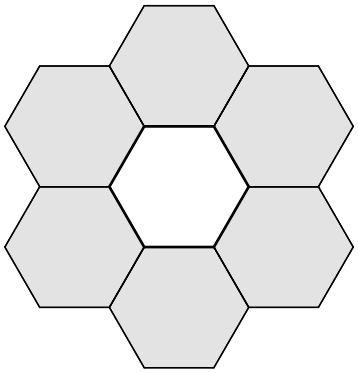
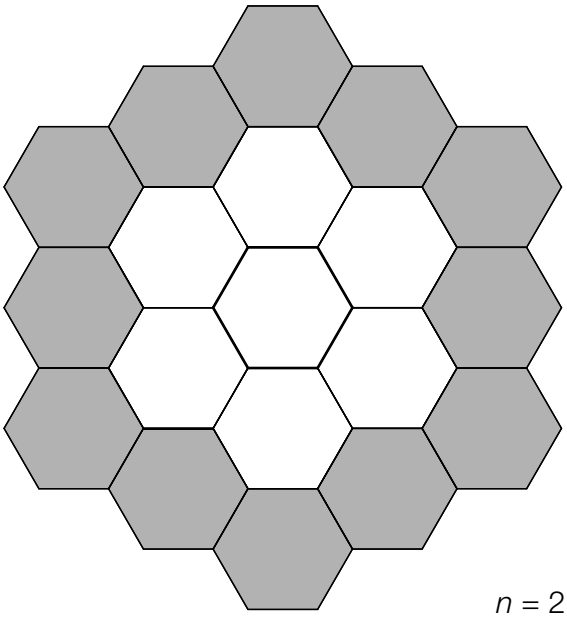
BMB
Bundesministerium
für Bildung

Bienenwaben*

Aufgabennummer: B_404

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Bienen bauen ihre Waben, indem sie mit einer einzigen sechseckigen Zelle (Anfangszelle) starten und dann weitere sechseckige Zellen ringförmig um die erste Zelle bauen.

Anfangszelle	1. Ring	2. Ring
	 $n = 1$	 $n = 2$

a) Die Anzahlen der Zellen in den jeweiligen Ringen bilden eine arithmetische Folge. Die Anfangszelle wird dabei nicht als Ring gezählt.

– Geben Sie die ersten 4 Glieder dieser arithmetischen Folge an.
– Stellen Sie ein rekursives Bildungsgesetz für diese arithmetische Folge auf.
– Stellen Sie ein explizites Bildungsgesetz für diese arithmetische Folge auf.

b) Mit der Formel $s_n = 1 + 3 \cdot n + 3 \cdot n^2$ kann man berechnen, wie viele Zellen insgesamt bis zum n-ten Ring gebildet worden sind.
Eine Wabe besteht aus insgesamt 271 Zellen.

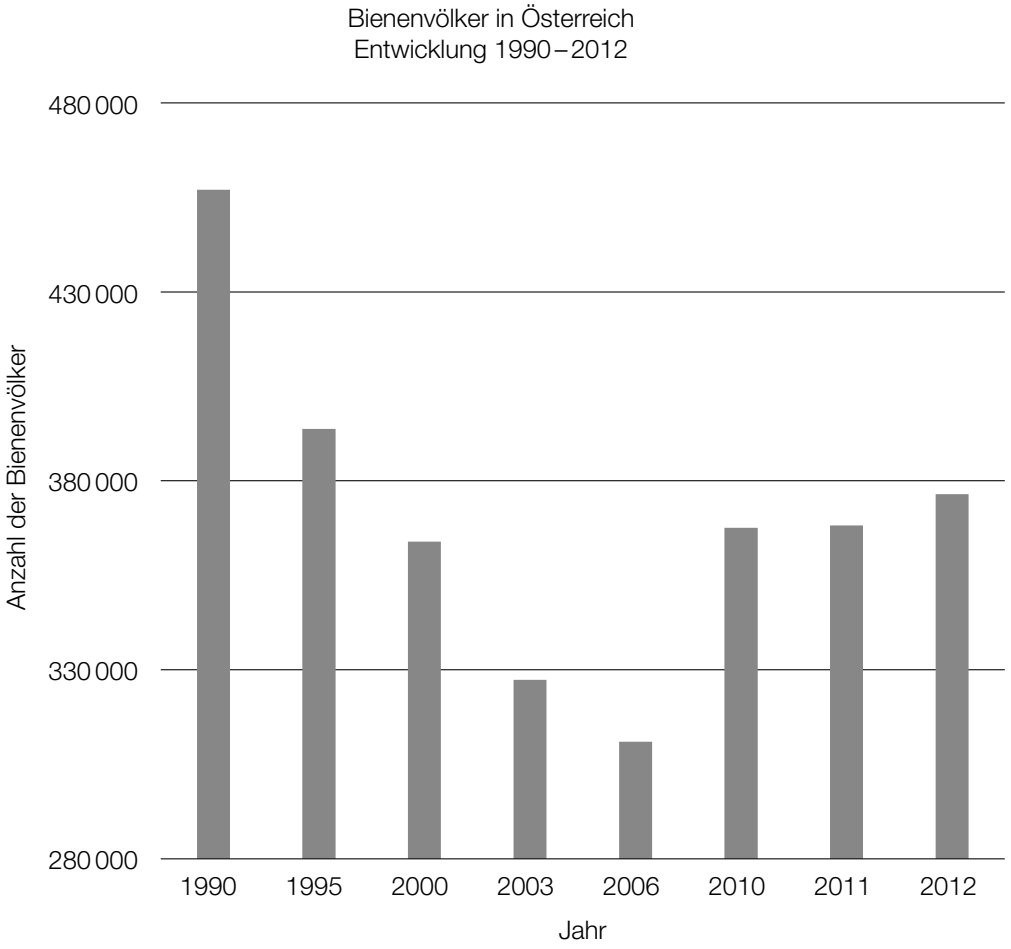
– Ermitteln Sie, aus wie vielen Ringen diese Wabe besteht.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Auf einer Fläche von 1 dm^2 befinden sich durchschnittlich 850 Zellen. Eine Zelle enthält im Mittel 0,3 Milliliter (ml) Honig mit einer Dichte von 1,4 g/ml. Die Masse ist das Produkt von Volumen und Dichte.

– Berechnen Sie die Masse des Honigs, die man auf einer Fläche von 3 dm^2 erwarten kann.

d) In der nachstehenden Abbildung ist die Entwicklung der Bienenvölker in Österreich dargestellt.



Datenquelle: http://www.biene-oesterreich.at/struktur-der-bienenhaltung-in-oesterreich+2500+1135143?env=Y2Q9Mg [20.04.2016].

Ein Betrachter der vorliegenden Darstellung behauptet: „Im Jahr 2010 gab es rund 3-mal so viele Bienenvölker wie im Jahr 2006. Das erkenne ich daran, dass die Säule für das Jahr 2010 rund 3-mal so hoch ist wie jene für das Jahr 2006."

– Erklären Sie, warum diese Argumentation falsch ist.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Glieder der Folge: $a_1 = 6$, $a_2 = 12$, $a_3 = 18$, $a_4 = 24$

rekursives Bildungsgesetz:
$a_1 = 6$
$a_{n+1} = a_n + 6$

explizites Bildungsgesetz:
$a_n = 6 + (n - 1) \cdot 6$

oder:

$a_n = 6 \cdot n$

b) $271 = 1 + 3 \cdot n + 3 \cdot n^2$
Lösung mittels Technologieeinsatz: $n = 9$

Diese Wabe besteht aus 9 Ringen.

c) Honigvolumen auf einer Fläche von 3 dm² in ml: $850 \cdot 0{,}3 \cdot 3 = 765$
765 ml · 1,4 g/ml = 1 071 g

Auf einer Fläche von 3 dm² sind 1 071 g Honig zu erwarten.

d) Die Argumentation ist falsch, weil der abgebildete Wertebereich nicht bei 0, sondern bei 280 000 „beginnt“.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A1: für das richtige Angeben der ersten 4 Glieder der Folge
1 × A2: für das richtige Aufstellen des rekursiven Bildungsgesetzes
1 × A3: für das richtige Aufstellen des expliziten Bildungsgesetzes

b) 1 × B: für das richtige Ermitteln der Anzahl der Ringe

c) 1 × B: für die richtige Berechnung der Masse in Gramm

d) 1 × D: für die richtige Erklärung

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

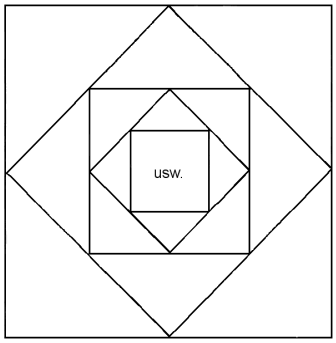
Seriationsmaterial

Aufgabennummer: B_242

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

In einem Kindergarten gibt es verschiedene Materialien, mit denen die Kinder spielerisch Größenverhältnisse erforschen können. Eines dieser Materialien besteht aus quadratischen Platten aus festem Schaumstoff, deren Seitenlängen S_n eine geometrische Folge bilden (Abb. 1). Jedes Quadrat berührt das nächstgrößere mit seinen Eckpunkten genau im Mittelpunkt der Seiten.
Die größte Platte hat eine Seitenlänge von 1 Meter (m).

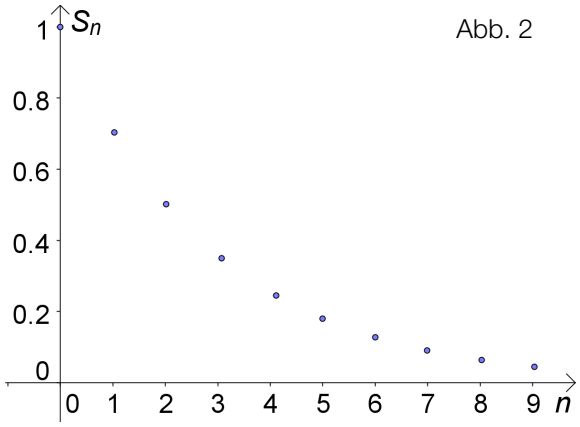
Abb. 1



a) – Berechnen Sie die Seitenlänge der 2. Platte in Zentimetern (cm).

b) – Begründen Sie, warum der nachstehende Graph in Abb. 2 die geometrische Folge, die in Abb. 1 dargestellt ist, beschreibt.

Abb. 2



c) Ein Spielmaterial besteht aus Holzstäben, deren Länge jeweils um 5 cm zunimmt. Der kürzeste Stab ist 10 cm lang.

– Erstellen Sie eine Formel, mit der man die Länge a_n eines beliebigen Stabes berechnen kann.
– Beschreiben Sie alle Variablen, die in der Formel vorkommen.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Die Seitenlänge der zweiten Platte ist die Diagonale eines Quadrats mit der halben Seitenlänge der ersten:
$a_0 = 100$ cm
$a_1 = 50 \cdot \sqrt{2} \approx 71$ cm

b) Der Graph in Abb. 2 beschreibt eine geometrische Folge mit abnehmenden Gliedern. Die Zahlenwerte der dargestellten Folgeglieder stimmen mit den Seitenlängen S_n in Abb. 1 überein.

Jede schlüssige, korrekte Begründung gilt als richtig.

c) Bei den Holzstäben handelt es sich um eine arithmetische Folge.

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot k$ mit $n \in \{1, 2, 3, ...\}$

a_1 … Länge des 1. Stabes in cm
k … Längenzunahme in cm
a_n … Länge des n-ten Stabes in cm

$a_n = 10 + (n - 1) \cdot 5$

Es können auch andere Bezeichnungen gewählt werden.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) –
b) –
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) leicht

Punkteanzahl:

a) 1
b) 1
c) 2

Thema: Sonstiges

Quellen: –

Klassische Gitarre

Aufgabennummer: B_233

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Eine Gitarre wird standardmäßig gleichstufig (= gleichtemperiert) gestimmt. Dabei wird die Oktave (= Tonumfang von 8 Tönen) in 12 identische Halbtonschritte aufgeteilt.

Halbtonschritt	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Bezeichnung des Tons	c	cis/ des	d	dis/ es	e	f	fis/ ges	g	gis/ as	a	ais/ b	h

Die mathematische Vorschrift zur Bestimmung der Frequenz f der Töne auf der gesamten Tonleiter der gleichstufigen Stimmung ist eine geometrische Folge und lautet:

$$f_i = f_0 \cdot 2^{\frac{i}{12}}$$

i … Anzahl der Halbtonschritte ausgehend vom gewählten Ausgangston (Das Vorzeichen von i ist bei Tönen, die höher sind als der Ausgangston, positiv und bei Tönen, die tiefer sind als der Ausgangston, negativ.)
f_0 … Frequenz eines beliebigen Ausgangstons in Hertz (Hz)
f_i … Frequenz beim i-ten Halbtonschritt in Hz

a) Der gemeinsame Ton, auf den die Instrumente eines Ensembles gestimmt werden, ist das eingestrichene „a“ mit einer Frequenz von 440 Hz („Kammerton“).

– Berechnen Sie mithilfe obenstehender Tabelle ausgehend vom Kammerton „a“ die Frequenz des tieferen Tons „e“.

b) – Zeigen Sie anhand der Formel den Zusammenhang zwischen den Frequenzen zweier Töne, die sich genau um 1 Oktave unterscheiden.

c) – Erstellen Sie eine Formel, mit der man ausgehend von einem beliebigen Ton mit der Frequenz f_n die Frequenz des nächsthöheren Halbtons berechnen kann.

d) Der tiefste Ton einer Gitarre ist das tiefe „E“ mit einer Frequenz von 82,41 Hz, der höchste auf einer klassischen Gitarre spielbare Ton hat eine Frequenz von 987,77 Hz.

– Berechnen Sie, wie viele Halbtonschritte der Tonumfang einer klassischen Gitarre umfasst.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $f_i = f_0 \cdot 2^{\frac{i}{12}}$

Das „e“ ist 5 Halbtonschritte tiefer:

$f_{-5} = 440 \cdot 2^{-\frac{5}{12}} = 440 \cdot 2^{-0{,}4167} = 329{,}627\ldots$

Die Frequenz des Tons „e“ beträgt ca. 329,63 Hz.

b) Für $i = 12$ (1 ganze Oktave höher) gilt: $f(12) = f_0 \cdot 2^1$.
Für $i = -12$ (1 ganze Oktave tiefer) gilt: $f(-12) = f_0 \cdot 2^{-1}$.

D. h., der um 1 Oktave höhere Ton hat die doppelte Frequenz bzw. der um 1 Oktave tiefere Ton hat die halbe Frequenz.
(*Beide Antworten sind als richtig zu werten*.)

c) Potenzschreibweise: $f_{n+1} = f_n \cdot 2^{\frac{1}{12}}$
oder Wurzelschreibweise: $f_{n+1} = f_n \cdot \sqrt[12]{2}$
(Anmerkung: In Musikbüchern steht in der Regel die Wurzelschreibweise.)

d) $f_i = f_0 \cdot 2^{\frac{i}{12}}$

$987{,}77 = 82{,}41 \cdot 2^{\frac{i}{12}}$

$\frac{987{,}77}{82{,}41} = 2^{\frac{i}{12}}$ | lg (oder ln)

$i = 42{,}99$

Der Tonumfang einer klassischen Gitarre umfasst 43 Halbtonschritte.
(Berechnung auch mit Technologie erlaubt.)

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 3 Funktionale Zusammenhänge
d) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) –
d) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) A Modellieren und Transferieren
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) –
b) –
c) –
d) –

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) mittel
d) mittel

Punkteanzahl:

a) 1
b) 1
c) 1
d) 2

Themen: Alltag, Musik

Quellen: –

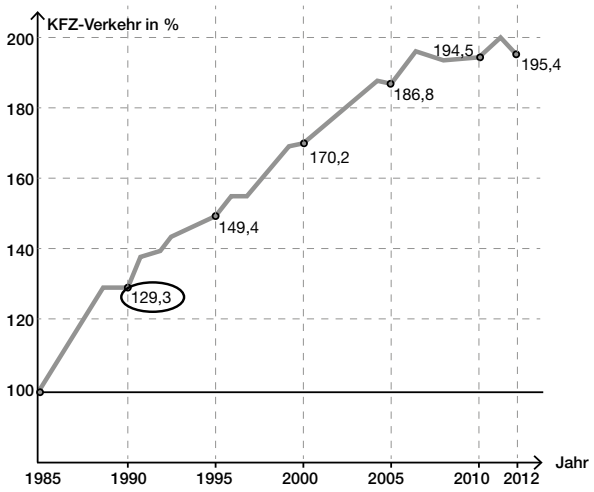
Straßenverkehr in Tirol (2)*

Aufgabennummer: B_277

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Das Verkehrsaufkommen wird seit vielen Jahren statistisch erfasst.

a) Die nachstehende Grafik zeigt die Entwicklung des KFZ-Verkehrs von 1985 bis 2012 in Tirol.



– Interpretieren Sie die Bedeutung der in der Grafik markierten Zahl 129,3 in diesem Sachzusammenhang.

– Erstellen Sie basierend auf den Daten der Grafik eine quadratische Regressionsfunktion. Wählen Sie dabei für das Jahr 1985 den Zeitpunkt $t = 0$.

– Ermitteln Sie mithilfe dieser Regressionsfunktion eine Prognose für den KFZ-Verkehr im Jahr 2013.

b) Die Anzahl der durchschnittlichen täglichen KFZ-Fahrten auf der Brennerautobahn kann für den Zeitraum 2000 bis 2007 durch die lineare Regressionsfunktion f beschrieben werden:

$f(t) = 617 \cdot t + 28017$

t ... Zeit in Jahren mit $t = 0$ im Jahr 2000
$f(t)$ ... Anzahl der durchschnittlichen täglichen KFZ-Fahrten zur Zeit t

– Interpretieren Sie die Bedeutung des Koeffizienten 617 in diesem Sachzusammenhang.

* ehemalige Klausuraufgabe (adaptiert)

c) Auf einer österreichischen Transitroute wurden im Jahr 2003 insgesamt 1 700 000 Fahrten gezählt. Im Jahr 2011 waren es bereits 2 006 000 Fahrten.

– Stellen Sie diejenige Funktionsgleichung auf, die die Entwicklung der Anzahl der Fahrten auf dieser Route mit einer Exponentialfunktion der Form $y(t) = a \cdot b^t$ beschreibt.

t ... Zeit in Jahren mit $t = 0$ im Jahr 2003
$y(t)$ ... Zahl der jährlichen Fahrten zur Zeit t

– Erklären Sie den Unterschied zwischen exponentiellem und linearem Wachstum.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) 129,3 bedeutet, dass der Verkehr im Jahr 1990 gegenüber dem Jahr 1985 um 29,3 % zugenommen hat.

quadratische Regression: $r(t) = -0{,}09 \cdot t^2 + 6{,}11 \cdot t + 99{,}93$
2013 entspricht $t = 28$: $r(28) = 197{,}50... \approx 197{,}5$.

Die Regressionsfunktion prognostiziert ein KFZ-Verkehrsaufkommen von rund 197,5 % bezogen auf das KFZ-Verkehrsaufkommen im Jahr 1985.

b) 617 entspricht der jährlichen Zunahme der durchschnittlichen täglichen KFZ-Fahrten auf der Brennerautobahn.

c) $a = 1\,700\,000$

$b = \sqrt[8]{\frac{2\,006\,000}{1\,700\,000}} = 1{,}0209... \approx 1{,}021$

$y(t) = 1\,700\,000 \cdot 1{,}021^t$

Bei einem linearen Modell ist die absolute Änderung pro Zeiteinheit konstant. Bei einem exponentiellen Modell ändert sich die Größe in jeweils gleichen Zeitschritten immer um denselben Faktor.

Lösungsschlüssel

a) 1 × C: für die richtige Interpretation der markierten Zahl
1 × A: für das richtige Erstellen der Regressionsfunktion
1 × B: für das richtige Ermitteln der Prognose für das Jahr 2013
b) 1 × C: für die richtige Interpretation des Koeffizienten)
c) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung
1 × D: für die richtige Erklärung

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Ansparpläne*

Aufgabennummer: B_382

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Für die Finanzierung größerer Anschaffungen ist es oft nötig, einen Geldbetrag anzusparen.
Im Folgenden wird die Kapitalertragsteuer nicht berücksichtigt.

a) Andrea möchte einen Geldbetrag E ansparen.
Dazu legt sie einen Geldbetrag B, der mit dem jährlichen Zinssatz i verzinst wird, für n Jahre auf einem Sparkonto an.

– Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung von E, wenn B, n und i bekannt sind.

$E =$ _____

– Formen Sie diese Formel nach dem Zinssatz i um.

b) Bernhard möchte auf einem Konto in 4 Jahren € 4.000 angespart haben. Dazu will er sofort € 1.000 auf das Konto legen, nach 1 Jahr € 1.500 und nach 3 Jahren den nötigen Restbetrag R. Der Zinssatz beträgt 3 % p. a.

– Veranschaulichen Sie diesen Zahlungsstrom auf einer Zeitachse.
– Erklären Sie in Worten (ohne Rechnung), warum der Restbetrag R kleiner als € 1.500 sein muss.
– Berechnen Sie den Restbetrag R.

c) Cornelia führt für ihren Ansparplan folgende Rechnung durch:

$5\,000 \cdot 1{,}035^5 + 1\,000 \cdot 1{,}035^2 \approx 7\,009{,}66$

– Beschreiben Sie diesen Ansparplan hinsichtlich der Zahlungen, des Zinssatzes, der Verzinsungsdauer und des angesparten Geldbetrags in Worten.

d) Daniel möchte in 2 Jahren insgesamt € 10.000 angespart haben. Seine Ersparnisse betragen derzeit € 4.000. Den Restbetrag will er ansparen, indem er jeweils am Ende jedes Monats einen gleichbleibenden Betrag anspart.

– Ermitteln Sie die Höhe dieses gleichbleibenden Betrags, wenn die Beträge nicht verzinst werden.
– Ermitteln Sie die Höhe dieses gleichbleibenden Betrags, wenn alle Beträge zu einem Zinssatz von 0,25 % p. m. veranlagt werden.

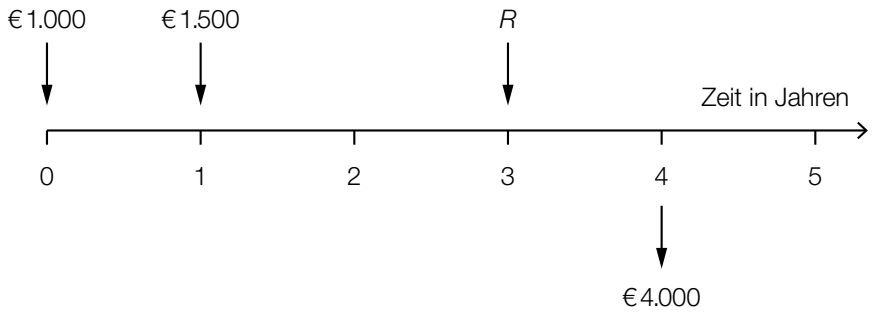
* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

a) $E = B \cdot (1 + i)^n$

$i = \sqrt[n]{\frac{E}{B}} - 1$

b)



Der Punkt ist auch zu vergeben, wenn der angesparte Betrag (€ 4.000) auf der Zeitachse nicht angegeben ist.

Der Restbetrag muss kleiner als € 1.500 sein, da die Einzahlungen verzinst werden.

Eine Begründung nur durch die nachstehende Rechnung ist nicht ausreichend.

$1\,000 \cdot 1{,}03^4 + 1\,500 \cdot 1{,}03^3 + R \cdot 1{,}03 = 4\,000$

$R = \frac{4\,000 - 1\,000 \cdot 1{,}03^4 - 1\,500 \cdot 1{,}03^3}{1{,}03} = 1\,199{,}418\ldots$

Als Restbetrag müssen € 1.199,42 eingezahlt werden.

c) € 5.000 werden 5 Perioden lang mit einem Zinssatz von 3,5 % pro Periode veranlagt. Nach 3 Perioden kommen noch € 1.000 dazu. Nach 5 Perioden beträgt der angesparte Geldbetrag € 7.009,66.

Wurden konkrete Perioden (z. B. Jahre) bei der Beschreibung verwendet, ist der Punkt zu vergeben.

d) ohne Verzinsung:

$\frac{6\,000}{24} = 250$

Ohne Verzinsung beträgt die Ratenhöhe € 250.

mit Verzinsung:

$4\,000 \cdot 1{,}0025^{24} + R \cdot \frac{1{,}0025^{24} - 1}{0{,}0025} = 10\,000$

$R = (10\,000 - 4\,000 \cdot 1{,}0025^{24}) \cdot \frac{0{,}0025}{1{,}0025^{24} - 1} = 232{,}887\ldots$

Mit Verzinsung beträgt die Ratenhöhe € 232,89.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Formel
1 × B: für das richtige Umformen der Formel nach der Variablen *i*

b) 1 × A: für das richtige Darstellen auf einer Zeitachse (Der Punkt ist auch zu vergeben, wenn der angesparte Betrag (€ 4.000) auf der Zeitachse nicht angegeben ist.)
1 × D: für eine richtige Erklärung zur Höhe des Restbetrags
1 × B: für die richtige Berechnung des Restbetrags

c) 1 × C: für eine richtige Beschreibung (Wurden konkrete Perioden (z. B. Jahre) bei der Beschreibung verwendet, ist der Punkt zu vergeben.)

d) 1 × B1: für das richtige Ermitteln der Ratenhöhe ohne Verzinsung
1 × B2: für das richtige Ermitteln der Ratenhöhe mit Verzinsung

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Erlebnisgarten (2)

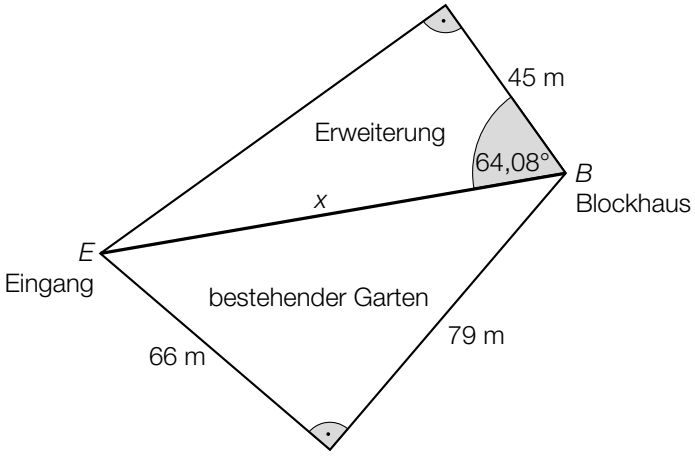
Aufgabennummer: B_160

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

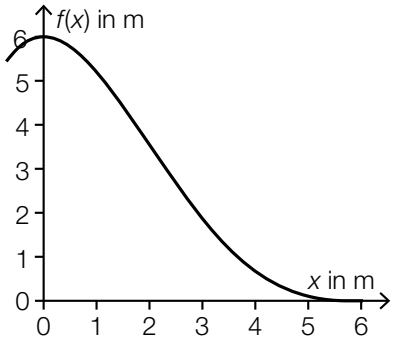
Der Außenbereich eines Kindergartens wird vergrößert und zu einem Erlebnisgarten umgestaltet.

a) Vom Eingang *E* zum Blockhaus *B* soll ein geradliniger Barfußweg angelegt werden (siehe nebenstehende Abbildung).

– Berechnen Sie die Länge *x* des Weges in Metern.
– Dokumentieren Sie, wie Sie den Flächeninhalt der Erweiterung berechnen können, wenn *x* als bekannt angenommen wird.



b) Vom höchsten Punkt eines Hügels soll eine Rutsche herunterführen.



Das Profil der geplanten Rutsche kann durch die folgende Funktion *f* annähernd beschrieben werden:

$f(x) = -\frac{1}{72} \cdot (x^4 - 16 \cdot x^3 + 72 \cdot x^2 - 432)$ mit $0 \le x \le 6$

x, $f(x)$ ... Koordinaten in m

Der Neigungswinkel einer Spielplatzrutsche darf laut einer Norm aus Sicherheitsgründen an keiner Stelle 60° überschreiten.

– Überprüfen Sie mithilfe der Differenzialrechnung, ob die geplante Rutsche normgerecht ist.

c) Der gesamte Außenbereich mit einer Fläche von A m² soll neu gestaltet werden.
Der Gärtner veranschlagt einen Preis von p Euro pro Quadratmeter (€/m²) exklusive 20 % Mehrwertsteuer. Bei Barzahlung gewährt der Gärtner einen Preisnachlass von 3 %.

– Erstellen Sie eine Formel für den Gesamtpreis P inklusive Mehrwertsteuer bei Barzahlung.

$P =$ _____

– Begründen Sie, warum das Abziehen des Preisnachlasses vor bzw. nach der Berechnung der Mehrwertsteuer auf den gleichen Preis führt.

d) Für die Gartengestaltung muss ein Kredit aufgenommen werden.
Die Rückzahlungsraten werden wie folgt jeweils am Ende des Jahres bei einem Zinssatz von 4,5 % p. a. vereinbart:

	1. Jahr	2. Jahr	3. Jahr	4. Jahr	5. Jahr
Rate	€ 4.000	€ 5.000	€ 3.000	€ 0	€ 4.500

– Berechnen Sie die Höhe des Kredits.
(Steuern und Gebühren werden nicht berücksichtigt.)

Als alternative Rückzahlungsvariante wird die Tilgung des Kredits durch nachschüssige Monatsraten bei einem Zinssatz von 4,5 % p. a. und einer Laufzeit von n Jahren vorgeschlagen.

– Dokumentieren Sie, wie man die Ratenhöhe R berechnen kann.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $x = \sqrt{66^2 + 79^2} = 102{,}9\ldots$

Der Weg ist rund 103 m lang.

Um die Fläche zu berechnen, benötigt man die Höhe im rechtwinkeligen Dreieck der Erweiterung.
Die Höhe steht normal auf x, daher gilt: $h = 45 \cdot \sin(64{,}08°)$.
Den Flächeninhalt erhält man demnach mit $x \cdot \frac{h}{2}$.

Es gibt auch andere mögliche Lösungswege.

b) $f(x) = -\frac{1}{72} \cdot (x^4 - 16 \cdot x^3 + 72 \cdot x^2 - 432)$

$f'(x) = -\frac{1}{72} \cdot (4 \cdot x^3 - 48 \cdot x^2 + 144 \cdot x)$

$f''(x) = -\frac{1}{72} \cdot (12 \cdot x^2 - 96 \cdot x + 144)$

Die Steigung (hier: das Gefälle) ist in einem Wendepunkt am größten:
$f''(x) = 0$
Lösung mittels Technologieeinsatz: $x_1 = 2$, $x_2 = 6$
In der Abbildung ist ersichtlich, dass nur die Stelle $x_1 = 2$ in Frage kommt.
$f'(2) = -1{,}777\ldots$
$\alpha = \arctan(f'(2)) = -60{,}642\ldots° \approx -61°$
Der maximal erlaubte Winkel wird überschritten.

Die Rutsche ist nicht normgerecht.

c) $P = p \cdot A \cdot 1{,}2 \cdot 0{,}97$

Bei der Multiplikation können die Faktoren vertauscht werden. Das Ergebnis verändert sich dadurch nicht:
$(p \cdot A \cdot 1{,}2) \cdot 0{,}97 = (p \cdot A \cdot 0{,}97) \cdot 1{,}2$

d) $\frac{4\,000}{1{,}045} + \frac{5\,000}{1{,}045^2} + \frac{3\,000}{1{,}045^3} + \frac{4\,500}{1{,}045^5} = 14\,646{,}320...$
Die Kredithöhe beträgt € 14.646,32.

Man berechnet den äquivalenten monatlichen Aufzinsungsfaktor $q_{12} = \sqrt[12]{1{,}045}$.
Diesen setzt man in die Barwertformel ein. Der Barwert ist die Kredithöhe. Die Anzahl der Raten ist $12 \cdot n$.

$$14\,646{,}32 = R \cdot \frac{q_{12}^{12 \cdot n} - 1}{q_{12} - 1} \cdot \frac{1}{q_{12}^{12 \cdot n}}$$

Aus dieser Gleichung kann R berechnet werden.

Es genügt hier auch, wenn die genaue Vorgangsweise mit Technologieeinsatz beschrieben wird.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 4 Analysis
c) 1 Zahlen und Maße
d) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) —
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) A Modellieren und Transferieren
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) A Modellieren und Transferieren, D Argumentieren und Kommunizieren
c) D Argumentieren und Kommunizieren
d) C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) leicht
d) schwer

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2
c) 2
d) 2

Thema: Alltag

Quellen: —

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Hotelrenovierung (2)

Aufgabennummer: B_180

Technologieeinsatz:	möglich ☐	erforderlich ☒

Ein Hotel wird renoviert.

a) Ein Viertel aller Hotelzimmer wird als Raucherzimmer angeboten. Bei der Renovierung wurden zwei Drittel aller Raucherzimmer und 40 % aller Nichtraucherzimmer erneuert.

– Erstellen Sie ein Baumdiagramm mit allen gegebenen Daten.
– Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein zufällig ausgewähltes Zimmer renoviert wurde.

b) Für weitere Renovierungsarbeiten benötigt der Hotelbesitzer einen Kredit in Höhe von € 80.000. Seine Hausbank bietet ihm an, dass er den Kreditbetrag innerhalb von 5 Jahren in Form von nachschüssigen Jahresraten in Höhe von € 17.900 begleichen kann.

– Berechnen Sie den effektiven Jahreszinssatz, der diesem Kredit zugrunde liegt.

Der Hotelbesitzer möchte anstelle der Jahresraten den Kredit bei gleicher Laufzeit durch nachschüssige Semesterraten in Höhe von € 8.950 begleichen.

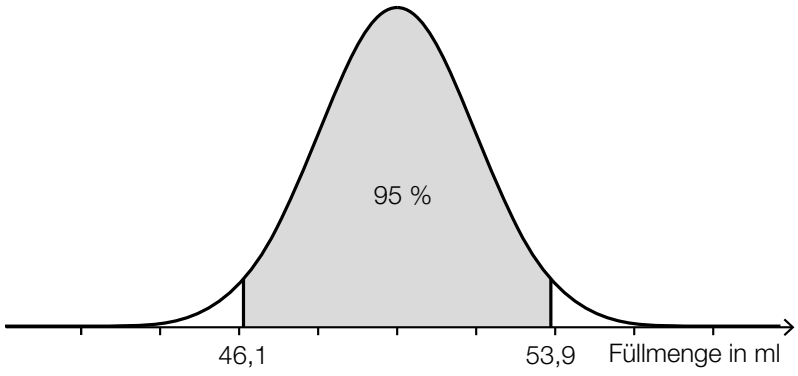
– Argumentieren Sie, warum sich bei dieser Zahlungsvariante ein höherer effektiver Jahreszinssatz ergibt.

c) Während der Renovierungsarbeiten möchte der Hotelbesitzer eine Reisegruppe einquartieren. Leider stehen dafür 2 Zimmer zu wenig zur Verfügung. Aus Erfahrung weiß man, dass im Schnitt 12 % aller Buchungen wieder kurzfristig storniert werden. Das Hotel nimmt daher die Buchung der Reisegruppe an. Dabei wird angenommen, dass Einzelstornierungen voneinander unabhängig sind.

– Kreuzen Sie denjenigen Ausdruck an, mit der die Wahrscheinlichkeit berechnet wird, dass bei der Annahme von 50 Buchungen mindestens 2 storniert werden. *[1 aus 5]*

$1 - \binom{50}{1} \cdot 0{,}12^{1} \cdot 0{,}88^{49} - \binom{50}{2} \cdot 0{,}12^{2} \cdot 0{,}88^{48}$	☐
$1 - \binom{50}{0} \cdot 0{,}12^{0} \cdot 0{,}88^{50} + \binom{50}{1} \cdot 0{,}12^{1} \cdot 0{,}88^{49}$	☐
$1 - \binom{50}{0} \cdot 0{,}12^{0} \cdot 0{,}88^{50} - \binom{50}{1} \cdot 0{,}12^{1} \cdot 0{,}88^{49}$	☐
$1 - \binom{50}{1} \cdot 0{,}88^{1} \cdot 0{,}12^{49} + \binom{50}{2} \cdot 0{,}88^{2} \cdot 0{,}12^{48}$	☐
$1 - \binom{50}{0} \cdot 0{,}88^{0} \cdot 0{,}12^{50} + \binom{50}{1} \cdot 0{,}88^{1} \cdot 0{,}12^{49}$	☐

d) Im Zuge der Renovierung wurden neue Shampoo-Fläschchen bestellt. Die Füllmenge der Fläschchen kann als annähernd normalverteilte Zufallsvariable angenommen werden. Die Füllmenge von 95 % aller Fläschchen liegt im unten dargestellten symmetrischen Intervall um den Erwartungswert.

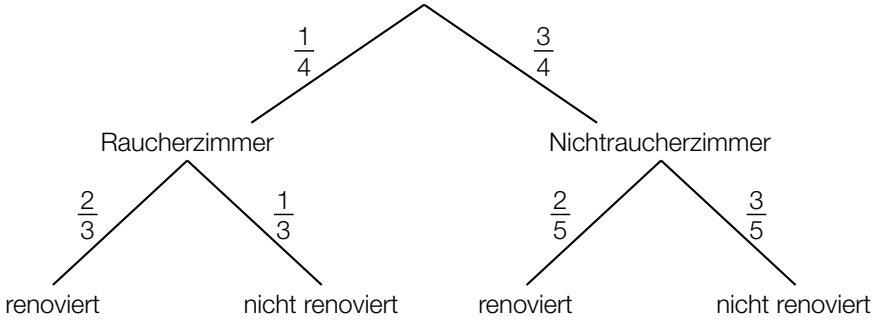


– Bestimmen Sie den Erwartungswert und die zugehörige Standardabweichung.
– Beschreiben Sie, wie sich die Kurve ändern würde, wenn die Standardabweichung bei gleichbleibendem Erwartungswert kleiner wäre.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



$P(\text{„renoviert“}) = P(\text{„Raucherzimmer und renoviert“}) + P(\text{„Nichtraucherzimmer und renoviert“}) =$
$= \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{7}{15}$

b) $80\,000 = 17\,900 \cdot \frac{(1 + i_{\text{eff}})^5 - 1}{i_{\text{eff}}} \cdot \frac{1}{(1 + i_{\text{eff}})^5}$

mittels Technologieeinsatz:
$i_{\text{eff}} = 0{,}03860...$

Der effektive Jahreszinssatz ist rund 3,86 %.

Bei der halbjährlichen Zahlungsart ergibt sich durch die früher fälligen Zahlungen ein höherer effektiver Jahreszinssatz.

c)

[...]	
[...]	
$1 - \binom{50}{0} \cdot 0{,}12^0 \cdot 0{,}88^{50} - \binom{50}{1} \cdot 0{,}12^1 \cdot 0{,}88^{49}$	☒
[...]	
[...]	

d) Der Erwartungswert μ liegt in der Mitte des Intervalls [46,1; 53,9].
Daher gilt: $\mu = \frac{46{,}1 + 53{,}9}{2} = 50$ ml

Normalverteilung mit $\mu = 50$ ml und $P(X \leq 46{,}1) = 0{,}025$
Berechnung der Standardabweichung σ mittels Technologieeinsatz: $\sigma \approx 1{,}99$ ml

Bei einer kleineren Standardabweichung wäre die Gauß'sche Glockenkurve schmäler und höher.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 5 Stochastik
d) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) C Interpretieren und Dokumentieren
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) —
d) D Argumentieren und Kommunizieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) leicht
c) mittel
d) leicht

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2
c) 1
c) 3

Thema: Tourismus

Quellen: —

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Produzent von landwirtschaftlichen Geräten

Aufgabennummer: B_179

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein Hersteller landwirtschaftlicher Geräte entwickelt innovative Produkte.

a) Er lässt sich diese innovativen Produkte sofort patentieren. Aufgrund dieser exklusiven Produktion kann man von einer Monopolstellung ausgehen.

Für einen bestimmten Teil eines Miststreuers lässt sich die verkaufbare Stückzahl durch folgende Nachfragefunktion x ermitteln:

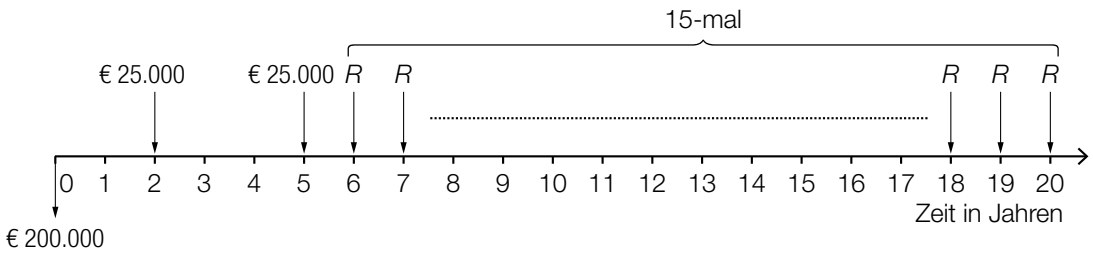
$x(p) = a \cdot p^2 + b \cdot p + c$

p … Preis eines Teils in Euro pro Stück
$x(p)$ … nachgefragte Stückzahl bei einem Preis p

Er hat ermittelt, dass bei einem Preis von € 200 pro Stück 47 980 Stück verkauft werden können.
Zudem geht man modellhaft davon aus, dass bei einem Preis von € 0 pro Stück 50 000 Stück nachgefragt werden.
Ab einem Preis von € 1.000 pro Stück gibt es keine Nachfrage mehr.

– Erstellen Sie ein Gleichungssystem, mit dem man die Koeffizienten a, b und c berechnen kann.
– Berechnen Sie die Koeffizienten a, b und c.

b) Für den Bau einer Produktionshalle muss das Unternehmen einen Kredit in Höhe von € 200.000 aufnehmen. Die folgende Grafik stellt das Angebot einer Rückzahlungsvariante dar:



– Beschreiben Sie den dargestellten Zahlungsverlauf.
– Dokumentieren Sie, wie man die Höhe der Rate R bei einem gegebenen Jahreszinssatz i berechnen kann.
– Berechnen Sie die Höhe der Rate R bei einem Zinssatz von 4 % p. a.

c) Bei der Überprüfung von bestimmten kleinen Teilen hat man bei einer Qualitätskontrolle festgestellt, dass durchschnittlich jedes 5. Stück einen Lackierungsfehler aufweist.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Schachtel von 20 Stück mindestens 3 Teile mit Lackierungsfehler zu finden sind.
– Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion der Anzahl von Teilen mit Lackierungsfehler für eine Schachtel, in der 5 Stück verpackt sind, grafisch dar.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $50\,000 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$

$0 = a \cdot 1\,000^2 + b \cdot 1\,000 + c$ $\qquad a = -0{,}049875 \quad b = -0{,}125 \quad c = 50\,000$

$47\,980 = a \cdot 200^2 + b \cdot 200 + c$

b) Der Kredit von € 200.000 wird zurückgezahlt, indem am Ende des 2. Jahres und am Ende des 5. Jahres jeweils € 25.000 bezahlt werden und ab dem 6. Jahr bis zum 20. Jahr immer am Ende des Jahres ein gleich hoher Betrag R bezahlt wird (bzw. der Rest in Form einer nachschüssigen Rente mit Raten der Höhe R innerhalb von 15 Jahren zurückgezahlt wird).

Die Höhe der Raten R wird berechnet, indem man den Betrag von € 200.000 5 Jahre mit dem Zinssatz i verzinst. Davon zieht man die € 25.000, die zu Ende des 5. Jahres bezahlt werden, und die 3 Jahre verzinsten € 25.000, die zu Ende des 2. Jahres bezahlt werden, ab. Die Differenz stellt den Barwert einer 15-jährigen nachschüssigen Rente mit Jahresraten der Höhe R bei einem Zinssatz i dar. Die Höhe dieser Rate R lässt sich mittels Technologieeinsatz berechnen.

$200\,000 \cdot 1{,}04^5 - (25\,000 + 25\,000 \cdot 1{,}04^3) \approx 190\,208{,}98 \ldots$ Barwert der 15-jährigen Rente

$$190\,208{,}98 = R \cdot \frac{1}{1{,}04^{15}} \cdot \frac{1{,}04^{15} - 1}{0{,}04} \quad \Rightarrow \quad R \approx 17\,107{,}605...$$

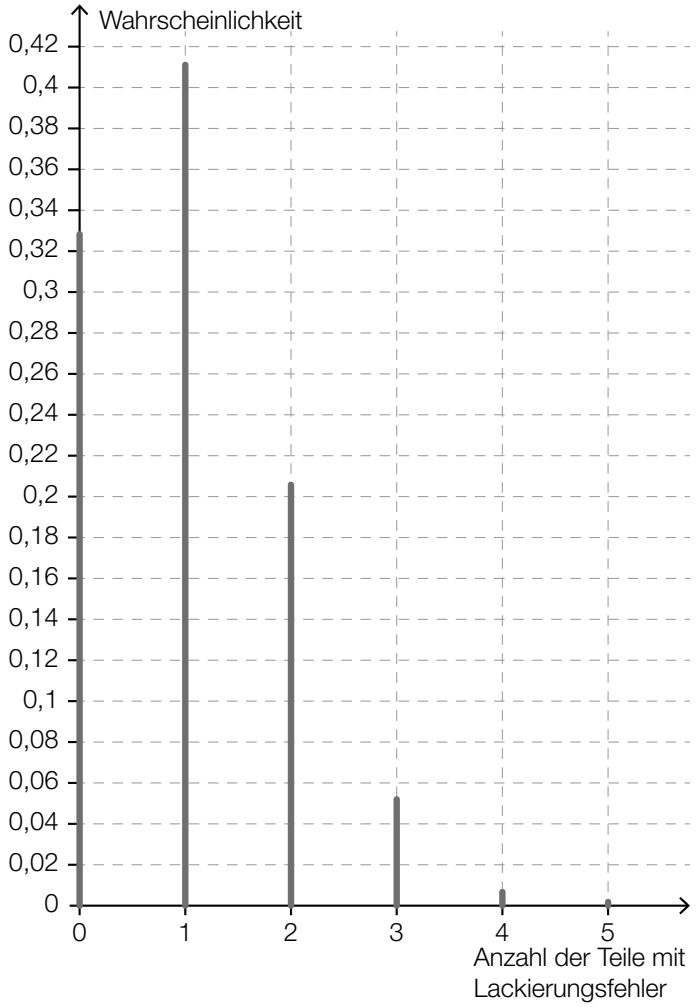
Die Höhe der Rate R beträgt € 17.107,61.

Ebenso könnte man den Zeitpunkt der Kreditaufnahme als ersten Bezugszeitpunkt verwenden.

$$\left[200\,000 - \left(\frac{25\,000}{1{,}04^2} + \frac{25\,000}{1{,}04^5}\right)\right] \cdot 1{,}04^5 \approx 190\,208{,}98 \ldots \text{ Barwert der 15-jährigen Rente}$$

c) $P(X \geq 3) = \sum_{k=3}^{20} \binom{20}{k} \cdot 0{,}2^k \cdot 0{,}8^{20-k}$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt ungefähr 79,4 %.



Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) D Argumentieren und Kommunizieren, B Operieren und Technologieeinsatz
c) A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 3
c) 3

Thema: Wirtschaft

Quellen: —

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Körpergröße von Kindern

Aufgabennummer: B_228

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Die nachstehende Tabelle gibt die durchschnittlich gemessene Körpergröße am Ende eines Lebensjahres von Buben im Kindesalter im Laufe ihrer Entwicklung an. Als Geburtsgröße wird eine durchschnittliche Größe von 50 cm angenommen.

t … Alter in Jahren (a)
G … Körpergröße in Zentimetern (cm)
$\frac{\Delta G}{\Delta t}$ … jährliche Änderungsrate in cm/a

t in a	G in cm	$\frac{\Delta G}{\Delta t}$ in cm/a
1	77	27
2	89	12
3	97	8
4	104	7
5	111	7
6	117	6

a) – Stellen Sie die Körpergröße G in Abhängigkeit vom Alter t als Punktediagramm in einem Koordinatensystem dar.
– Ermitteln Sie den Zusammenhang der beiden Größen über eine lineare Regression und zeichnen Sie die Trendlinie.
– Beschreiben Sie, was der Korrelationskoeffizient der ermittelten Funktion G aussagt.

b) – Argumentieren Sie, ob die mittlere jährliche Änderungsrate annähernd dem Gesetz einer arithmetischen Folge, einer geometrischen Folge oder keiner von beiden gehorcht.

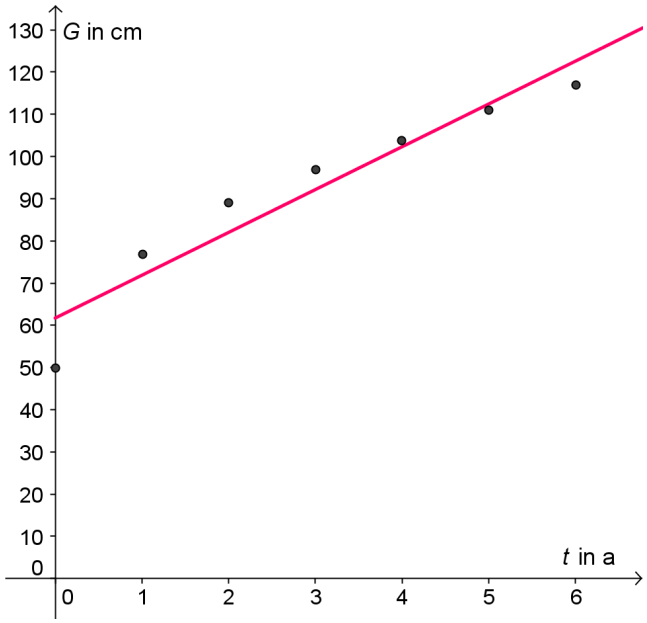
c) Die Körpergröße der Kinder ist näherungsweise normalverteilt. Buben im Alter von 8 Jahren haben eine Körpergröße mit einem Erwartungswert von $\mu = 130$ cm bei einer Standardabweichung von $\sigma = 10$ cm.

– Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Bub dieses Alters eine Körpergröße zwischen 135 cm und 145 cm hat.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



$G(t) = 10{,}14t + 61{,}71$

Der Korrelationskoeffizient $r \approx 0{,}956$ lässt einen linearen Zusammenhang von Alter und Körpergröße vermuten.

b) Die jährlichen Änderungsraten der Körpergrößen bilden weder eine arithmetische noch eine geometrische Folge.
Würden die Zuwächse eine arithmetische Folge bilden, so müsste die Differenz zweier aufeinanderfolgender Glieder gleich groß bleiben. Das ist nicht der Fall.
Wären sie Glieder einer geometrischen Folge, so müsste der Quotient aufeinanderfolgender Glieder gleich groß sein. Das ist nicht der Fall.
Man kann nur erkennen, dass die jährliche Wachstumsänderung in den ersten Lebensjahren groß ist und dass sich die jährliche Zunahme an Körpergröße in den folgenden Jahren wenig verändert.

c) $\mu = 130$ cm, $\sigma = 10$ cm
$P(135 \leq X \leq 145) = 0{,}24173$

Die Wahrscheinlichkeit, einen Buben von 8 Jahren mit einer Körpergröße zwischen 135 cm und 145 cm anzutreffen, beträgt ca. 24 %.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) —
c) —

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 3
b) 2
c) 1

Thema: Biologie

Quelle: einige Werte aus: http://blikk.it/angebote/primarmathe/ma0323.htm

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

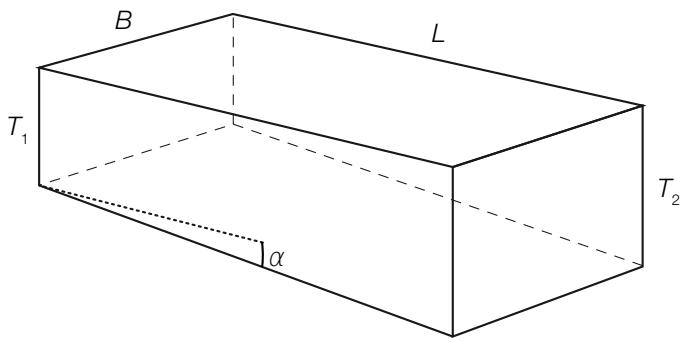
Swimmingpool

Aufgabennummer: A_175

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Petra plant einen Swimmingpool für ihren Garten.

a) Der rechteckige Pool soll die Länge L und die Breite B haben.
Außerdem soll der Boden im Winkel α abfallen, sodass der Pool immer tiefer wird
(vgl. nachstehende Skizze).



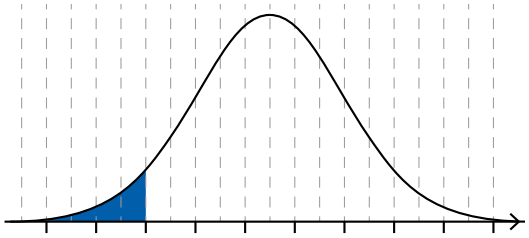
– Stellen Sie eine Formel zur Berechnung des Volumens V aus L, B, T_1 und α auf.

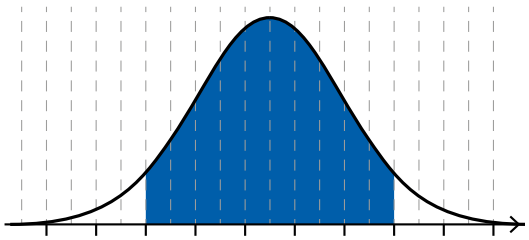
$V =$ _____

– Berechnen Sie das Volumen des Swimmingpools in Hektolitern für folgende Maße:
$L = 10$ m, $B = 3$ m, $T_1 = 1{,}5$ m und $\alpha = 2{,}9°$.

b) Die Lebensdauer der Innenbeschichtung eines Swimmingpools kann als annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert μ angenommen werden. Die gekennzeichneten Flächen in den nachstehenden Grafiken stellen Wahrscheinlichkeiten dar.

– Ordnen Sie den beiden Grafiken jeweils die richtige Beschreibung der dargestellten Wahrscheinlichkeit aus A bis D zu. *[2 zu 4]*





A	Die gekennzeichnete Fläche beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass die Innenbeschichtung $\mu \pm 5$ Jahre hält.
B	Die gekennzeichnete Fläche beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass die Innenbeschichtung mindestens 10 Jahre hält.
C	Die gekennzeichnete Fläche beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass die Innenbeschichtung nicht länger als 10 Jahre hält.
D	Die gekennzeichnete Fläche beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass die Innenbeschichtung nicht länger als 20 Jahre hält.

c) Der Hersteller verkauft in einem bestimmten Jahr 40 Swimmingpools.
Die Wahrscheinlichkeit, dass die Innenbeschichtung eines Swimmingpools eine größere als die vom Hersteller garantierte Lebensdauer hat, beträgt bei einem zufällig ausgewählten Swimmingpool ungefähr 97 %.

– Beschreiben Sie im gegebenen Sachzusammenhang, welche Wahrscheinlichkeit mit dem folgenden Ausdruck berechnet werden kann:

$$1 - \sum_{k=5}^{40} \binom{40}{k} \cdot 0{,}03^k \cdot 0{,}97^{40-k}$$

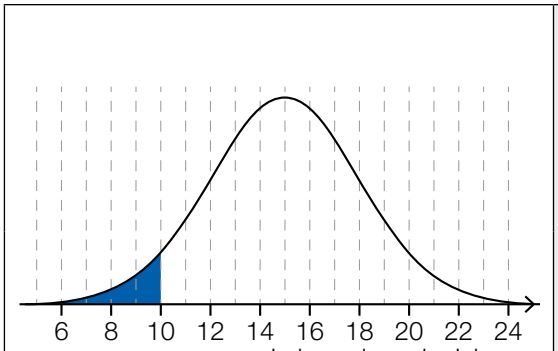
Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

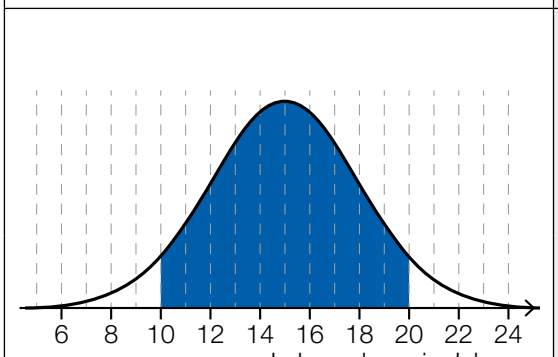
a) $\tan(\alpha) = \frac{T_2 - T_1}{L} \Rightarrow T_2 - T_1 = \tan(\alpha) \cdot L \Rightarrow V = T_1 \cdot L \cdot B + \frac{\tan(\alpha) \cdot L^2}{2} \cdot B$

$V = 52{,}59\ldots\ \text{m}^3 \approx 526\ \text{hl}$

b)



C



A

A	Die gekennzeichnete Fläche beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass die Innenbeschichtung $\mu \pm 5$ Jahre hält.
B	Die gekennzeichnete Fläche beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass die Innenbeschichtung mindestens 10 Jahre hält.
C	Die gekennzeichnete Fläche beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass die Innenbeschichtung nicht länger als 10 Jahre hält.
D	Die gekennzeichnete Fläche beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass die Innenbeschichtung nicht länger als 20 Jahre hält.

c) Mit dem Ausdruck wird die Wahrscheinlichkeit berechnet, dass bei weniger als 5 der 40 verkauften Swimmingpools die Beschichtung keine längere Lebensdauer als die vom Hersteller garantierte hat.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 5 Stochastik
c) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) –
c) –

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) leicht
c) schwer

Punkteanzahl:

a) 2
b) 1
c) 1

Thema: Sonstiges

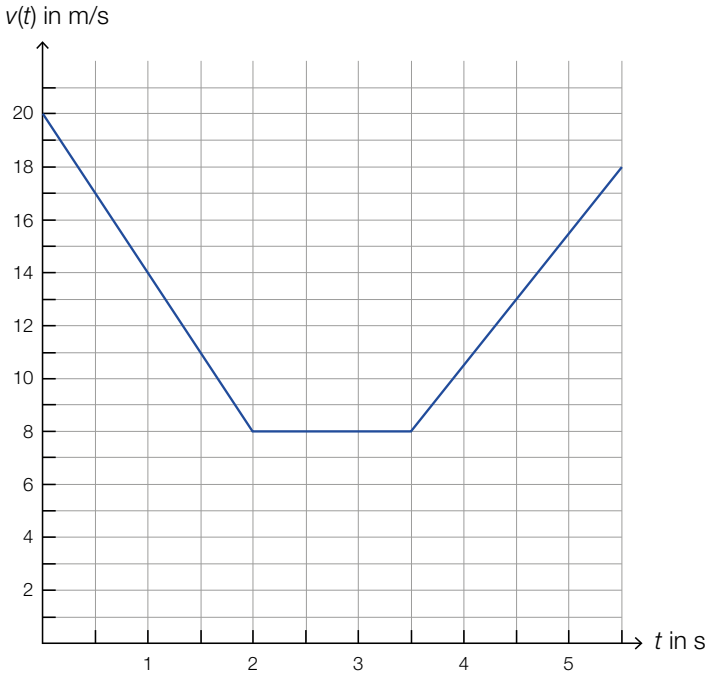
Quellen: –

Motorrad

Aufgabennummer: A_167

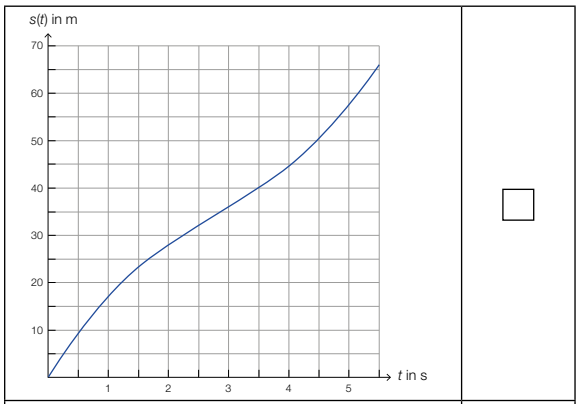
Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Der nachstehende Graph zeigt ein vereinfachtes Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm eines 5,5 s dauernden Ausschnitts einer Motorradfahrt.

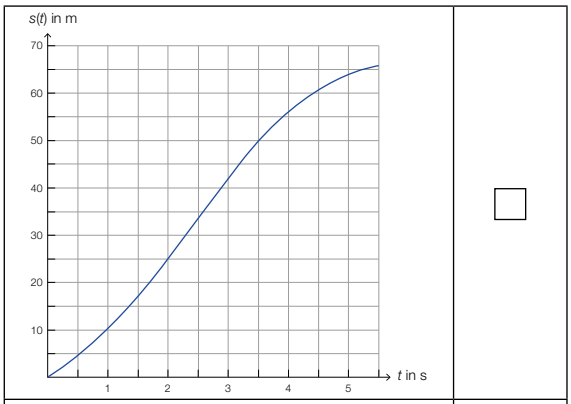


a) – Beschreiben Sie die dargestellte Fahrt des Motorrads in Worten.

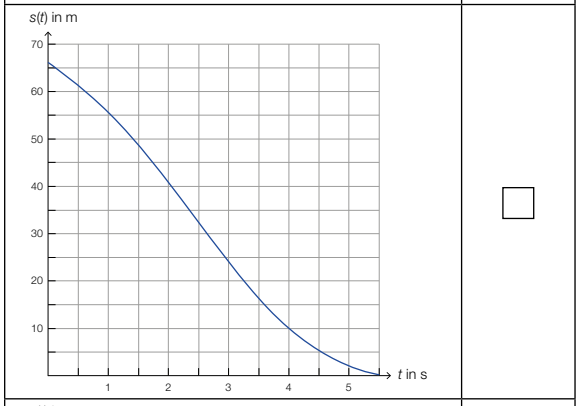
– Kreuzen Sie das zum Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm passende Weg-Zeit-Diagramm an. *[1 aus 5]*



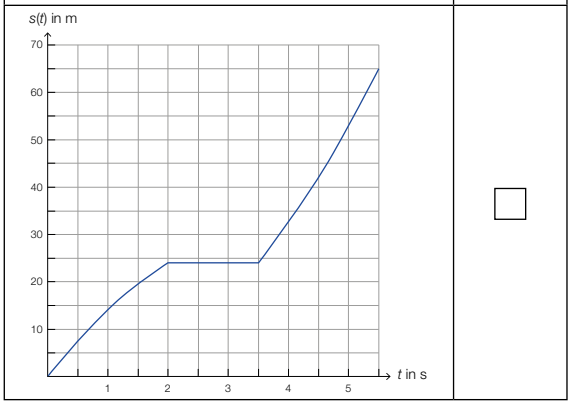
☐



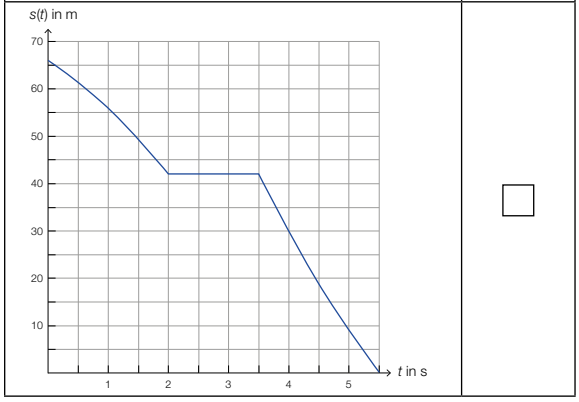
☐



☐



☐



☐

b) – Dokumentieren Sie in Worten, wie Sie mithilfe des Geschwindigkeit-Zeit-Diagramms die Strecke ermitteln können, die das Motorrad innerhalb der dargestellten 5,5 s zurückgelegt hat.

c) – Berechnen Sie die mittlere Beschleunigung des Motorrads im Zeitintervall [0; 5,5].

d) Die Kraft, die auf einen Motorradfahrer beim Durchfahren einer Kurve mit dem Radius r wirkt, kann mit der folgenden Formel berechnet werden:

$$F = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

F … Kraft in Newton (N)
m … Masse in kg
v … Geschwindigkeit in m/s
r … Kurvenradius in m

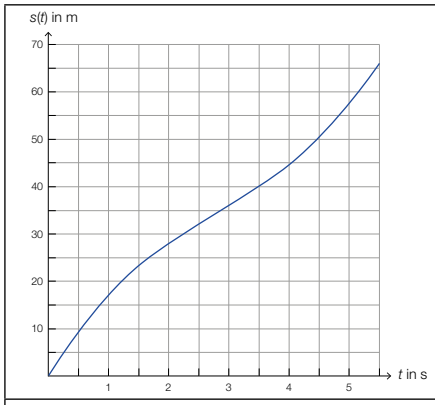
Durch das „Schneiden“ der Kurve kann man den Kurvenradius vergrößern und damit bei gleichbleibender Kraft die Kurve schneller durchfahren.

– Geben Sie an, wie sich der Kurvenradius ändern muss, damit die Kurve bei gleichbleibender Kraft mit doppelt so großer Geschwindigkeit durchfahren werden kann.
– Zeigen Sie anhand der Formel, dass Ihre Behauptung stimmt.

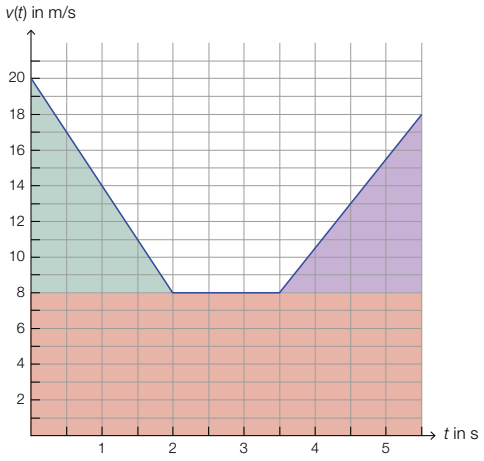
Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Das Motorrad bremst in den ersten 2 s gleichmäßig von 20 m/s auf 8 m/s ab, fährt 1,5 s mit konstanter Geschwindigkeit von 8 m/s weiter und beschleunigt schließlich wieder gleichmäßig auf 18 m/s innerhalb von 2 s.

	☒
[...]	
[...]	
[...]	
[...]	

b) Der zurückgelegte Weg entspricht der Fläche unter der Geschwindigkeitsfunktion. Diese Fläche kann wie, in der nebenstehenden Skizze dargestellt, in 2 Dreiecke und ein Rechteck zerlegt werden.
(Auch die Beschreibung der Berechnung mithilfe des Integrals ist als richtig zu werten).



c) $\bar{a} = \frac{18 - 20}{5{,}5 - 0} = -0{,}363\ldots \approx -0{,}36$
Die mittlere Beschleunigung beträgt rund –0,36 m/s².

d) Um die Geschwindigkeit v verdoppeln zu können, muss der Kurvenradius r um den Faktor 4 vergrößert werden.
Verdoppelt man in der Formel die Geschwindigkeit von v auf $2 \cdot v$ und vervierfacht zugleich den Kurvenradius vor r auf $4 \cdot r$, so erhält man dieselbe Kraft wie zuvor:
$F = m \cdot \frac{(2 \cdot v)^2}{4 \cdot r} = m \cdot \frac{4 \cdot v^2}{4 \cdot r} = m \cdot \frac{v^2}{r}$

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 4 Analysis
c) 4 Analysis
d) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 2 Algebra und Geometrie
c) —
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) —
c) —
d) D Argumentieren und Kommunizieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel
d) schwer

Punkteanzahl:

a) 2
b) 1
c) 1
d) 2

Thema: Physik

Quellen: —

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

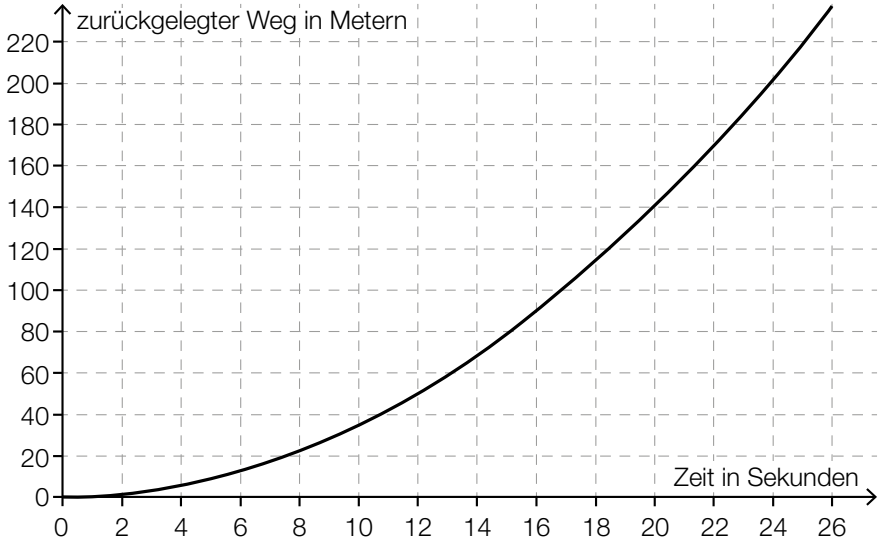
Motorradfahrt

Aufgabennummer: A_163

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Jugendliche fahren mit ihren Motorrädern von Jenbach nach Schwaz.

a) Im nachstehenden Weg-Zeit-Diagramm ist der Funktionsgraph für die ersten Sekunden eines Motorradfahrers nach der Abfahrt von Jenbach dargestellt.



– Ermitteln Sie die mittlere Geschwindigkeit in den ersten 20 Sekunden in km/h.

b) Die Geschwindigkeit eines Motorrads kann für eine halbe Stunde Fahrt näherungsweise mit der Funktion v beschrieben werden.

$v(t) = -925 \cdot t^3 + 600 \cdot t^2 - 32 \cdot t + 15$ mit $0 \le t \le 0{,}5$

t ... Zeit in h
$v(t)$ ... Geschwindigkeit des Motorrads zur Zeit t in km/h

– Berechnen Sie den zurückgelegten Weg für diese halbe Stunde.

c) Während der Fahrt muss ein Motorradfahrer eine Vollbremsung durchführen. Der Bremsweg s kann näherungsweise mit folgender Formel berechnet werden:

$$s = \frac{v^2}{100}$$

s ... Bremsweg in m
v ... Geschwindigkeit zu Beginn der Bremsung in km/h

– Erklären Sie, wie sich der Bremsweg verändert, wenn die Geschwindigkeit zu Beginn der Bremsung verdoppelt wird.

Der Motorradfahrer möchte die Geschwindigkeit v bei einem vorgegebenen Bremsweg s bestimmen.

– Kreuzen Sie die zutreffende Formel an. *[1 aus 5]*

$v = \frac{\sqrt{100}}{s}$	☐
$v = s^2 \cdot 100$	☐
$v = \sqrt{s} \cdot 10$	☐
$v = \frac{s}{\sqrt{100}}$	☐
$v = \sqrt{\frac{s}{100}}$	☐

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{140 - 0}{20 - 0} = 7$

7 m/s = 7 · 3,6 km/h = 25,2 km/h

Das Motorrad fährt in den ersten 20 Sekunden mit einer mittleren Geschwindigkeit von 25,2 km/h.

b) $\int_0^{0,5} (-925 \cdot t^3 + 600 \cdot t^2 - 32 \cdot t + 15)\,dt = 14,0\ldots$

Das Motorrad legt in der halben Stunde rund 14 km zurück.

c) Setzt man in die Formel statt v die doppelt so hohe Geschwindigkeit $2 \cdot v$ ein, ergibt sich:
$s_{neu} = \frac{(2 \cdot v)^2}{100} = \frac{4 \cdot v^2}{100} = 4 \cdot s$

Das bedeutet: Wenn man bei doppelt so hoher Geschwindigkeit bremst, dann vervierfacht sich der Bremsweg.

[...]	
[...]	
$v = \sqrt{s} \cdot 10$	☒
[...]	
[...]	

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 4 Analysis
c) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) D Argumentieren und Kommunizieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) —
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) leicht
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 1
b) 1
c) 2

Thema: Physik

Quellen: —

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Hotel

Aufgabennummer: A_162

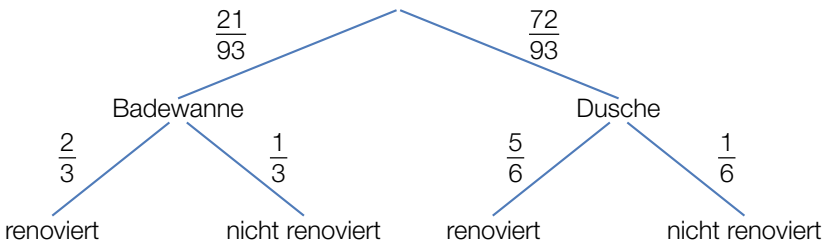
Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein Hotel kann 93 Zimmer vermieten.

a) In dem Hotel gibt es 1-Bett-Zimmer und 2-Bett-Zimmer. Insgesamt verfügt das Hotel über 174 Betten.

– Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Anzahl der 1-Bett-Zimmer und 2-Bett-Zimmer.
– Berechnen Sie die Höhe der Einnahmen bei voller Auslastung pro Nacht, wenn die Übernachtung inkl. Frühstück im 1-Bett-Zimmer € 90 und im 2-Bett-Zimmer € 75 pro Person kostet.

b) Die Hotelzimmer wurden teilweise renoviert. Bei einer Onlinebuchung wird einem Gast zufällig ein Zimmer zugewiesen. Das nachstehende Baumdiagramm zeigt, mit welcher Wahrscheinlichkeit das zugeteilte Zimmer mit einer Badewanne bzw. mit einer Dusche ausgestattet ist und mit welcher Wahrscheinlichkeit das Zimmer renoviert bzw. nicht renoviert wurde.



– Kreuzen Sie die richtige Aussage an. *[1 aus 5]*

$P(\text{„renoviertes Zimmer“}) = \frac{7}{31} \cdot \frac{2}{3} + \frac{24}{31} \cdot \frac{5}{6}$	☐
$P(\text{„nicht renoviertes Zimmer“}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$	☐
$P(\text{„renoviertes Zimmer mit Badewanne“}) = \frac{2}{3}$	☐
$P(\text{„renoviertes Zimmer mit Badewanne oder Dusche“}) = 1$	☐
$P(\text{„nicht renoviertes Zimmer mit Dusche“}) = 1 - \frac{72}{93} \cdot \frac{5}{6}$	☐

– Berechnen Sie mithilfe des Baumdiagramms die Anzahl der renovierten Zimmer.

c) Anlässlich einer Sportveranstaltung besteht eine große Buchungsnachfrage. Aus Erfahrung weiß man, dass durchschnittlich p % aller Buchungen kurzfristig storniert werden. Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der kurzfristigen Stornierungen an.

– Erklären Sie, unter welchen Bedingungen diese Zufallsvariable im gegebenen Sachzusammenhang binomialverteilt ist.

d) Erfahrungsgemäß nehmen 55 % der Gäste Vollpension in Anspruch.

– Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit von 40 zufällig ausgewählten Gästen mehr als 20 und weniger als 25 Personen Vollpension in Anspruch nehmen.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) x … Anzahl der 1-Bett-Zimmer
y … Anzahl der 2-Bett-Zimmer

$x + y = 93$
$x + 2 \cdot y = 174$

Berechnung der Anzahl der Zimmer: $y = 81$ und $x = 12$
$12 \cdot 90 + 81 \cdot 2 \cdot 75 = 13\,230$
Die Einnahmen bei voller Auslastung pro Nacht betragen € 13.230.

b)

$P(\text{„renoviertes Zimmer“}) = \frac{7}{31} \cdot \frac{2}{3} + \frac{24}{31} \cdot \frac{5}{6}$	☒
[...]	
[...]	
[...]	
[...]	

Anzahl der renovierten Zimmer mit Badewanne: $21 \cdot \frac{2}{3} = 14$

Anzahl der renovierten Zimmer mit Dusche: $72 \cdot \frac{5}{6} = 60$

Es wurden 74 Zimmer renoviert.

c) Die Binomialverteilung kann verwendet werden, wenn die Stornierung von Zimmern als Zufallsexperiment mit 2 möglichen Ausgängen (Stornierung, keine Stornierung) aufgefasst werden kann.
Die Wahrscheinlichkeit für eine Stornierung ist unabhängig von eventuell bereits vorausgegangenen Stornierungen.
Die Wahrscheinlichkeit p % für eine Stornierung muss bei jeder Buchung konstant sein.

d) Binomialverteilung mit $n = 40$, $p = 0{,}55$
X ... Anzahl der Gäste, die Vollpension buchen

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$P(20 < X < 25) = 0{,}470... \approx 47\ \%$

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 5 Stochastik
c) 5 Stochastik
d) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) D Argumentieren und Kommunizieren
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) —
d) —

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) mittel
d) leicht

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2
c) 1
d) 1

Thema: Tourismus

Quellen: —

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

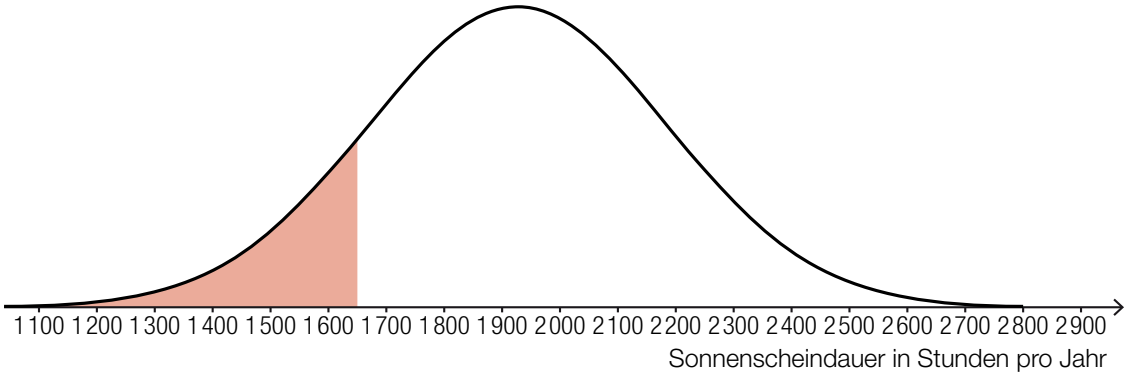
Freizeitparadies Schöckl

Aufgabennummer: A_145

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Die jährliche Sonnenscheindauer am Schöckl, dem Hausberg der Grazer/innen, ist annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert μ = 1 927 Stunden pro Jahr und der Standardabweichung σ = 258 Stunden pro Jahr.

– Ermitteln Sie dasjenige um den Erwartungswert symmetrische Intervall, in dem die jährliche Sonnenscheindauer mit 90%iger Wahrscheinlichkeit liegt.
– Interpretieren Sie die in der nachstehenden Grafik gekennzeichnete Fläche unter dem Graphen der Dichtefunktion im gegebenen Sachzusammenhang.



b) Auf dem Plateau des Schöckls steht ein 96,5 m hoher Sendemast. Auf derselben Horizontalebene liegen auf einer Linie mit dem Fußpunkt des Sendemasts die zwei Beobachtungspunkte B_1 und B_2. Beobachtungspunkt B_1 liegt 150 m vom Fußpunkt des Sendemasts entfernt. Die Spitze des Sendemasts erscheint von B_1 unter dem Höhenwinkel α. B_2 liegt zwischen dem Fußpunkt des Sendemasts und B_1.

– Veranschaulichen Sie den beschriebenen Sachverhalt anhand einer geeigneten Skizze.
– Berechnen Sie, in welcher Entfernung vom Fußpunkt des Sendemasts sich der Beobachtungspunkt B_2 befinden muss, damit die Spitze des Sendemasts von dort unter dem Winkel $2 \cdot \alpha$ erscheint.

c) An einem Sommertag fahren sowohl Erwachsene als auch Kinder mit dem *Hexenexpress*, einer Rodelbahn am Schöckl.

a … Anzahl der verkauften Erwachsenentickets
b … Anzahl der verkauften Kindertickets
u … Preis für ein Erwachsenenticket in Euro
v … Preis für ein Kinderticket in Euro

– Interpretieren Sie den Ausdruck $\frac{b \cdot v}{a \cdot u + b \cdot v}$ im gegebenen Sachzusammenhang.

Am darauffolgenden Tag fahren um 35 % mehr Kinder und um 10 % weniger Erwachsene mit dem Hexenexpress.

– Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung der Gesamteinnahmen *G* dieses Tages.

$G =$ _____

d) Die Flughöhe eines Paragleiters, der vom Schöckl startet, kann näherungsweise durch die Polynomfunktion *H* modelliert werden:

$H(t) = -0{,}007254 \cdot t^4 + 0{,}5245 \cdot t^3 - 13{,}101 \cdot t^2 + 95{,}3 \cdot t + 1\,440$ mit $2 \leq t \leq 20$

t … Zeit in min nach dem Start
$H(t)$ … Flughöhe zur Zeit *t* in m

– Dokumentieren Sie, wie man mithilfe der Differenzialrechnung ermitteln kann, nach welcher Zeit der Paragleiter seine maximale Höhe erreicht.
– Ermitteln Sie denjenigen Zeitpunkt, zu dem der Paragleiter am schnellsten an Höhe verliert.

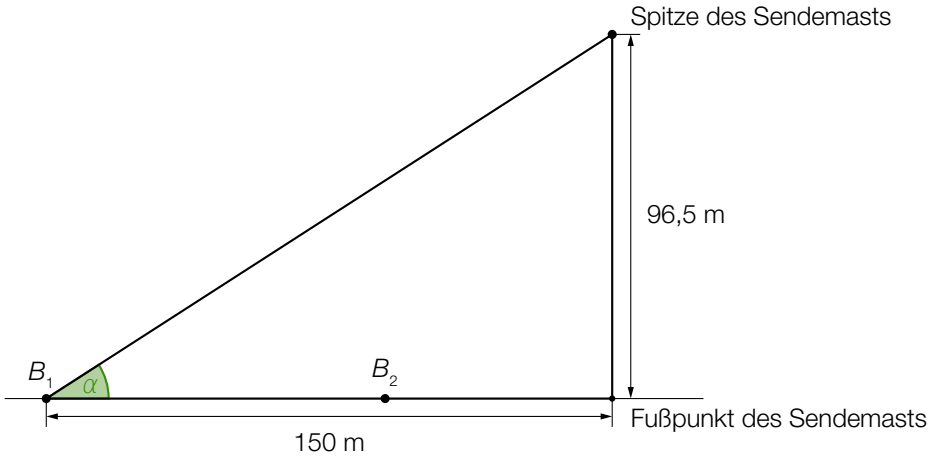
Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Berechnung des symmetrischen Intervalls mittels Technologieeinsatz:
$P(\mu - a \leq X \leq \mu + a) = 0{,}9 \quad \Rightarrow \quad [1\,502{,}63;\ 2\,351{,}37]$
Die Sonnenscheindauer liegt mit 90%iger Wahrscheinlichkeit im Intervall [1 502,63; 2 351,37] Stunden.

Die gekennzeichnete Fläche repräsentiert die Wahrscheinlichkeit, dass die jährliche Sonnenscheindauer höchstens 1 650 Stunden beträgt.

b)



$\alpha = \arctan\left(\frac{96{,}5}{150}\right) = 32{,}75\ldots°$

$x = \frac{96{,}5}{\tan(2 \cdot 32{,}75\ldots°)} = 43{,}959\ldots$

Der Beobachtungspunkt B_2 ist rund 43,96 m vom Fußpunkt des Sendemasts entfernt.

c) Der Ausdruck gibt den relativen Anteil der Einnahmen durch den Verkauf von Kindertickets an den Tagesgesamteinnahmen durch den Ticketverkauf an.

$G = a \cdot 0{,}9 \cdot u + b \cdot 1{,}35 \cdot v$

d) Dazu muss die Maximumstelle der Funktion H ermittelt werden: Man berechnet die Nullstellen der 1. Ableitung H'. Dann berechnet man die Funktionswerte an diesen Stellen und den Randstellen des Definitionsbereichs. Die größte dieser Zahlen ist die maximale Flughöhe. Die Maximumstelle ist die Zeit, nach der der Paragleiter die maximale Flughöhe erreicht.

mittels Technologieeinsatz die Wendestelle von H berechnen: $H''(t) = 0 \ \Rightarrow \ t = 13{,}00\ldots$
Der Paragleiter verliert zum Zeitpunkt $t \approx 13$ min am schnellsten an Höhe.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 2 Algebra und Geometrie
d) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) A Modellieren und Transferieren
c) C Interpretieren und Dokumentieren
d) D Argumentieren und Kommunizieren

Nebenhandlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) A Modellieren und Transferieren
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel
d) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2
c) 2
d) 2

Thema: Freizeit

Quellen: ZMAG, Graz Holding

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Malerarbeiten

Aufgabennummer: B_212

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Die Innenwände eines Hotels sollen in den Farben Weiß, Rot, Hellrosa, Dunkelrosa, Hellviolett und Dunkelviolett ausgemalt werden. Der Malermeister kauft für dieses Vorhaben die Farben Weiß, Rot und Blau ein. Alle anderen Farbtöne werden selbst gemischt.

a) Die nachstehende Tabelle gibt einen Überblick, welche Menge in Kilogramm von den Farben Weiß, Rot und Blau zur Herstellung von jeweils 1 kg der Farben Hellrosa, Dunkelrosa, Hellviolett und Dunkelviolett benötigt werden.

	Hellrosa	Dunkelrosa	Hellviolett	Dunkelviolett
Weiß	0,6	0,5	0,32	0,4
Rot	0,4	0,5	0,08	0,1
Blau	0	0	0,6	0,5

– Veranschaulichen Sie die Verflechtung der Farbmengen in einem Gozinto-Graphen.

b) Die nachstehende Tabelle gibt einen Überblick, welche Mengen in Kilogramm von den Farben Weiß und Rot zur Herstellung von jeweils 1 kg der Farben Hellrosa und Dunkelrosa benötigt werden.

	Hellrosa	Dunkelrosa
Weiß	0,6	0,5
Rot	0,4	0,5

Der Malermeister benötigt für das Ausmalen der Wände der Gästezimmer insgesamt 240 kg Weiß und 310 kg Rot, wobei er 100 kg Weiß und 200 kg Rot direkt auf die Wände aufträgt. Die jeweilige Restmenge dient zur Herstellung der Farben Hellrosa und Dunkelrosa.

– Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der hergestellten Mengen Hellrosa und Dunkelrosa.
– Berechnen Sie die jeweils hergestellte Menge an Hellrosa und Dunkelrosa.

c) Für das Ausmalen der Funktionsräume des Hotels werden insgesamt 956 kg weiße, 424 kg rote und 170 kg blaue Farbe benötigt. Die Farben können nicht in beliebigen Mengen, sondern in Kübeln bestimmter Füllmenge gekauft werden. Es liegt folgende Berechnung vor:

$$\begin{pmatrix} 956 \\ 424 \\ 170 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{25} = \begin{pmatrix} 38{,}24 \\ 16{,}96 \\ 6{,}8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 39 \\ 17 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot 25 - \begin{pmatrix} 956 \\ 424 \\ 170 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

– Interpretieren Sie die einzelnen Rechenschritte und das Ergebnis der Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang.

d) Der Hotelbesitzer fordert einen Kostenvoranschlag für die anstehenden Malerarbeiten. Der Malermeister erstellt folgende Übersicht:

Materialkosten:

	Farbmenge in kg	Preis in € pro kg
Weiß	n_1	p_1
Rot	n_2	p_2
Blau	n_3	p_3

Lohnkosten: L €

Insgesamt werden 5 % Rabatt gewährt.

Es sollen die Gesamtkosten K berechnet werden.

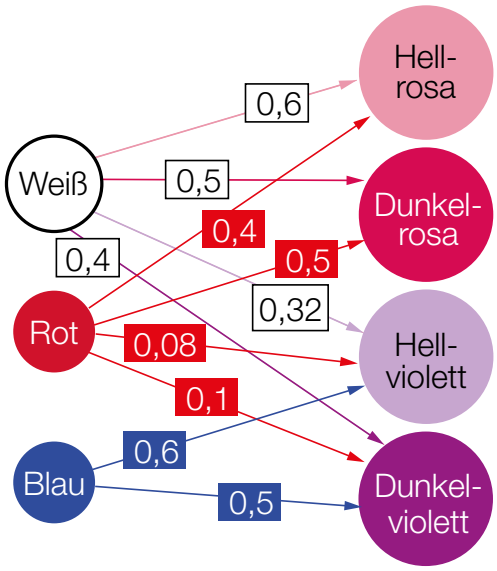
– Kreuzen Sie die richtige Formel an. *[1 aus 5]*

$K = [(n_1 \quad n_2 \quad n_3) \cdot (p_1 \quad p_2 \quad p_3) + L] \cdot 0{,}95$	☐
$K = [(n_1 \quad n_2 \quad n_3) \cdot (p_1 \quad p_2 \quad p_3)^T + L] \cdot 0{,}95$	☐
$K = [(n_1 \quad n_2 \quad n_3)^T \cdot (p_1 \quad p_2 \quad p_3)^{-1} + L] \cdot 0{,}95$	☐
$K = [(n_1 \quad n_2 \quad n_3)^{-1} \cdot (p_1 \quad p_2 \quad p_3) + L] \cdot 0{,}95$	☐
$K = [(n_1 \quad n_2 \quad n_3)^{-1} \cdot (p_1 \quad p_2 \quad p_3)^T + L] \cdot 0{,}95$	☐

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



b) x … hergestellte Menge Hellrosa in kg
y … hergestellte Menge Dunkelrosa in kg

$0{,}6 \cdot x + 0{,}5 \cdot y = 140$
$0{,}4 \cdot x + 0{,}5 \cdot y = 110$

Lösung des Gleichungssystems: $x = 150$ und $y = 100$
Es werden 150 kg Hellrosa und 100 kg Dunkelrosa hergestellt.
(Die Berechnung kann auch mithilfe von Matrizen erfolgen.)

c) Der Malermeister kauft die Farben in Kübeln zu je 25 kg ein. Er berechnet die Anzahl der jeweils benötigten Farbkübel und berechnet durch Subtraktion der benötigten Farbmengen die verbleibenden Restmengen.
Es bleiben 19 kg Weiß, 1 kg Rot und 5 kg Blau übrig.

d)

[…]	
$K = [(n_1 \quad n_2 \quad n_3) \cdot (p_1 \quad p_2 \quad p_3)^T + L] \cdot 0{,}95$	☒
[…]	
[…]	
[…]	

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 2 Algebra und Geometrie
d) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) –
d) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) A Modellieren und Transferieren
c) C Interpretieren und Dokumentieren
d) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) –
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) –
d) –

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) leicht
c) mittel
d) mittel

Punkteanzahl:

a) 1
b) 2
c) 2
d) 1

Thema: Alltag

Quellen: –

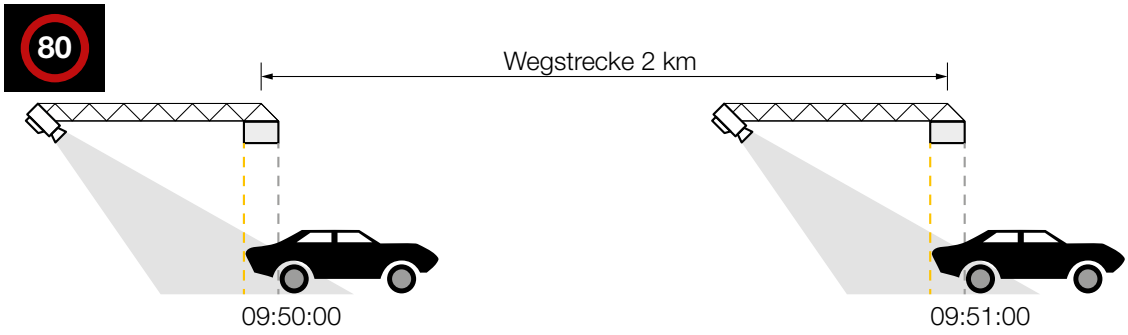
Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Geschwindigkeitskontrolle

Aufgabennummer: A_021

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Mithilfe der *Section Control* kann die Einhaltung von Geschwindigkeitsbeschränkungen kontrolliert werden.



– Überprüfen Sie anhand der Informationen aus der obigen Grafik nachweislich, ob der Autofahrer die Geschwindigkeitsbeschränkung von 80 km/h eingehalten hat.

b) Die Polizei führt eine Geschwindigkeitskontrolle durch. Auf einer Messstrecke von 200 m werden die Durchfahrtszeiten gemessen.
Es gilt:

$$v(t) = \frac{200}{t}$$

t … Durchfahrtszeit in s
$v(t)$ … mittlere Geschwindigkeit bei der Durchfahrtszeit t in m/s

– Erstellen Sie ein Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm für Durchfahrtszeiten von 0 s bis 40 s.
– Lesen Sie aus dem Diagramm ab, welche Durchfahrtszeit eine Autofahrerin / ein Autofahrer bei einer mittleren Geschwindigkeit von 25 m/s benötigt.

c) Bei der Geschwindigkeitsmessung mit einer Laserpistole tritt aufgrund des Standorts der Pistole ein Winkel α zwischen der Mess- und der Fahrtrichtung des Autos auf. Dieser Winkel bewirkt, dass die gemessene Geschwindigkeit nicht exakt der tatsächlichen Fahrgeschwindigkeit entspricht.

Es gilt:

$v_g = v_t \cdot \cos(\alpha)$

v_g … gemessene Geschwindigkeit in km/h
v_t … tatsächliche Geschwindigkeit in km/h
α … Winkel zwischen Fahrt- und Messrichtung mit $0° < \alpha < 90°$

– Berechnen Sie den Messfehler in km/h für eine tatsächliche Geschwindigkeit von 90 km/h bei einem Winkel von 15°.
– Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen des jeweils richtigen Satzteils so, dass eine korrekte Aussage entsteht. *[Lückentext]*

Die gemessene Geschwindigkeit _____①_____, weil für $\alpha \in]0°; 90°[$ gilt: $0 < \cos(\alpha) < 1$, und die Cosinusfunktion ist im Intervall $]0°; 90°[$ _____②_____.

①	
ist immer größer als die tatsächliche Geschwindigkeit	☐
unterscheidet sich von der tatsächlichen Geschwindigkeit umso mehr, je kleiner α ist	☐
unterscheidet sich von der tatsächlichen Geschwindigkeit umso weniger, je kleiner α ist	☐

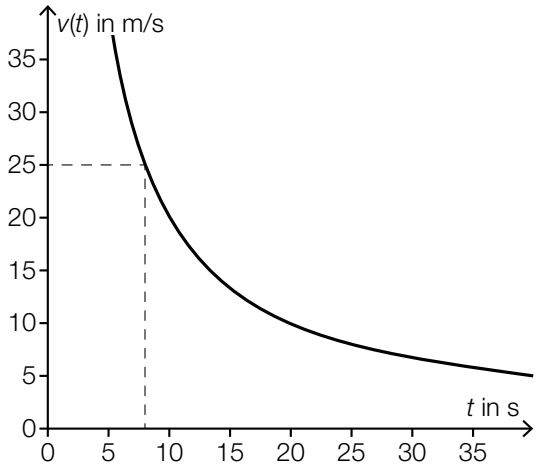
②	
streng monoton fallend	☐
unstetig	☐
positiv gekrümmt	☐

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Der Autofahrer fährt in 1 min 2 km
in 1 h = 60 min 120 km
Der Autofahrer hat die Geschwindigkeitsbeschränkung nicht eingehalten.

b)



Bei einer mittleren Geschwindigkeit von 25 m/s benötigt man für die Messstrecke rund 8 s.

c) $90 - 90 \cdot \cos(15°) = 3{,}066\ldots$
Der Messfehler beträgt rund 3,07 km/h.

①	
unterscheidet sich von der tatsächlichen Geschwindigkeit umso weniger, je kleiner α ist	☒

②	
streng monoton fallend	☒

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 1 Zahlen und Maße
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) leicht
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 1
b) 2
c) 2

Thema: Verkehr

Quellen: —

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Bateman-Funktion

Aufgabennummer: B_114

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Bei der oralen Einnahme eines Medikaments mit einem bestimmten Wirkstoff kann der Verlauf der Wirkstoffkonzentration im Blut durch die Bateman-Funktion c beschrieben werden.

$$c(t) = \frac{D}{V} \cdot \frac{k_1}{k_1 - k_2} \cdot (e^{-k_2 \cdot t} - e^{-k_1 \cdot t}) \text{ mit } t \geq 0$$

D ... Gesamtdosis des Wirkstoffs in mg
V ... Verteilungsvolumen in L
k_1, k_2 ... wirkstoffspezifische Koeffizienten

Es gilt: D, V, k_1, $k_2 > 0$ und $k_1 \neq k_2$

t ... Zeit nach der Einnahme in h
$c(t)$ ... Konzentration des Wirkstoffs im Blut zur Zeit t in mg/L

a) – Vergleichen Sie die beiden Exponentialterme $e^{-k_2 \cdot t}$ und $-e^{-k_1 \cdot t}$ im Hinblick auf ihr jeweiliges Monotonieverhalten.

b) Für ein bestimmtes Medikament gilt: $k_1 = 0{,}5\ \text{h}^{-1}$, $k_2 = 0{,}15\ \text{h}^{-1}$

– Berechnen Sie denjenigen Zeitpunkt, zu dem die Abnahme des Wirkstoffs am schnellsten erfolgt.

c) Für ein bestimmtes Medikament gilt: $k_1 = 0{,}5\ \text{h}^{-1}$, $k_2 = 0{,}15\ \text{h}^{-1}$, $V = 7$ L
Das Medikament wirkt nur, wenn die Wirkstoffkonzentration größer gleich 2 mg/L Blut ist.

– Zeigen Sie, dass eine Verdoppelung der Gesamtdosis D von 50 mg auf 100 mg nicht zu einer Verdoppelung der Wirkungsdauer führt.

d) Der Flächeninhalt unterhalb des Graphen der Bateman-Funktion c wird in der Medizin mit AUC (*area under the curve*, Fläche unter der Kurve) bezeichnet. Es gilt:

$$\text{AUC} = \frac{D}{V \cdot k_2}$$

– Kreuzen Sie die zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]*

Die Fläche unter der Kurve multipliziert mit dem Verteilungsvolumen ergibt die Gesamtdosis.	☐
Die Gesamtdosis ist gleich dem Produkt der Fläche unter der Kurve mit dem Verteilungsvolumen dividiert durch den Eliminationskoeffizienten k_2.	☐
Das Verteilungsvolumen ist gleich dem Produkt der Fläche unter der Kurve und der Gesamtdosis dividiert durch den Eliminationskoeffizienten k_2.	☐
Der Eliminationskoeffizient k_2 ist gleich dem Quotienten aus Gesamtdosis und Verteilungsvolumen.	☐
Die Gesamtdosis ist gleich dem Produkt aus der Fläche unter der Kurve, dem Verteilungsvolumen und dem Eliminationskoeffizienten k_2.	☐

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Der Formelteil $(e^{-k_2 \cdot t} - e^{-k_1 \cdot t})$ kann als Summe zweier Exponentialterme gesehen werden:

$(e^{-k_2 \cdot t} + (-e^{-k_1 \cdot t}))$

Der Term $e^{-k_2 \cdot t}$ ist aufgrund des negativen Vorzeichens des Exponenten streng monoton fallend.
Der Term $-e^{-k_1 \cdot t}$ ist aufgrund des negativen Vorzeichens des Exponenten und des negativen Vorzeichens vor der Basis streng monoton steigend.

b) $c(t) = \frac{D}{V} \cdot \frac{0{,}5}{0{,}35} \cdot (e^{-0{,}15 \cdot t} - e^{-0{,}5 \cdot t})$

$c''(t) = \frac{D}{V} \cdot \frac{0{,}5}{0{,}35} \cdot (0{,}15^2 \cdot e^{-0{,}15 \cdot t} - 0{,}5^2 \cdot e^{-0{,}5 \cdot t})$

$c''(t) = 0$

Lösung mittels Technologieeinsatz: $t = 6{,}879\ldots$

Die Abnahme der Wirkstoffkonzentration erfolgt rund 6,88 h nach der Einnahme am schnellsten.

c) (1) $2 = \frac{50}{7} \cdot \frac{0{,}5}{0{,}35} \cdot (e^{-0{,}15 \cdot t} - e^{-0{,}5 \cdot t})$

$t_1 = 0{,}701\ldots$, $t_2 = 10{,}705\ldots$

Die Wirkungsdauer ist also rund 10,00 h.

(2) $2 = \frac{100}{7} \cdot \frac{0{,}5}{0{,}35} \cdot (e^{-0{,}15 \cdot t} - e^{-0{,}5 \cdot t})$

$t_1 = 0{,}309\ldots$, $t_2 = 15{,}455\ldots$

Die Wirkungsdauer ist also rund 15,15 h.

15,15 h sind nicht das Doppelte von 10,00 h. Die Wirkungsdauer wird also durch die Einnahme der doppelten Dosis nicht verdoppelt.

Auch andere Argumentationen, z. B. grafische, sind zulässig.

d)

[...]	
[...]	
[...]	
[...]	
Die Gesamtdosis ist gleich dem Produkt aus der Fläche unter der Kurve, dem Verteilungsvolumen und dem Eliminationskoeffizienten k_2.	☒

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 4 Analysis
c) 3 Funktionale Zusammenhänge
d) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) D Argumentieren und Kommunizieren
d) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) A Modellieren und Transferieren
c) —
d) —

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) leicht
c) mittel
d) leicht

Punkteanzahl:

a) 1
b) 2
c) 1
d) 1

Thema: Chemie

Quellen: —

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Interneteinkäufe

Aufgabennummer: B_216

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Das Einkaufen im Internet erfreut sich immer größerer Beliebtheit.

a) Ein Marktforschungsinstitut führte eine Umfrage unter 5 000 Personen über ihr Einkaufsverhalten durch. Unter den Befragten befanden sich 3 000 Frauen. Die Umfrage ergab, dass 3 450 aller Befragten, davon 1 050 Männer, Einkäufe im Internet erledigen.

– Interpretieren Sie den nachstehend berechneten Prozentsatz im gegebenen Sachzusammenhang.

$$\frac{3\,450 - 1\,050}{3\,000} = 80\ \%$$

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte befragte Person, die im Internet Einkäufe erledigt, eine Frau ist.

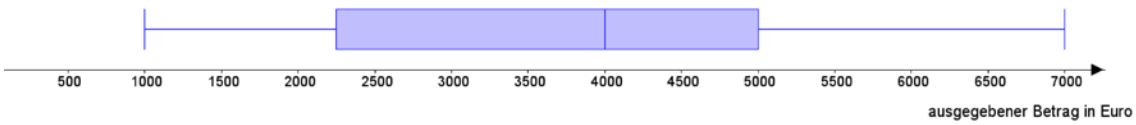
b) Ein Versandhaus bietet seinen Internetkunden die Möglichkeit, ihre Rechnung durch Ratenzahlung zu begleichen. Die Rückzahlung erfolgt monatlich vorschüssig. Die erste Rate ist einen Monat nach Kaufabschluss fällig.

– Erklären Sie, warum der als vorschüssig angegebene Rückzahlungsmodus auch als nachschüssige Rente aufgefasst werden kann.

Ein Betrag von € 250 wird durch 23 Monatsraten beglichen. Die ersten 22 Raten betragen jeweils € 13, die letzte Rate € 17,22.

– Berechnen Sie den effektiven Jahreszinssatz, der diesem Zahlungsmodus zugrunde liegt.

c) Ein Internethändler hat untersucht, um welchen Geldbetrag seine Stammkunden jährlich bei ihm einkaufen. Es wurde dazu folgender Boxplot erstellt.



– Kreuzen Sie die nicht zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]*

Kauft ein Stammkunde um € 6.000 ein, so zählt der ausgegebene Geldbetrag zu den 25 % der höchsten Beträge.	☐
Kein Stammkunde kauft um weniger als € 1.000 ein.	☐
Mindestens 75 % der Stammkunden kaufen um maximal € 5.000 ein.	☐
Kein Stammkunde kauft um mehr als € 7.000 ein.	☐
50 % der Stammkunden kaufen um genau € 4.000 ein.	☐

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) 80 % ist der Prozentsatz derjenigen befragten Frauen, die im Internet Einkäufe erledigen.

$$P(\text{„Frau“} \mid \text{„Interneteinkäufe“}) = \frac{P(\text{„Frau und Interneteinkäufe“})}{P(\text{„Interneteinkäufe“})} = \frac{\frac{3}{5} \cdot \frac{2400}{3000}}{\frac{3}{5} \cdot \frac{2400}{3000} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1050}{2000}}$$

$= 0{,}6956\ldots$

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte befragte Person, die im Internet Einkäufe erledigt, eine Frau ist, beträgt rund 69,6 %.

b) In der Finanzmathematik fallen der Beginn des 2. Monats und das Ende des 1. Monats zusammen. Man kann daher die vorschüssige Rente mit Beginn im 2. Monat gleichsetzen mit einer nachschüssigen Rente mit Beginn zum Zeitpunkt 0 = Kaufabschluss.

q_{12} … monatlicher Aufzinsungsfaktor

$$250 = 13 \cdot \frac{q_{12}^{22} - 1}{q_{12} - 1} \cdot \frac{1}{q_{12}^{22}} + \frac{17{,}22}{q_{12}^{23}}$$

Lösung mittels Technologieeinsatz:
$q_{12} = 1{,}0165\ldots$
$i_{\text{eff}} = q_{12}^{12} - 1 = 0{,}21716\ldots$
Der effektive Jahreszinssatz beträgt rund 21,72 % p. a.

c)

[...]	
[...]	
[...]	
[...]	
50 % der Stammkunden kaufen um genau € 4.000 ein.	☒

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) 1 Zahlen und Maße
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) —

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) schwer
c) leicht

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2
c) 1

Thema: Sonstiges

Quellen: —

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

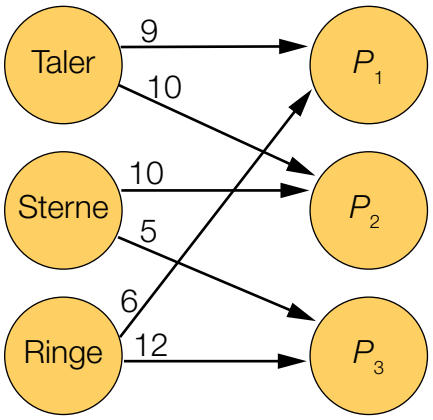
Kekse

Aufgabennummer: B_219

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

In einer Keksfabrik werden talerförmige, sternförmige und ringförmige Kekse produziert.

a) Die produzierten Kekse werden abschließend in verschiedenen Packungen P_1, P_2 und P_3 zusammengestellt und verkauft.



– Beschreiben Sie die im Gozinto-Graphen dargestellten Verflechtungen mithilfe einer quadratischen Matrix ***A***.
– Interpretieren Sie die Bedeutung des Elements a_{23} dieser Matrix im gegebenen Sachzusammenhang.

b) Ein Supermarkt bestellt 100 Stück Taler, 150 Stück Sterne und 170 Stück Ringe. Außerdem werden n Packungen der Keksmischung M_1 und doppelt so viele Packungen der Keksmischung M_2 angefordert. Die 3×2-Matrix ***B*** gibt an, wie viel Stück Taler, Sterne und Ringe jeweils in den Mischungen M_1 und M_2 enthalten sind.

– Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung der für die Bestellung des Supermarkts insgesamt zu produzierenden Taler, Sterne und Ringe.
– Geben Sie an, wie viele Zeilen und Spalten die Ergebnismatrix dieser Berechnung hat.

c) Die nachstehende Tabelle gibt die Verflechtung für die Herstellung zweier Packungssorten P_4 und P_5 an.

	P_4	P_5
Taler	10	10
Sterne	5	4
Ringe	12	6

Es werden 50 Packungen P_4 und 30 Packungen P_5 zusammengestellt.

– Berechnen Sie, wie viele Taler, Sterne und Ringe dafür nötig sind.

d) Die Produktion eines Kekses kostet unabhängig von dessen Form 5 Cent. Die Matrix $\boldsymbol{C}$ gibt die Anzahl der benötigten Taler, Sterne und Ringe für zwei unterschiedliche Packungen P_6 und P_7 an.

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 5 & 4 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}$$

Es wird folgende Berechnung durchgeführt:

$$\boldsymbol{K} = 0{,}05 \cdot \begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 5 & 4 \\ 12 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}25 & 0{,}2 \\ 0{,}6 & 0{,}3 \end{pmatrix}$$

– Interpretieren Sie die Bedeutung der Matrix $\boldsymbol{K}$ im gegebenen Sachzusammenhang.

Aus der Matrix $\boldsymbol{P}$ sollen ohne weitere Berechnungen die Produktionskosten für eine Packung P_6 und die Produktionskosten für eine Packung P_7 abgelesen werden können.

– Berechnen Sie die Matrix $\boldsymbol{P}$.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Werden die Rohstoffe waagrecht in der Reihenfolge Taler, Sterne, Ringe und die Packungen senkrecht aufgetragen, ergibt sich folgende Matrix:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 9 & 10 & 0 \\ 0 & 10 & 5 \\ 6 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

Auch eine Vertauschung von Zeilen und Spalten sowie eine andere Reihenfolge der Keksorten ist möglich.

Das Element a_{23} steht in der 2. Zeile und 3. Spalte und hat den Wert 5. Es gibt die Anzahl der in den Packungen P_3 enthaltenen Sterne an.

b) $$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B} \cdot \begin{pmatrix} n \\ 2 \cdot n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 100 \\ 150 \\ 170 \end{pmatrix}$$

Die Ergebnismatrix $\boldsymbol{X}$ hat 3 Zeilen und 1 Spalte.

c) $$\begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 5 & 4 \\ 12 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 50 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 800 \\ 370 \\ 780 \end{pmatrix}$$

Man benötigt 800 Stück Taler, 370 Stück Sterne und 780 Stück Ringe.

d) Die Matrix $\boldsymbol{K}$ gibt an, wie viel die Produktion der in den Packungen vorhandenen unterschiedlichen Keksformen jeweils kostet.

$$\boldsymbol{P} = (0{,}05 \quad 0{,}05 \quad 0{,}05) \cdot \begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 5 & 4 \\ 12 & 6 \end{pmatrix} = (1{,}35 \quad 1)$$

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 2 Algebra und Geometrie
d) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) A Modellieren und Transferieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) —
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) leicht
d) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2
c) 1
d) 2

Thema: Sonstiges

Quellen: —

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

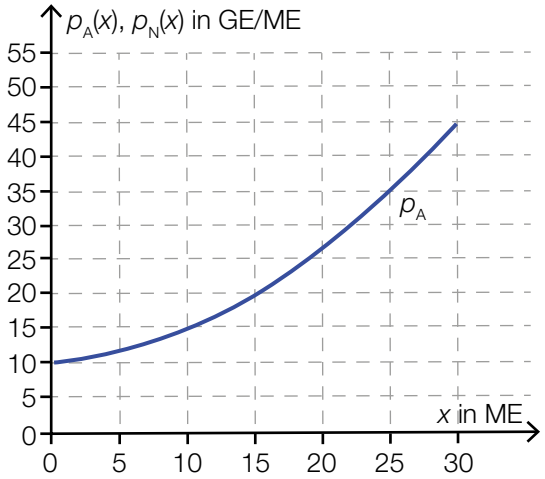
Handyverkauf

Aufgabennummer: B_218

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Anlässlich der Herstellung eines neuen Handymodells untersucht ein Konzern die mit den bisherigen Handymodellen gemachten Erfahrungen am Markt. Geldbeträge werden dabei in Geldeinheiten (GE) und die Anzahl der Handys in Mengeneinheiten (ME) angegeben.

a) In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Preisfunktion des Angebots p_A eines bestimmten Handymodells dargestellt. Die Preisfunktion der Nachfrage p_N dieses Modells kann mithilfe einer linearen Funktion beschrieben werden. Der Höchstpreis liegt bei 50 GE/ME. Der Markt ist bei 25 ME gesättigt.



– Zeichnen Sie den Graphen der Preisfunktion der Nachfrage in die obige Abbildung ein.
– Lesen Sie den Marktpreis ab.

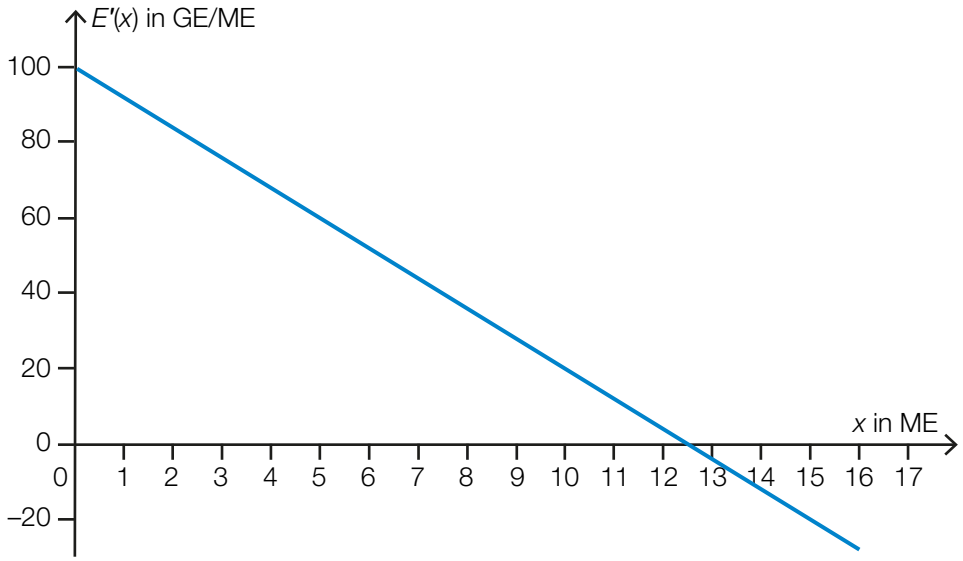
b) Der erzielbare Gewinn für ein Handymodell kann mithilfe der Funktion G beschrieben werden:

$G(x) = -0{,}1 \cdot x^3 - 0{,}2 \cdot x^2 + 175 \cdot x - 1\,750$

x … verkaufte Menge in ME
$G(x)$ … erzielter Gewinn in GE beim Verkauf von x ME

– Berechnen Sie, ab welcher Verkaufsmenge Gewinn erzielt wird.
– Berechnen Sie den maximal erzielbaren Gewinn.

c) In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Grenzerlösfunktion E' für den Verkauf eines anderen Handymodells dargestellt.

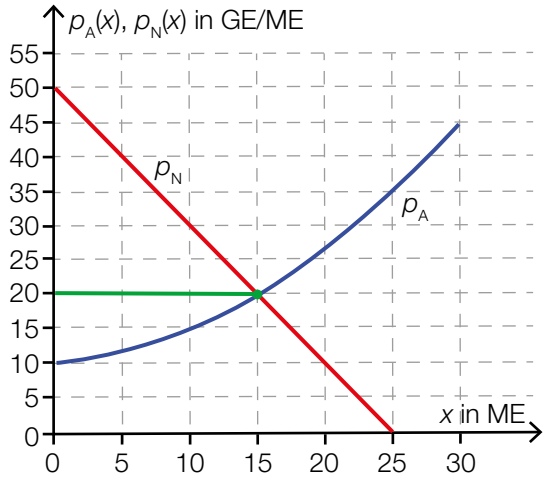


– Lesen Sie aus der Abbildung diejenige Verkaufsmenge ab, bei der der maximale Erlös erwirtschaftet wird.
– Erklären Sie, wie man ohne Integration mithilfe der Abbildung den maximalen Erlös berechnen kann.
– Berechnen Sie den maximalen Erlös.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



Der Marktpreis beträgt 20 GE/ME.

b) Lösen der Gleichung $G(x) = 0$ mittels Technologieeinsatz:
($x_1 = -47{,}073\ldots$); $x_2 = 10{,}868$; $x_3 = 34{,}204\ldots$
Ab einer Verkaufsmenge von rund 10,87 ME wird Gewinn erzielt.

$G'(x) = -0{,}3 \cdot x^2 - 0{,}4 \cdot x + 175$
Für die Verkaufsmenge des maximalen Gewinns gilt: $G'(x) = 0$
Lösen der Gleichung mittels Technologieeinsatz: $x = 23{,}494\ldots$
$G(23{,}494\ldots) = 954{,}262\ldots$
Der maximale Gewinn beträgt rund 954,26 GE.

c) Die Stelle des maximalen Erlöses entspricht der Nullstelle der Grenzerlösfunktion.
Der maximale Erlös wird bei $x = 12{,}5$ ME erwirtschaftet.

Die Höhe des maximalen Erlöses entspricht dem Flächeninhalt unter dem Graphen der Grenzerlösfunktion bis zur Nullstelle der Funktion. Dieser kann (ohne Integration) als Flächeninhalt eines rechtwinkeligen Dreiecks berechnet werden.

Die Fläche ist ein rechtwinkeliges Dreieck: $A = \frac{100 \cdot 12{,}5}{2} = 625$
Der maximale Erlös beträgt also 625 GE.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 4 Analysis
c) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) 2 Algebra und Geometrie

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) —
c) D Argumentieren und Kommunizieren, B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) leicht
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2
c) 3

Thema: Wirtschaft

Quellen: —

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Alkoholfreie Cocktails*

Aufgabennummer: B_454

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Es gibt viele beliebte Cocktails ohne Alkohol.

a) Für einen Cocktail *Yellow Fun* benötigt man 2 Centiliter (cl) Mangosaft, 8 cl Maracujasaft, 2 cl Zitronensaft und 8 cl Pfirsichsaft.

Für einen Cocktail *Exotic Punch* benötigt man 4 cl Mangosaft, 4 cl Maracujasaft, 4 cl Ananassaft, 4 cl Grapefruitsaft und 4 cl Orangensaft.

Es sollen x Cocktails *Yellow Fun* und y Cocktails *Exotic Punch* hergestellt werden.

Insgesamt stehen maximal 2 L Mangosaft und maximal 2 L Maracujasaft zur Verfügung.

1) Ordnen Sie den beiden Einschränkungen jeweils die passende Ungleichung aus A bis D zu. *[2 zu 4]*

Einschränkung bezüglich Mangosaft	
Einschränkung bezüglich Maracujasaft	

A	$x + 2 \cdot y \leq 100$
B	$2 \cdot x + y \leq 100$
C	$y \leq -2 \cdot x + 50$
D	$x + 4 \cdot y \leq 200$

Man rechnet damit, dass mindestens doppelt so viele Cocktails *Yellow Fun* wie *Exotic Punch* benötigt werden.

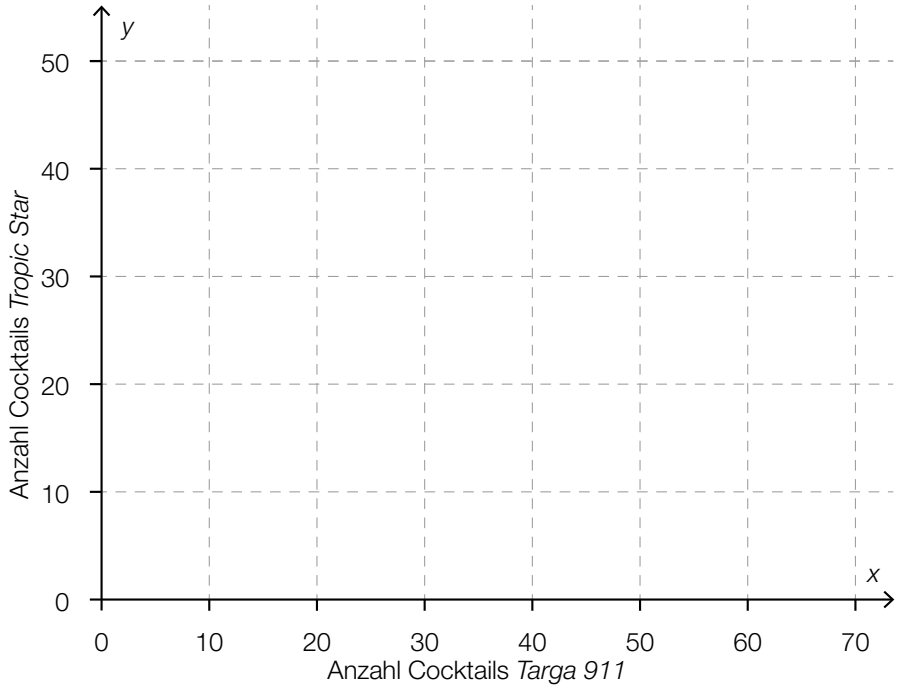
2) Erstellen Sie eine Ungleichung, die diese Bedingung für die beiden Cocktails beschreibt.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Es sollen x Cocktails *Targa 911* und y Cocktails *Tropic Star* zubereitet werden.
Folgendes Ungleichungssystem beschreibt die Einschränkungen bei der Zubereitung:

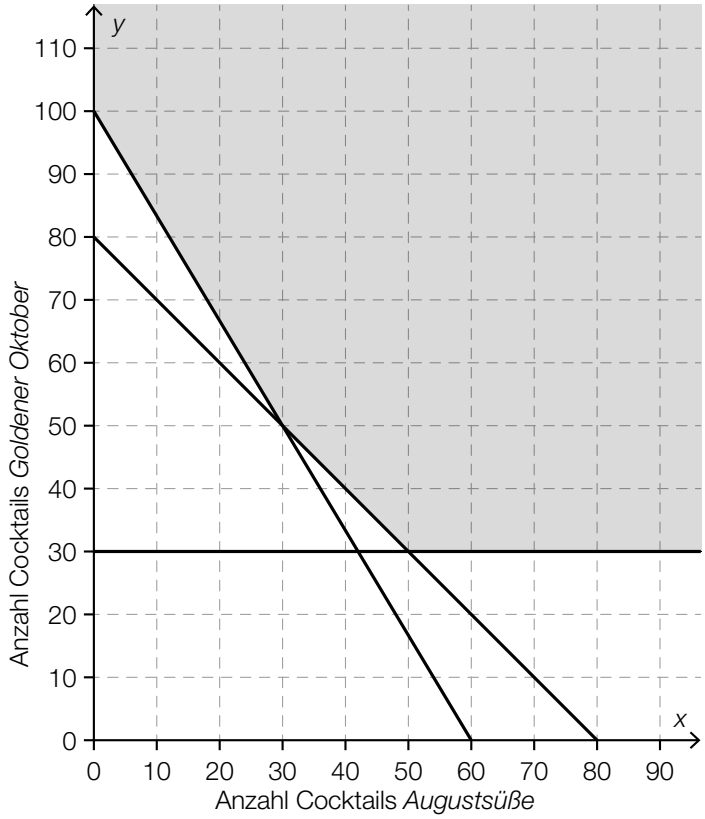
$6 \cdot x + 8 \cdot y \leq 400$
$2 \cdot y \geq x$
$x \geq 20$

1) Zeichnen Sie den Lösungsbereich dieses Ungleichungssystems in der nachstehenden Abbildung ein.



2) Interpretieren Sie die Bedeutung der Ungleichung $x \geq 20$ im gegebenen Sachzusammenhang.

c) In der nachstehenden Abbildung ist der Lösungsbereich für die Herstellung der Cocktails *Augustsüße* und *Goldener Oktober* dargestellt.



Die Produktionskosten für einen Cocktail *Goldener Oktober* sind um 50 % höher als die Produktionskosten für einen Cocktail *Augustsüße*. Die gesamten Produktionskosten sollen minimiert werden.

1) Geben Sie eine mögliche Zielfunktion Z an, die die gesamten Produktionskosten beschreibt.

$Z(x, y) =$ _____

2) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung diejenige Gerade ein, für die im Lösungsbereich der minimale Wert der Zielfunktion angenommen wird.

Möglicher Lösungsweg

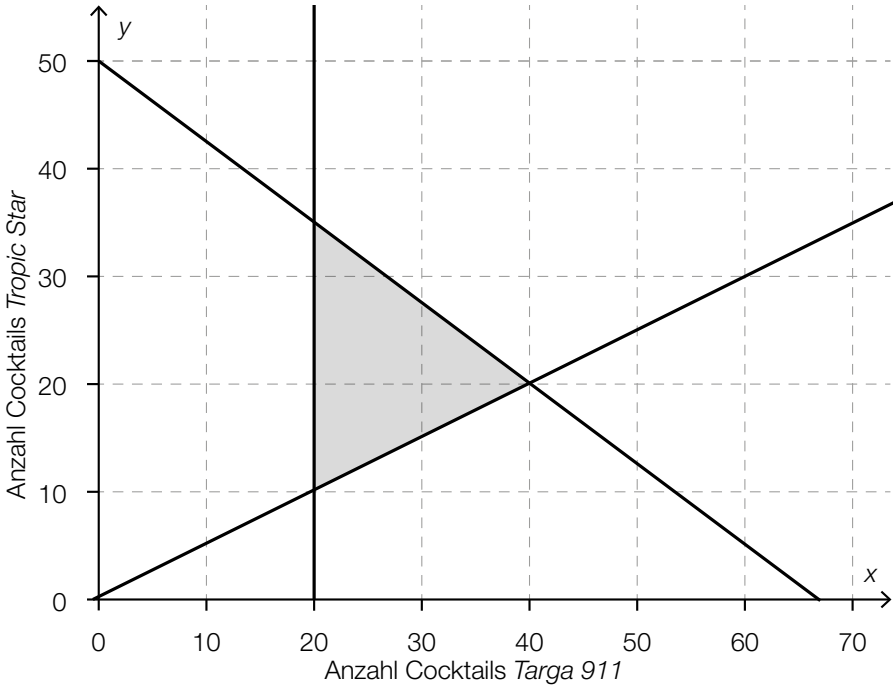
a1)

Einschränkung bezüglich Mangosaft	A
Einschränkung bezüglich Maracujasaft	C

A	$x + 2 \cdot y \leq 100$
B	$2 \cdot x + y \leq 100$
C	$y \leq -2 \cdot x + 50$
D	$x + 4 \cdot y \leq 200$

a2) $x \geq 2 \cdot y$

b1)

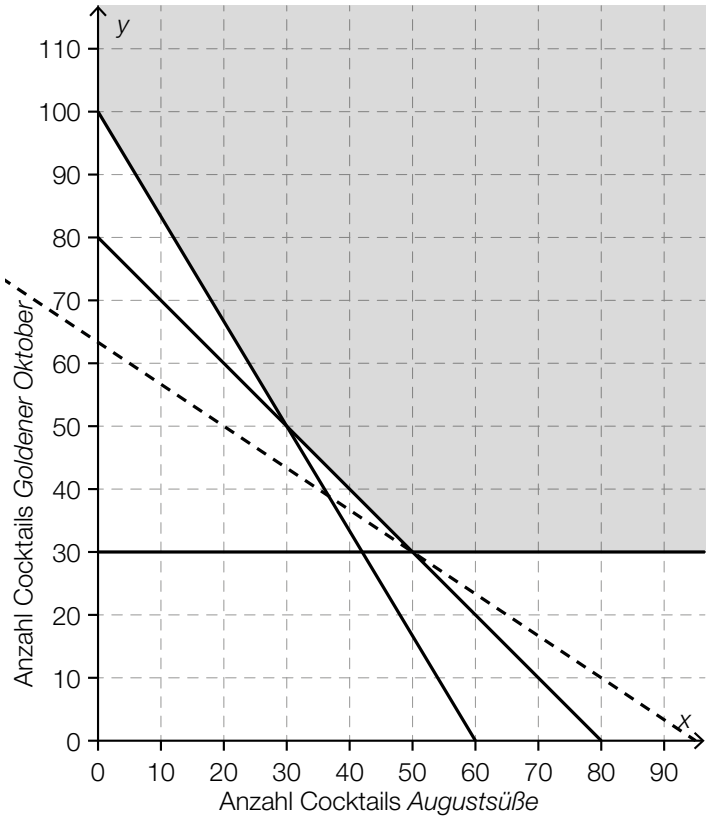


b2) Es sollen mindestens 20 Cocktails *Targa 911* zubereitet werden.

c1) $Z(x, y) = x + 1{,}5 \cdot y$

Auch eine Angabe der Zielfunktion als $Z(x, y) = k \cdot x + k \cdot 1{,}5 \cdot y$ *mit* $k \in \mathbb{R}^+$ *ist als richtig zu werten.*

c2)



Lösungsschlüssel

a1) 1 × C: für die richtige Zuordnung
a2) 1 × A: für das richtige Erstellen der Ungleichung
b1) 1 × B: für das richtige Einzeichnen der Begrenzungsgeraden
1 × C1: für das richtige Einzeichnen des Lösungsbereichs
b2) 1 × C2: für die richtige Interpretation der Bedeutung der Ungleichung im gegebenen Sachzusammenhang
c1) 1 × A: für das richtige Angeben einer möglichen Zielfunktion
c2) 1 × B: für das richtige Einzeichnen derjenigen Geraden, für die im Lösungsbereich der minimale Wert der Zielfunktion angenommen wird

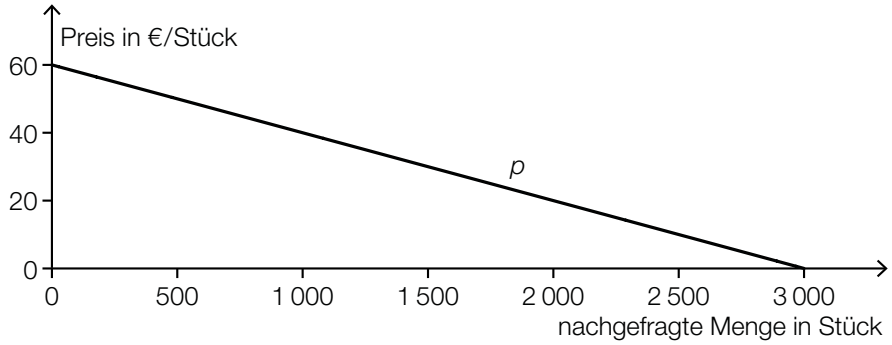
Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Betonrohre*

Aufgabennummer: B_452

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Preisfunktion der Nachfrage p für Betonrohre des Modells A dargestellt.



1) Erstellen Sie mithilfe der obigen Abbildung eine Gleichung der Preisfunktion der Nachfrage p.

2) Interpretieren Sie den Wert der Steigung von p im gegebenen Sachzusammenhang.

Die Betonrohre des Modells A werden um € 32 pro Stück verkauft.

3) Berechnen Sie die zugehörige Anzahl der nachgefragten Betonrohre des Modells A.

b) Für Betonrohre des Modells B geht man von einer kubischen Gewinnfunktion G aus.

x … Absatzmenge in ME
$G(x)$ … Gewinn bei der Absatzmenge x in GE

1) Ordnen Sie den beiden Aussagen jeweils die zutreffende Gleichung aus A bis D zu. *[2 zu 4]*

Der Break-even-Point liegt bei 200 ME.	
Das Gewinnmaximum liegt bei 200 ME.	

A	$G(0) = 200$
B	$G(200) = 0$
C	$G'(200) = 0$
D	$G''(200) = 0$

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Für Betonrohre des Modells *C* geht man von einer kubischen Kostenfunktion *K* aus.

$K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$

x … Produktionsmenge in ME
K(*x*) … Kosten bei der Produktionsmenge *x* in GE

Die Fixkosten betragen 150 GE.
Bei einer Produktion von 20 ME ergeben sich Kosten von 530 GE.
Bei einer Produktion von 10 ME ergeben sich Grenzkosten von 17 GE/ME.
Bei einer Produktion von 30 ME ergeben sich Stückkosten von 22 GE/ME.

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten *a*, *b*, *c* und *d*.

2) Berechnen Sie diese Koeffizienten.

d) Der Durchmesser von Betonrohren des Modells *D* kann als annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 100$ mm angenommen werden. Bei 3 % der Rohre ist der Durchmesser kleiner als 98 mm.

1) Berechnen Sie die zugehörige Standardabweichung σ.

Möglicher Lösungsweg

a1) $p(x) = -\frac{1}{50} \cdot x + 60$

x ... nachgefragte Menge in Stück
$p(x)$ ... Preis bei der nachgefragten Menge x in €/Stück

a2) Die Steigung $-\frac{1}{50}$ gibt an, dass eine Preisreduktion um € 1 pro Stück zu einer Erhöhung der nachgefragten Menge um 50 Stück führt.

oder:

Soll die nachgefragte Menge um 1 Stück gesteigert werden, muss der Preis um € 0,02 pro Stück gesenkt werden.

a3) $p(x) = 32$ *oder* $-\frac{1}{50} \cdot x + 60 = 32 \quad \Rightarrow \quad x = 1\,400$

Bei einem Preis von € 32 pro Stück ist mit einer nachgefragten Menge von 1 400 Stück zu rechnen.

b1)

Der Break-even-Point liegt bei 200 ME.	B
Das Gewinnmaximum liegt bei 200 ME.	C

A	$G(0) = 200$
B	$G(200) = 0$
C	$G'(200) = 0$
D	$G''(200) = 0$

c1) $K'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x + c$
$\overline{K}(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c + \frac{d}{x}$

$K(0) = 150$
$K(20) = 530$
$K'(10) = 17$
$\overline{K}(30) = 22$

oder:

$d = 150$
$a \cdot 20^3 + b \cdot 20^2 + c \cdot 20 + d = 530$
$3 \cdot a \cdot 10^2 + 2 \cdot b \cdot 10 + c = 17$
$a \cdot 30^2 + b \cdot 30 + c + \frac{d}{30} = 22$

c2) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$a = 0{,}02$
$b = -1{,}2$
$c = 35$
$d = 150$

d1) X ... Durchmesser in mm
$P(X < 98) = 0{,}03$

Berechnung von σ mittels Technologieeinsatz:

$\sigma = 1{,}06...$

Die Standardabweichung beträgt rund 1,1 mm.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × A: für das richtige Erstellen der Gleichung der Preisfunktion der Nachfrage
a2) 1 × C: für die richtige Interpretation des Wertes der Steigung im gegebenen Sachzusammenhang
a3) 1 × B: für die richtige Berechnung der Anzahl der nachgefragten Betonrohre
b1) 1 × C: für die richtige Zuordnung
c1) 1 × A1: für das richtige Erstellen der beiden Gleichungen mithilfe der Kosten
1 × A2: für das richtige Erstellen der Gleichung mithilfe der Grenzkosten
1 × A3: für das richtige Erstellen der Gleichung mithilfe der Stückkosten
c2) 1 × B: für die richtige Berechnung der Koeffizienten
d1) 1 × B: für die richtige Berechnung der Standardabweichung

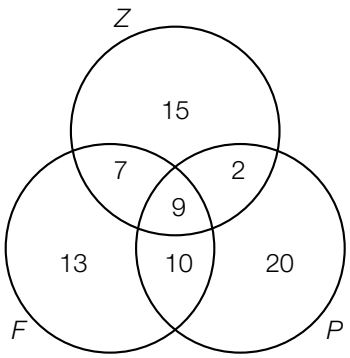
Studienabschlüsse*

Aufgabennummer: B_450

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Mehrere Personen wurden befragt, warum sie ihr Studium nicht abgeschlossen haben. Zur Auswahl standen folgende 3 Gründe: „Zeitprobleme“, „private Gründe“ und „fachliche Defizite“. Mehrfachnennungen waren möglich.

Die Ergebnisse der Befragung von 76 Personen sind im nachstehenden Venn-Diagramm dargestellt.

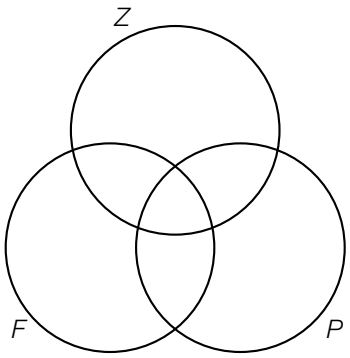


Z ... Menge aller Personen, die Zeitprobleme angegeben haben
P ... Menge aller Personen, die private Gründe angegeben haben
F ... Menge aller Personen, die fachliche Defizite angegeben haben

1) Beschreiben Sie die Menge $(F \cap Z) \setminus P$ im gegebenen Sachzusammenhang.

2) Ermitteln Sie, wie viele Personen genau 1 der 3 Gründe angegeben haben.

3) Kennzeichnen Sie im nachstehenden Venn-Diagramm die Menge derjenigen Personen, die sowohl Zeitprobleme als auch private Gründe als auch fachliche Defizite angegeben haben.



* ehemalige Klausuraufgabe

b) Folgende Tabelle gibt die jeweilige Anzahl der Studienabschlüsse an öffentlichen Universitäten in Österreich in den Jahren 2007 bis 2014 an:

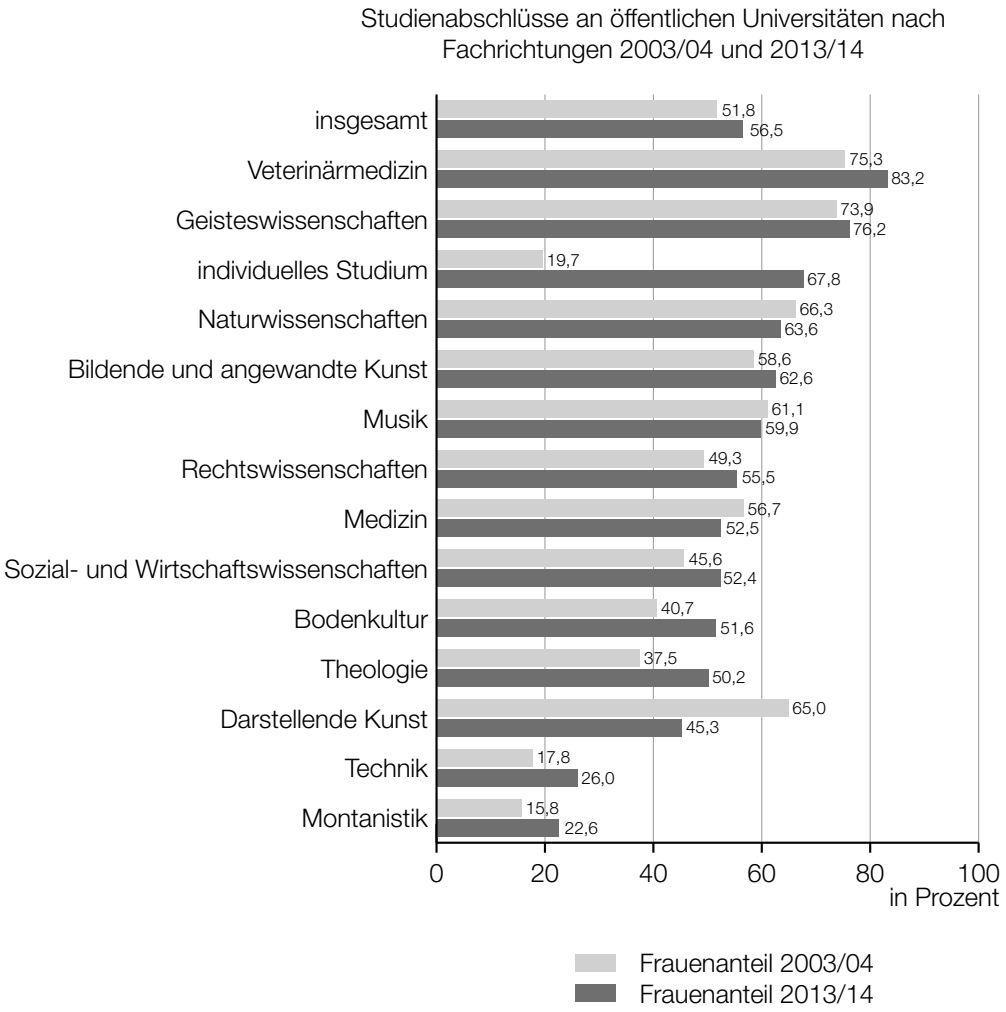
Jahr	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
Anzahl der Studienabschlüsse an öffentlichen Universitäten	22 121	23 910	27 232	27 926	31 115	34 460	37 312	34 300

Datenquelle: Statistik Austria (Hrsg.): *Bildung in Zahlen 2014/15. Tabellenband.* Wien: Statistik Austria 2016, S. 320.

Jemand vermutet, dass sich die Anzahl der Studienabschlüsse in Abhängigkeit von der Zeit t näherungsweise durch eine lineare Funktion beschreiben lässt.

1) Ermitteln Sie mithilfe der Regressionsrechnung eine Gleichung der zugehörigen linearen Funktion f. Wählen Sie $t = 0$ für das Jahr 2007.
2) Beurteilen Sie mithilfe des Korrelationskoeffizienten, ob die Regressionsfunktion ein geeignetes Modell darstellt, um die Entwicklung der Anzahl der Studienabschlüsse zu beschreiben.
3) Ermitteln Sie, mit wie vielen Studienabschlüssen gemäß diesem Modell im Jahr 2020 zu rechnen ist.

c) Folgendes Diagramm zeigt den Frauenanteil bei den Studienabschlüssen an öffentlichen Universitäten in Österreich für zwei verschiedene Studienjahre:



Quelle: https://www.statistik.at/web_de/statistiken/menschen_und_gesellschaft/soziales/gender-statistik/bildung/index.html [14.02.2017] (adaptiert).

1) Lesen Sie aus dem obigen Diagramm ab, in welchen Fachrichtungen der Frauenanteil im Studienjahr 2013/14 geringer als im Studienjahr 2003/04 war.

Jemand behauptet:
„Im Bereich *individuelles Studium* ist der Frauenanteil in den dargestellten Studienjahren von 19,7 % auf 67,8 % gestiegen. Das heißt, dass 2013/14 viel mehr Frauen als 2003/04 ein *individuelles Studium* abgeschlossen haben."

2) Erklären Sie, warum diese Argumentation unzulässig ist.

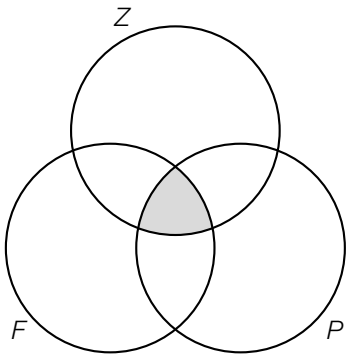
Möglicher Lösungsweg

a1) $(F \cap Z) \setminus P$ beschreibt die Menge aller Personen, die sowohl Zeitprobleme als auch fachliche Defizite, jedoch keine privaten Probleme als Gründe für das Nichtabschließen des Studiums angeführt haben.

a2) $13 + 15 + 20 = 48$

48 Personen haben genau 1 der 3 Gründe angegeben.

a3)



b1) Ermittlung mittels Technologieeinsatz:

$f(t) = 2\,109 \cdot t + 22\,416$ *(Koeffizienten gerundet)*

t ... Zeit ab 2007 in Jahren

$f(t)$ ... Anzahl der Studienabschlüsse zur Zeit t

b2) Der Korrelationskoeffizient $r = 0{,}957...$ liegt nahe bei 1 und lässt daher einen starken positiven linearen Zusammenhang vermuten.

b3) $f(13) = 49\,830{,}2...$

Gemäß diesem Modell ist im Jahr 2020 mit rund 49 830 Studienabschlüssen zu rechnen.

c1) In den Fachrichtungen *Naturwissenschaften*, *Musik*, *Medizin* und *Darstellende Kunst* war der Frauenanteil 2013/2014 geringer als 2003/2004.

c2) Ohne zu wissen, wie viele Personen in den beiden Jahren ein *individuelles Studium* insgesamt absolviert haben (Grundwerte), ist ein Rückschluss auf die Anzahl der Frauen nicht möglich.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × C1: für die richtige Beschreibung im gegebenen Sachzusammenhang
a2) 1 × C2: für das richtige Ermitteln der Anzahl der Personen
a3) 1 × C3: für das richtige Kennzeichnen der Menge im Venn-Diagramm
b1) 1 × B1: für das richtige Ermitteln der Gleichung der Regressionsfunktion
b2) 1 × D: für das richtige Beurteilen mithilfe des Korrelationskoeffizienten
b3) 1 × B2: für das richtige Ermitteln der Anzahl der Studienabschlüsse
c1) 1 × C: für das richtige Ablesen
c2) 1 × D: für die richtige Erklärung

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Lauftraining*

Aufgabennummer: B_449

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Anna, Beate und Clara bereiten sich auf einen Laufwettbewerb vor. Dabei verfolgen sie unterschiedliche Trainingspläne.

a) Anna und Beate überlegen sich folgende Trainingspläne:

		Trainingstag			
		1	2	3	4
Länge der Trainingsstrecke in km	Anna	1,5	1,65	1,815	
	Beate	1,5	2	2,5	

1) Zeigen Sie, dass die Längen der Trainingsstrecken von Anna an den ersten 3 Tagen eine geometrische Folge bilden.

2) Stellen Sie für diese Folge ein rekursives Bildungsgesetz auf.

Die Längen der Trainingsstrecken von Beate an den ersten 3 Tagen bilden eine arithmetische Folge.

3) Stellen Sie für diese Folge ein rekursives Bildungsgesetz auf.

4) Ergänzen Sie unter Verwendung der jeweiligen Bildungsgesetze die fehlenden Werte in der letzten Spalte der obigen Tabelle.

b) Clara berechnet die Längen ihrer Trainingsstrecken folgendermaßen:

$c_n = 2{,}75 + 0{,}125 \cdot n$

n … Trainingstag
c_n … Länge der Trainingsstrecke am n-ten Tag in km

1) Berechnen Sie, am wievielten Trainingstag Claras Trainingsstrecke eine Länge von 8 km hat.

* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

a1) $\frac{1{,}65}{1{,}5} = 1{,}1 \quad \frac{1{,}815}{1{,}65} = 1{,}1$

Es handelt sich um eine geometrische Folge, da die Quotienten aufeinanderfolgender Glieder der Folge gleich sind.

a2) Anna: $a_1 = 1{,}5 \quad a_{n+1} = 1{,}1 \cdot a_n$

a3) Beate: $b_1 = 1{,}5 \quad b_{n+1} = b_n + 0{,}5$

a4) Tabellenwert für Anna: 1,9965
Tabellenwert für Beate: 3

b1) $8 = 2{,}75 + 0{,}125 \cdot n \quad \Rightarrow \quad n = 42$

Am 42. Trainingstag läuft Clara eine Strecke von 8 km.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × D: für den richtigen Nachweis
a2) 1 × A1: für das richtige Aufstellen des rekursiven Bildungsgesetzes für Annas Trainingsstrecken
a3) 1 × A2: für das richtige Aufstellen des rekursiven Bildungsgesetzes für Beates Trainingsstrecken
a4) 1 × A3: für das richtige Ergänzen der fehlenden Tabellenwerte
b1) 1 × B: für die richtige Berechnung

Blutdruck*

Aufgabennummer: B_448

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Durch die Einnahme eines Medikaments zur Regulierung des Blutdrucks gelangen Wirkstoffe ins Blut.

Die Wirkstoffmenge im Blut kann näherungsweise durch eine Funktion m beschrieben werden, deren 1. Ableitung bekannt ist:

$m'(t) = 1{,}2 \cdot e^{-0{,}04 \cdot t} - 0{,}1$ mit $t \geq 0$

t ... Zeit in min
$m'(t)$ ... momentane Änderungsrate der Wirkstoffmenge im Blut zur Zeit t in mg/min

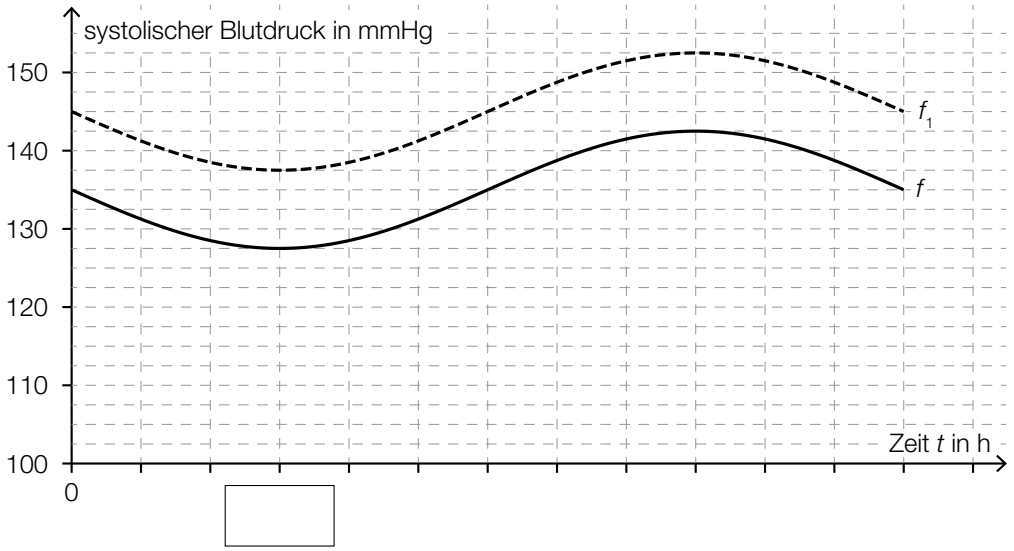
Zum Zeitpunkt $t = 0$ beträgt die Wirkstoffmenge im Blut 10 mg.

1) Erstellen Sie eine Gleichung der Funktion m.

2) Berechnen Sie, nach welcher Zeit der Wirkstoff vollständig abgebaut ist.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Die zeitliche Entwicklung des sogenannten *systolischen Blutdrucks* einer Testperson wird durch eine Funktion *f* modelliert (siehe nachstehende Abbildung).



Die Funktion *f* wird beschrieben durch:

$f(t) = a \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right) + 135$

t ... Zeit in h
f(*t*) ... systolischer Blutdruck zur Zeit *t* in Millimeter Quecksilbersäule (mmHg)
a ... Parameter

1) Tragen Sie in der obigen Abbildung die fehlende Zeitangabe in das dafür vorgesehene Kästchen ein.

2) Bestimmen Sie den Parameter *a*.

Der Graph der Funktion f_1 in der obigen Abbildung entsteht durch vertikale Verschiebung des Graphen von *f*.

3) Erstellen Sie ausgehend von *f* eine Funktionsgleichung für f_1.

Möglicher Lösungsweg

a1) $\int m'(t)\,\mathrm{d}t = -30 \cdot e^{-0{,}04 \cdot t} - 0{,}1 \cdot t + C$

$m(0) = 10$ *oder* $-30 + C = 10 \quad \Rightarrow \quad C = 40$

$m(t) = -30 \cdot e^{-0{,}04 \cdot t} - 0{,}1 \cdot t + 40$

a2) $m(t) = 0$ *oder* $-30 \cdot e^{-0{,}04 \cdot t} - 0{,}1 \cdot t + 40 = 0$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
($t_1 = -7{,}6...$)
$t_2 = 399{,}9...$

Nach etwa 400 min ist der Wirkstoff vollständig abgebaut.

b1) Im Kästchen ist die Zahl 6 einzutragen.

b2) $a = -7{,}5$

b3) $f_1(t) = f(t) + 10$

oder:

$f_1(t) = a \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right) + 145$

Lösungsschlüssel

a1) 1 × A: für das richtige Erstellen der Funktionsgleichung unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung
a2) 1 × B: für die richtige Berechnung derjenigen Zeit, nach der der Wirkstoff vollständig abgebaut ist
b1) 1 × C1: für das richtige Eintragen der Zeitangabe
b2) 1 × C2: für das richtige Bestimmen von *a*
b3) 1 × A: für das richtige Erstellen der Funktionsgleichung

Wein*

Aufgabennummer: B_447

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Durch die alkoholische Gärung von Traubensaft entsteht Wein. Dabei wird mithilfe von Hefepilzen der Zucker, der sich im Traubensaft befindet, in Alkohol umgewandelt.

Ein Winzer misst während eines Gärungsprozesses täglich den Alkoholgehalt und erhält folgende Tabelle:

Zeit seit Beginn des Gärungsprozesses in Tagen	Alkoholgehalt in %
1	0,7
2	1,4
3	2,3
4	3,6
5	5,2
6	7,3
7	9,7

1) Interpretieren Sie die Bedeutung des Ausdrucks $\frac{3{,}6 - 1{,}4}{4 - 2}$ im gegebenen Sachzusammenhang.

Der Alkoholgehalt soll in Abhängigkeit von der Zeit t seit Beginn des Gärungsprozesses durch eine quadratische Ausgleichsfunktion angenähert werden.

2) Ermitteln Sie eine Gleichung der quadratischen Ausgleichsfunktion.

Der Zuckergehalt während des Gärungsprozesses kann für die ersten 8 Tage näherungsweise mithilfe der Funktion z beschrieben werden:

$z(t) = 0{,}25 \cdot t^2 - 4{,}1 \cdot t + 17$ mit $0 \leq t \leq 8$

t ... Zeit seit Beginn des Gärungsprozesses in Tagen
$z(t)$ ... Zuckergehalt zur Zeit t in %

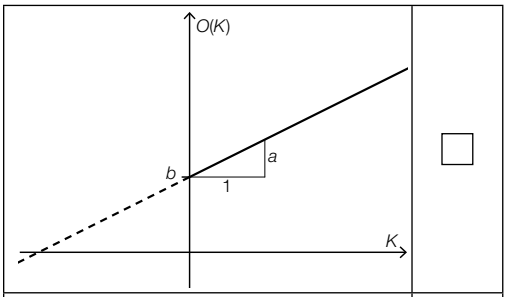
3) Berechnen Sie den Zuckergehalt bei einem Alkoholgehalt von 11 %.

* ehemalige Klausuraufgabe

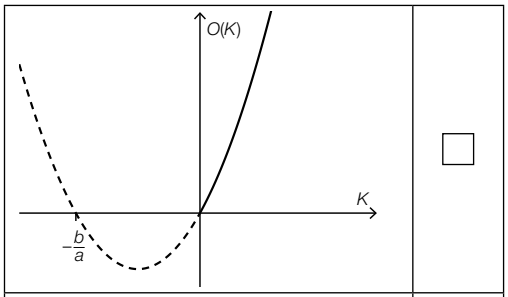
b) Es gibt mehrere Messskalen für den Zuckergehalt von Wein. Die Skala der Klosterneuburger Mostwaage ist die in Österreich gebräuchlichste Skala. In Deutschland wird häufig die Oechsle-Skala verwendet.
Der Zusammenhang zwischen den beiden Skalen wird mit der folgenden Funktion O beschrieben:

$O(K) = K \cdot (a \cdot K + b)$ mit $a, b > 0$

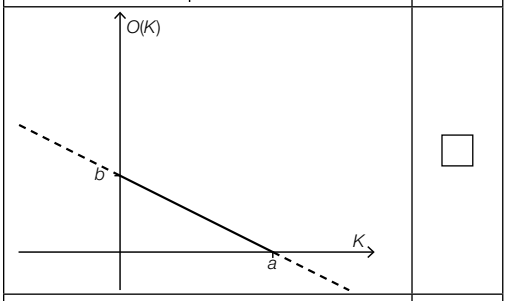
1) Kreuzen Sie den Graphen der Funktion O an. *[1 aus 5]*



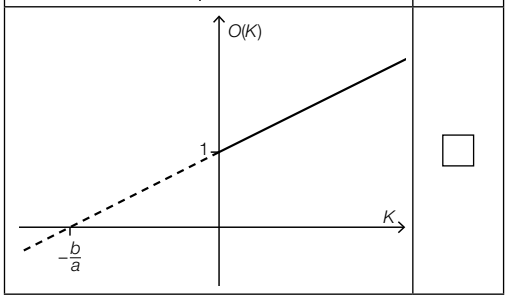
☐



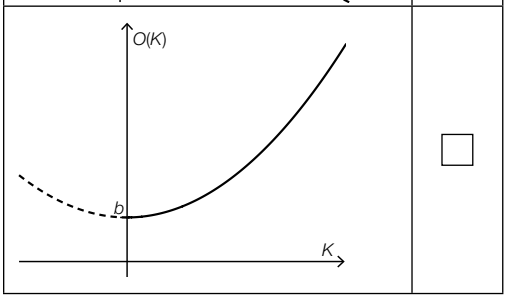
☐



☐



☐



☐

c) Bei der Lagerung in einem Keller hat ein bestimmter Wein eine Temperatur von 10 °C. Der Wein wird in einen Raum mit der Umgebungstemperatur $T_U = 20$ °C gebracht. Nach 20 min hat der Wein eine Temperatur von 12 °C.

Die momentane Änderungsrate der Temperatur des Weines ist direkt proportional zur Differenz zwischen der Umgebungstemperatur T_U und der aktuellen Temperatur T des Weines.

1) Stellen Sie diejenige Differenzialgleichung auf, die die Temperatur T des Weines während des Erwärmungsprozesses beschreibt. Bezeichnen Sie dabei den Proportionalitätsfaktor mit k.
2) Berechnen Sie die Lösung der Differenzialgleichung für den gegebenen Erwärmungsprozess.
3) Berechnen Sie, wie lange es dauert, bis der Wein ausgehend von 10 °C eine Temperatur von 15 °C erreicht.

Möglicher Lösungsweg

a1) Der Ausdruck ist die mittlere Änderungsrate des Alkoholgehalts im Zeitintervall [2; 4].

a2) Ermittlung der Gleichung der Ausgleichsfunktion mittels Technologieeinsatz:

$a(t) = 0{,}18 \cdot t^2 + 0{,}05 \cdot t + 0{,}51$ *(Koeffizienten gerundet)*

t ... Zeit seit Beginn des Gärungsprozesses in Tagen
$a(t)$ ... Alkoholgehalt zur Zeit t in %

a3) $a(t) = 11$ *oder* $0{,}18 \cdot t^2 + 0{,}05 \cdot t + 0{,}51 = 11$

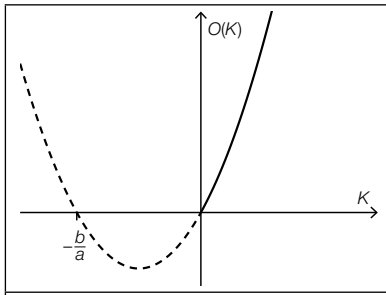
Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$t_1 = 7{,}49...$
$(t_2 = -7{,}78...)$

$z(7{,}49...) = 0{,}31...$

Der Zuckergehalt beträgt rund 0,3 %.

b1)

	☒

c1) $\frac{dT}{dt} = k \cdot (20 - T)$

c2) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$T(t) = 20 - C \cdot e^{-k \cdot t}$

oder:

$\int \frac{T'}{20 - T} dt = \int k \, dt$

$-\ln|20 - T(t)| = k \cdot t + C_1$

$20 - T(t) = C \cdot e^{-k \cdot t}$

$T(t) = 20 - C \cdot e^{-k \cdot t}$

$T(0) = 10$ *oder* $20 - C \cdot e^{-k \cdot 0} = 10 \Rightarrow C = 10$

$T(20) = 12$ *oder* $20 - 10 \cdot e^{-k \cdot 20} = 12$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$k = 0{,}011157...$

$T(t) = 20 - 10 \cdot e^{-0{,}01116 \cdot t}$

c3) $T(t) = 15$ *oder* $20 - 10 \cdot e^{-0{,}01116 \cdot t} = 15$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$t = 62{,}1...$

Der Wein erreicht nach rund 62 min eine Temperatur von 15 °C.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × C: für die richtige Interpretation im gegebenen Sachzusammenhang
a2) 1 × B1: für das richtige Ermitteln der Gleichung der quadratischen Ausgleichsfunktion
a3) 1 × B2: für die richtige Berechnung des Zuckergehalts
b1) 1 × C: für das richtige Ankreuzen
c1) 1 × A1: für das richtige Aufstellen der Differenzialgleichung
c2) 1 × A2: für den richtigen Ansatz (allgemeine Lösung der Differenzialgleichung)
1 × B1: für die richtige Berechnung der Lösung der Differenzialgleichung für den gegebenen Erwärmungsprozess
c3) 1 × B2: für die richtige Berechnung der Zeitdauer

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Bahnsteige (2)*

Aufgabennummer: B_451

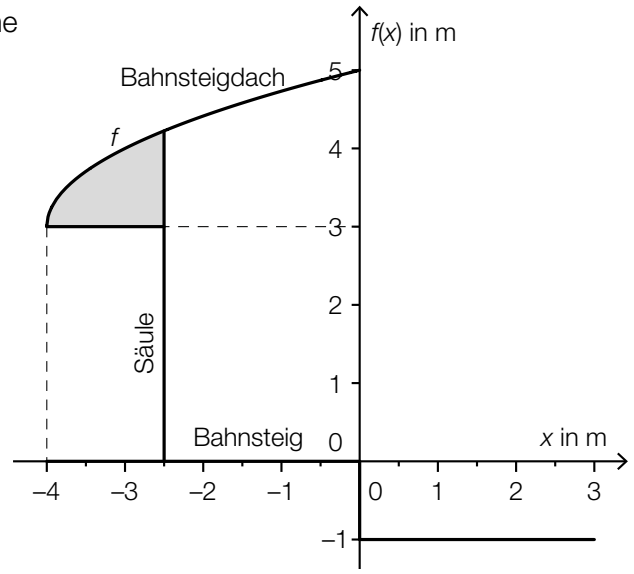
Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Auf dem Bahnhof Linz wird eine Betonkonstruktion zur Überdachung eines Bahnsteigs verwendet.



Bildquelle: BMBWF

Die nebenstehende Abbildung zeigt eine vereinfachte Darstellung der Betonkonstruktion.

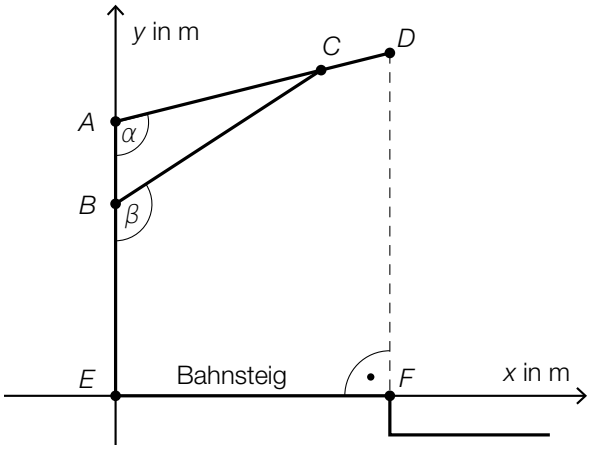


1) Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung des Inhalts A der grau markierten Fläche.

$A =$ _____

* ehemalige Klausuraufgabe

b) In der nachstehenden Skizze ist eine Holzkonstruktion zur Überdachung eines Bahnsteigs dargestellt.



1) Erstellen Sie mithilfe von $\overline{AE}$, $\overline{AD}$ und α eine Formel zur Berechnung von $\overline{DF}$.

$\overline{DF}$ = _____

Es gilt: $A = (0|4)$, $B = (0|2{,}8)$, $\alpha = 104°$ und $\beta = 123°$

2) Berechnen Sie die Länge $\overline{BC}$.

Möglicher Lösungsweg

a1) $A = \int_{-4}^{-2,5} f(x)\,dx - 3 \cdot 1,5$

b1) $\overline{DF} = \overline{AE} + \overline{AD} \cdot \sin(\alpha - 90°)$

b2) $\overline{AB} = 1,2$ m

$$\frac{1,2}{\sin(19°)} = \frac{\overline{BC}}{\sin(104°)} \quad \Rightarrow \quad \overline{BC} = 3,576... \text{ m} \approx 3,58 \text{ m}$$

Lösungsschlüssel

a1) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel zur Berechnung des Flächeninhalts A
b1) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel
b2) 1 × B: für die richtige Berechnung der Länge $\overline{BC}$

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Bahnsteige (1)*

Aufgabennummer: B_446

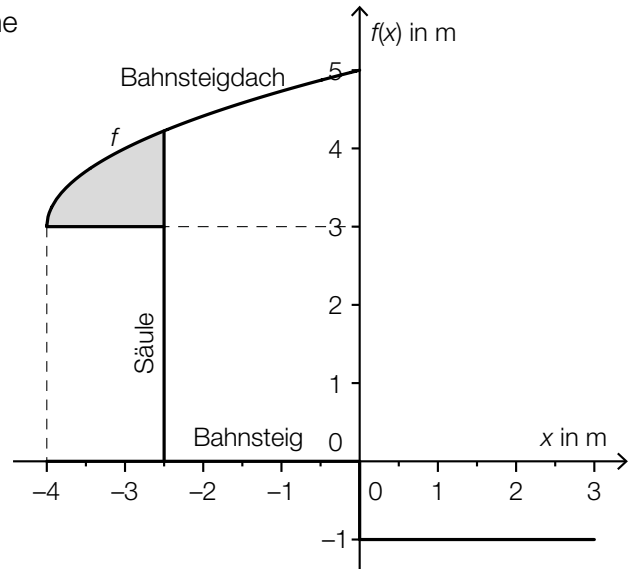
Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Auf dem Bahnhof Linz wird eine Betonkonstruktion zur Überdachung eines Bahnsteigs verwendet.



Bildquelle: BMBWF

Die nebenstehende Abbildung zeigt eine vereinfachte Darstellung der Betonkonstruktion.



1) Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung des Inhalts A der grau markierten Fläche.

$A =$ _____

Der in der obigen Abbildung dargestellte Graph der Funktion f wird beschrieben durch:

$f(x) = \sqrt{x - a} + b$ mit $x \geq a$

x, $f(x)$ ... Koordinaten in m
a, b ... Parameter

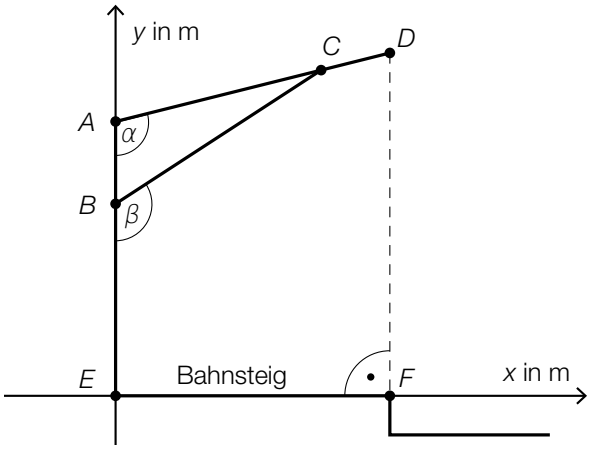
2) Lesen Sie aus der obigen Abbildung die Parameter a und b der Funktion f ab.

$a =$ _____

$b =$ _____

* ehemalige Klausuraufgabe

b) In der nachstehenden Skizze ist eine Holzkonstruktion zur Überdachung eines Bahnsteigs dargestellt.



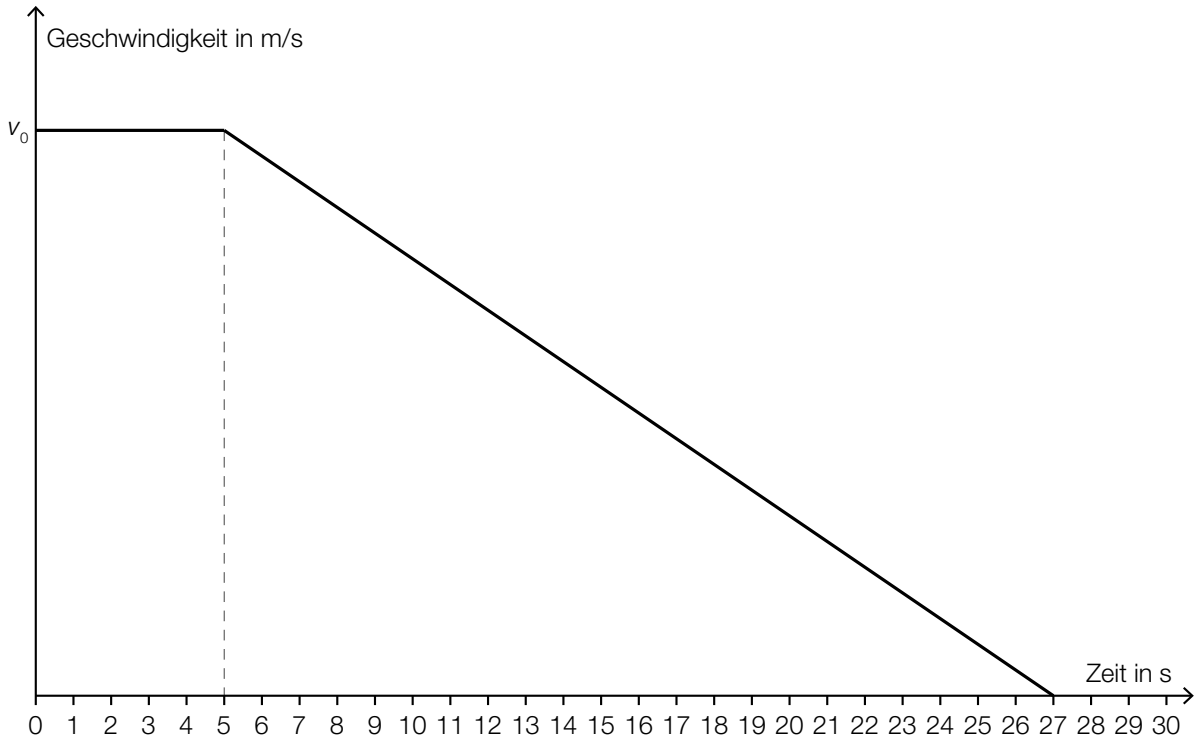
1) Erstellen Sie mithilfe von $\overline{AE}$, $\overline{AD}$ und α eine Formel zur Berechnung von $\overline{DF}$.

$\overline{DF}$ = _____

Es gilt: $A = (0|4)$, $B = (0|2{,}8)$, $\alpha = 104°$ und $\beta = 123°$

2) Berechnen Sie die Länge $\overline{BC}$.

c) Die Geschwindigkeit eines Zuges bei der Einfahrt in einen Bahnhof ist im unten stehenden Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm modellhaft dargestellt.
In den ersten 5 s ist die Geschwindigkeit des Zuges gleich v_0. Anschließend nimmt die Geschwindigkeit des Zuges linear ab. Die Einfahrt dauert insgesamt 27 s. Dabei legt der Zug insgesamt 240 m zurück.



1) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit v_0.

2) Erstellen Sie eine Gleichung der linearen Geschwindigkeit-Zeit-Funktion im Zeitintervall [5; 27].

Möglicher Lösungsweg

a1) $A = \int_{-4}^{-2,5} f(x)\,dx - 3 \cdot 1,5$

a2) $a = -4$
$b = 3$

b1) $\overline{DF} = \overline{AE} + \overline{AD} \cdot \sin(\alpha - 90°)$

b2) $\overline{AB} = 1,2$ m

$$\frac{1,2}{\sin(19°)} = \frac{\overline{BC}}{\sin(104°)} \quad \Rightarrow \quad \overline{BC} = 3,576... \text{ m} \approx 3,58 \text{ m}$$

c1) $240 = v_0 \cdot 5 + \frac{v_0 \cdot 22}{2} \quad \Rightarrow \quad v_0 = 15$

Die Geschwindigkeit v_0 beträgt 15 m/s.

c2) $v(t) = k \cdot t + d$

$k = -\frac{15}{22}$

$0 = k \cdot 27 + d \quad \Rightarrow \quad d = \frac{405}{22}$

$v(t) = -\frac{15}{22} \cdot t + \frac{405}{22}$

t ... Zeit in s
$v(t)$ ... Geschwindigkeit zur Zeit t in m/s

Lösungsschlüssel

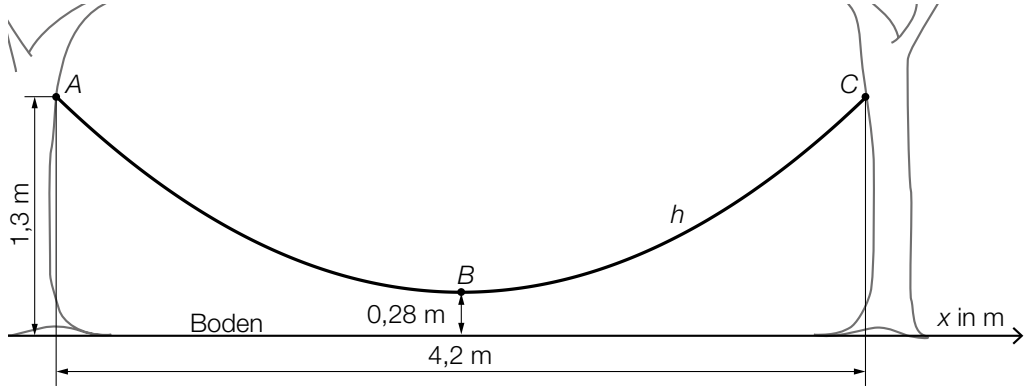
a1) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel zur Berechnung des Flächeninhalts A
a2) 1 × C: für das richtige Ablesen von a und b
b1) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel
b2) 1 × B: für die richtige Berechnung der Länge $\overline{BC}$
c1) 1 × B: für das richtige Bestimmen der Geschwindigkeit
c2) 1 × A: für das richtige Erstellen der Gleichung der Funktion

Hängematten*

Aufgabennummer: B_445

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Der Graph der quadratischen Funktion h mit $h(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ beschreibt näherungsweise den Durchhang einer Hängematte (siehe nachstehende Abbildung).



x, $h(x)$ ... Koordinaten in m

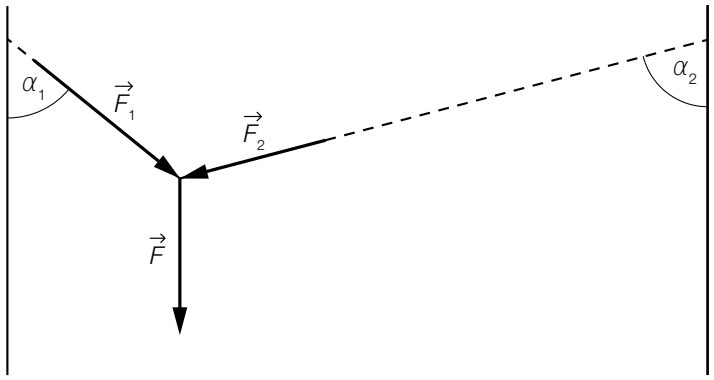
Der Graph der Funktion h verläuft durch die Befestigungspunkte A und C. Der Scheitelpunkt von h wird mit B bezeichnet. Die Punkte A und C liegen auf gleicher Höhe über dem Boden.

1) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung die fehlende senkrechte Koordinatenachse so ein, dass für den Koeffizienten b gilt: $b = 0$

2) Berechnen Sie den Koeffizienten a.

* ehemalige Klausuraufgabe

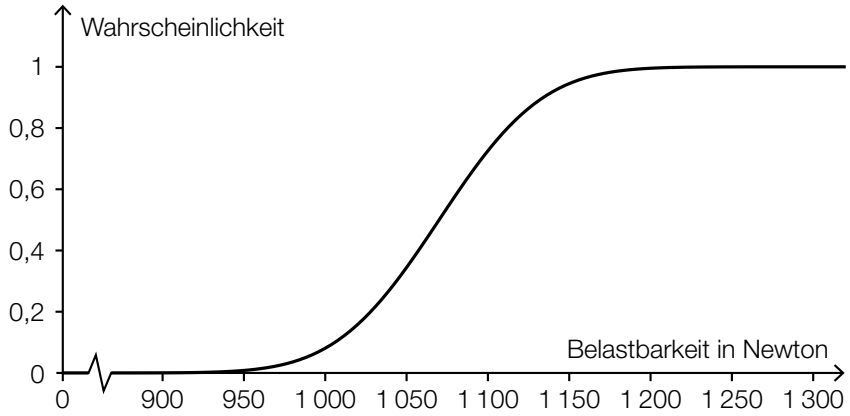
b) Eine Hängematte wird an zwei senkrechten Stangen befestigt.
In der nachstehenden Abbildung ist die belastete Hängematte modellhaft dargestellt. Es wirkt eine Kraft $\vec{F}$ mit $|\vec{F}| = 800$ Newton (N) senkrecht nach unten. Die Kraft $\vec{F}$ wird in die Komponenten $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ zerlegt.



Es gilt: $\alpha_1 = 50°$ und $\alpha_2 = 75°$

1) Veranschaulichen Sie in der obigen Abbildung die Kräftezerlegung mithilfe eines Kräfteparallelogramms.
2) Berechnen Sie $|\vec{F}_1|$.

c) Die Belastbarkeit von Seilen eines bestimmten Herstellers kann näherungsweise als normalverteilt angenommen werden. Das nachstehende Diagramm zeigt den Graphen der zugehörigen Verteilungsfunktion.



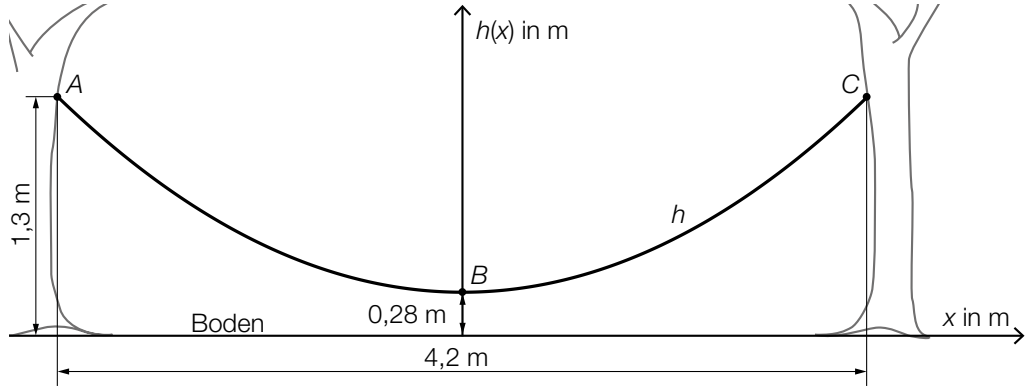
1) Veranschaulichen Sie im obigen Diagramm die Wahrscheinlichkeit, dass die Belastbarkeit eines zufällig ausgewählten Seiles mindestens 1 050 Newton (N) beträgt.

Die Maschine zur Herstellung der Seile soll bei gleichbleibender Standardabweichung $\sigma = 50$ N auf einen neuen Erwartungswert μ_{neu} eingestellt werden, sodass nur bei 1 Promille der Seile die Belastbarkeit weniger als 1 000 N beträgt.

2) Berechnen Sie, auf welchen Erwartungswert μ_{neu} die Maschine eingestellt werden muss.

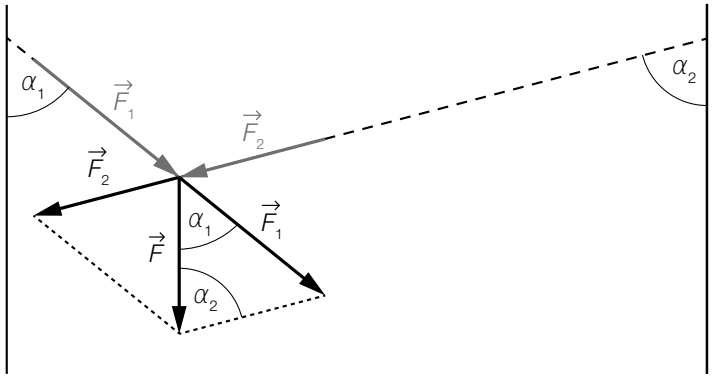
Möglicher Lösungsweg

a1)



a2) $h(2{,}1) = 1{,}3$ *oder* $a \cdot 2{,}1^2 + 0{,}28 = 1{,}3 \Rightarrow a = 0{,}23129...$

b1)

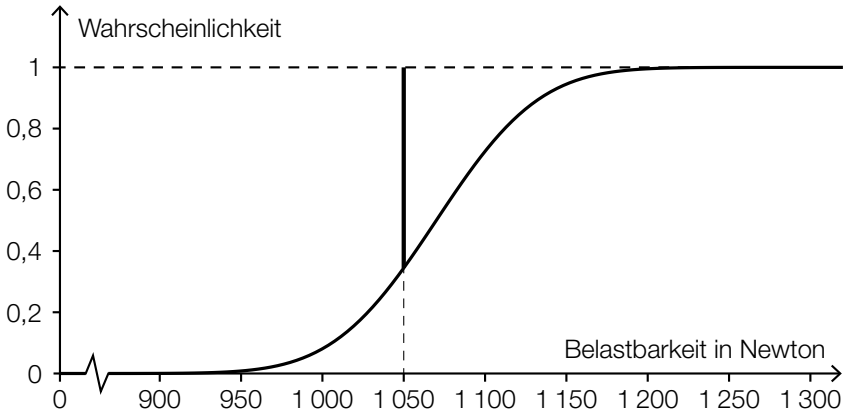


b2) $$\frac{|\vec{F}|}{\sin(180° - \alpha_1 - \alpha_2)} = \frac{|\vec{F}_1|}{\sin(\alpha_2)}$$

$$|\vec{F}_1| = \frac{800 \cdot \sin(75°)}{\sin(55°)} = 943{,}3...$$

$|\vec{F}_1|$ beträgt rund 943 Newton.

c1)



c2) X ... Belastbarkeit in N

$P(X < 1\,000) = 0{,}001$

Berechnung von μ_{neu} mittels Technologieeinsatz:

$\mu_{neu} = 1\,154{,}51\ldots\ \text{N} \approx 1\,154{,}5\ \text{N}$

Lösungsschlüssel

a1) 1 × A: für das richtige Einzeichnen der senkrechten Koordinatenachse

a2) 1 × B: für die richtige Berechnung des Koeffizienten a

b1) 1 × A: für das richtige Veranschaulichen der Kräftezerlegung mithilfe eines Kräfteparallelogramms

b2) 1 × B: für die richtige Berechnung von $|\overrightarrow{F_1}|$

c1) 1 × A: für das richtige Veranschaulichen der Wahrscheinlichkeit im Diagramm

c2) 1 × B: für die richtige Berechnung des Erwartungswerts μ_{neu}

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

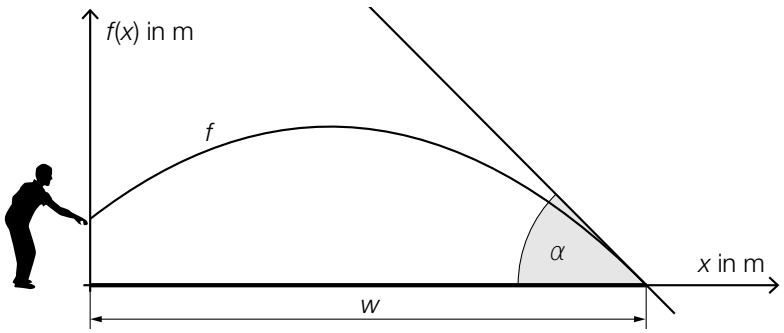
Boule*

Aufgabennummer: B_444

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Boule ist eine Sportart, bei der Kugeln geworfen werden. Ziel ist es, mit den eigenen Kugeln möglichst nah an eine Zielkugel zu gelangen.

a) Peter wirft eine Kugel. Die Flugbahn dieser Kugel kann näherungsweise durch den Graphen der Funktion f beschrieben werden (siehe nachstehende Abbildung).



$f(x) = -0{,}0959 \cdot x^2 + 0{,}767 \cdot x + 1{,}1$

x, $f(x)$ ... Koordinaten in m

1) Interpretieren Sie die Bedeutung der Zahl 1,1 in der obigen Funktionsgleichung im gegebenen Sachzusammenhang.

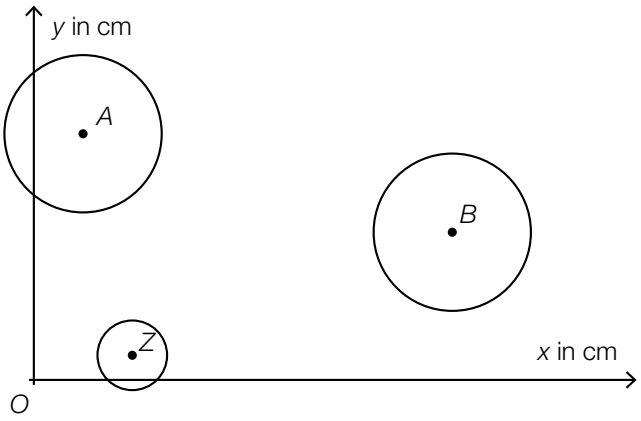
2) Berechnen Sie die Wurfweite w.

Peter möchte, dass der Aufprallwinkel α der Kugel im Intervall [42°; 44°] liegt.

3) Überprüfen Sie mithilfe der Differenzialrechnung, ob der Aufprallwinkel α in diesem Intervall liegt.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Für eine genauere Analyse eines Boule-Spiels wird mithilfe einer Drohne ein Luftbild aufgenommen.



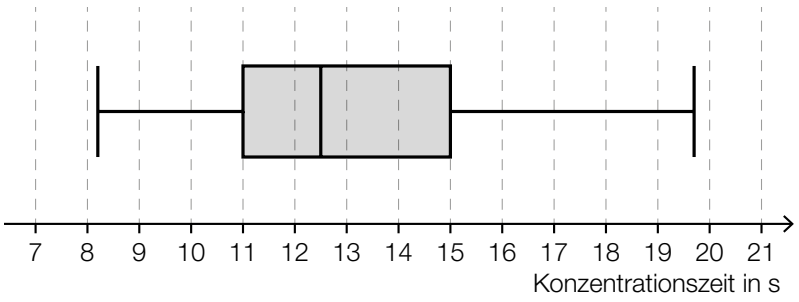
$A = (2 \mid 10)$ ... Auflagepunkt der ersten Kugel
$B = (17 \mid 6)$ ... Auflagepunkt der zweiten Kugel
$Z = (4 \mid 1)$ ... Auflagepunkt der Zielkugel

1) Berechnen Sie die Länge der Strecke BZ.

Während des Spiels bewegt sich die erste Kugel entlang der Strecke AB 3 cm in Richtung B.

2) Berechnen Sie die Koordinaten der neuen Position des Auflagepunkts der ersten Kugel.

c) Die Zeit, die benötigt wird, um sich vor einem Wurf zu konzentrieren, nennt man Konzentrationszeit.
Im nachstehenden Boxplot sind die Konzentrationszeiten von Emma bei mehreren Würfen zusammengefasst.



1) Lesen Sie aus dem Boxplot den Interquartilsabstand der Konzentrationszeiten von Emma ab.

Möglicher Lösungsweg

a1) Die Abwurfhöhe beträgt 1,1 m.

a2) $f(x) = 0$ *oder* $-0{,}0959 \cdot x^2 + 0{,}767 \cdot x + 1{,}1 = 0$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
($x_1 = -1{,}241...$)
$x_2 = 9{,}239...$

Die Wurfweite w beträgt rund 9,24 m.

a3) $\alpha = |\arctan(f'(9{,}239...))| = 45{,}1...°$

Der Aufprallwinkel α liegt also nicht im gegebenen Intervall.

b1) $\overline{BZ} = \sqrt{13^2 + 5^2} = 13{,}92...$

Die Länge der Strecke BZ beträgt rund 13,9 cm.

b2) Ansatz: $A_{neu} = A + 3 \cdot \overrightarrow{AB}_0$ *oder* $\overrightarrow{OA}_{neu} = \overrightarrow{OA} + 3 \cdot \overrightarrow{AB}_0$

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 15 \\ -4 \end{pmatrix}$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{15^2 + 4^2} = \sqrt{241}$

$\overrightarrow{AB}_0 = \frac{1}{\sqrt{241}} \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ -4 \end{pmatrix}$

$A_{neu} = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \end{pmatrix} + \frac{3}{\sqrt{241}} \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4{,}89... \\ 9{,}22... \end{pmatrix}$

Der neue Auflagepunkt der ersten Kugel hat gerundet die Koordinaten (4,9|9,2).

c1) Interquartilsabstand: 4 s

Lösungsschlüssel

a1) 1 × C: für die richtige Interpretation der Zahl 1,1 im gegebenen Sachzusammenhang
a2) 1 × B: für die richtige Berechnung der Wurfweite w
a3) 1 × D: für die richtige Überprüfung mithilfe der Differenzialrechnung
b1) 1 × B1: für die richtige Berechnung der Länge der Strecke BZ
b2) 1 × A: für den richtigen Ansatz mithilfe des Einheitsvektors
1 × B2: für die richtige Berechnung der Koordinaten
c1) 1 × C: für das richtige Ablesen des Interquartilsabstands

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Gastwirtschaft*

Aufgabennummer: B_443

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

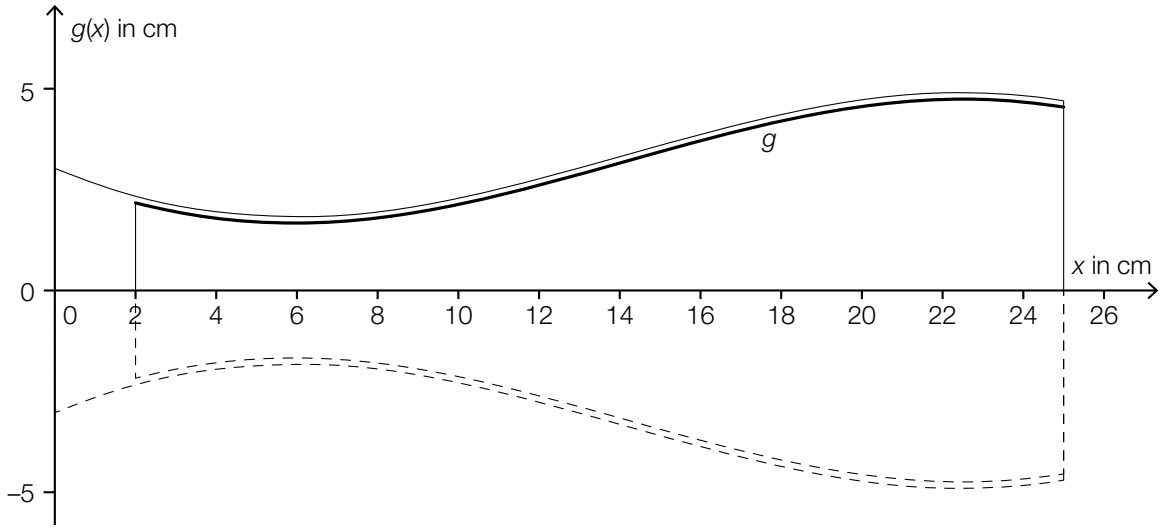
a) Automatische Abfüllanlagen für Getränke sollen möglichst gleichmäßige Füllmengen gewährleisten.
Die Füllmenge bei einer bestimmten Abfüllanlage ist annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 500$ ml und der Standardabweichung $\sigma = 4{,}5$ ml.

Die Füllmenge wird mithilfe einer Stichprobe des Umfangs n überprüft.

1) Berechnen Sie für $n = 10$ den zum Erwartungswert symmetrischen Zufallsstreubereich, in dem erwartungsgemäß 99 % aller Stichprobenmittelwerte liegen.

2) Begründen Sie, warum das Maximum der Dichtefunktion der Stichprobenmittelwerte $\overline{X}$ für $n = 5$ kleiner als jenes für $n = 10$ ist.

b) Die Form eines Weizenbierglases kann näherungsweise durch die Rotation des Graphen der Funktion g um die x-Achse dargestellt werden (siehe nachstehende Abbildung).



Es gilt:

$g(x) = -0{,}00108 \cdot x^3 + 0{,}046 \cdot x^2 - 0{,}4367 \cdot x + 3$ mit $2 \leq x \leq 25$

x, $g(x)$ ... Koordinaten in cm

1) Berechnen Sie den kleinsten Innendurchmesser des Weizenbierglases.

2) Berechnen Sie das Füllvolumen des Weizenbierglases in Litern.

* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

a1) $\mu = 500$ ml und $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{4{,}5}{\sqrt{10}}$ ml

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

[496,33...; 503,66...]

a2) Die Standardabweichung einer Stichprobe ist umso größer, je kleiner der Stichprobenumfang n ist. Daher ist der Graph der Dichtefunktion für $n = 5$ breiter als für $n = 10$. Da der gesamte Flächeninhalt unter dem Graphen der Dichtefunktion immer 1 beträgt, muss das Maximum für $n = 5$ kleiner als für $n = 10$ sein.

b1) $g'(x) = 0$ *oder* $-0{,}00324 \cdot x^2 + 0{,}092 \cdot x - 0{,}4367 = 0$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$x_1 = 6{,}025...$

$(x_2 = 22{,}369...)$

Anhand der Grafik ist erkennbar, dass der Tiefpunkt an der Stelle x_1 *ist, ein (rechnerischer) Nachweis, dass* x_1 *eine Minimumstelle ist, ist daher nicht erforderlich.*

Innendurchmesser: $d = 2 \cdot g(x_1) = 3{,}60...$

Der kleinste Innendurchmesser des Weizenbierglases beträgt rund 3,6 cm.

b2) $V = \pi \cdot \int_2^{25} (g(x))^2 \, dx = 678{,}6...$

Das Füllvolumen des Weizenbierglases beträgt rund 0,68 L.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × B: für die richtige Berechnung des Zufallsstreubereichs
a2) 1 × D: für die richtige Begründung
b1) 1 × B1: für die richtige Berechnung des kleinsten Innendurchmessers
b2) 1 × B2: für die richtige Berechnung des Füllvolumens in Litern

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Sonnenaufgang*

Aufgabennummer: A_284

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Während der Morgendämmerung wird es kontinuierlich heller. Die Beleuchtungsstärke bei klarem Himmel kann an einem bestimmten Ort in Abhängigkeit von der Zeit näherungsweise durch folgende Exponentialfunktion E beschrieben werden:

$E(t) = 80 \cdot a^t$ mit $-60 \leq t \leq 30$

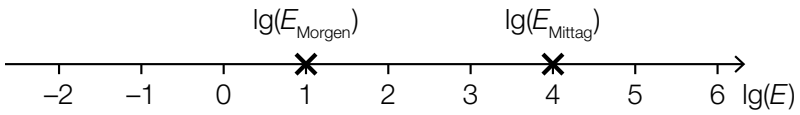
t ... Zeit in min, wobei $t = 0$ der Zeitpunkt des Sonnenaufgangs ist
$E(t)$ ... Beleuchtungsstärke zur Zeit t in Lux
a ... Parameter

1) Interpretieren Sie die Zahl 80 in der Funktionsgleichung von E im gegebenen Sachzusammenhang.

Die Beleuchtungsstärke verdoppelt sich alle 5 min.

2) Berechnen Sie den Parameter a.

b) An einem Wintertag wurde die Beleuchtungsstärke E in Lux am Morgen und zu Mittag gemessen. Die dekadischen Logarithmen (Logarithmen zur Basis 10) der beiden Messergebnisse sind nachstehend dargestellt:

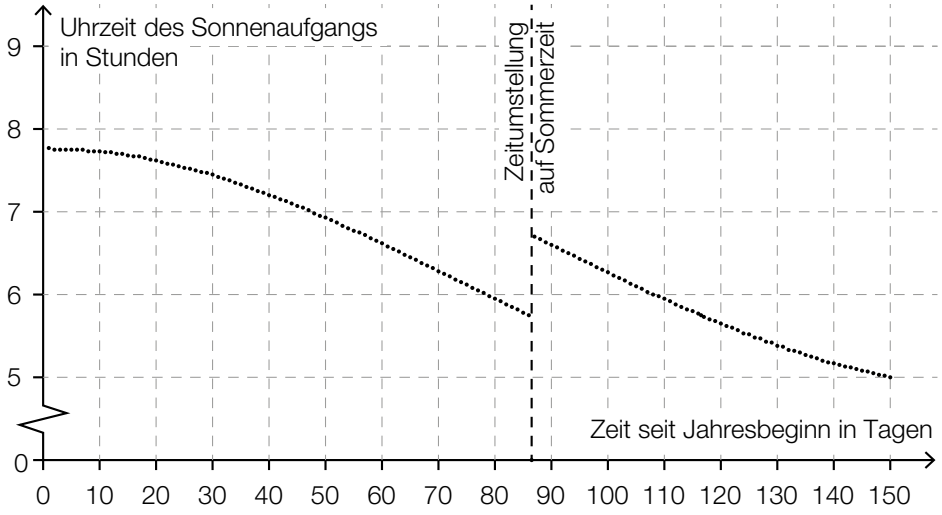


Marco behauptet, die Beleuchtungsstärke E sei an diesem Tag zu Mittag 4-mal so hoch wie am Morgen gewesen.

1) Zeigen Sie, dass Marcos Behauptung falsch ist.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) In der nachstehenden Grafik ist die jeweilige Uhrzeit des Sonnenaufgangs in Wien für die ersten 150 Tage eines Jahres dargestellt.



1) Ermitteln Sie mithilfe der obigen Grafik, wie viele Tage nach der Zeitumstellung der Sonnenaufgang erstmals zu einer früheren Uhrzeit als unmittelbar vor der Zeitumstellung stattfindet.

Im Zeitintervall [0; 40] kann die Uhrzeit des Sonnenaufgangs näherungsweise durch eine quadratische Funktion f modelliert werden.

$f(t) = a \cdot t^2 + c$

t … Zeit seit Jahresbeginn in Tagen
$f(t)$ … Uhrzeit des Sonnenaufgangs am Tag t in Stunden

2) Argumentieren Sie anhand der obigen Grafik, dass der Parameter a dabei negativ sein muss.

Möglicher Lösungsweg

a1) Die Beleuchtungsstärke bei Sonnenaufgang beträgt 80 Lux.

a2) $a^5 = 2 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt[5]{2} = 1{,}148...$

b1) Mit den konkreten Zahlen folgt: $E_{\text{Morgen}} = 10$ Lux, $E_{\text{Mittag}} = 10\,000$ Lux
Daher war die Beleuchtungsstärke zu Mittag nicht 4-mal so hoch wie am Morgen.

Auch ein allgemeiner Nachweis ist als richtig zu werten.

c1) 31 Tage
Toleranzbereich: [26 Tage; 34 Tage]

c2) Die Datenpunkte im Zeitintervall [0; 40] können durch eine nach unten offene (negativ gekrümmte) Parabel angenähert werden. Daher ist der Parameter *a* der zugehörigen quadratischen Funktion negativ.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × C: für die richtige Interpretation im gegebenen Sachzusammenhang
a2) 1 × B: für die richtige Berechnung des Parameters *a*
b1) 1 × D: für den richtigen Nachweis (allgemein oder anhand der konkreten Zahlen)
c1) 1 × C: für das richtige Ermitteln im Toleranzbereich [26 Tage; 34 Tage]
c2) 1 × D: für die richtige Argumentation

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Bahnverkehr in Österreich*

Aufgabennummer: A_283

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Eine Bahnfahrt von Wien nach Graz dauert 2 Stunden und 35 Minuten. Die mittlere Reisegeschwindigkeit beträgt dabei rund 81,83 km/h. Im Jahr 2026 soll der Semmering-Basistunnel fertiggestellt werden. Dadurch wird sich die Fahrtstrecke um 13,7 Kilometer und die Fahrtdauer um 50 Minuten verkürzen.

1) Berechnen Sie die mittlere Reisegeschwindigkeit zwischen Wien und Graz für die verkürzte Fahrt.

b) Die Fahrtstrecke im Semmering-Basistunnel wird 27,3 Kilometer lang sein und eine (als konstant angenommene) Steigung von 0,84 % haben.
In der folgenden Berechnung des Höhenunterschieds Δh in Metern auf dieser Fahrtstrecke ist genau ein Fehler passiert:

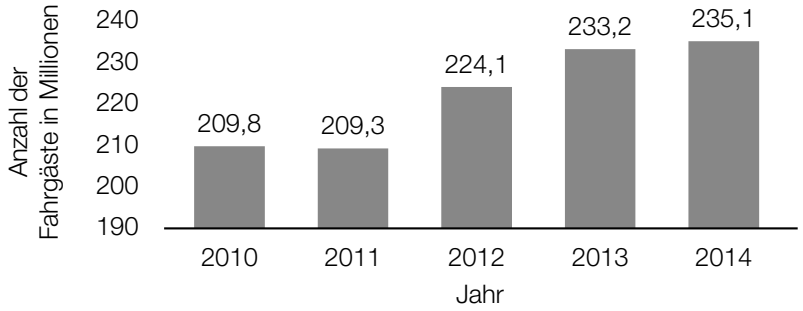
Steigungswinkel: $\alpha = \arctan(0{,}0084) = 0{,}48127\ldots°$

$$\Delta h = \frac{27\,300\ \text{m}}{\sin(\alpha)} = 3\,250\,114{,}6\ldots\ \text{m}$$

1) Stellen Sie die Berechnung und das Ergebnis richtig.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Im nachstehenden Diagramm sind die Fahrgastzahlen der Österreichischen Bundesbahnen für die Jahre 2010 bis 2014 dargestellt.



Datenquelle: Agentur für Passagier- und Fahrgastrechte (Hrsg.): *Fahrgastrechte-Statistik Bahn 2014*, 2016, S. 4. https://www.apf.gv.at/files/1-apf-Homepage/1g-Publikationen/Fahrgastrechtestatistik-2014.pdf [22.11.2018].

1) Berechnen Sie die Spannweite der angegebenen Fahrgastzahlen in Millionen.

Es wird folgende Berechnung durchgeführt:

$$\frac{235{,}1 - 209{,}8}{209{,}8} \approx 0{,}12$$

2) Interpretieren Sie das Ergebnis dieser Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang.

Möglicher Lösungsweg

a1) Länge der ursprünglichen Fahrtstrecke in km:

$81{,}83 \cdot \left(2 + \frac{35}{60}\right) = 211{,}394...$

Länge der verkürzten Fahrtstrecke in km:

$211{,}394... - 13{,}7 = 197{,}694...$

mittlere Reisegeschwindigkeit für die verkürzte Fahrt in km/h:

$\frac{197{,}694...}{1{,}75} = 112{,}968...$

Die mittlere Reisegeschwindigkeit für die verkürzte Fahrt beträgt rund 112,97 km/h.

b1) $\Delta h = 27\,300 \text{ m} \cdot \sin(\alpha) = 229{,}3... \text{ m}$

c1) $235{,}1 - 209{,}3 = 25{,}8$

Die Spannweite beträgt 25,8 Millionen Fahrgäste.

c2) Im Jahr 2014 war die Anzahl der Fahrgäste um rund 12 % höher als im Jahr 2010.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × B1: für die richtige Berechnung der Länge der verkürzten Fahrtstrecke
1 × B2: für die richtige Berechnung der mittleren Reisegeschwindigkeit für die verkürzte Fahrt

b1) 1 × A: für die Richtigstellung mit dem richtigen Ergebnis

c1) 1 × B: für die richtige Berechnung der Spannweite in Millionen

c2) 1 × C: für die richtige Interpretation im gegebenen Sachzusammenhang

Glücksspiel*

Aufgabennummer: A_282

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Bei einem Glücksspiel werden aus verschiedenen Gefäßen Kugeln zufällig gezogen.

a) Im ersten Gefäß befinden sich insgesamt *a* Kugeln. 7 dieser Kugeln sind rot, die anderen Kugeln sind weiß.

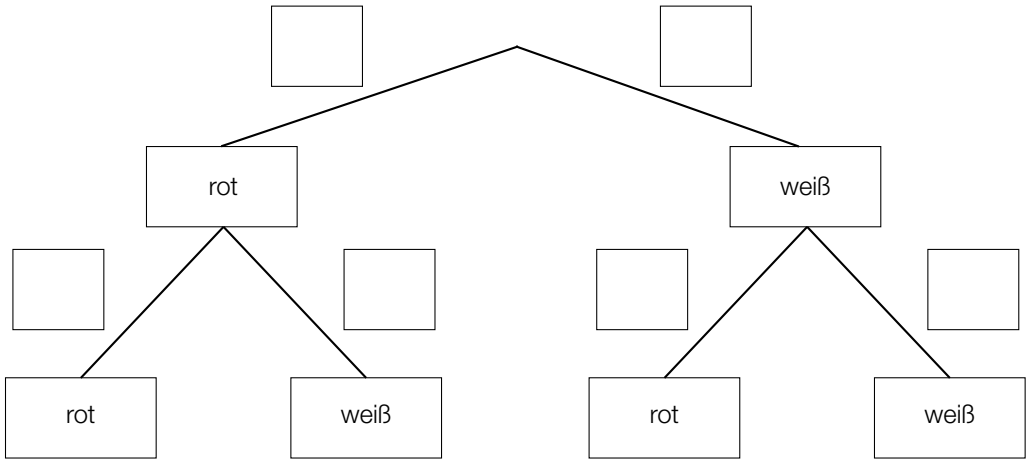
Es wird 1 Kugel aus diesem Gefäß gezogen.

1) Erstellen Sie mithilfe von *a* einen Ausdruck zur Berechnung der folgenden Wahrscheinlichkeit:

P(„die gezogene Kugel ist weiß“) = _____

Aus diesem Gefäß mit *a* Kugeln zieht Elena 1 Kugel und legt diese Kugel anschließend in das Gefäß zurück. Dann zieht sie wieder 1 Kugel.

2) Vervollständigen Sie das nachstehende Baumdiagramm so, dass es den beschriebenen Sachverhalt wiedergibt.



Die Wahrscheinlichkeit, dass Elena 2-mal eine rote Kugel zieht, beträgt 12,25 %.

3) Berechnen Sie die Anzahl *a*.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Im zweiten Gefäß befinden sich 6 schwarze und 2 blaue Kugeln.

Aus diesem Gefäß zieht Susi 1 Kugel und legt diese Kugel anschließend in das Gefäß zurück. Das macht sie insgesamt 5-mal.

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Susi dabei genau 3-mal eine schwarze Kugel zieht.

c) Im dritten Gefäß befinden sich 12 Kugeln. 7 dieser Kugeln sind grün, die anderen Kugeln sind gelb.

Aus diesem Gefäß zieht Moritz 1 Kugel und legt diese Kugel anschließend in das Gefäß zurück. Das macht er insgesamt 3-mal.

1) Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen so, dass eine korrekte Aussage entsteht. *[Lückentext]*

Die Wahrscheinlichkeit, dass _____①_____, ist durch den Ausdruck _____②_____ gegeben.

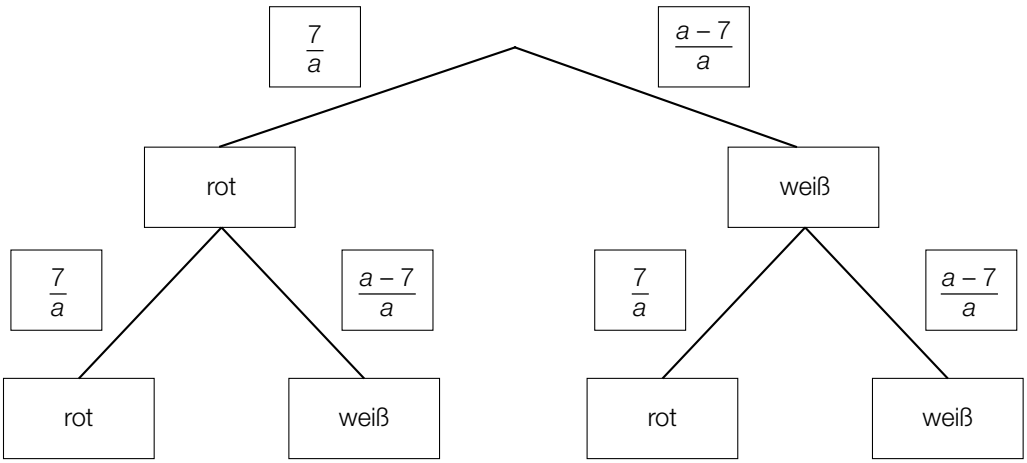
①	
alle 3 Kugeln grün sind	☐
mindestens 1 Kugel grün ist	☐
höchstens 1 Kugel grün ist	☐

②	
$1 - \left(\frac{5}{12}\right)^3$	☐
$1 - \left(\frac{7}{12}\right)^3$	☐
$\left(\frac{5}{12}\right)^3$	☐

Möglicher Lösungsweg

a1) $P(\text{„die gezogene Kugel ist weiß“}) = \frac{a-7}{a}$

a2)



a3) $\left(\frac{7}{a}\right)^2 = 0{,}1225 \quad \Rightarrow \quad a = 20$

b1) Binomialverteilung mit $n = 5$, $p = 0{,}75$:

X ... Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$P(X = 3) = 0{,}2636...$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt rund 26,4 %.

c1)

①	
mindestens 1 Kugel grün ist	☒

②	
$1 - \left(\frac{5}{12}\right)^3$	☒

Lösungsschlüssel

a1) 1 × A1: für das richtige Erstellen des Ausdrucks
a2) 1 × A2: für das richtige Vervollständigen des Baumdiagramms
a3) 1 × B: für die richtige Berechnung von *a*
b1) 1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit
c1) 1 × A: für das richtige Ergänzen der beiden Textlücken

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Die Adria-Wien-Pipeline*

Aufgabennummer: A_280

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Österreich muss einen Großteil seines Erdölbedarfs durch Importe von Rohöl decken. Diese Importe werden vorwiegend über die Adria-Wien-Pipeline durchgeführt, die von Triest nach Wien-Schwechat führt.

a) Die folgende Tabelle gibt die nach Österreich importierten Rohölmengen in den Jahren 2006 bis 2014 an:

Jahr	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
importierte Rohölmenge in Millionen Tonnen	7,7	7,6	7,9	7,4	6,8	7,3	7,4	7,8	7,5

Quelle: https://www.wko.at/branchen/industrie/mineraloelindustrie/jahresberichte.html [22.11.2018].

1) Ermitteln Sie das arithmetische Mittel und die Standardabweichung der importierten Rohölmengen für diesen Zeitraum in Millionen Tonnen.

b) Modellhaft betrachtet ist die Pipeline ein Drehzylinder mit dem Durchmesser d und der Höhe l.

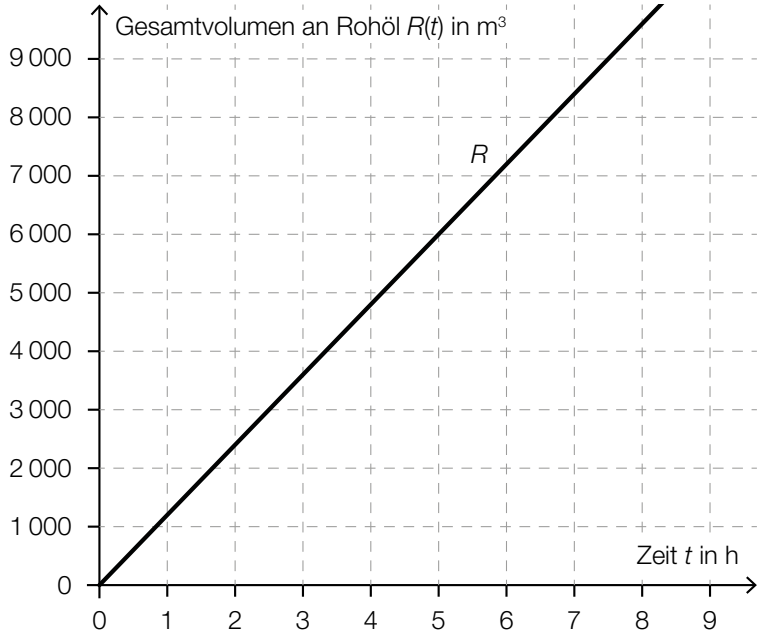
Der Innendurchmesser der Pipeline beträgt $d = 457{,}2$ mm. Die Länge der Pipeline beträgt rund $l = 416$ km.

In der Erdölindustrie wird für das Volumen von Rohöl häufig die Einheit *Barrel* verwendet. Es gilt: 1 Barrel $\approx 0{,}159\ m^3$

1) Berechnen Sie, wie viele Barrel Rohöl die vollständig befüllte Pipeline fasst.

* ehemalige Klausuraufgabe

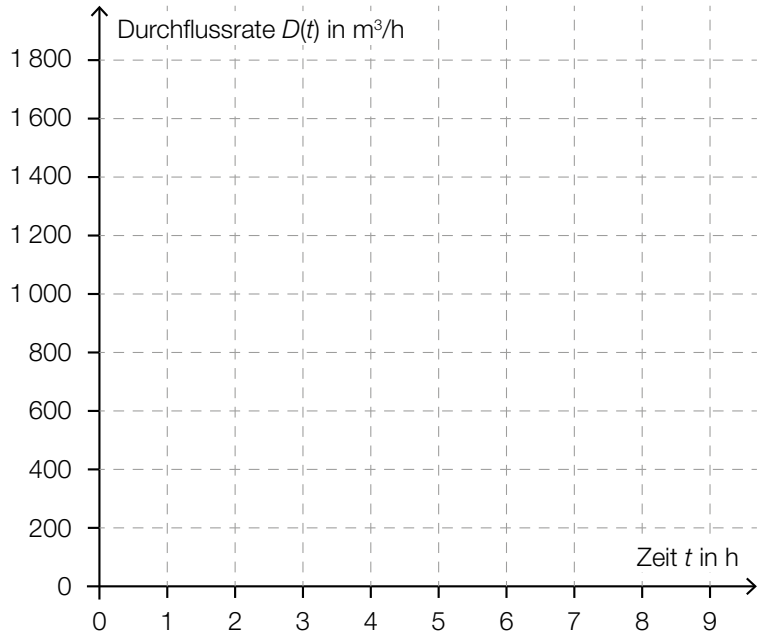
c) Das Gesamtvolumen an Rohöl, das im Zeitintervall [0; t] einen Kontrollpunkt in der Pipeline passiert, kann näherungsweise durch die Funktion R in Abhängigkeit von der Zeit t modelliert werden. Der Graph der Funktion R ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



1) Erstellen Sie mithilfe des oben dargestellten Graphen eine Gleichung der Funktion R.

Die Durchflussrate $D(t)$ zum Zeitpunkt t ist die momentane Änderungsrate der Funktion R.

2) Zeichnen Sie im nachstehenden Koordinatensystem den Graphen der Durchflussrate ein.



Möglicher Lösungsweg

a1) Ermittlung mittels Technologieeinsatz:

$\bar{x}$ = 7,48... Millionen Tonnen

s = 0,30... Millionen Tonnen

Auch eine Ermittlung der Standardabweichung als s_{n-1} *= 0,32... ist als richtig zu werten.*

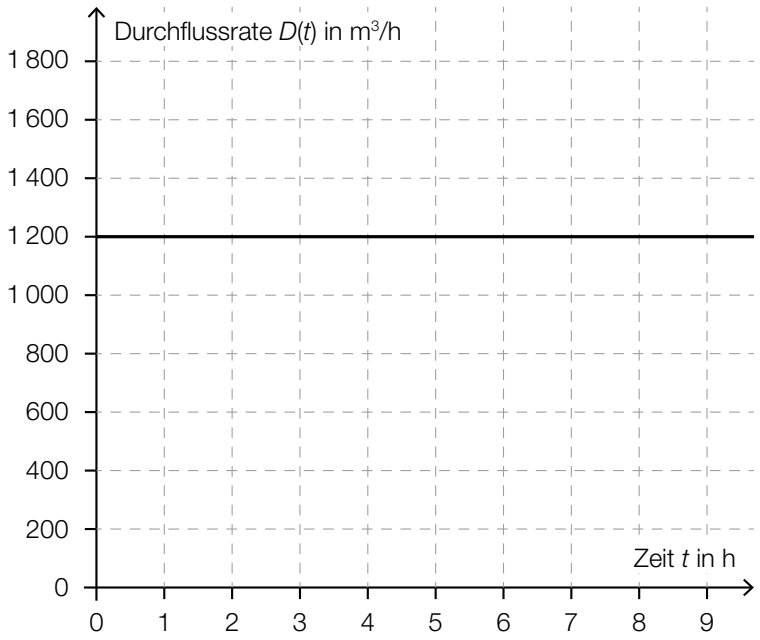
b1) $\left(\frac{0{,}4572}{2}\right)^2 \cdot \pi \cdot 416\,000 = 68\,296{,}06...$

68 296,06... : 0,159 = 429 534,9...

Insgesamt fasst die Pipeline rund 429 535 Barrel Rohöl.

c1) $R(t) = 1\,200 \cdot t$

c2)



Lösungsschlüssel

a1) 1 × B: für das richtige Ermitteln des arithmetischen Mittels und der Standardabweichung

b1) 1 × A: für den richtigen Ansatz (richtige Anwendung der Formel zur Berechnung des Volumens eines Drehzylinders auf den gegebenen Sachverhalt)

1 × B: für die richtige Berechnung in Barrel

c1) 1 × A1: für das richtige Erstellen der Gleichung der Funktion

c2) 1 × A2: für das richtige Einzeichnen des Graphen der Durchflussrate

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Vitamin C*

Aufgabennummer: A_281

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Der Vitamin-C-Gehalt eines Apfels nimmt nach der Ernte exponentiell ab. Alle 4 Wochen nimmt der Vitamin-C-Gehalt um 20 % bezogen auf den Wert zu Beginn dieser 4 Wochen ab.
Ein bestimmter Apfel hat bei der Ernte einen Vitamin-C-Gehalt von 18 mg.

Der Vitamin-C-Gehalt dieses Apfels in Milligramm soll in Abhängigkeit von der Zeit t in Wochen beschrieben werden.

1) Erstellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Funktion. Wählen Sie $t = 0$ für den Zeitpunkt der Ernte.
2) Berechnen Sie den Vitamin-C-Gehalt dieses Apfels 36 Wochen nach der Ernte.

b) Der Vitamin-C-Gehalt von Tabletten der Sorte *Zitruspower* ist annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 100$ mg und der Standardabweichung $\sigma = 5$ mg.

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Vitamin-C-Gehalt einer zufällig ausgewählten Tablette zwischen 92 mg und 110 mg liegt.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Nach der Einnahme einer Vitamin-C-Tablette steigt die Vitamin-C-Konzentration im Blut zunächst an und sinkt danach wieder ab.

Die Funktion c beschreibt näherungsweise den zeitlichen Verlauf der Vitamin-C-Konzentration im Blut einer bestimmten Person.

$c(t) = 24 \cdot (e^{-0,0195 \cdot t} - e^{-1,3 \cdot t}) + 3$

t ... Zeit seit der Einnahme der Vitamin-C-Tablette in h
$c(t)$ ... Vitamin-C-Konzentration im Blut zur Zeit t in Mikrogramm pro Milliliter (µg/ml)

1) Zeigen Sie, dass die maximale Vitamin-C-Konzentration im Blut der Person gerundet 25,18 µg/ml beträgt.

2) Kreuzen Sie denjenigen Ausdruck an, der die maximale Vitamin-C-Konzentration in mg/L angibt. *[1 aus 5]*

0,02518 mg/L	☐
25,18 mg/L	☐
25 180 mg/L	☐
0,00002518 mg/L	☐
25 180 000 mg/L	☐

Möglicher Lösungsweg

a1) $N(t) = 18 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$

$0{,}8 \cdot 18 = 18 \cdot e^{-\lambda \cdot 4}$

$\lambda = \frac{\ln(0{,}8)}{-4} = 0{,}05578... \approx 0{,}0558$

$N(t) = 18 \cdot e^{-0{,}0558 \cdot t}$

oder:

$N(t) = 18 \cdot 0{,}8^{\frac{t}{4}}$

t ... Zeit nach der Ernte in Wochen
$N(t)$ ... Vitamin-C-Gehalt zur Zeit t in mg

a2) $N(36) = 2{,}41...$

Der Apfel hat 36 Wochen nach der Ernte einen Vitamin-C-Gehalt von rund 2,4 mg.

b1) X ... Vitamin-C-Gehalt einer Tablette in mg

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$P(92 < X < 110) = 0{,}9224...$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt rund 92,2 %.

c1) $c'(t) = 0$ *oder* $24 \cdot (-0{,}0195 \cdot e^{-0{,}0195 \cdot t} + 1{,}3 \cdot e^{-1{,}3 \cdot t}) = 0$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$t = 3{,}279...$

$c(3{,}279...) = 25{,}175...$

Die maximale Vitamin-C-Konzentration im Blut dieser Person beträgt also rund 25,18 µg/ml.

Eine Überprüfung, ob an der berechneten Stelle tatsächlich ein Maximum vorliegt, z. B. mithilfe der 2. Ableitung, sowie eine Überprüfung von Randstellen sind für die Punktevergabe nicht erforderlich.

c2)

25,18 mg/L	☒

Lösungsschlüssel

a1) 1 × A: für das richtige Erstellen der Gleichung der Funktion
a2) 1 × B: für die richtige Berechnung des Vitamin-C-Gehalts 36 Wochen nach der Ernte
b1) 1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit
c1) 1 × D: für den richtigen Nachweis
Eine Überprüfung, ob an der berechneten Stelle tatsächlich ein Maximum vorliegt, z. B. mithilfe der 2. Ableitung, sowie eine Überprüfung von Randstellen sind für die Punktevergabe nicht erforderlich.
c2) 1 × C: für das richtige Ankreuzen

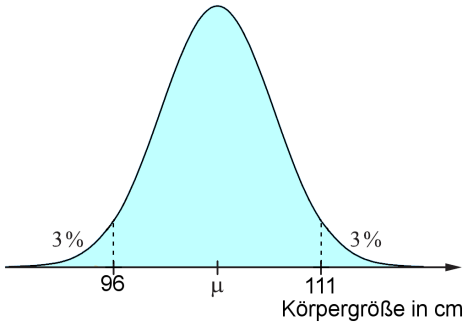
Körpergröße von Kindergartenkindern

Aufgabennummer: B_235

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

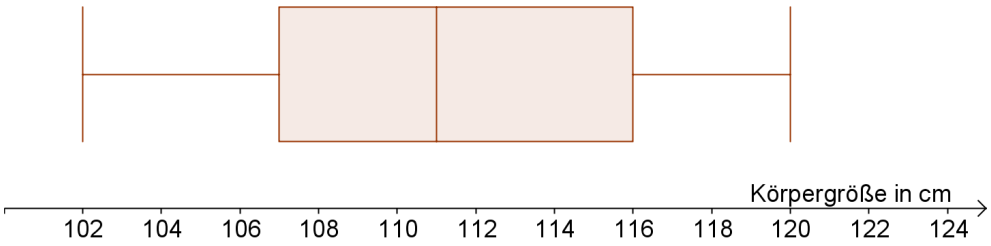
Bei den Vorsorgeuntersuchungen von Kindern wird auch die Körpergröße überprüft, um bei Auffälligkeiten rechtzeitig Therapiemaßnahmen setzen zu können.

a) Die nebenstehende Glockenkurve nach Gauß schematisiert die Größenverteilung von 4-jährigen Kindern.
Die 3 % am oberen und am unteren Ende weisen auf die auffällig großen bzw. die auffällig kleinen Kinder hin.



– Interpretieren Sie die Kurve in Bezug auf die Verteilung der Körpergröße von 4-jährigen Kindern und den Erwartungswert μ.
– Berechnen Sie die Standardabweichung σ.

b) Als Ergebnis der Messung der Körpergröße von 5-jährigen Kindern wurde folgender Boxplot erstellt:



– Interpretieren Sie das Diagramm im Hinblick auf die Bedeutung der 5 Kennzahlen Minimum, Maximum, Median, 1. und 3. Quartil.

c) Die gemessenen Körpergrößen der 4-jährigen Buben haben folgende Kennzahlen geliefert:

Minimum (Min):	96 cm
Maximum (Max):	112 cm
Median (Med):	103 cm
1. Quartil (Q_1):	100,5 cm
3. Quartil (Q_3):	108 cm

– Erstellen Sie mit diesen Kennzahlen einen Boxplot.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) 3 % der 4-jährigen Kinder sind kleiner als 96 cm.
3 % der Kinder sind größer als 111 cm.
94 % der Kinder sind zwischen 96 cm und 111 cm groß.
Der Erwartungswert μ der Körpergröße bei 4-Jährigen liegt bei 103,5 cm,
Ermittlung von σ mittels Technologieeinsatz:
$\sigma = 3{,}987\ldots$
$\sigma \approx 3{,}99$ cm

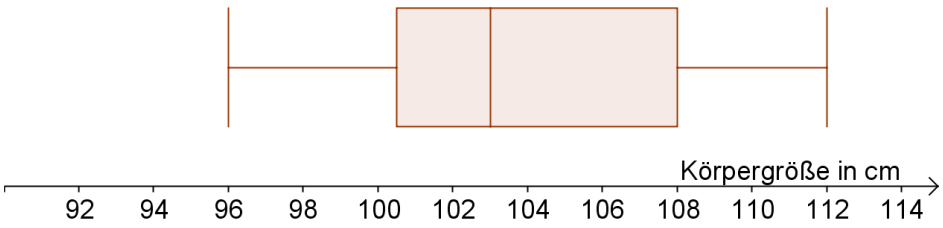
b) Der Median m liegt in der Mitte einer geordneten Liste. Mindestens 50 % der Messwerte sind $\leq m$, mindestens 50 % sind $\geq m$. Die Quartile teilen die geordnete Liste in 4 Teile.

Aus dem Diagramm kann man die folgenden Größen ablesen:

Die Körpergrößen der 5-jährigen Kinder liegen zwischen 102 und 120 cm.
Der Median legt bei 111 cm, das 1. Quartil bei 107 cm und das 3. Quartil bei 116 cm.

Der Unterschied zwischen Minimum und 1. Quartil beträgt 5 cm, zwischen 1. Quartil und Median 4 cm, zwischen Median und 3. Quartil 5 cm, zwischen 3. Quartil und Maximum 4 cm.

c)



Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 5 Stochastik
c) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) —
c) —

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) leicht
c) leicht

Punkteanzahl:

a) 3
b) 2
c) 1

Thema: Alltag

Quelle: Statistische Kennzahlen: Forschungsinstitut für Kinderernährung, Dortmund

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Wiener Öffis*

Aufgabennummer: B_187

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Wien betreibt das fünftgrößte Straßenbahnnetz weltweit und das fünftgrößte U-Bahn-Netz in der Europäischen Union. Seit 1995 steigt die Zahl der Passagiere ständig an.

a)

Jahr	2002	2005	2008	2011
Fahrgastzahl der Wiener Linien in Millionen	722,4	746,8	803,7	875,0

– Interpretieren Sie das Ergebnis der folgenden Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang:

$$\frac{875{,}0 - 722{,}4}{722{,}4} \approx 0{,}21$$

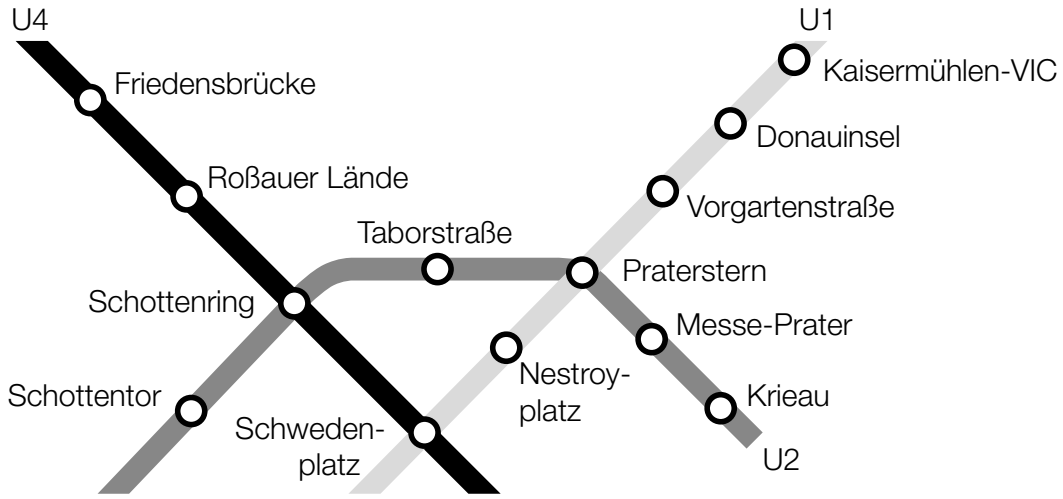
Es wird angenommen, dass der Zusammenhang zwischen der Zeit t in Jahren und der Fahrgastzahl der Wiener Linien in Millionen pro Jahr näherungsweise durch eine lineare Funktion beschrieben werden kann.

– Ermitteln Sie eine Gleichung der zugehörigen linearen Regressionsfunktion. Wählen Sie $t = 0$ für das Jahr 2002.

– Ermitteln Sie mithilfe dieser Regressionsfunktion eine Prognose für die Fahrgastzahl im Jahr 2018.

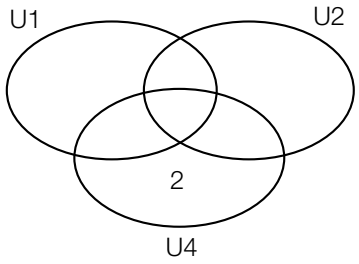
* ehemalige Klausuraufgabe

b) Im Folgenden ist ein kleiner Ausschnitt des Wiener U-Bahn-Netzes abgebildet:



Die Mengen der Haltestellen der Linien U1, U2 und U4, die in diesem Ausschnitt dargestellt sind, werden mit U1, U2 bzw. U4 bezeichnet.

– Tragen Sie in jeden Teilbereich des nachstehenden Diagramms die entsprechende Anzahl an Haltestellen für den abgebildeten Ausschnitt des Wiener U-Bahn-Netzes ein.



– Geben Sie die Namen derjenigen Haltestellen an, die in der folgenden Menge liegen:
$U1 \setminus (U2 \cup U4)$

Aus dem abgebildeten Ausschnitt des Wiener U-Bahn-Netzes wird eine Haltestelle zufällig ausgewählt.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es sich um eine Haltestelle handelt, die an mehr als einer U-Bahn-Linie liegt.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Die Fahrgastzahl der Wiener Linien im Jahr 2011 ist um rund 21 % größer als jene im Jahr 2002.

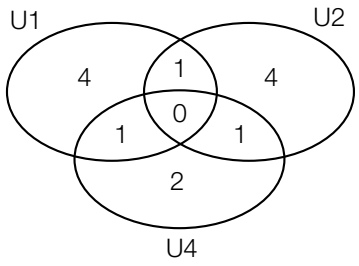
Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$f(t) = 17{,}157 \cdot t + 709{,}77$ *(Koeffizienten gerundet)*

$f(16) = 984{,}27...$

Im Jahr 2018 sind nach diesem Modell rund 984,3 Millionen Fahrgäste zu erwarten.

b)



Dies sind die Haltestellen *Kaisermühlen-VIC*, *Donauinsel*, *Vorgartenstraße* und *Nestroyplatz*.

E ... eine zufällig ausgewählte Haltestelle liegt an mehr als einer U-Bahn-Linie

$P(E) = \frac{3}{13} = 0{,}230...$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt rund 23 %.

Lösungsschlüssel

a) 1 × C: für die richtige Interpretation im gegebenen Sachzusammenhang
1 × B1: für das richtige Ermitteln der Gleichung der linearen Regressionsfunktion
1 × B2: für das richtige Ermitteln der Prognose für die Fahrgastzahl im Jahr 2018

b) 1 × A: für das richtige Vervollständigen des Diagramms
1 × C: für die richtige Angabe der Haltestellen
1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit

Staudamm (2)*

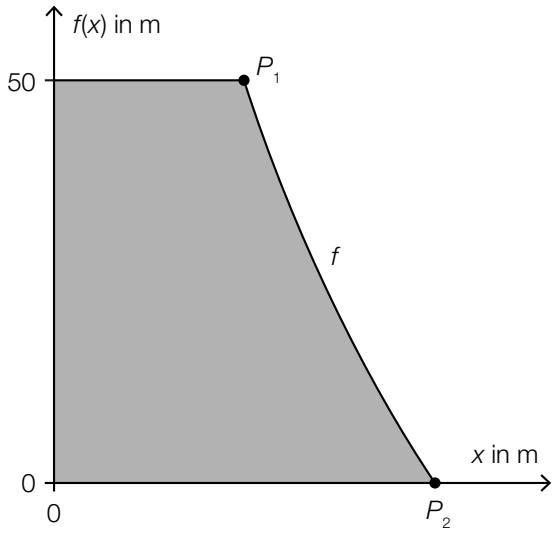
Aufgabennummer: B_442

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Ein Staudamm hat den unten – nicht maßstabgetreu – dargestellten Querschnitt mit den Punkten $P_1 = (10|50)$ und $P_2 = (20|0)$. Alle Angaben erfolgen in Metern. Der Verlauf zwischen den Punkten P_1 und P_2 wird durch den Graphen der Funktion f beschrieben:

$f(x) = a + b \cdot \ln(x)$

x, $f(x)$ ... Koordinaten in m



1) Stellen Sie ein Gleichungssystem auf, mit dem die Parameter a und b ermittelt werden können.

Es wurden folgende Werte für a bzw. b ermittelt:

$a = 216{,}1$
$b = -72{,}1$

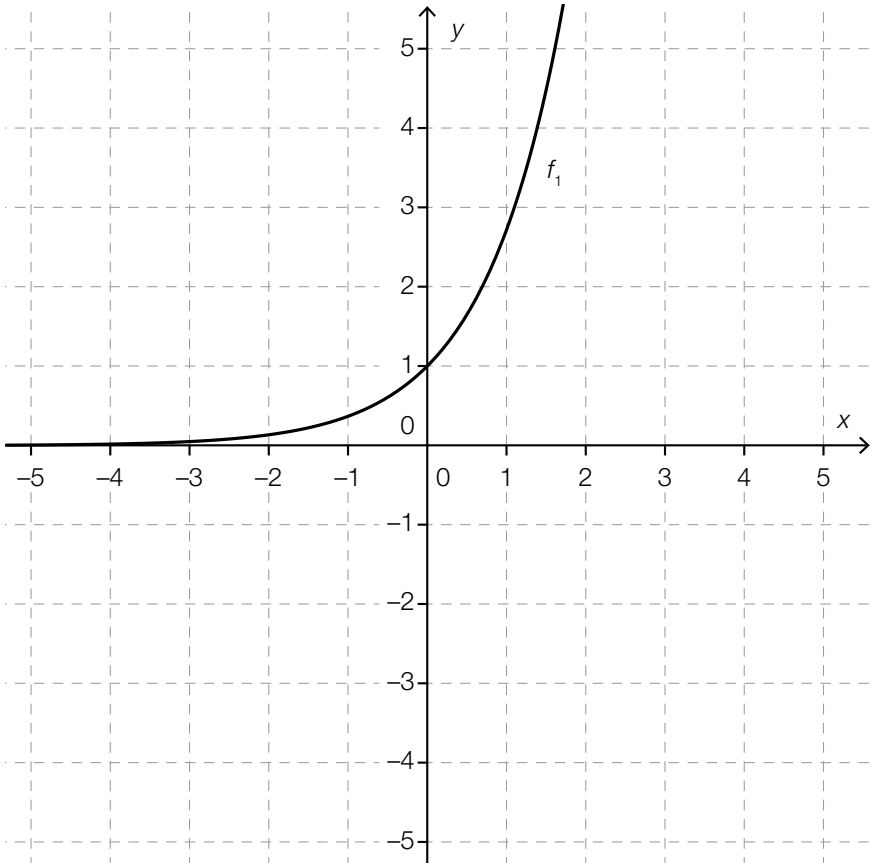
2) Berechnen Sie die Breite des Staudamms auf halber Höhe.

3) Berechnen Sie den Inhalt der Querschnittsfläche des Staudamms (graue Fläche).

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Im unten stehenden Diagramm ist der Graph einer Exponentialfunktion f_1 eingezeichnet.

1) Zeichnen Sie in diesem Diagramm den Graphen der zugehörigen Umkehrfunktion f_2 ein.



2) Beschreiben Sie, welche Bedeutung die Gerade $y = x$ für den Zusammenhang der Graphen der Funktionen f_1 und f_2 hat.

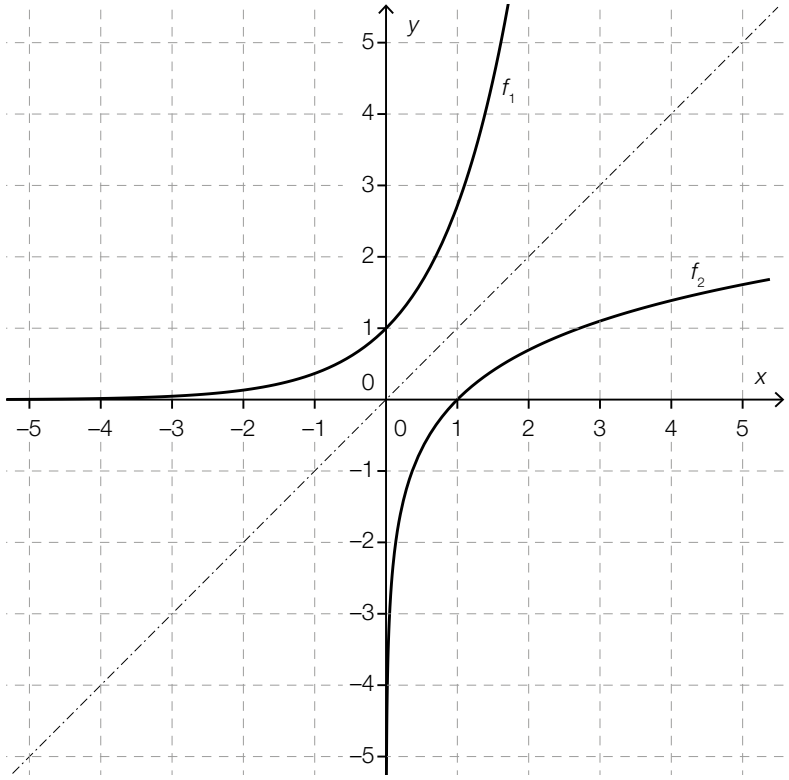
Möglicher Lösungsweg

a1) I: $50 = a + b \cdot \ln(10)$
II: $0 = a + b \cdot \ln(20)$

a2) $25 = 216{,}1 - 72{,}1 \cdot \ln(x) \Rightarrow x = 14{,}16\ldots \approx 14{,}2$
Die Breite in halber Höhe beträgt rund 14,2 m.

a3) $A = 10 \cdot 50 + \int_{10}^{20} (216{,}1 - 72{,}1 \cdot \ln(x))\,dx = 722{,}31\ldots \approx 722{,}3$
Der Inhalt der Querschnittsfläche beträgt rund 722,3 m^2.

b1)



b2) Die Funktionsgraphen liegen symmetrisch zur Geraden $y = x$.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A1: für das richtige Aufstellen des Gleichungssystems
1 × B1: für die richtige Berechnung der Breite in halber Höhe
1 × A2: für einen richtigen Ansatz zur Berechnung des Inhalts der Querschnittsfläche
1 × B2: für die richtige Berechnung des Inhalts der Querschnittsfläche

b1) 1 × B: für das richtige Einzeichnen des Graphen der Umkehrfunktion f_2
b2) 1 × C: für die richtige Beschreibung zur Bedeutung der Geraden $y = x$

Staudamm (1)*

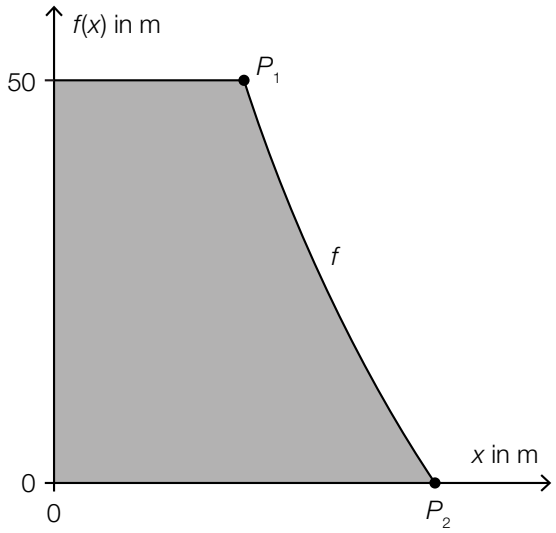
Aufgabennummer: B_441

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Ein Staudamm hat den unten – nicht maßstabgetreu – dargestellten Querschnitt mit den Punkten $P_1 = (10|50)$ und $P_2 = (20|0)$. Alle Angaben erfolgen in Metern. Der Verlauf zwischen den Punkten P_1 und P_2 wird durch den Graphen der Funktion f beschrieben:

$f(x) = 216{,}1 - 72{,}1 \cdot \ln(x)$

x, $f(x)$ ... Koordinaten in m

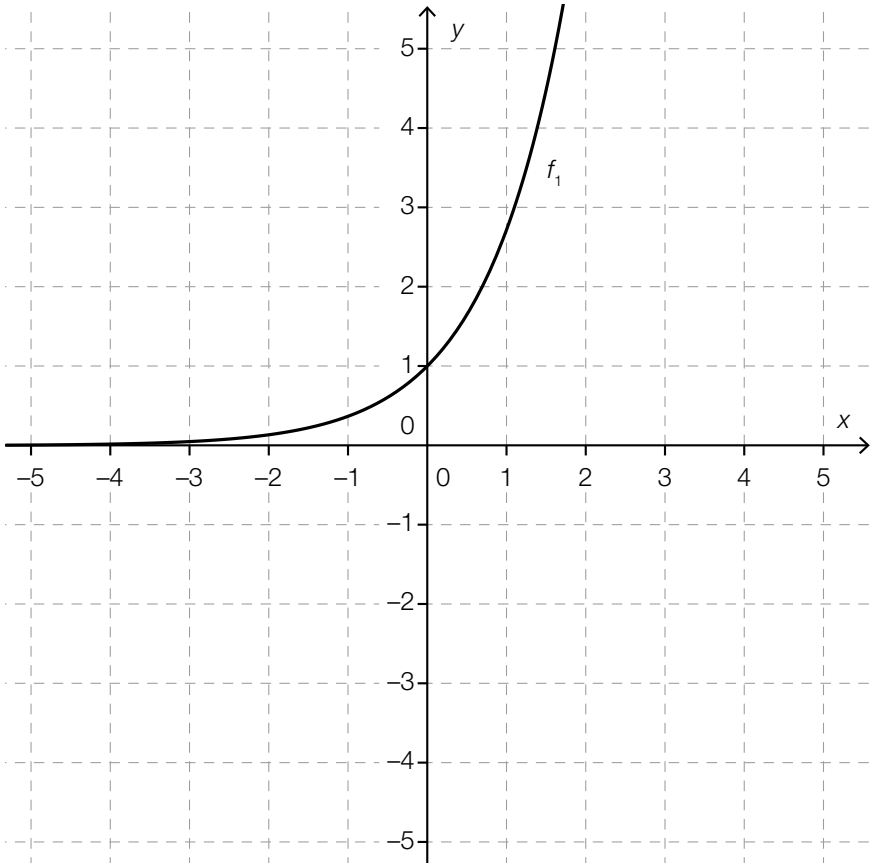


1) Berechnen Sie den Inhalt der Querschnittsfläche des Staudamms (graue Fläche).

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Im unten stehenden Diagramm ist der Graph einer Exponentialfunktion f_1 eingezeichnet.

1) Zeichnen Sie in diesem Diagramm den Graphen der zugehörigen Umkehrfunktion f_2 ein.



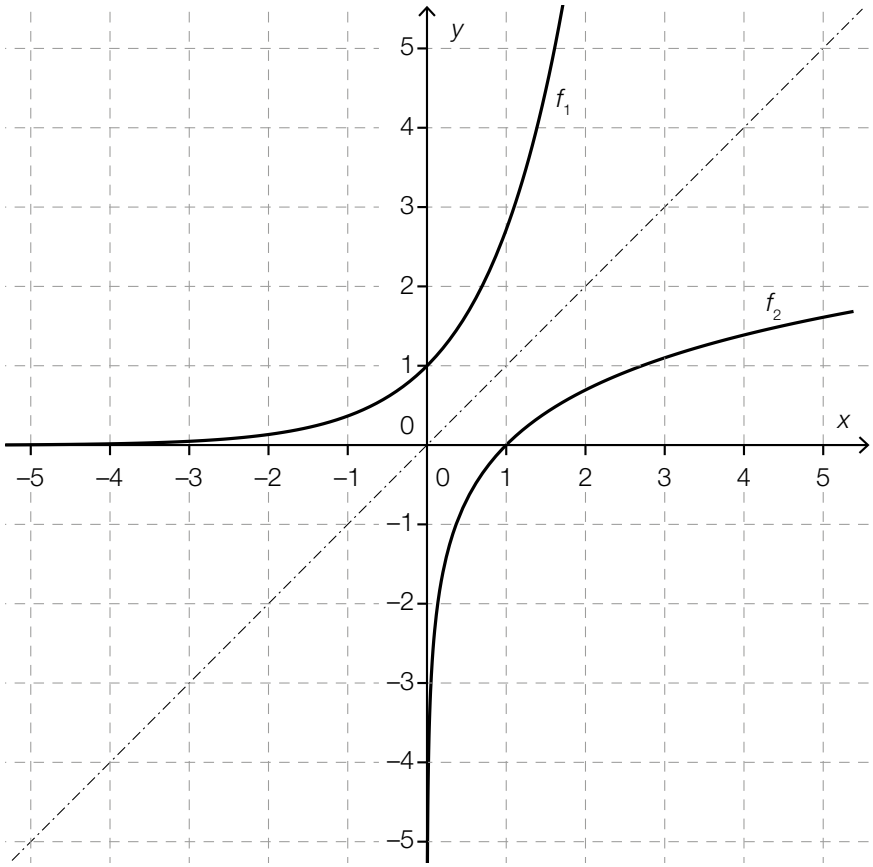
2) Beschreiben Sie, welche Bedeutung die Gerade $y = x$ für den Zusammenhang der Graphen der Funktionen f_1 und f_2 hat.

Möglicher Lösungsweg

a1) $A = 10 \cdot 50 + \int_{10}^{20} (216{,}1 - 72{,}1 \cdot \ln(x))\,dx = 722{,}31\ldots \approx 722{,}3$

Der Inhalt der Querschnittsfläche beträgt rund 722,3 m^2.

b1)



b2) Die Funktionsgraphen liegen symmetrisch zur Geraden $y = x$.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × A: für einen richtigen Ansatz zur Berechnung des Inhalts der Querschnittsfläche
1 × B: für die richtige Berechnung des Inhalts der Querschnittsfläche

b1) 1 × B: für das richtige Einzeichnen des Graphen der Umkehrfunktion f_2

b2) 1 × C: für die richtige Beschreibung zur Bedeutung der Geraden $y = x$

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Rohre

Aufgabennummer: B_178

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Rohrleitungen und Rohrleitungssysteme stellen wesentliche technische Bestandteile in landwirtschaftlichen Betrieben dar.

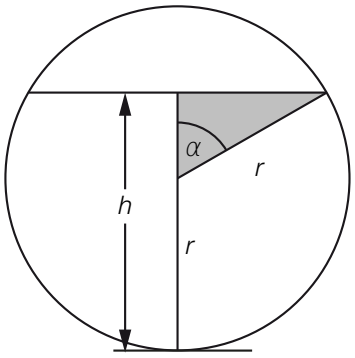
a) Bei einer konstanten Durchflussmenge von 5 Litern pro Sekunde (L/s) nimmt die Strömungsgeschwindigkeit des Wassers mit zunehmendem Rohrdurchmesser ungefähr gemäß der Funktion v mit $v(d) = \frac{63{,}7}{d^2}$ ab.

d … Rohrdurchmesser in cm
$v(d)$ … Strömungsgeschwindigkeit bei einem Durchmesser d in m/s

– Erstellen Sie eine Gleichung der Funktion d.

– Stellen Sie die Umkehrfunktion bis zu einem Rohrdurchmesser von 12 cm bzw. einer Strömungsgeschwindigkeit von 26 m/s grafisch dar.

b) Ein Rohr mit einem Innenradius r ist bis zu einer Höhe h mit Wasser gefüllt (siehe nachstehende Abbildung).



– Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung des Winkels α mithilfe der Größen r und h.

$\alpha =$ _____

– Berechnen Sie den Flächeninhalt des in der obigen Abbildung markierten Dreiecks für $r = 10$ cm und $h = 12$ cm.

– Berechnen Sie, wie viel Prozent der Rohrquerschnittsfläche bei einem Radius von $r = 10$ cm und bei einer Höhe des Wasserstands von $h = 12$ cm noch frei sind.

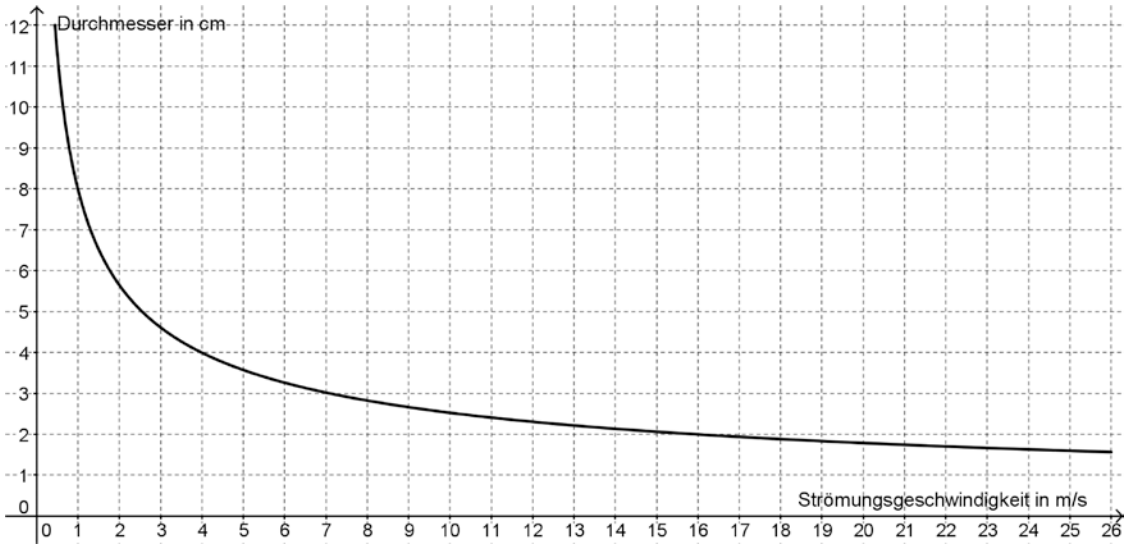
c) Bei einem Rohrleitungssystem werden Rohre miteinander verschweißt. Es sind 52 Schweißstellen notwendig. Erfahrungsgemäß hält eine Schweißstelle innerhalb eines fixen Zeitraums mit 98%iger Wahrscheinlichkeit.
Das Reißen einer Schweißstelle verändert die Wahrscheinlichkeit bei den anderen Schweißstellen nicht.

– Stellen Sie eine Formel zur Berechnung derjenigen Wahrscheinlichkeit auf, dass innerhalb des fixen Zeitraums mindestens n Schweißstellen reißen.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $d(v) = \sqrt{\frac{63{,}7}{v}}$



b) $\alpha = \arccos\left(\frac{h-r}{r}\right)$

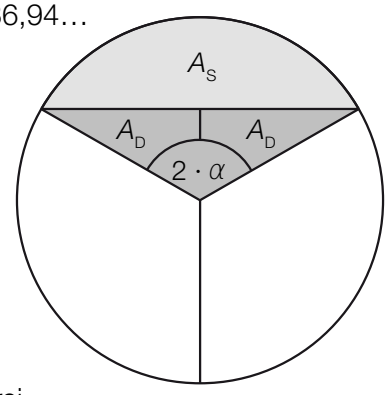
A_D … Flächeninhalt des Dreiecks

$A_D = \frac{2 \cdot \sqrt{10^2 - 2^2}}{2} = \sqrt{96} = 9{,}79\ldots$

$A_D \approx 9{,}8\ \text{cm}^2$

A_S … Flächeninhalt des Kreissektors mit dem Winkel $2 \cdot \alpha$

$A_S = \pi \cdot 10^2 \cdot \frac{2 \cdot \alpha}{360°} = \pi \cdot 10^2 \cdot \frac{2 \cdot \arccos \cdot \left(\frac{12-10}{10}\right)}{360°} = 136{,}94\ldots$



A_{frei} … Flächeninhalt des freien Teils des Querschnitts

$A_{frei} = A_S - 2 \cdot A_D = 117{,}347\ldots$

A_{gesamt} … Gesamtflächeninhalt des Querschnitts

$A_{gesamt} = \pi \cdot 10^2 = 314{,}159\ldots$

$\frac{A_{frei}}{A_{gesamt}} = 0{,}37353\ldots$

Es sind noch rund 37,35 % der Rohrquerschnittsfläche frei.

c) X … Anzahl der gerissenen Schweißstellen

$P(X \geq n) = \sum_{i=n}^{52} \binom{52}{i} \cdot 0{,}02^i \cdot 0{,}98^{52-i}$

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) A Modellieren und Transferieren
c) —

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 3
c) 1

Thema: Sonstiges

Quellen: —

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

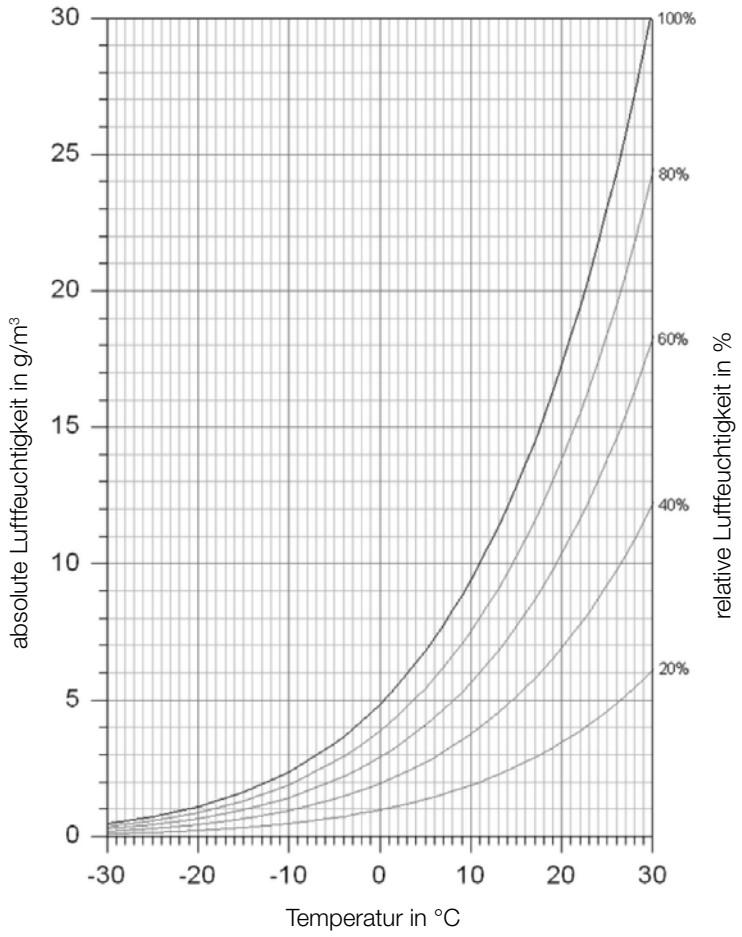
Luftfeuchtigkeit

Aufgabennummer: B_113

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

In Abhängigkeit von der Temperatur kann Luft nur eine gewisse Höchstmenge an Wasserdampf aufnehmen. Das geläufigste Maß für den Wassergehalt der Luft ist die relative Luftfeuchtigkeit in Prozent.

Die nachstehende Grafik stellt den Zusammenhang zwischen der Temperatur in °C und der absoluten Luftfeuchtigkeit in g/m³ bei verschiedenen relativen Luftfeuchtigkeiten dar.



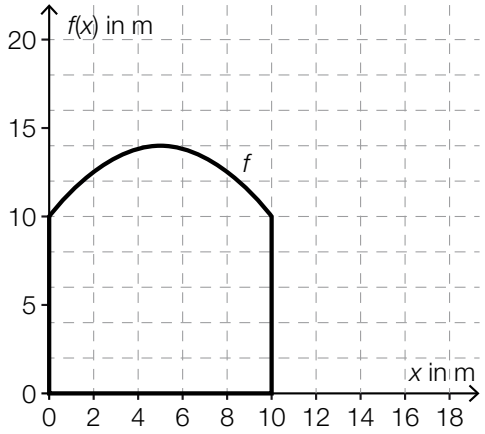
a) Die in der Grafik abgebildete Kurve für die relative Luftfeuchtigkeit von 100 % soll durch eine Exponentialfunktion F angenähert werden.

$F(\vartheta) = F_0 \cdot e^{k \cdot \vartheta}$

ϑ ... Temperatur in °C
$F(\vartheta)$ ... absolute Luftfeuchtigkeit bei der Temperatur ϑ in g/m³
F_0 ... absolute Luftfeuchtigkeit bei ϑ = 0 °C in g/m³
k ... Konstante

– Berechnen Sie aus den absoluten Luftfeuchtigkeiten für die Temperaturen 0 °C und 20 °C die Parameter F_0 und k.
– Zeigen Sie, dass der Graph dieser Funktion in einem Koordinatensystem mit logarithmischer Skalierung auf der Ordinatenachse eine Gerade ist.

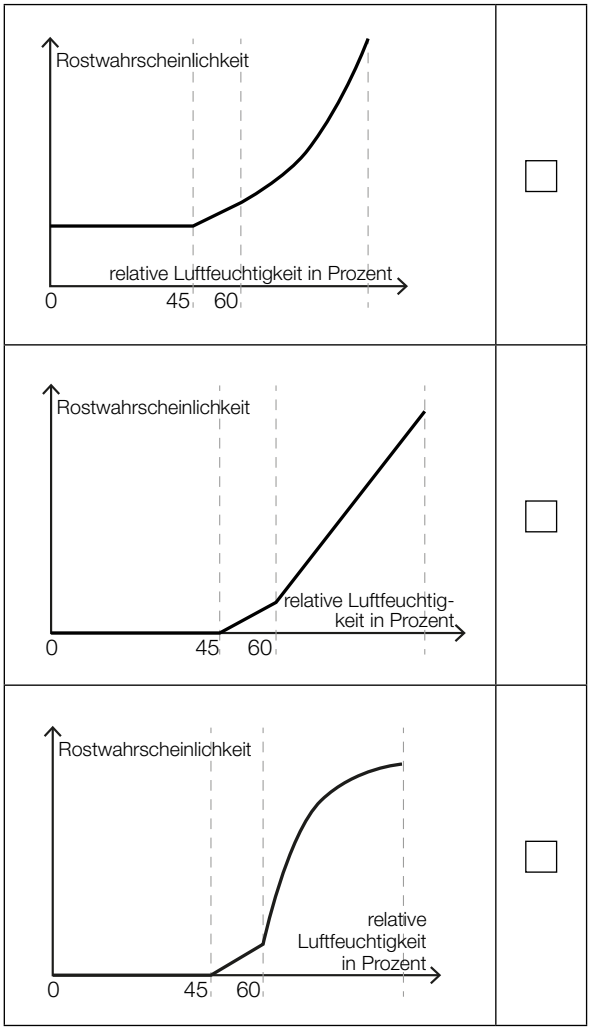
b) In der nachstehenden Grafik ist die Grundfläche eines Festsaals dargestellt. Die gekrümmte Begrenzungslinie ist der Graph einer quadratischen Funktion f. Die Höhe des Festsaals beträgt 3,5 m.



– Stellen Sie eine Funktionsgleichung für f auf.
– Berechnen Sie diejenige Masse des Wassers, die bei einer relativen Luftfeuchtigkeit von 80 % und einer Temperatur von 28 °C in der Raumluft gelöst ist.

c) Bis zu einer relativen Luftfeuchtigkeit von 45 % ist es praktisch unmöglich, dass sich Rost bildet. Zwischen 45 % und 60 % relativer Luftfeuchtigkeit ist die Rostwahrscheinlichkeit zur relativen Luftfeuchtigkeit proportional. Über 60 % relativer Luftfeuchtigkeit steigt die Rostwahrscheinlichkeit mit steigender relativer Luftfeuchtigkeit exponentiell an.

– Kreuzen Sie dasjenige Diagramm an, das den Sachverhalt richtig darstellt. *[1 aus 5]*



Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $F(0) = 5 \Rightarrow F_0 = 5$
$F(20) = 17 \Rightarrow 5 \cdot e^{k \cdot 20} = 17 \Rightarrow k = 0{,}06118\ldots$

Das Logarithmieren der Gleichung $F(\vartheta) = F_0 \cdot e^{k \cdot \vartheta}$ liefert:
$\ln(F(\vartheta)) = k \cdot \vartheta + \ln(F_0)$ mit k als Steigung und $\ln(F_0)$ als Ordinatenabschnitt

b) $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$
$f(0) = 10 \Rightarrow c = 10$
$f(5) = 14 \Rightarrow a \cdot 25 + b \cdot 5 + c = 14$
$f(10) = 10 \Rightarrow a \cdot 100 + b \cdot 10 + c = 10$

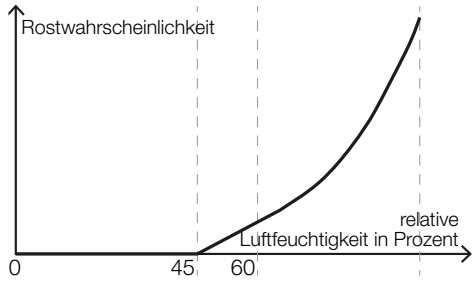
Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$a = 0{,}16$; $b = 1{,}6$; $c = 10$
$f(x) = -0{,}16 \cdot x^2 + 1{,}6 \cdot x + 10$

$V = G \cdot h$
$G = \int_0^{10} f(x)\,dx = 126{,}\overline{6}\ \text{m}^2$
$V = 126{,}\overline{6} \cdot 3{,}5 = 443{,}\overline{3}\ \text{m}^3$

Bei einer Temperatur von 28 °C und einer relativen Luftfeuchtigkeit von 80 % befinden sich in 1 m³ Luft 22 g Wasser.
Masse des gesamten Wassers = $443{,}\overline{3} \cdot 22 = 9\,753{,}\overline{3}$ g

c)

[...]	
[...]	
[...]	



☒

[...]

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) 4 Analysis
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) A Modellieren und Transferieren
c) –

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) leicht
c) leicht

Punkteanzahl:

a) 2
b) 3
c) 1

Thema: Physik

Quellen: –

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Freier Fall und schiefer Wurf

Aufgabennummer: B_068

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Wenn ein Körper im Erdschwerefeld fallen gelassen wird, dann gilt unter Vernachlässigung des Luftwiderstands:

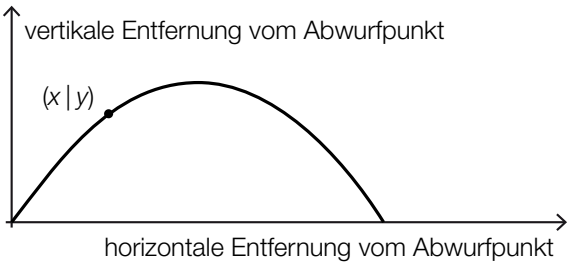
$a(t) = -g$

t … Zeit in s
$a(t)$ … Beschleunigung des Körpers zur Zeit t in m/s²
g … Erdbeschleunigung in m/s²

a) Ein Körper wird aus 20 m Höhe mit der Anfangsgeschwindigkeit $v(0) = 0$ m/s fallen gelassen.

– Erstellen Sie eine Gleichung der Funktion h, die die Höhe des Körpers in Metern in Abhängigkeit von der Zeit t in Sekunden beschreibt.

b) Ein Körper wird unter einem Höhenwinkel α mit einer Abwurfgeschwindigkeit v_0 schräg nach oben geworfen. Die Wurfparabel (siehe nebenstehende Abbildung) kann mathematisch auf verschiedene Arten beschrieben werden.



Zum Zeitpunkt t befindet sich der Körper an einem bestimmten Punkt $(x|y)$.
Für die Koordinaten dieses Punktes gilt:

(1) $x = v_0 \cdot \cos(\alpha) \cdot t$
(2) $y = v_0 \cdot \sin(\alpha) \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2$

Die Wurfparabel kann aber auch durch die Funktionsgleichung
(3) $y = \tan(\alpha) \cdot x - \frac{g}{2 \cdot v_0^2 \cdot (\cos(\alpha))^2} \cdot x^2$
beschrieben werden.

– Zeigen Sie, wie man durch Umformung der Gleichung (1) nach t und Einsetzen von t in Gleichung (2) die Gleichung (3) erhält. Verwenden Sie dazu den Zusammenhang $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$.

– Stellen Sie die Wurfparabel für $g = 9{,}81$ m/s², $\alpha = 40°$ und $v_0 = 8$ m/s grafisch dar.

c) Die Abhängigkeit der Wurfweite y vom Abwurfwinkel α wird durch folgende Funktion d beschrieben:

$$d(\alpha) = \frac{v_0^2}{g} \cdot \sin(2 \cdot \alpha)$$

α … Abwurfwinkel in °
$d(\alpha)$ … Wurfweite beim Abwurfwinkel α in m
v_0 … Abwurfgeschwindigkeit in m/s

– Argumentieren Sie, warum die Wurfweite bei einem Abwurfwinkel von $\alpha = 45°$ am größten ist.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Geschwindigkeit:

$v(t) = \int a(t)\,dt = -g \cdot t + v_0$ mit $v_0 = 0$ (Anfangsgeschwindigkeit)

$v(t) = -g \cdot t$

Höhe:

$h(t) = \int v(t)\,dt = -\frac{g}{2} \cdot t^2 + h_0$ mit $h_0 = 20$ (Höhe zu Beginn)

$h(t) = -\frac{g}{2} \cdot t^2 + 20$

b) Umformen von (1):

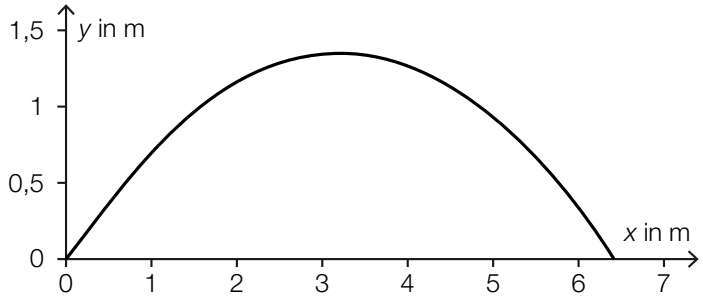
$x = v_0 \cdot \cos(\alpha) \cdot t \Rightarrow t = \frac{x}{v_0 \cdot \cos(\alpha)}$

Einsetzen in (2):

$y = v_0 \cdot \sin(\alpha) \cdot \frac{x}{v_0 \cdot \cos(\alpha)} - \frac{g}{2} \cdot \left(\frac{x}{v_0 \cdot \cos(\alpha)}\right)^2$

Vereinfachen:

$y = \frac{v_0 \cdot \sin(\alpha)}{v_0 \cdot \cos(\alpha)} \cdot x - \frac{g}{2 \cdot v_0^2 \cdot (\cos(\alpha))^2} \cdot x^2 = \tan(\alpha) \cdot x - \frac{g}{2 \cdot v_0^2 \cdot (\cos(\alpha))^2} \cdot x^2$



c) Die Sinusfunktion hat bei 90° ihren größten Wert.

$2 \cdot \alpha = 90° \Rightarrow \alpha = 45°$

Die Funktion *d* hat daher bei $\alpha = 45°$ ihren größten Wert.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) D Argumentieren und Kommunizieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) —

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2
c) 1

Thema: Physik

Quellen: —

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Sport

Aufgabennummer: B_275

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

In vielen sportlichen Disziplinen erreichen Athletinnen und Athleten neue Bestmarken und sind dabei oft extremen Belastungen ausgesetzt.

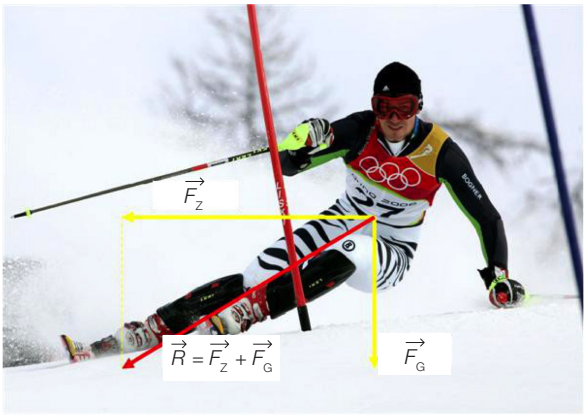
a) In der nachstehenden Tabelle ist die Entwicklung der Marathon-Weltrekordzeit dargestellt.

Jahr	2002	2003	2007	2008	2011	2013	2014
Marathon-Weltrekordzeit in h:min:s	2:05:38	2:04:55	2:04:26	2:03:59	2:03:38	2:03:23	2:02:57

– Ermitteln Sie mit diesem Datensatz die Gleichung derjenigen Regressionsfunktion, die die Marathon-Weltrekordzeit in Abhängigkeit von der Zeit t in Jahren annähert. Wählen Sie $t = 0$ für das Jahr 2002.
– Ermitteln Sie anhand dieses Modells, in welchem Jahr voraussichtlich die Zwei-Stunden-Marke erreicht werden wird.

b) Ein Skifahrer ist in der Kurvenfahrt der Zentrifugalkraft und der Gewichtskraft ausgesetzt. Die Formeln für den Betrag der beiden Kräfte lauten:

$F_Z = \frac{m \cdot v^2}{r}$ und $F_G = m \cdot g$



m … Masse des Skifahrers in kg
v … Betrag der Geschwindigkeit des Skifahrers in m/s
r … Betrag des Kurvenradius des Skifahrers in m
g … Erdbeschleunigung (g = 9,81 m/s^2)
F_Z ... Betrag der Zentrifugalkraft in Newton (N)
F_G ... Betrag der Gewichtskraft in Newton (N)

– Erklären Sie anhand der Formel für F_Z, wie sich F_Z ändert, wenn der Skifahrer die Kurve mit halbem Radius bei gleichbleibender Geschwindigkeit durchfährt.

– Kreuzen Sie die zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]*

Je größer r ist, desto größer ist F_Z.	☐
Fährt ein Skifahrer mit 25 % größerer Masse m und mit einem um 25 % geringeren Kurvenradius, dann nimmt F_Z um den Faktor 1,4 zu.	☐
Eine Zunahme von v wirkt sich exponentiell auf F_Z aus.	☐
Bei einem Skifahrer mit halber Masse m nimmt F_Z um den Faktor $\sqrt{2}$ zu.	☐
Bei doppeltem v und doppeltem r wird F_Z doppelt so groß.	☐

In einer bestimmten Kurve gilt: $\frac{F_Z}{F_G} = \frac{3}{1}$.

– Stellen Sie für den Betrag der resultierenden Kraft $\vec{R}$ eine Formel in Abhängigkeit von m auf.

R = _____

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Regressionsfunktion mittels Technologieeinsatz ermittelt:
$y(t) = -0{,}003242\ldots \cdot t + 2{,}089268\ldots$

$-0{,}00324 \cdot t + 2{,}08927 = 2 \Rightarrow t = 27{,}552\ldots$

Gemäß diesem linearen Modell wird im Jahr 2029 die Zwei-Stunden-Marke erreicht werden.

b) Durch die Halbierung des Kurvenradius bei gleichbleibender Geschwindigkeit verdoppelt sich der Betrag der Zentrifugalkraft, die auf den Skifahrer wirkt.

[...]	
[...]	
[...]	
[...]	
Bei doppeltem v und doppeltem r wird F_Z doppelt so groß.	☒

$F_Z = 3 \cdot F_G$
für den Betrag der Kraft $\vec{R}$ gilt:
$R = \sqrt{(3 \cdot F_G)^2 + F_G^2} = \sqrt{10} \cdot F_G = \sqrt{10} \cdot g \cdot m \approx 31 \cdot m$

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren, A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 3

Thema: Sonstiges

Quelle: http://www.dsv-datenzentrale.de/rahmentrainingsplan/45-Kurvenfahrt__Dynamisches_Gleichgewicht_Fliehkraf-,e_441,r_33.htm

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

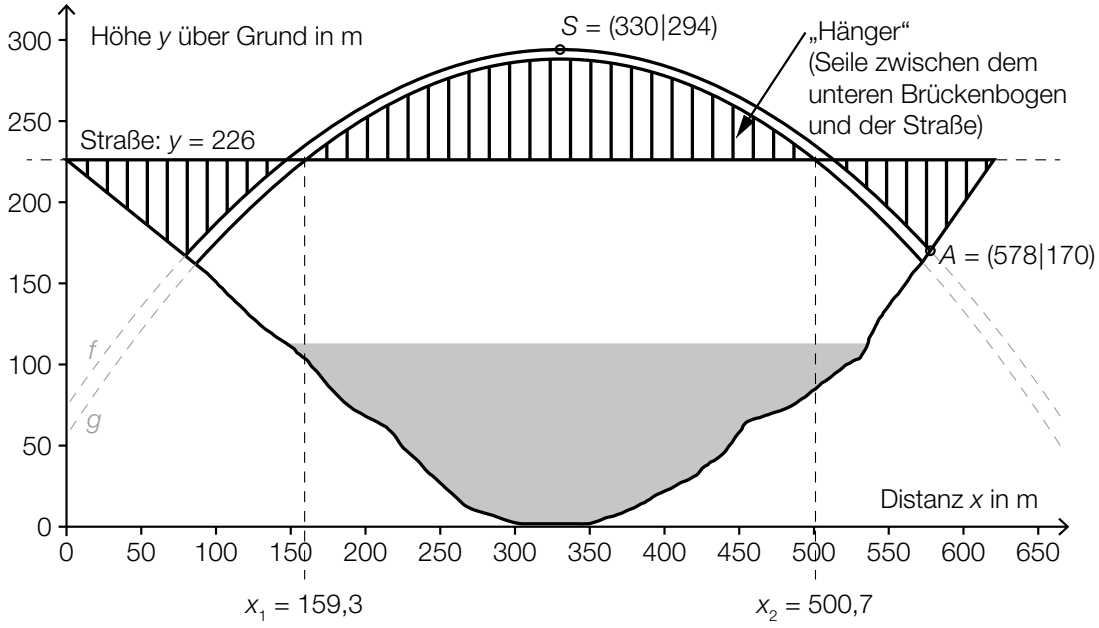
Wushan-Brücke

Aufgabennummer: A_177

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Die Wushan-Brücke über den Jangtsekiang ist eine der größten Bogenbrücken der Welt:





Die obige Abbildung stellt die Geometrie der Brücke dar. Der obere und der untere Brückenbogen werden durch die Graphen der quadratischen Funktionen f und g dargestellt. Der Punkt S ist der Scheitelpunkt der Funktion f. Die Stellen x_1 und x_2 markieren die Schnittpunkte des unteren Brückenbogens mit der Straße $y = 226$.

a) – Erstellen Sie mithilfe der Punkte A und S eine Gleichung der Funktion f.

b) Die Gleichung derjenigen Parabel, die den unteren Brückenbogen beschreibt, lautet:

$g(x) = -\frac{1}{470} \cdot (x - 330)^2 + 288$ mit $86 \le x \le 574$

Jemand stellt zur Berechnung der Höhe $H(x)$ der Hänger an der Stelle x folgende Formel auf:

$H(x) = -\frac{1}{470} \cdot (x^2 - 660 \cdot x + 79\,760)$ für $x_1 \le x \le x_2$

– Weisen Sie die Korrektheit dieser Formel nach.

c) Wirft man einen Stein mit einer Anfangsgeschwindigkeit von $v_0 = 5$ m/s von der Brücke senkrecht nach unten, so kann man, wenn der Luftwiderstand vernachlässigt wird, die Höhe (über Grund) des Steins näherungsweise folgendermaßen berechnen:

$h(t) = 226 - \frac{g}{2} \cdot t^2 - 5 \cdot t$

t … Zeit in s
$h(t)$ … Höhe des Steins über Grund zur Zeit t in m
g … Erdbeschleunigung ($g \approx 9{,}81$ m/s^2)

– Berechnen Sie diejenige Zeit t_a, die der Stein bis zum Aufprall auf die Wasseroberfläche benötigt, wenn der Wasserstand 113 m über Grund beträgt.
– Stellen Sie eine Gleichung der Funktion v für die Geschwindigkeit des Steins in Abhängigkeit von der Zeit t auf.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$
$f'(x) = 2 \cdot a \cdot x + b$

$f(330) = 294 \Rightarrow 330^2 \cdot a + 330 \cdot b + c = 294$
$f(578) = 170 \Rightarrow 578^2 \cdot a + 578 \cdot b + c = 170$
$f'(330) = 0 \Rightarrow 660 \cdot a + b = 0$

Lösung mittels Technologieeinsatz:

$a = -\frac{1}{496} = -0{,}0020\ldots$, $b = \frac{165}{124} = 1{,}3306\ldots$, $c = \frac{9231}{124} = 74{,}4435\ldots$
$f(x) = -\frac{1}{496} \cdot x^2 + \frac{165}{124} \cdot x + \frac{9231}{124}$

b) Anwendung der binomischen Formel und Vereinfachung:

$H(x) = g(x) - 226 = -\frac{1}{470} \cdot (x - 330)^2 + 62 = -\frac{1}{470} \cdot (x^2 - 660 \cdot x + 330^2) + 62$
$= -\frac{1}{470} \cdot (x^2 - 660 \cdot x + 330^2 - 62 \cdot 470) = -\frac{1}{470} \cdot (x^2 - 660 \cdot x + 79\,760)$

c) $113 = 226 - \frac{g}{2} \cdot t^2 - 5 \cdot t$

Lösung mittels Technologieeinsatz: $t_a = 4{,}317\ldots$ (oder $t_a = -5{,}336\ldots$)
Der Stein benötigt bis zum Aufprall auf die Wasseroberfläche rund 4,32 s.

$v(t) = |h'(t)|$
$v(t) = g \cdot t + 5$

$v(t)$ … Geschwindigkeit des Steins zur Zeit t in m/s

(Eine Angabe der Geschwindigkeit mit negativem Vorzeichen, also $v(t) = -g \cdot t - 5$, ist ebenfalls möglich.)

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 4 Analysis

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) —
c) A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) schwer
c) schwer

Punkteanzahl:

a) 2
b) 1
c) 2

Thema: Sonstiges

Quellen: www.highestbridges.com/,
Rrm998 – Own work, CC BY 3.0, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:YangtzeRiver-Bridge.jpg

Flugbahn und Bewegungsgleichung (2)*

Aufgabennummer: B_439

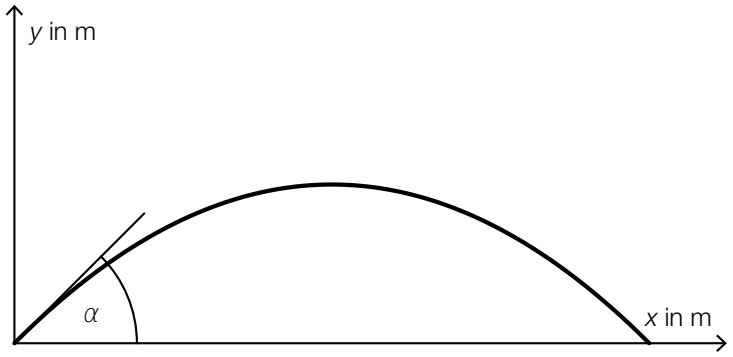
Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Die Flugbahn eines Geschoßes kann durch eine Funktion mit folgender Funktionsgleichung beschrieben werden:

$$y = x \cdot \tan(\alpha) - \frac{1}{2 \cdot v^2 \cdot \cos^2(\alpha)} \cdot g \cdot x^2$$

x, y ... Koordinaten in m
v ... Abschussgeschwindigkeit in m/s
g ... Erdbeschleunigung ($g = 9{,}81$ m/s^2)
α ... Abschusswinkel ($0° < \alpha < 90°$)

Die quadratische Gleichung $x \cdot \tan(\alpha) - \frac{1}{2 \cdot v^2 \cdot \cos^2(\alpha)} \cdot g \cdot x^2 = 10$ wird für bestimmte Werte von v und α nach x aufgelöst. Man erhält die Lösung $x_1 = x_2 = 15$.
Der Funktionsgraph der zugehörigen Flugbahn ist in der nachstehenden Abbildung nicht maßstabgetreu dargestellt.



1) Geben Sie die Koordinaten desjenigen Punktes P der Flugbahn an, der der oben angegebenen Lösung entspricht.

2) Berechnen Sie den Abschusswinkel α für die in der Grafik dargestellte Funktion.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Der zurückgelegte Weg eines Motorrads, das nach dem Auskuppeln ausrollt, wird annähernd durch die Funktion s beschrieben:

$s(t) = 250 \cdot (1 - e^{-0{,}04 \cdot t})$

t ... Zeit seit dem Auskuppeln in s
$s(t)$ ... zurückgelegter Weg des Motorrads zur Zeit t in m

1) Stellen Sie eine Funktionsgleichung auf, mit der die Geschwindigkeit des Motorrads in Abhängigkeit von der Zeit t beschrieben wird.

2) Berechnen Sie diejenige Geschwindigkeit, mit der das Motorrad zum Zeitpunkt des Auskuppelns fuhr.

Möglicher Lösungsweg

a1) $P = (15 \mid 10)$

a2) Die Punkte $(0 \mid 0)$, $(15 \mid 10)$ und $(30 \mid 0)$ liegen auf dem Graphen der quadratischen Funktion mit der Gleichung $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$.

$(0 \mid 0)$: $c = 0$

$(15 \mid 10)$: $15^2 \cdot a + 15 \cdot b = 10$

$(30 \mid 0)$: $30^2 \cdot a + 30 \cdot b = 0$

Lösung mittels Technologieeinsatz: $a = -\frac{2}{45}$; $b = \frac{4}{3}$

$\Rightarrow \quad y = -\frac{2}{45} \cdot x^2 + \frac{4}{3} \cdot x$

Der Vergleich mit der gegebenen Funktionsgleichung zeigt:

$\tan(\alpha) = \frac{4}{3}$

$\alpha = \arctan\left(\frac{4}{3}\right) = 53{,}130...° \approx 53{,}13°$

b1) $v(t) = \dot{s}(t) = 10 \cdot e^{-0{,}04 \cdot t}$

b2) $v(0) = 10$

Die Geschwindigkeit zu Beginn des Auskuppelns beträgt 10 m/s.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × C: für die richtige Angabe der Koordinaten

a2) 1 × A: für einen richtigen Ansatz zur Berechnung des Winkels (Modellierung der quadratischen Funktion)

1 × B: für die richtige Berechnung des Winkels α

b1) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung

b2) 1 × B: für die richtige Berechnung der Geschwindigkeit

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Flugbahn und Bewegungsgleichung (1)*

Aufgabennummer: B_438

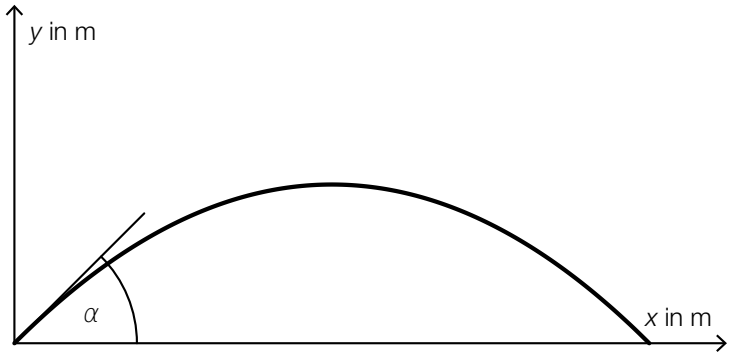
Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Die Flugbahn eines Geschoßes kann durch eine Funktion mit folgender Funktionsgleichung beschrieben werden:

$$y = x \cdot \tan(\alpha) - \frac{1}{2 \cdot v^2 \cdot \cos^2(\alpha)} \cdot g \cdot x^2$$

x, y ... Koordinaten in m
v ... Abschussgeschwindigkeit in m/s
g ... Erdbeschleunigung ($g = 9{,}81$ m/s^2)
α ... Abschusswinkel ($0° < \alpha < 90°$)

Die quadratische Gleichung $x \cdot \tan(\alpha) - \frac{1}{2 \cdot v^2 \cdot \cos^2(\alpha)} \cdot g \cdot x^2 = 10$ wird für bestimmte Werte von v und α nach x aufgelöst. Man erhält die Lösung $x_1 = x_2 = 15$.
Der Funktionsgraph der zugehörigen Flugbahn ist in der nachstehenden Abbildung nicht maßstabgetreu dargestellt.



1) Geben Sie die Koordinaten desjenigen Punktes P der Flugbahn an, der der oben angegebenen Lösung entspricht.

2) Berechnen Sie den Abschusswinkel α für die in der Grafik dargestellte Funktion.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Unter Berücksichtigung des Luftwiderstands gilt für die Fallgeschwindigkeit eines Fallschirmspringers bis zum Öffnen des Schirms:

$$v(t) = \sqrt{\frac{g}{b}} \cdot \left(1 - \frac{2}{e^{2 \cdot \sqrt{b \cdot g} \cdot t} + 1}\right)$$

t ... Zeit nach dem Absprung in s
$v(t)$ ... Fallgeschwindigkeit zur Zeit t in m/s
b ... Parameter in m^{-1}
g ... Erdbeschleunigung in m/s^2

1) Stellen Sie den Graphen der Funktion v mit $b = 0{,}003\ m^{-1}$ und $g = 9{,}81\ m/s^2$ im Bereich $0 \leq t \leq 25$ dar.

Die Fallgeschwindigkeit strebt für wachsendes t asymptotisch gegen einen Wert v_{max}.

2) Lesen Sie aus der von Ihnen erstellten Grafik einen Näherungswert für v_{max} ab.

c) Der zurückgelegte Weg eines Motorrads, das nach dem Auskuppeln ausrollt, wird annähernd durch die Funktion s beschrieben:

$$s(t) = 250 \cdot (1 - e^{-0{,}04 \cdot t})$$

t ... Zeit seit dem Auskuppeln in s
$s(t)$ ... zurückgelegter Weg des Motorrads zur Zeit t in m

1) Stellen Sie eine Funktionsgleichung auf, mit der die Geschwindigkeit des Motorrads in Abhängigkeit von der Zeit t beschrieben wird.

2) Berechnen Sie diejenige Geschwindigkeit, mit der das Motorrad zum Zeitpunkt des Auskuppelns fuhr.

Möglicher Lösungsweg

a1) $P = (15|10)$

a2) Die Punkte $(0|0)$, $(15|10)$ und $(30|0)$ liegen auf dem Graphen der quadratischen Funktion mit der Gleichung $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$.

$(0|0)$: $c = 0$

$(15|10)$: $15^2 \cdot a + 15 \cdot b = 10$

$(30|0)$: $30^2 \cdot a + 30 \cdot b = 0$

Lösung mittels Technologieeinsatz: $a = -\frac{2}{45}$; $b = \frac{4}{3}$

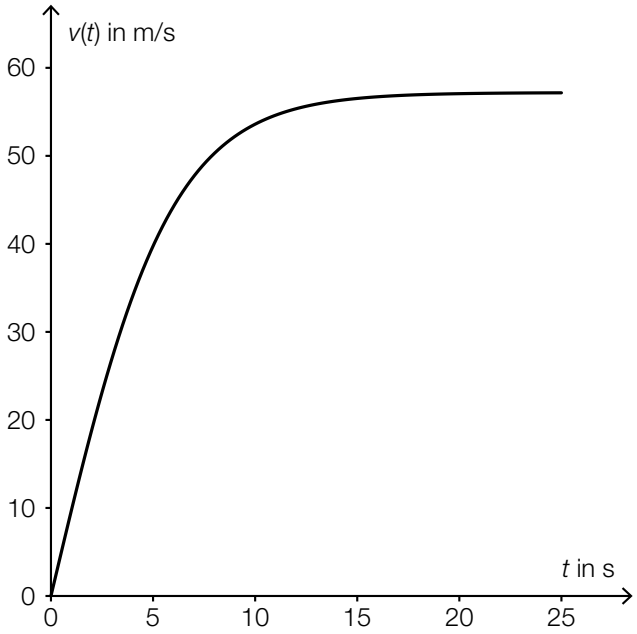
$\Rightarrow \quad y = -\frac{2}{45} \cdot x^2 + \frac{4}{3} \cdot x$

Der Vergleich mit der gegebenen Funktionsgleichung zeigt:

$\tan(\alpha) = \frac{4}{3}$

$\alpha = \arctan\left(\frac{4}{3}\right) = 53{,}130...° \approx 53{,}13°$

b1)



b2) Daraus wird v_{max} mit rund 57 m/s abgelesen.
Toleranzbereich: [55; 60]

c1) $v(t) = \dot{s}(t) = 10 \cdot e^{-0{,}04 \cdot t}$

c2) $v(0) = 10$

Die Geschwindigkeit zu Beginn des Auskuppelns beträgt 10 m/s.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × C: für die richtige Angabe der Koordinaten
a2) 1 × A: für einen richtigen Ansatz zur Berechnung des Winkels (Modellierung der quadratischen Funktion)
1 × B: für die richtige Berechnung des Winkels α

b1) 1 × B: für die richtige grafische Darstellung der Fallgeschwindigkeit
b2) 1 × C: für das richtige Ablesen eines Näherungswerts für die maximale Fallgeschwindigkeit im Toleranzbereich [55; 60]

c1) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung
c2) 1 × B: für die richtige Berechnung der Geschwindigkeit

Sinusfunktion*

Aufgabennummer: B_437

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Eine Glimmlampe beginnt zu leuchten, sobald die angelegte Spannung eine Zündspannung U_Z übersteigt. Sie erlischt wieder, sobald die angelegte Spannung die Löschspannung U_L unterschreitet. Für eine bestimmte Glimmlampe gilt:

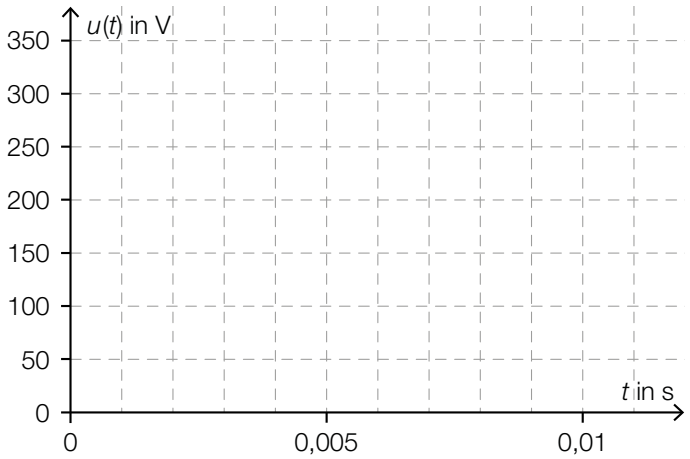
$U_Z = 150$ V
$U_L = 100$ V

Die angelegte Spannung kann näherungsweise durch die Funktion u beschrieben werden:

$u(t) = 325 \cdot \sin(2\pi \cdot 50 \cdot t)$

t ... Zeit in s
$u(t)$ ... Spannung zur Zeit t in Volt (V)

1) Veranschaulichen Sie im nachstehenden Koordinatensystem den Funktionsgraphen von u und kennzeichnen Sie dasjenige Zeitintervall $[t_1; t_2]$, in dem die Glimmlampe leuchtet.



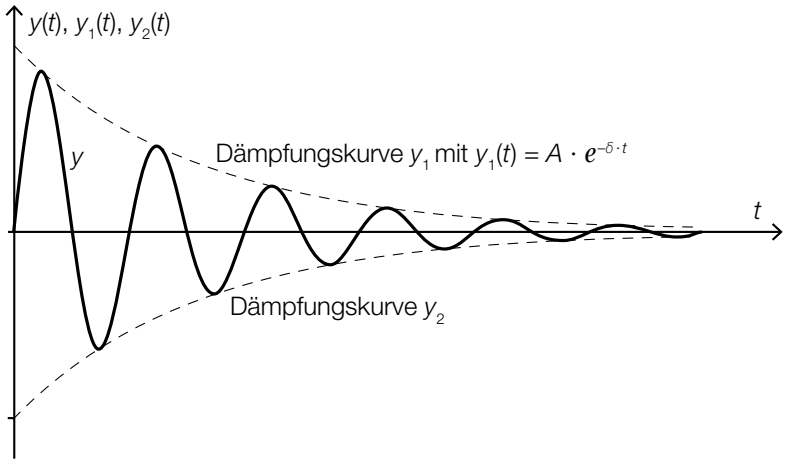
2) Berechnen Sie, wie viel Prozent der Zeit die Glimmlampe im Zeitintervall [0; 0,01] leuchtet.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Die in der nachstehenden Abbildung dargestellte gedämpfte Schwingung wird durch die Funktion y beschrieben:

$y(t) = A \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t)$

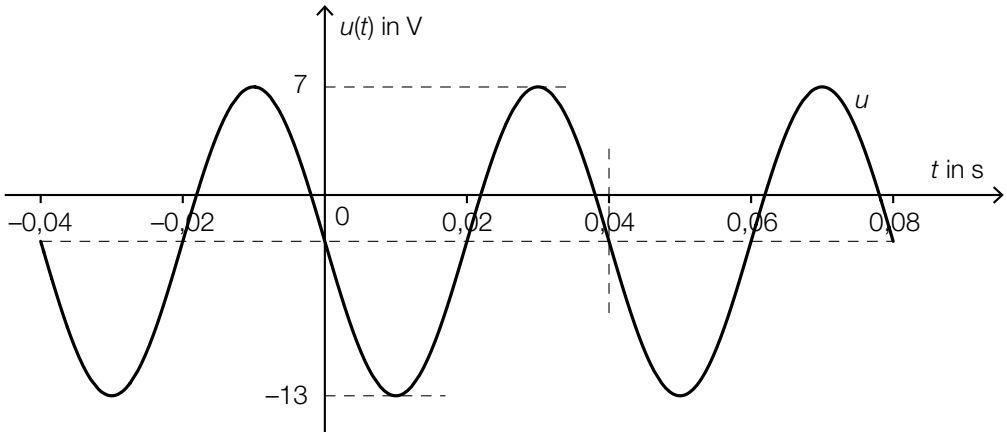
t ... Zeit
$y(t)$ ... Auslenkung zur Zeit t



1) Erstellen Sie eine Gleichung der zu y_1 symmetrischen Dämpfungskurve y_2 (siehe obige Abbildung).

2) Zeigen Sie, dass an den Stellen t_k, an denen der Funktionsgraph von y die Dämpfungskurve y_1 bzw. y_2 berührt, gilt:
$t_k = \left(k + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\pi}{\omega}$ mit $k = 0, 1, 2, 3, ...$

c) Der zeitliche Verlauf einer Spannung kann durch eine Funktion u mit $u(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) + d$ beschrieben werden. Dabei ist t die Zeit in Sekunden und $A > 0$.



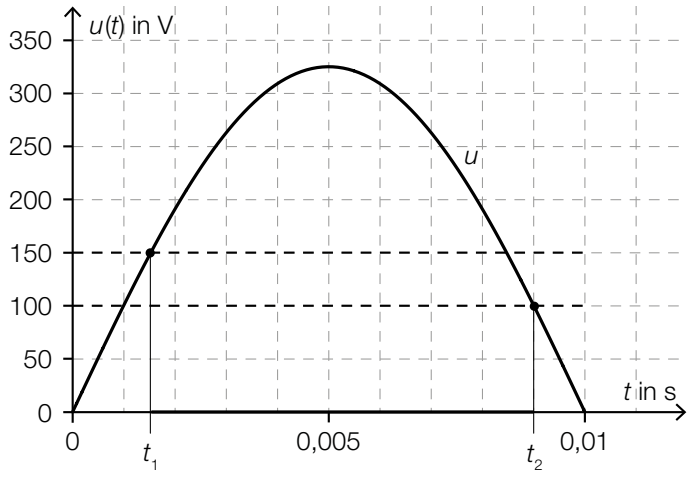
1) Lesen Sie aus dem obigen Diagramm die Parameter A und d ab.

2) Bestimmen Sie mithilfe des obigen Diagramms den Parameter ω.

3) Bestimmen Sie mithilfe des obigen Diagramms den Parameter φ.

Möglicher Lösungsweg

a1)



a2) $u(t_1) = 150 \Rightarrow t_1 = 0{,}00152\ldots$
$u(t_2) = 100 \Rightarrow t_2 = 0{,}00900\ldots$
$\frac{t_2 - t_1}{0{,}01} = 0{,}7477\ldots$

Im Zeitintervall [0; 0,01] leuchtet die Glimmlampe rund 74,8 % der Zeit.

b1) $y_2(t) = -A \cdot e^{-\delta \cdot t}$

b2) Die Stellen, an denen der Funktionsgraph von y die Dämpfungskurve y_1 bzw. y_2 schneidet, erhält man als Lösungen der Gleichung $A \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t) = \pm A \cdot e^{-\delta \cdot t}$.

$A \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t) = \pm A \cdot e^{-\delta \cdot t} \Rightarrow \sin(\omega \cdot t) = \pm 1$

$\omega \cdot t_k = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ mit $k \in \mathbb{N} \Rightarrow t_k = \frac{\pi}{2 \cdot \omega} + k \cdot \frac{\pi}{\omega} = \left(k + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\pi}{\omega}$

c1) $A = 10$
$d = -3$

c2) Die Periodendauer T ist 0,04, daher ergibt sich:
$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} = \frac{2 \cdot \pi}{0{,}04} = 50 \cdot \pi$

c3) $t_0 = -0{,}02$ und $\varphi = -t_0 \cdot \omega$, daher ergibt sich:
$\varphi = 0{,}02 \cdot 50 \cdot \pi = \pi$
(Jeder Wert $\varphi = \pi + 2 \cdot k \cdot \pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$ ist als richtig zu werten.)

Lösungsschlüssel

a1) 1 × A: für das richtige grafische Veranschaulichen des Zeitintervalls
a2) 1 × B: für die richtige Berechnung des Prozentsatzes

b1) 1 × A1: für das richtige Erstellen der Gleichung von y_2
b2) 1 × A2: für den richtigen Ansatz (Gleichung zur Berechnung der Schnittpunkte)
1 x D: für den richtigen Nachweis

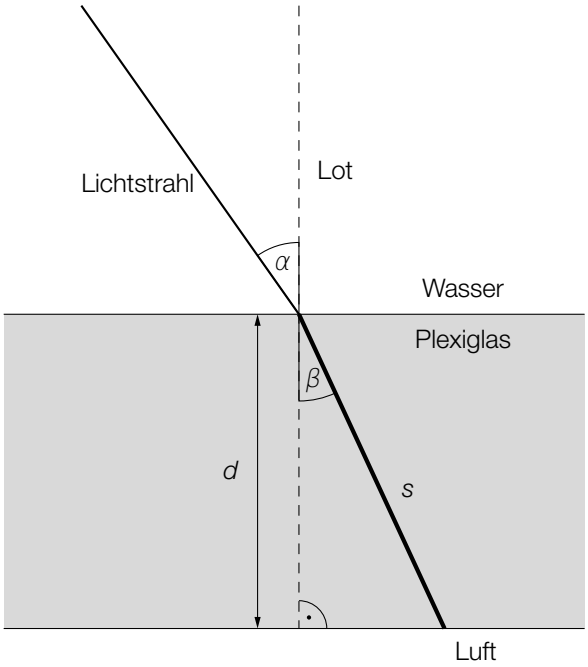
c1) 1 × C: für das richtige Ablesen von A und d
c2) 1 x B1: für das richtige Bestimmen von ω
c3) 1 x B2: für das richtige Bestimmen von φ

Tauchgang*

Aufgabennummer: B_416

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Die nachstehende Grafik zeigt den Verlauf eines Lichtstrahls, der auf die Plexiglasscheibe einer Taucherbrille trifft. Das Lot ist hier eine Gerade, die normal auf die Plexiglasscheibe steht.



α ... Winkel zwischen Lichtstrahl und Lot im Wasser
β ... Winkel zwischen Lichtstrahl und Lot im Plexiglas

Der Zusammenhang zwischen α und β kann folgendermaßen ausgedrückt werden:

$\sin(\alpha)$ verhält sich zu $\sin(\beta)$ wie 1,49 zu 1,33.

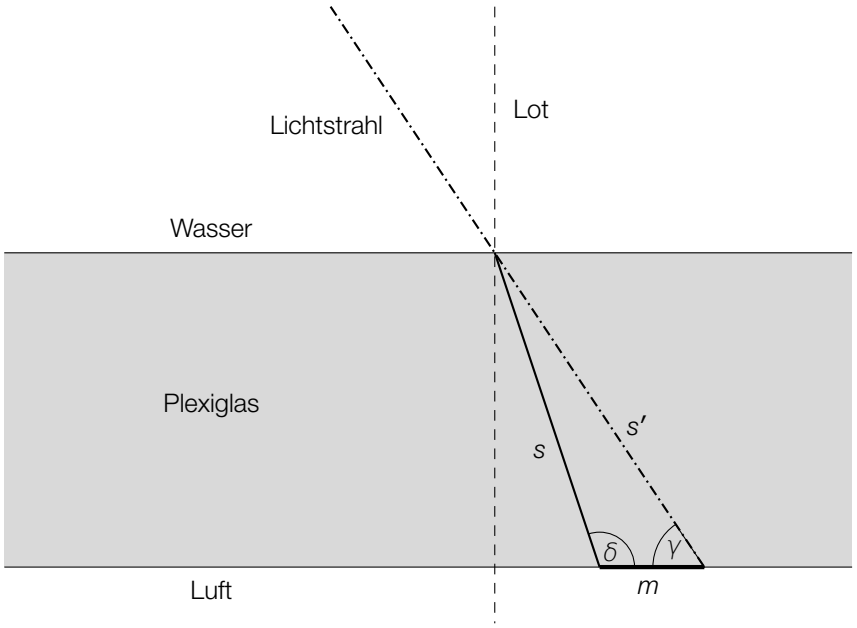
1) Berechnen Sie den Winkel β, wenn gilt: $\alpha = 35°$.

2) Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung der Länge s, wenn die Dicke d und der Winkel β bekannt sind.

$s =$ _____

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Die nachstehende nicht maßstabgetreue Grafik zeigt den Verlauf eines anderen Lichtstrahls, der auf die Plexiglasscheibe einer Taucherbrille trifft. Das Lot ist hier eine Gerade, die normal auf die Plexiglasscheibe steht.



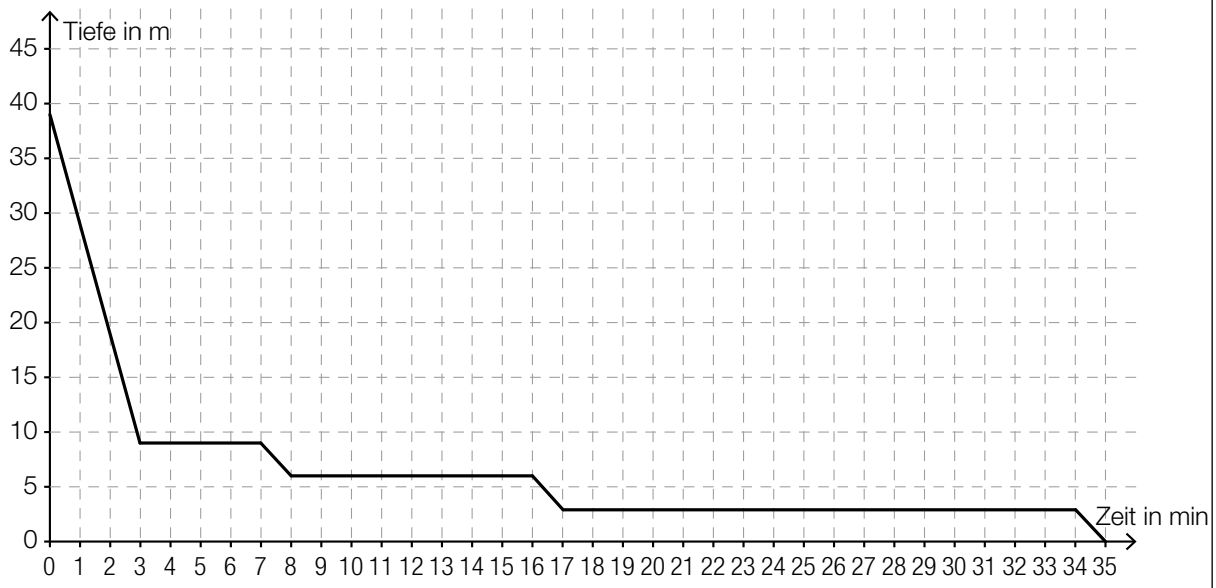
s ... Weg, den der Lichtstrahl im Plexiglas zurücklegt
s' ... Weg, den der Lichtstrahl ohne Ablenkung zurücklegen würde

Dabei gilt: $s = 4{,}52$ mm und $s' = 4{,}77$ mm. Außerdem kennt man den Winkel $\gamma = 57°$.

1) Berechnen Sie den stumpfen Winkel δ.

2) Berechnen Sie die Länge der Strecke m.

c) Das nachstehende Diagramm zeigt, wie bei einem bestimmten Tauchgang aus 39 m Tiefe aufgetaucht wurde.



1) Interpretieren Sie die waagrechten Abschnitte des Graphen im gegebenen Sachzusammenhang.

2) Markieren Sie im obigen Diagramm ein Zeitintervall, in dem die Auftauchgeschwindigkeit rund 10 m/min beträgt.

Möglicher Lösungsweg

a1) $\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{1{,}49}{1{,}33}$

$\beta = 30{,}79...° \approx 30{,}8°$

a2) $s = \frac{d}{\cos(\beta)}$

b1) Sinussatz:

$\frac{s}{\sin(\gamma)} = \frac{s'}{\sin(\delta)}$

($\delta_1 = 62{,}25...°$)
$\delta_2 = 117{,}74...°$

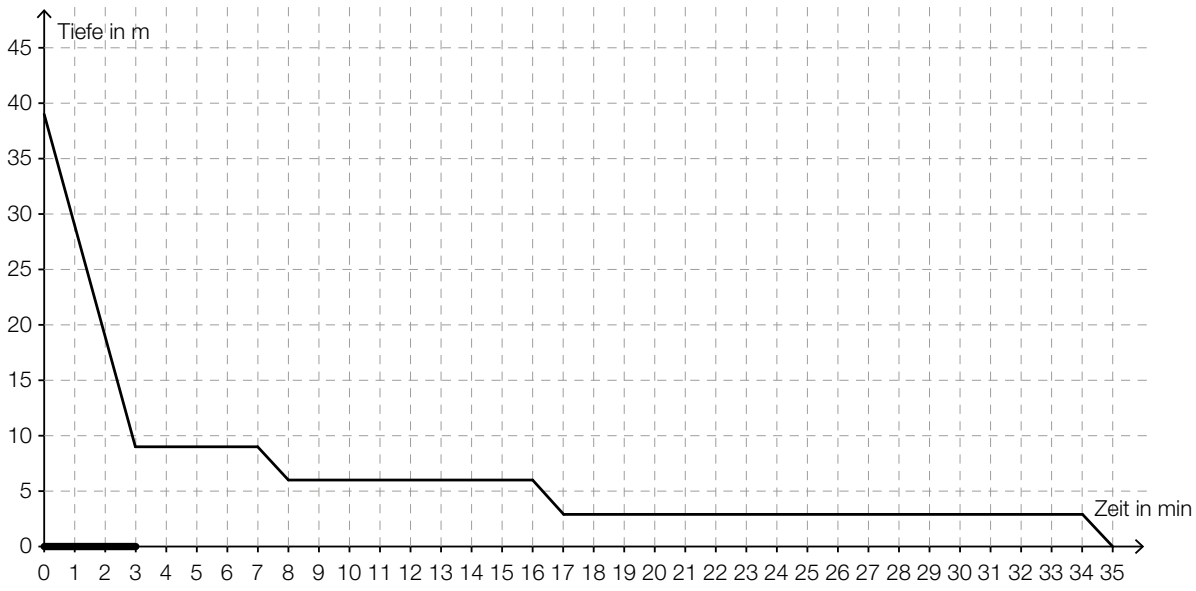
Wird der spitze Winkel nicht erwähnt und nur der stumpfe als Lösung angegeben, so ist dies ebenfalls richtig.

b2) Winkel, den s und s' einschließen: $180° - \delta_2 - \gamma = 5{,}258...° \approx 5{,}26°$

Cosinussatz: $m^2 = s^2 + s'^2 - 2 \cdot s \cdot s' \cdot \cos(5{,}26°)$
$m = \sqrt{s^2 + s'^2 - 2 \cdot s \cdot s' \cdot \cos(5{,}26°)} = 0{,}493...$
$m \approx 0{,}49$ mm

c1) Die waagrechten Abschnitte sind diejenigen Zeitabschnitte, in denen die Taucherin / der Taucher auf gleicher Tiefe bleibt.

c2) Auftauchgeschwindigkeit 10 m/min:



Lösungsschlüssel

a1) 1 × B: für die richtige Berechnung des Winkels β
a2) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Formel

b1) 1 × B1: für die richtige Berechnung von δ
b2) 1 × B2: für die richtige Berechnung von m

c1) 1 × C1: für die richtige Interpretation im gegebenen Sachzusammenhang
c2) 1 × C2: für die richtige Markierung des Intervalls

Puppenrutsche*

Aufgabennummer: B_373

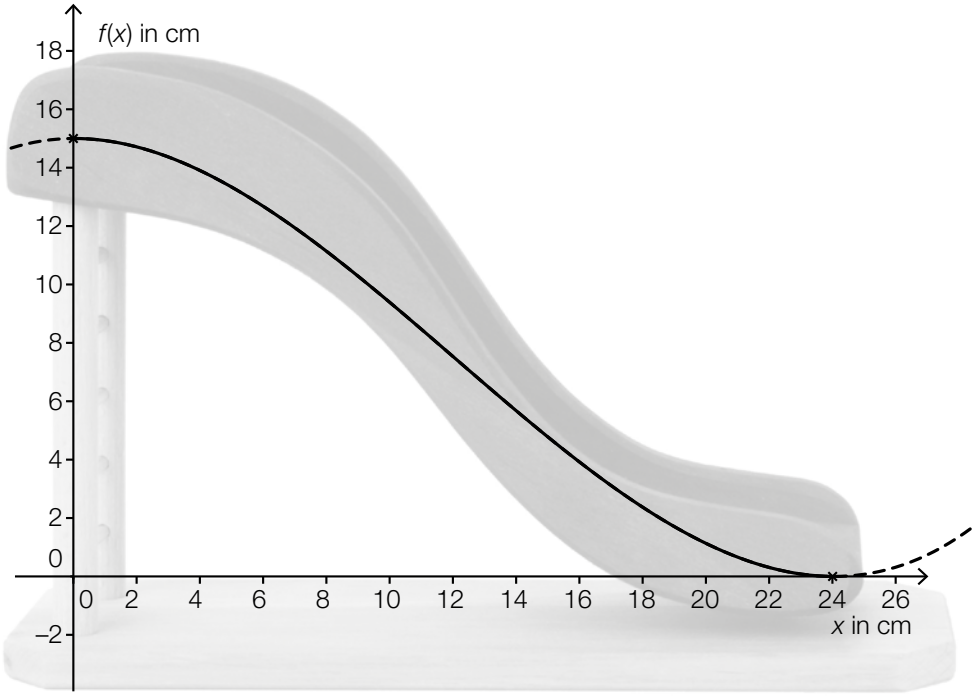
Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) In der unten stehenden Abbildung ist eine Puppenrutsche dargestellt. Das seitliche Profil dieser Puppenrutsche kann annähernd durch eine Polynomfunktion 3. Grades f modelliert werden:

$f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ mit $0 \le x \le 24$

x, $f(x)$ ... Koordinaten in cm

Der Graph der Funktion f hat an den Stellen $x = 0$ und $x = 24$ jeweils eine horizontale Tangente.



Bildquelle: http://www.spielzeug-truhe.de/artikel-277.htm [01.12.2014] (adaptiert).

1) Stellen Sie ein Gleichungssystem auf, mit dem die Koeffizienten dieser Polynomfunktion berechnet werden können.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Das seitliche Profil einer anderen Spielzeugrutsche kann durch den Graphen der Funktion g beschrieben werden:

$g(x) = \frac{1}{108} \cdot (x^3 - 18 \cdot x^2 + 864)$ mit $0 \leq x \leq 12$

x, $g(x)$ ... Koordinaten in cm

1) Berechnen Sie diejenige Stelle, an der die Rutsche am steilsten ist.

2) Begründen Sie allgemein, warum der Graph einer Polynomfunktion 3. Grades höchstens 2 Extrempunkte haben kann.

Möglicher Lösungsweg

a1) I: $f(0) = 15$
II: $f(24) = 0$
III: $f'(0) = 0$
IV: $f'(24) = 0$

oder:

I: $d = 15$
II: $a \cdot 24^3 + b \cdot 24^2 + c \cdot 24 + d = 0$
III: $c = 0$
IV: $3 \cdot a \cdot 24^2 + 2 \cdot b \cdot 24 + c = 0$

b1) Berechnung der Wendestelle:
Lösen der Gleichung: $g''(x_0) = 0$
$x_0 = 6$ cm

b2) Die 1. Ableitung einer Polynomfunktion 3. Grades ist eine quadratische Funktion. Die Extremstellen der Polynomfunktion 3. Grades entsprechen den Nullstellen der 1. Ableitung. Eine quadratische Funktion hat höchstens 2 Nullstellen. Daher kann die Polynomfunktion 3. Grades höchstens 2 Extrempunkte haben.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × A1: für das richtige Aufstellen von Gleichung I und II
1 × A2: für das richtige Aufstellen von Gleichung III und IV

b1) 1 × A: für den richtigen Ansatz
b2) 1 × B: für die richtige Berechnung der Wendestelle
1 × D: für die richtige Begründung

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Bastelarbeit im Kindergarten*

Aufgabennummer: B_336

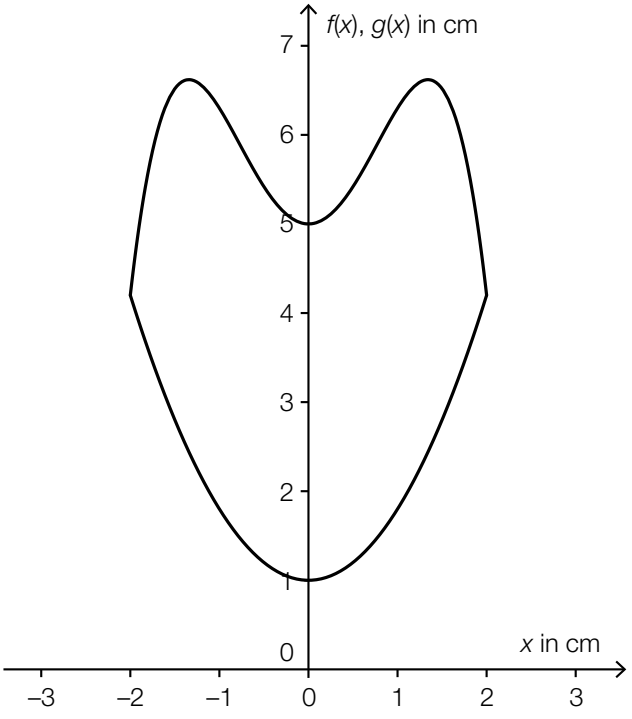
Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Als Werkarbeit in einem Kindergarten sollen Katzenköpfe aus Modelliermasse gestaltet werden. Als Vorlage dazu dient eine Ausstechform. Die Begrenzungslinien dieser Ausstechform können durch die Graphen der Funktionen f und g beschrieben werden:

$f(x) = -0{,}5 \cdot x^4 + 1{,}8 \cdot x^2 + 5$
$g(x) = 0{,}8 \cdot x^2 + 1$

x, $f(x)$, $g(x)$ ... Koordinaten in cm

Die Graphen dieser Funktionen sind in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



a) 1) Argumentieren Sie mithilfe der Funktionsgleichungen, dass der Graph der Funktion f die obere Begrenzungslinie und der Graph der Funktion g die untere Begrenzungslinie beschreibt (und nicht umgekehrt).

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Modelliermasse erhält man in quaderförmigen Packungen mit folgenden Maßen:
(B) 95 mm × (T) 25 mm × (H) 200 mm

1) Berechnen Sie das Volumen einer Packung Modelliermasse in cm^3.

Jedes Kind soll mithilfe der Form einen 2 cm dicken Katzenkopf ausstechen können.

2) Berechnen Sie, wie viele Packungen Modelliermasse man mindestens benötigt, damit alle 24 Kinder der Gruppe jeweils einen Katzenkopf basteln können.

c) Um die Werkarbeit der Kinder schön verpacken zu können, sollen Schachteln mit rechteckiger Grundfläche gefaltet werden. Jeder Katzenkopf soll in eine solche Schachtel gelegt werden. Eine Seite der Schachtel-Grundfläche muss mindestens 4 cm lang sein.

1) Berechnen Sie die Mindestabmessung der anderen Seite der Grundfläche.

Möglicher Lösungsweg

a1) Der Graph der Funktion g ist eine (nach oben offene) quadratische Parabel, also die untere Begrenzungslinie.

oder:

$f(0) = 5$ und $g(0) = 1$

Diese Aufgabenstellung erlaubt vielfältige Lösungsmöglichkeiten.

b1) Volumen einer Packung Modelliermasse in cm^3:
$V = 9{,}5 \cdot 2{,}5 \cdot 20 = 475$

Das Volumen einer Packung Modelliermasse beträgt 475 cm^3.

b2) Volumen eines modellierten Katzenkopfes in cm^3: $V = 2 \cdot \int_{-2}^{2} [f(x) - g(x)]\,dx = \frac{448}{15} \approx 29{,}87$

Volumen von 24 modellierten Katzenköpfen in cm^3: $24 \cdot \frac{448}{15} = 716{,}8$

Da eine Packung 475 cm^3 beinhaltet, benötigt man also mindestens 2 Packungen Modelliermasse.

c1) Der Tiefpunkt $(0 \mid 1)$ von g kann der Abbildung entnommen werden: $g(0) = 1$.

Berechnung der Maximumstellen von f:
$f'(x) = -2 \cdot x^3 + 3{,}6 \cdot x$

Lösung der Gleichung $f'(x) = 0$:
$x_1 = 0$ (Minimumstelle)
$x_{2,3} = \pm\sqrt{1{,}8}$ (Maximumstellen)

Mindestabmessung in cm: $f(\sqrt{1{,}8}) - g(0) = \frac{281}{50} = 5{,}62$
Die andere Seite der Grundfläche muss mindestens 5,62 cm lang sein.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × D: für die richtige Argumentation

b1) 1 × B1: für die richtige Berechnung des Volumens einer Packung Modelliermasse in cm^3
b2) 1 × A: für einen richtigen Ansatz (benötigtes Volumen für einen modellierten Katzenkopf als Produkt aus Inhalt der Querschnittsfläche und Dicke)
1 × B2: für die richtige Berechnung der Anzahl an Packungen, die mindestens benötigt werden

c1) 1 × B: für die richtige Berechnung der Mindestabmessung der anderen Seite der Grundfläche

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Verkehrsbetriebe*

Aufgabennummer: B_294

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Städtische Verkehrsbetriebe analysieren ihre Einnahmen.

a) In der Stadt *A* können die Einnahmen der Verkehrsbetriebe durch den Verkauf von Einzelfahrscheinen modellhaft durch die folgende Erlösfunktion *E* beschrieben werden:

$E(x) = -0{,}1 \cdot x^2 + 6{,}6 \cdot x$

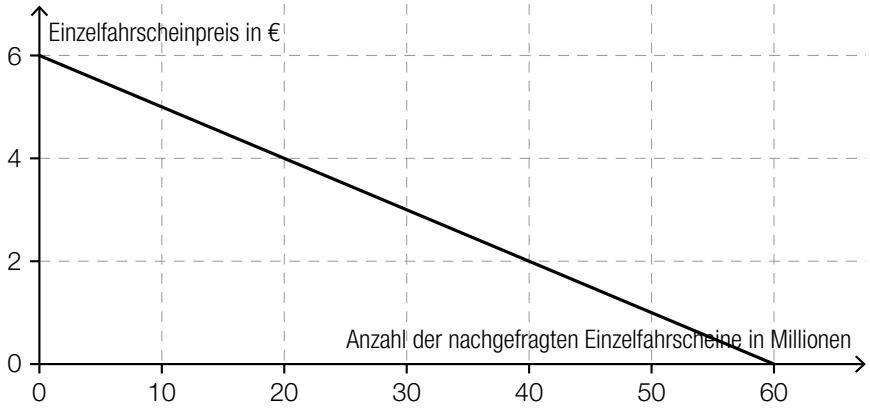
x ... Anzahl der verkauften Einzelfahrscheine in Millionen
$E(x)$ ... Erlös beim Verkauf von x Einzelfahrscheinen in Millionen Euro

1) Berechnen Sie den maximal möglichen Erlös in Euro.

2) Erstellen Sie eine Funktionsgleichung der zugehörigen Preisfunktion der Nachfrage.

3) Ermitteln Sie den zum maximalen Erlös führenden Einzelfahrscheinpreis in Euro.

b) In der Stadt *B* wird ein linearer Zusammenhang zwischen dem Einzelfahrscheinpreis in Euro und der Anzahl der nachgefragten Einzelfahrscheine in Millionen angenommen. Dieser Zusammenhang ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



1) Lesen Sie aus der obigen Abbildung den Höchstpreis ab.

2) Beschreiben Sie die Bedeutung der Sättigungsmenge im gegebenen Sachzusammenhang.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) In der Stadt *C* wird modellhaft angenommen, dass der Zusammenhang zwischen dem Einzelfahrscheinpreis in Euro und der Anzahl der nachgefragten Einzelfahrscheine in Millionen durch eine quadratische Funktion *p* beschrieben werden kann.

$p(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

x ... Anzahl der nachgefragten Einzelfahrscheine in Millionen
$p(x)$ ... Einzelfahrscheinpreis bei x nachgefragten Einzelfahrscheinen in Euro

Bei einem Einzelfahrscheinpreis von € 1,60 werden 50 Millionen Einzelfahrscheine nachgefragt. Bei einem Einzelfahrscheinpreis von € 1,80 werden 48 Millionen Einzelfahrscheine nachgefragt. Der Höchstpreis wird mit € 7,80 angenommen.

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten der Funktion *p*.

2) Berechnen Sie die Koeffizienten von *p*.

Möglicher Lösungsweg

a1) $E'(x) = -0{,}2 \cdot x + 6{,}6$

$E'(x) = 0$
$0 = -0{,}2 \cdot x + 6{,}6$
$x = 33$
$E(33) = 108{,}9$

Der maximale Erlös beträgt € 108,9 Millionen.
(Der Graph von E ist eine nach unten offene Parabel. Die Nullstelle der Ableitungsfunktion E' ist also eine Maximumstelle.)

a2) $p(x) = -0{,}1 \cdot x + 6{,}6$

a3) $p(33) = 3{,}3$

Bei einem Einzelfahrscheinpreis von € 3,30 ist der Erlös maximal.

b1) Höchstpreis: € 6

b2) Die Sättigungsmenge ist diejenige Anzahl an nachgefragten Einzelfahrscheinen in Millionen, wenn der Einzelfahrscheinpreis € 0 beträgt.

c1) $p(0) = 7{,}8$
$p(48) = 1{,}8$
$p(50) = 1{,}6$

oder:

$7{,}8 = c$
$1{,}8 = 2304 \cdot a + 48 \cdot b + c$
$1{,}6 = 2500 \cdot a + 50 \cdot b + c$

c2) Lösung des Gleichungssystems mittels Technologieeinsatz:
$a = 0{,}0005$; $b = -0{,}149$; $c = 7{,}8$

Lösungsschlüssel

a1) 1 × B1: für die richtige Berechnung des maximalen Erlöses
(Die Zahl 108,9 allein als Lösung ist nicht als richtig zu werten.
Dass es sich bei der Nullstelle von E' um eine Maximumstelle handelt, muss weder überprüft noch argumentativ begründet werden.)

a2) 1 × A: für das richtige Erstellen der Funktionsgleichung

a3) 1 × B2: für das richtige Ermitteln des Einzelfahrscheinpreises bei maximalem Erlös

b1) 1 × C1: für das richtige Ablesen des Höchstpreises

b2) 1 × C2: für die richtige Beschreibung der Sättigungsmenge im gegebenen Sachzusammenhang

c1) 1 × A: für das richtige Erstellen des Gleichungssystems

c2) 1 × B: für die richtige Berechnung der Koeffizienten

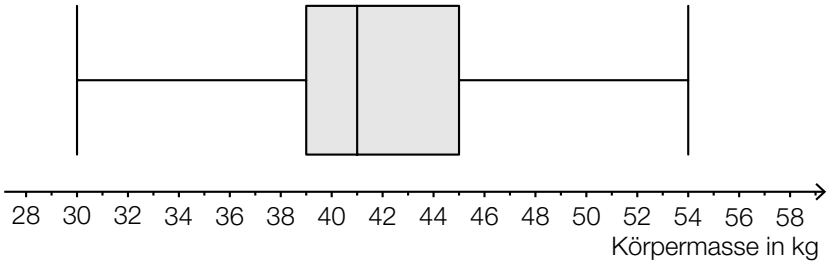
Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Statistische Verteilung der Körpermassen von 12-Jährigen*

Aufgabennummer: A_279

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Die Körpermassen von 12-jährigen Schülerinnen, die bei einer Stichprobe erhoben wurden, sind in folgendem Boxplot dargestellt:



1) Lesen Sie die beiden statistischen Kennzahlen *Median* und *3. Quartil* ab.

In einer Tageszeitung wird behauptet: „Die Stichprobe zeigt: Mehr als die Hälfte der 12-jährigen Schülerinnen ist schwerer als 42 kg."

2) Begründen Sie mithilfe des Boxplots, warum die Behauptung in der Tageszeitung falsch ist.

b) Eine Schulärztin hat die Körpermassen von 10 Schülerinnen und Schülern aufgezeichnet (Angaben in kg):

37	34	38	48	68	38	40	48	38	47

1) Bestimmen Sie das arithmetische Mittel und den Median.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Es kann davon ausgegangen werden, dass die Körpermassen von 12-jährigen Schülern österreichweit annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 42$ kg und der Standardabweichung $\sigma = 3{,}5$ kg sind.

1) Veranschaulichen Sie in einer Skizze der Dichtefunktion die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter 12-jähriger Schüler eine Körpermasse von mehr als 45 kg hat.

2) Berechnen Sie dasjenige symmetrische Intervall um μ, in dem die Körpermasse eines zufällig ausgewählten 12-jährigen Schülers mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % liegt.

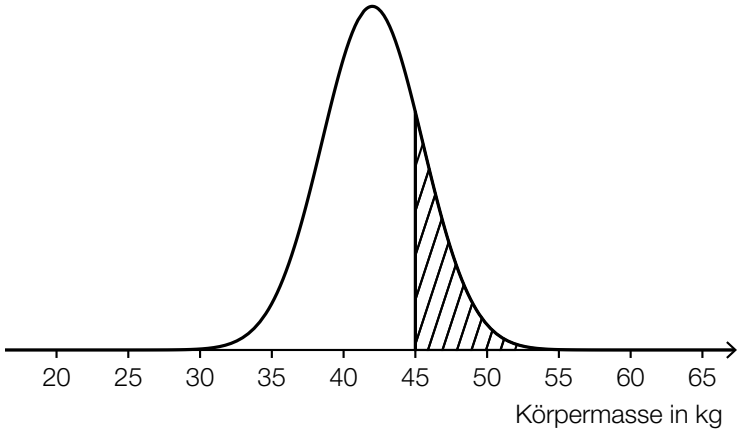
Möglicher Lösungsweg

a1) Median: 41 kg
3. Quartil: 45 kg

a2) Die Behauptung in der Tageszeitung ist falsch, weil 42 kg größer als der Median sind.

b1) Bestimmung der statistischen Kennzahlen mittels Technologieeinsatz:
– arithmetisches Mittel: 43,6 kg
– Median: 39 kg

c1)



c2) Berechnung des Intervalls mittels Technologieeinsatz:
$P(\mu - a \leq X \leq \mu + a) = 0{,}9 \quad \Rightarrow \quad [36{,}2 \text{ kg}; 47{,}8 \text{ kg}]$

Lösungsschlüssel

a1) 1 × C: für das richtige Ablesen der beiden statistischen Kennzahlen
a2) 1 × D: für die richtige Begründung

b1) 1 × B: für die richtige Bestimmung des arithmetischen Mittels und des Medians

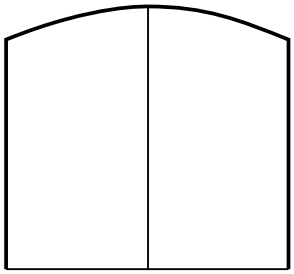
c1) 1 × A: für das richtige Veranschaulichen der Wahrscheinlichkeit in einer Skizze der Dichtefunktion
c2) 1 × B: für die richtige Berechnung des Intervalls

Scheunentor*

Aufgabennummer: A_277

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

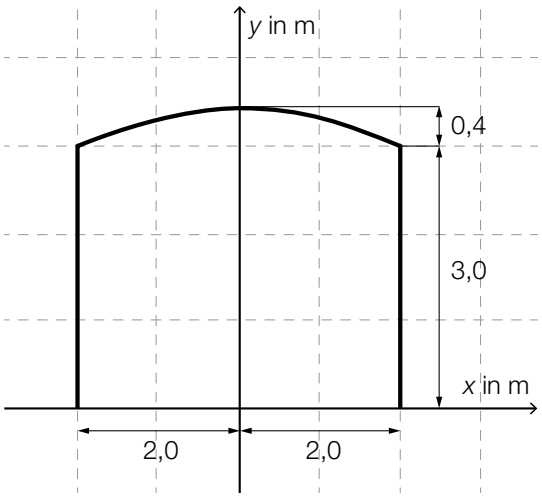
Ein Scheunentor besteht aus 2 symmetrischen Flügeln. Die Vorderseite des Scheunentors (Rechteck mit einem aufgesetzten Bogen) ist in der nachstehenden Abbildung vereinfacht dargestellt.



a) Der Bogen des Scheunentors kann näherungsweise durch den Graphen einer quadratischen Funktion mit folgender Gleichung beschrieben werden (vergleiche nachstehende Abbildung):

$y = a \cdot x^2 + b$

x, y ... Koordinaten in m



1) Berechnen Sie die Koeffizienten a und b.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Für ein anderes Scheunentor, dessen Flügel jeweils 2,5 m breit sind, lässt sich der Bogen näherungsweise durch den Graphen der quadratischen Funktion f beschreiben:

$f(x) = -0{,}08 \cdot x^2 + 4$

x ... Koordinate in m
$f(x)$ ... Höhe des Scheunentors an der Stelle x in m

1) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Vorderseite des Scheunentors.

c) Der Flächeninhalt der Vorderseite eines anderen Scheunentors beträgt 16 m^2. Das Scheunentor hat eine Dicke von 8 cm. Für die Stärke der Verankerung ist es wichtig, die Masse des Tors zu kennen.
Die Masse ist das Produkt aus Volumen und Materialdichte.
Die Materialdichte beträgt 0,7 kg/dm^3.

1) Ermitteln Sie die Masse des Scheunentors in Tonnen.

Möglicher Lösungsweg

a1) Koordinatensystem in der Symmetrieachse:
$y(0) = 3{,}4$: $3{,}4 = b$
$y(2) = 3$: $3 = 4 \cdot a + 3{,}4 \quad \Rightarrow \quad a = -0{,}1$

b1) $A = 2 \cdot \int_0^{2{,}5} (-0{,}08 \cdot x^2 + 4)\,\mathrm{d}x = \frac{115}{6} \approx 19{,}17$

Der Flächeninhalt beträgt rund 19,17 m^2.

c1) Das Volumen V ist das Produkt aus Flächeninhalt und Dicke: 16 m^2 = 1 600 dm^2;
8 cm = 0,8 dm
V = 1 600 dm^2 · 0,8 dm = 1 280 dm^3
Masse des Scheunentors: m = 0,7 kg/dm^3 · 1 280 dm^3 = 896 kg = 0,896 t
Die Masse des Scheunentors beträgt 0,896 t.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × A: für die richtige Berechnung der Koeffizienten

b1) 1 × B: für die richtige Berechnung des Flächeninhalts

c1) 1 × B: für die richtige Berechnung der Masse in Tonnen

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Kurvenfahrt*

Aufgabennummer: A_275

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Ein Motorradfahrer durchfährt eine kreisförmig angelegte Kurve.
Die Formel für den Betrag der Fliehkraft lautet:

$$F = \frac{m \cdot v^2}{r}$$

F ... Betrag der Fliehkraft in Newton (N)
m ... Masse in kg (Motorrad und Fahrer)
v ... Geschwindigkeit des Motorradfahrers in m/s
r ... Radius der Kurve in m

a) 1) Erklären Sie anhand dieser Formel, wie sich F ändert, wenn der Fahrer die Kurve mit doppelter Geschwindigkeit durchfährt.

b) 1) Stellen Sie F in Abhängigkeit von r im Intervall [10; 140] grafisch dar, wenn v = 20 m/s und m = 380 kg beträgt.

2) Kennzeichnen Sie auf der senkrechten Achse die Veränderung von F bei der Halbierung des Radius von 80 m auf 40 m.

c) Der Fahrer befährt eine Kurve mit gleichbleibendem Radius r und gleichbleibender Geschwindigkeit v einmal mit einem vollen Tank und einmal mit einem fast leeren Tank.
Die Masse mit einem vollen Tank beträgt 380 kg, die Masse mit einem fast leeren Tank beträgt 362 kg.

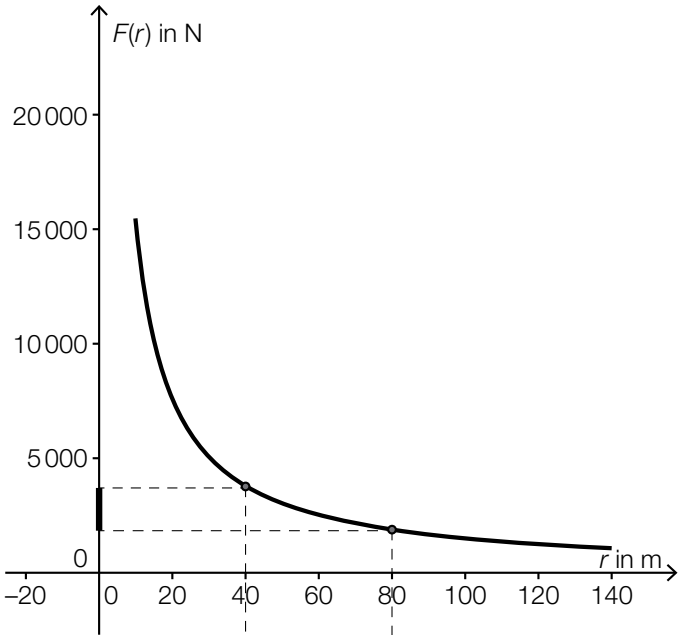
1) Berechnen Sie, um wie viel Prozent F bei fast leerem Tank kleiner als bei vollem Tank ist.

* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

a1) $(2 \cdot v)^2 = 4 \cdot v^2$
Das bedeutet: Wenn man mit doppelt so hoher Geschwindigkeit in eine Kurve mit dem Radius r fährt, dann wird F viermal so groß.

b1 und b2)



c1) 18 : 380 = 0,047...
F ist bei einem fast leeren Tank um rund 5 % geringer als bei einem vollen Tank.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × D: für die richtige Erklärung

b1) 1 × B: für das richtige Erstellen der Grafik
b2) 1 × C: für das richtige Kennzeichnen der Veränderung auf der senkrechten Achse

c1) 1 × B: für die richtige Berechnung

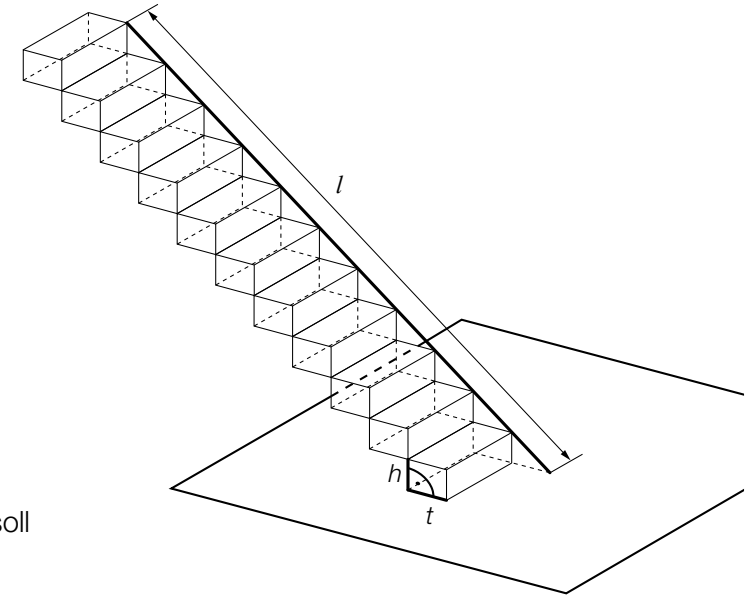
Treppenlift*

Aufgabennummer: A_274

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Vielen Menschen fällt das Treppensteigen mit zunehmendem Alter immer schwerer. Ein Treppenlift kann das Überwinden der Treppe wieder erheblich erleichtern.

a) Ein Treppenlift wird gebaut. Dafür muss eine Führungsschiene mit der Länge l montiert werden (siehe nebenstehende Abbildung). Die Stufenhöhe h und die Stufentiefe t einer geradlinig verlaufenden Treppe stehen im Verhältnis $h : t = 3 : 4$.



Die Treppe besteht aus insgesamt 11 Stufen.
Die Führungsschiene des Lifts soll direkt auf den Stufen aufliegen.

1) Stellen Sie eine Gleichung der Funktion auf, die die Länge der Führungsschiene in Abhängigkeit von der Stufentiefe beschreibt.

b) Ein Unternehmen bietet Treppenlifte an, die eine Steigung von 200 % überwinden können.

1) Stellen Sie anhand einer Skizze eine Steigung von 200 % dar.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Frau Huber möchte in ihrem Haus einen Treppenlift einbauen lassen.
Folgende zwei Angebote stehen zur Wahl (mögliche Zinsen bleiben unberücksichtigt):
Angebot 1: ein Treppenlift zu einem Kaufpreis von € 9.480
Angebot 2: ein Treppenlift mit einer Einmalzahlung von € 300 und einer monatlichen Miete von € 60

1) Stellen Sie für beide Angebote je eine Funktionsgleichung auf, die die Kosten in Abhängigkeit von der Zeit in Monaten beschreibt.

Frau Huber plant, in 10 Jahren ins Seniorenheim zu übersiedeln, und benötigt dann keinen Treppenlift mehr.

2) Überprüfen Sie nachweislich, ob Angebot 2 für Frau Huber unter dieser Annahme günstiger als Angebot 1 ist.

Möglicher Lösungsweg

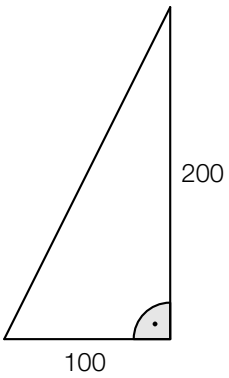
a1) $h : t = 3 : 4 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{3}{4} \cdot t$

$$\sqrt{t^2 + h^2} = \sqrt{t^2 + \left(\frac{3}{4} \cdot t\right)^2}$$

$$l(t) = 11 \cdot \sqrt{t^2 + \left(\frac{3}{4} \cdot t\right)^2}$$

t … Stufentiefe in cm
$l(t)$ … Länge der Führungsschiene bei einer Stufentiefe t in cm

b1)



c1) $K_1(t) = 9\,480$
$K_2(t) = 60 \cdot t + 300$

t … Anzahl der Monate
$K_1(t)$, $K_2(t)$ … Gesamtkosten nach t Monaten in Euro

c2) $K_2(120) = 7\,500$
$7\,500 < 9\,480$

Wenn Frau Huber den Treppenlift nur für 10 Jahre benötigt, ist Angebot 2 günstiger.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung

b1) 1 × A: für das richtige Erstellen der Skizze

c1) 1 × A: für das richtige Aufstellen der beiden Funktionsgleichungen
c2) 1 × D: für die richtige Überprüfung

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Werbung*

Aufgabennummer: B_440

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Der Campus einer Universität beherbergt 1 200 Studierende. Eine Fast-Food-Kette möchte eine Filiale mit neuen, spezifisch auf Studierende abgestimmten Produkten am Campusgelände eröffnen. Es kursiert ein Gerücht, dass ein berühmter Hollywoodstar bei der Eröffnung der Filiale anwesend sein wird.

Die Funktion N_G beschreibt näherungsweise die Anzahl der Studierenden, die von dem Gerücht erfahren haben:

$$N_G(t) = \frac{1200}{1 + 1199 \cdot e^{-0{,}99 \cdot t}}$$

t ... Zeit nach Aufkommen des Gerüchts in Tagen
$N_G(t)$ ... Anzahl der Studierenden, die vom Gerücht bis zum Zeitpunkt t erfahren haben

a) 1) Berechnen Sie, wie viele Studierende nach 8 Tagen von dem Gerücht erfahren haben.

b) Auf einem anderen vergleichbaren Campus wird gleichzeitig eine Werbekampagne mit Plakaten gestartet.
Die Funktion N_W beschreibt näherungsweise die Anzahl der Studierenden, die durch die Werbekampagne erreicht werden:

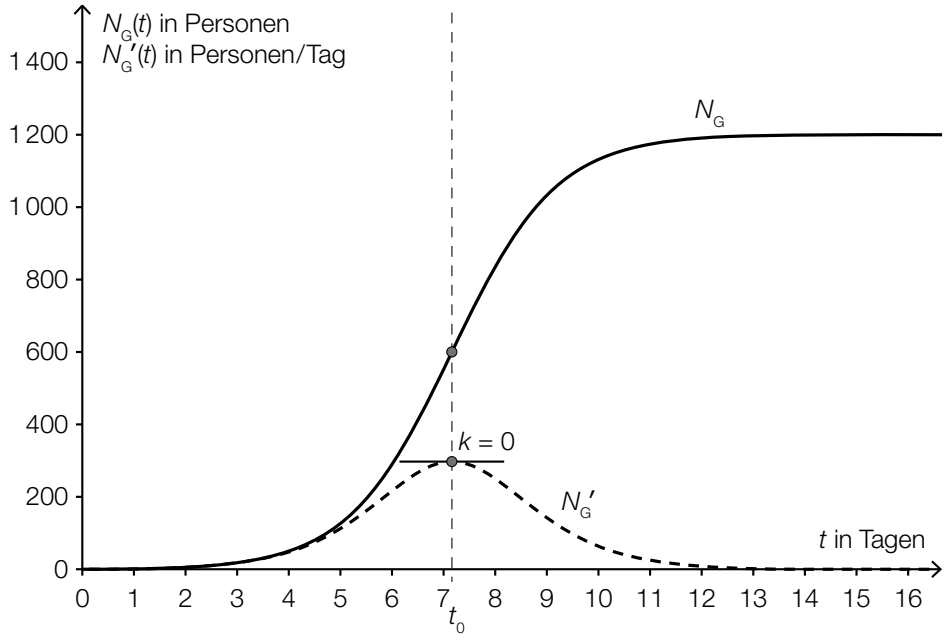
$$N_W(t) = 1200 \cdot (1 - e^{-0{,}077 \cdot t})$$

t ... Zeit nach Beginn der Werbekampagne in Tagen ($t \geq 1$)
$N_W(t)$ ... Anzahl der Studierenden, die durch die Werbekampagne bis zum Zeitpunkt t erreicht wurden

1) Bestimmen Sie denjenigen Zeitpunkt t ($t \geq 1$), zu dem gleich viele Studierende vom Gerücht erfahren haben, wie von der Werbekampagne erreicht wurden.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) In der nachstehenden Grafik sind der Graph der Funktion N_G und der Graph ihrer Ableitung N_G' dargestellt.



1) Beschreiben Sie, welche Eigenschaft die Ableitungsfunktion N_G' und welche Eigenschaft die Funktion N_G an der dargestellten Stelle t_0 hat.

2) Interpretieren Sie die Bedeutung der Stelle t_0 im gegebenen Sachzusammenhang.

Eine Studierende behauptet, dass die 2. Ableitung der Funktion N_G für alle $t \geq 0$ positiv ist.

3) Argumentieren Sie, warum diese Behauptung falsch ist.

Möglicher Lösungsweg

a1) $N_G(8) = 835{,}8...$

Nach 8 Tagen kennen rund 835 Studierende das Gerücht.

b1) $N_W(t) = N_G(t)$

Lösung mittels Technologieeinsatz: $t = 6{,}779... \approx 6{,}78$

Nach etwa 6,78 Tagen haben gleich viele Studierende vom Gerücht erfahren, wie von der Werbekampagne erreicht wurden.

c1) Die Ableitung N_G' hat an der Stelle t_0 eine Maximumstelle.
Die Funktion N_G hat an der Stelle t_0 eine Wendestelle.

c2) Zur Zeit t_0 ist der Zuwachs der Studierenden, die von dem Gerücht erfahren haben, am größten.

c3) Die Funktion N_G ist zwar für $0 \leq t < t_0$ positiv gekrümmt, für $t > t_0$ jedoch negativ gekrümmt. Somit gilt hier für $t > t_0$: $N_G''(t) < 0$.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × B: für die richtige Berechnung der Anzahl der Studierenden, die nach 8 Tagen von dem Gerücht erfahren haben (Auch ein Runden des Ergebnisses auf 836 Studierende ist als richtig zu werten.)

b1) 1 × A: für den richtigen Ansatz
1 × B: für die richtige Bestimmung des Zeitpunkts

c1) 1 × C1: für die richtige Beschreibung zur Ableitung N_G'
1 × C2: für die richtige Beschreibung zur Funktion N_G
c2) 1 × C3: für die richtige Interpretation im gegebenen Sachzusammenhang
c3) 1 × D: für eine richtige Argumentation

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Ertragsgesetzliche Kostenfunktion

Aufgabennummer: B_136

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Die Gesamtkosten K für die Herstellung eines bestimmten Produkts in Abhängigkeit von der Produktionsmenge x verlaufen nach einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion.

x … Anzahl der produzierten Mengeneinheiten (ME)
$K(x)$ … Gesamtkosten bei x ME in Geldeinheiten (GE)

Die Kostenfunktion muss in diesem Fall die folgenden Bedingungen erfüllen:

1. Es existiert ein positiver Funktionswert an der Stelle $x = 0$.
2. Die Kurve hat keinen Extremwert.
3. Die Kurve muss streng monoton steigen.
4. Sie muss im 1. Quadranten von einem degressiven Verlauf in einen progressiven wechseln.

a) Nur einer der beiden unten abgebildeten Graphen stellt eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion dar.

– Begründen Sie, warum der Funktionsgraph in Abb. 2 keine ertragsgesetzliche Kostenfunktion beschreibt.
– Lesen Sie aus dem Graphen der ertragsgesetzlichen Kostenfunktion die Kostenkehre ab.
– Ermitteln Sie mithilfe der abgelesenen Kostenkehre die Stückkosten an dieser Stelle.

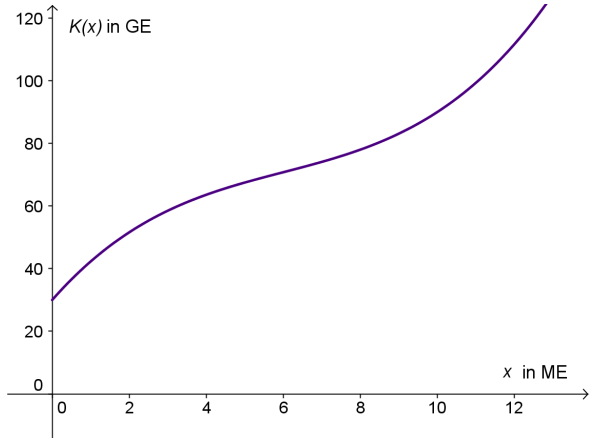


Abb. 1

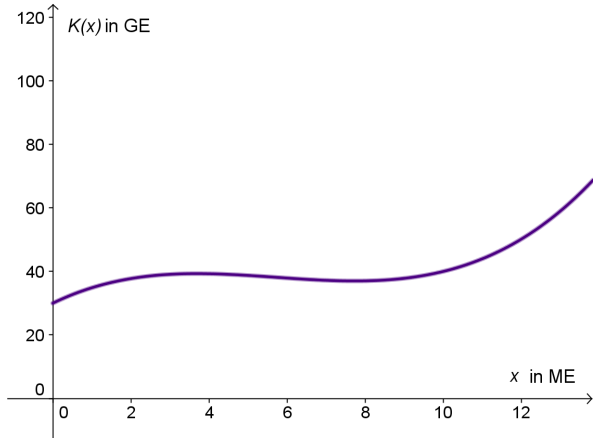


Abb. 2

b) – Begründen Sie, warum die Funktion K mit

$$K(x) = 0{,}1x^3 - 1{,}6x^2 + 12x + 20$$

die 4 Bedingungen einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion erfüllt.

c) Eine Polynomfunktion 3. Grades beschreibt eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion. Die Fixkosten betragen 25 GE. Die Kostenkehre liegt bei 5 ME. Die Gesamtkosten an der Kostenkehre betragen 53,8 GE. Die Tangente an den Graphen der Gesamtkostenfunktion hat an der Stelle $x = 2$ ME einen Anstieg $k = 6$.

– Stellen Sie ein Gleichungssystem auf, mit dem man die Parameter der Kostenfunktion berechnen kann.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Der Graph in Abb. 2 erfüllt 2 Bedingungen einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion nicht.
Die 2. Bedingung ist nicht erfüllt: Die Funktion hat ein lokales Maximum (bei ca. 4 ME) und ein lokales Minimum (bei ca. 8 ME).
Die 3. Bedingung ist nicht erfüllt: Die Funktion steigt nicht streng monoton. Sie fällt im Bereich von ca. 4 ME bis ca. 8 ME.

Abb.1: Die Kostenkehre liegt bei ca. 6 ME. Toleranzbereich: ±0,5 ME.
Die Gesamtkosten an der Kostenkehre betragen ca. 70 GE, die Stückkosten an der Kostenkehre betragen daher ungefähr 11,67 GE/ME.

b) $K(0) = 20$ … positiver Funktionswert an der Stelle $x = 0$
$K'(x) = 0{,}3x^2 - 3{,}2x + 12 = 0$, die Gleichung hat keine reelle Lösung.
Es existieren keine Extremwerte.

Wenn der Funktionsgraph im gesamten Bereich monoton steigt, dann muss $K'(x)$ für alle x größer als null sein.
Der Graph von K' ist eine nach oben offene Parabel, weil der Koeffizient vor x^2 positiv ist. Weil die Ableitungsfunktion K' keine Nullstelle hat, sind alle Funktionswerte positiv.
Die Funktion K steigt daher monoton.

$K''(x) = 0{,}6x - 3{,}2 = 0 \Rightarrow x = 5{,}33$
Der Wendepunkt liegt im 1. Quadranten.

$K''(x)$ ist positiv für $x > 5{,}33$, denn K'' ist eine lineare Funktion mit positiver Steigung.
D. h., das Krümmungsverhalten ist nach der Wendestelle progressiv und vor der Wendestelle daher degressiv.

c) $K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$
$K'(x) = 3a \cdot x^2 + 2b \cdot x + c$
$K''(x) = 6a \cdot x + 2b$

Es gelten die folgenden Gleichungen:
$K(0) = 25$: $d = 25$
$K(5) = 53{,}8$: $125a + 25b + 5c + d = 53{,}8$
$K'(2) = 6$: $12a + 4b + c = 6$
$K''(5) = 0$: $30a + 2b = 0$

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 4 Analysis
c) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) –
c) –

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 3
b) 4
c) 3

Thema: Wirtschaft

Quellen: –

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Die Streif*

Aufgabennummer: A_153

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Jedes Jahr findet auf der Kitzbüheler *Streif* das weltberühmte *Hahnenkammrennen* statt. Die Veranstalter dieses Rennens veröffentlichten folgende Daten über eine Trainingsfahrt für den Abfahrtslauf:

Zeit in Sekunden	Name des Streckenpunkts	Meereshöhe in Metern	zurückgelegter Weg in Metern
0,0	Start	1 665	0
8,5	Mausefalle	1 605	160
39,3	Gschöss	1 386	853
49,2	Alte Schneise	1 331	1 292
63,2	Seidlalm	1 244	1 609
118,1	Zielschuss	922	2 906
131,6	Ziel	805	3 312

a) – Beschreiben Sie, was mit dem Quotienten $\frac{1\,292\text{ m} - 853\text{ m}}{49{,}2\text{ s} - 39{,}3\text{ s}}$ in diesem Sachzusammenhang berechnet wird.

b) – Berechnen Sie für diese Trainingsfahrt den Neigungswinkel, der der mittleren Steigung entspricht.

c) Die Geschwindigkeit einer anderen Trainingsfahrt in Abhängigkeit von der Zeit kann für einen Abschnitt durch folgende Funktion näherungsweise beschrieben werden:

$v(t) = -0{,}045 \cdot t^2 + 6{,}594 \cdot t - 204{,}571 \quad \text{mit} \quad 60 \leq t \leq 90$

t ... Zeit in Sekunden (s)
$v(t)$ ... Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t in Metern pro Sekunde (m/s)

– Bestimmen Sie denjenigen Zeitpunkt, zu dem die Geschwindigkeit in diesem Abschnitt maximal ist.
– Stellen Sie eine Formel auf, mit der der Weg, der in diesem Abschnitt zurückgelegt wird, berechnet werden kann.

d) Der in einem Abschnitt zurückgelegte Weg s ist eine Funktion der Zeit t.

– Beschreiben Sie, wie man – ausgehend von dieser Weg-Zeit-Funktion – die Momentangeschwindigkeit zu jedem beliebigen Zeitpunkt dieses Abschnitts ermitteln kann.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

a) Mit diesem Quotienten wird die mittlere Geschwindigkeit im Abschnitt von *Gschöss* bis *Alte Schneise* berechnet.

b) Zwischen der Gesamtstrecke $\Delta s = 3312$ m, dem dabei überwundenen Höhenunterschied $\Delta h = 860$ m und dem Neigungswinkel α besteht folgender Zusammenhang:
$\sin(\alpha) = \frac{860}{3312}$
Daraus wird der Neigungswinkel $\alpha \approx 15°$ berechnet.

c) $v'(t) = \frac{dv}{dt} = 0$
$-0{,}09 \cdot t + 6{,}594 = 0$
$t \approx 73{,}27$

Nach 73,27 Sekunden ist die Geschwindigkeit maximal.

Formel für den zurückgelegten Weg: $s = \int_{60}^{90} v(t)\,dt$

d) Die Weg-Zeit-Funktion muss nach der Zeit differenziert werden, um die Funktion der Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der Zeit zu erhalten. Durch Einsetzen eines bestimmten Zeitpunktes t erhält man die Momentangeschwindigkeit zu diesem Zeitpunkt.

Lösungsschlüssel

a) 1 × C: für die richtige Beschreibung
b) 1 × B: für die richtige Berechnung des Neigungswinkels
c) 1 × B: für das richtige Bestimmen des Zeitpunktes mit maximaler Geschwindigkeit
1 × A: für das richtige Aufstellen der Formel
d) 1 × C: für die richtige Beschreibung zur Ermittlung der Momentangeschwindigkeit

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Luftdruck (1)

Aufgabennummer: A_003

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Der Zusammenhang zwischen Luftdruck und Höhe lässt sich bei konstanter Temperatur näherungsweise mit der folgenden Funktion beschreiben:

$p(h) = a \cdot e^{-\lambda \cdot h}$ mit $a, \lambda \in \mathbb{R}^+$

h … Höhe in Metern (m)
$p(h)$ … Luftdruck in der Höhe h in Hektopascal (hPa)

Villach liegt 501 m über dem Meeresspiegel (ü. d. M.). Man misst dort einen durchschnittlichen Luftdruck von 962 hPa.
In der Nähe von Villach erhebt sich der Dobratsch auf eine Höhe von 2 167 m ü. d. M. mit einem durchschnittlichen Luftdruck von 790 hPa auf dem Gipfel.

Empfehlung:
Wählen Sie bei dieser Aufgabe das Koordinatensystem so, dass für Villach $h = 0$ m gilt.

a) – Beschreiben Sie, was die angegebene Funktion über den Zusammenhang zwischen Luftdruck und Höhe aussagt.
– Beschreiben Sie die Bedeutung der Parameter a und λ im gegebenen Sachzusammenhang.

b) – Ermitteln Sie aus den vorliegenden Messwerten von Villach und dem Dobratsch die Parameter a und λ.

Der Gipfel des Mount Everest liegt auf 8 850 m ü. d. M. Es herrscht dort im Durchschnitt ein Luftdruck von 326 hPa.

– Berechnen Sie, um wie viel hPa sich der durchschnittliche Luftdruck auf dem Gipfel des Mount Everest von dem Wert unterscheidet, der sich bei Verwendung der Funktion p ergibt.

c) Ein anderes Rechenmodell beschreibt den Luftdruck in Abhängigkeit von der Höhe näherungsweise mit der folgenden quadratischen Funktion:

$p_q(h) = 4{,}87 \cdot 10^{-6} \cdot h^2 - 0{,}11 \cdot h + 962$

$h = 0$ m entspricht der Höhe von Villach (501 m ü. d. M.).

– Zeichnen Sie den Graphen der Funktion p_q für Höhen von 0 bis 20 000 m.
– Erklären Sie, warum diese Näherungsfunktion ab $h \approx 11\,300$ m nicht mehr gültig ist.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Der Druck nimmt mit der Höhe exponentiell ab. Das bedeutet, dass der Luftdruck mit jedem zusätzlichen Höhenmeter um den gleichen Prozentsatz abnimmt.

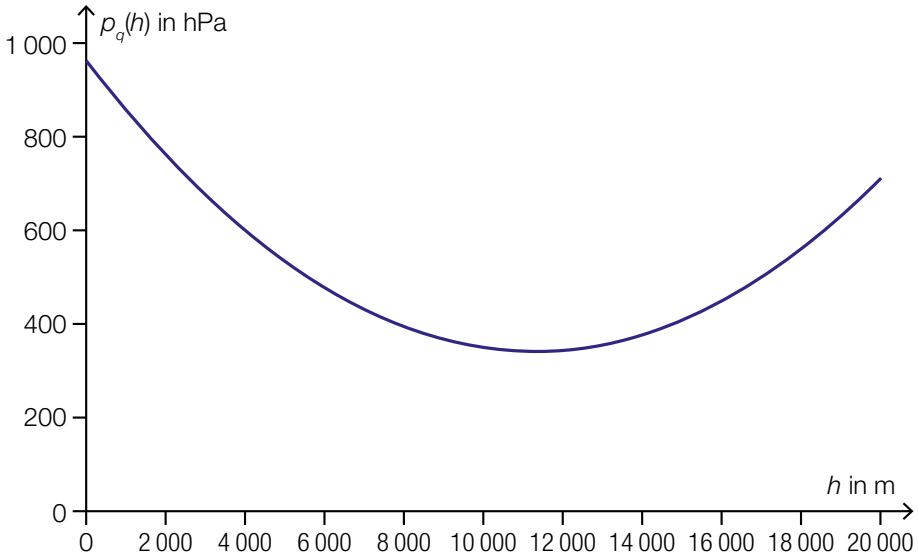
a ist der Druck, der bei $h = 0$ m herrscht.
Das negative Vorzeichen vor λ definiert eine Abnahme der Funktionswerte mit steigenden h-Werten.
Für $\lambda > 0$ ist $e^{-\lambda \cdot h}$ eine fallende Exponentialfunktion. Je größer λ ist, umso stärker fällt der Druck.

b) Für die Annahme „Villach $h = 0$ m“ gilt:
$p(0) = 962 \quad \Rightarrow \quad a = 962$
Der Gipfel des Dobratsch liegt 1 666 m über Villach.
$p(1\,666) = 790 \quad \Rightarrow \quad 962 \cdot e^{-\lambda \cdot 1666} = 790 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0{,}000118...$

Der Gipfel des Mount Everest liegt 8 349 m über Villach.
$p(8\,349) = 358{,}4...$

Für den Mount Everest ergibt die Rechnung einen Druck von rund 358 hPa, die Abweichung vom tatsächlichen durchschnittlichen Luftdruck ist rund 32 hPa.

c)



Die Näherungsfunktion eignet sich ab $h \approx 11\,300$ m nicht mehr, da sie ab dieser Stelle steigt. Das würde bedeuten, dass der Druck in sehr großen Höhen zunimmt, was nicht der Realität entspricht.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) —
c) D Argumentieren und Kommunizieren

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) leicht

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2
c) 2

Thema: Physik

Quellen: —

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Alkoholspiegel

Aufgabennummer: A_093

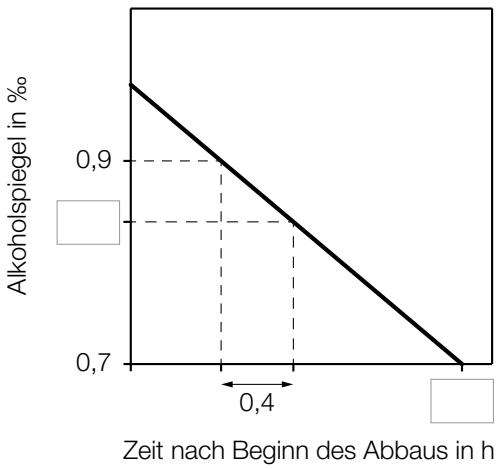
Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Der Alkoholspiegel ist ein Maß für die Menge von Alkohol im Blut. Er wird üblicherweise in Promille (‰) angegeben.
Oberhalb eines Alkoholspiegels von 0,1 ‰ erfolgt der Abbau von Alkohol im Körper annähernd linear mit einer Abbaurate von 0,15 ‰ pro Stunde.

a) Wolfgang trinkt auf einer Party Alkohol. Am Ende der Party hat er einen Alkoholspiegel von 1,5 ‰.

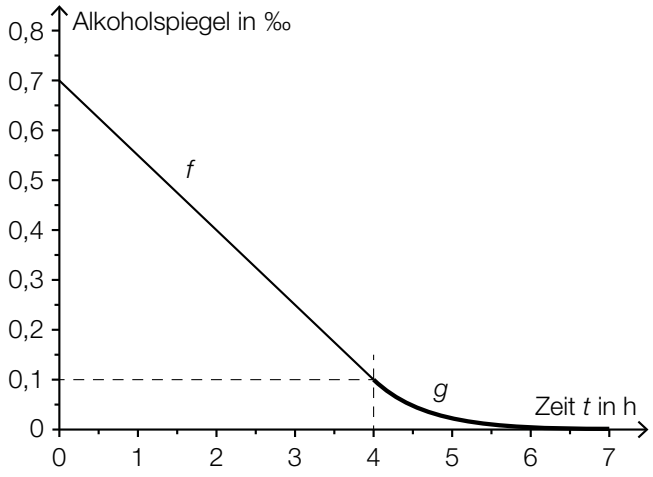
– Stellen Sie eine Gleichung derjenigen Funktion auf, die den Alkoholabbau in Wolfgangs Körper (bis zu einem Alkoholspiegel von 0,1 ‰) in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt.

In der nachstehenden Abbildung ist der Alkoholabbau in Wolfgangs Körper ausschnittsweise dargestellt.



– Tragen Sie in der obigen Abbildung die fehlenden Zahlen in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.

b) Unterhalb eines Alkoholspiegels von 0,1 ‰ lässt sich der Abbau von Alkohol im Körper näherungsweise durch die Funktion g mit $g(t) = c \cdot e^{-\lambda \cdot t}$ beschreiben.
In der nachstehenden Abbildung ist sowohl der lineare Teil (Funktion f) als auch der exponentielle Teil (Funktion g) eines Alkoholabbauprozesses dargestellt. Die beiden Funktionsgraphen schließen „knickfrei“ aneinander an, das heißt, sie haben an der Stelle $t = 4$ denselben Funktionswert und dieselbe Steigung.



Die Parameter c und λ der Funktion g können mithilfe des folgenden Gleichungssystems berechnet werden.

I: $c \cdot e^{-\lambda \cdot 4} = \square$

II: $\square \cdot e^{-\lambda \cdot 4} = -0{,}15$

– Ergänzen Sie die fehlenden Teile des obigen Gleichungssystems.

c) Eine Barkeeperin mischt für einen „Sommerspritzer“ $\frac{1}{8}$ L Weißwein (Alkoholgehalt 12,5 %) und 0,2 L Soda.

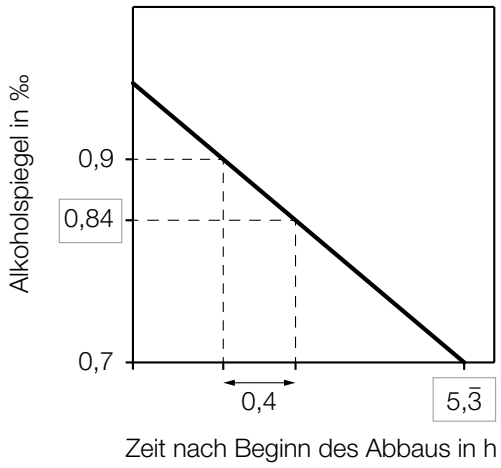
– Berechnen Sie den Alkoholgehalt dieses Sommerspritzers.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) t ... Zeit in h
$A(t)$ ... Alkoholspiegel zur Zeit t in ‰

$A(t) = -0{,}15 \cdot t + 1{,}5$ (mit $0 \le t \le 9{,}\overline{3}$)



b) I: $c \cdot e^{-\lambda \cdot 4} = \boxed{0{,}1}$
II: $\boxed{-\lambda \cdot c} \cdot e^{-\lambda \cdot 4} = -0{,}15$

c) $\frac{1}{8} \cdot 0{,}125 = \left(\frac{1}{8} + 0{,}2\right) \cdot x$

$x = 0{,}0480...$

Der Sommerspritzer hat einen Alkoholgehalt von rund 4,8 %.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 4 Analysis
c) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) A Modellieren und Transferieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) —
c) —

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 3
b) 2
c) 1

Thema: Alltag

Quellen: —

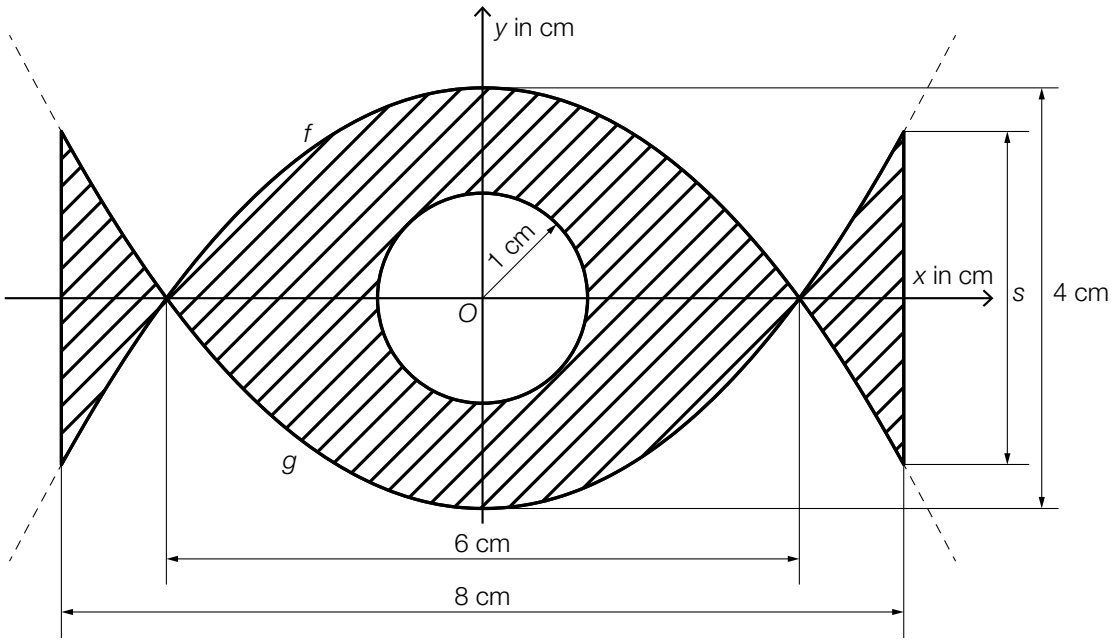
Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Schmuckstück

Aufgabennummer: A_064

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Ein Schmuckstück wird gemäß nachstehender Skizze in den schraffierten Teilen mit Blattgold belegt.



Die Begrenzungslinien der Blattgoldfläche sind außen die Graphen der Funktionen f und g und innen ein Kreis, dessen Mittelpunkt im Koordinatenursprung liegt.

$f(x) = -\frac{2}{9} \cdot x^2 + 2$

$g(x) = -f(x)$

x, $f(x)$, $g(x)$ ... Koordinaten in cm

a) – Berechnen Sie die Länge s (siehe obige Abbildung).

b) – Berechnen Sie den Inhalt der mit Blattgold belegten Fläche.

c) Die Blattgoldfläche soll vertikal um insgesamt 1 cm verbreitert werden. Die beiden Koordinatenachsen als Symmetrieachsen sowie die Schnittpunkte der beiden Funktionsgraphen bleiben unverändert.
Die nach unten offene Parabel, die eine Begrenzungslinie der so veränderten Blattgoldoberfläche bildet, ist der Graph der Funktion f_{neu}.

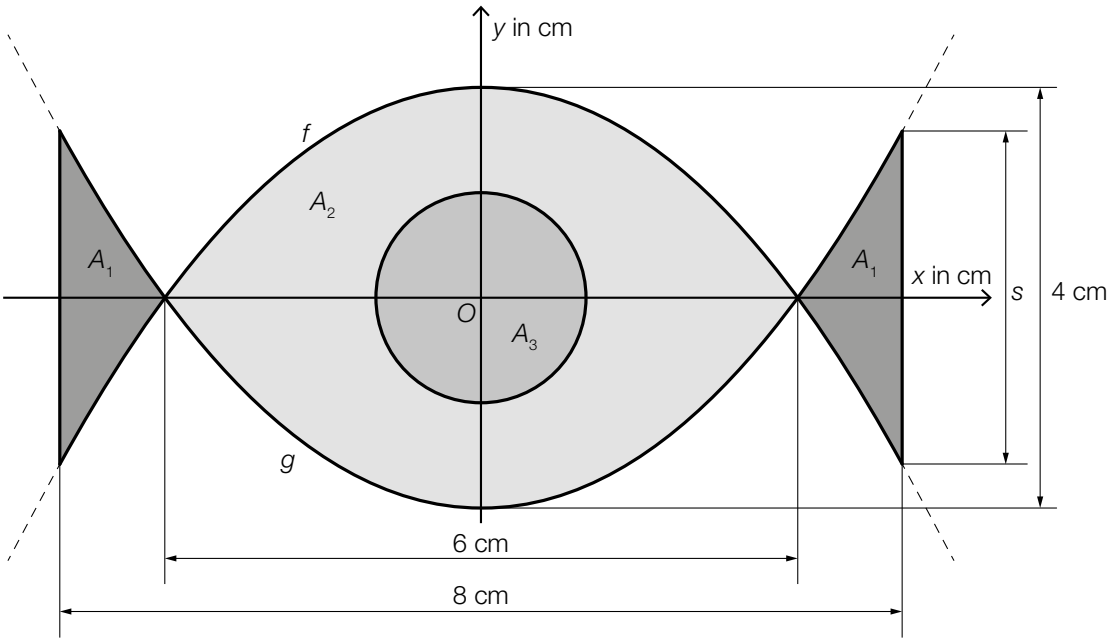
– Stellen Sie eine Gleichung der Funktion f_{neu} auf.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $s = 2 \cdot g(4) \approx 3{,}1$ cm

b)



$A_1 = \int_{-4}^{-3} [g(x) - f(x)]\,dx = 1{,}48...$

$A_2 = \int_{-3}^{3} [f(x) - g(x)]\,dx = 16$

$A_3 = r^2 \cdot \pi = 1^2 \cdot \pi = \pi = 3{,}14...$

$A = 2 \cdot A_1 + A_2 - A_3 = 15{,}82...$

Man benötigt Blattgold für eine Fläche von rund 15,82 cm^2.

c) $f_{neu}(x) = a \cdot x^2 + b$

$f_{neu}(0) = 2{,}5 \quad \Rightarrow \quad b = 2{,}5$

$f_{neu}(3) = 0 \quad \Rightarrow \quad a \cdot 3^2 + 2{,}5 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{5}{18}$

$f_{neu}(x) = -\frac{5}{18} \cdot x^2 + 2{,}5$

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 4 Analysis
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) 2 Algebra und Geometrie
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) –
b) A Modellieren und Transferieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 1
b) 2
c) 2

Thema: Sonstiges

Quellen: –

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Zylindrische Gefäße

Aufgabennummer: A_055

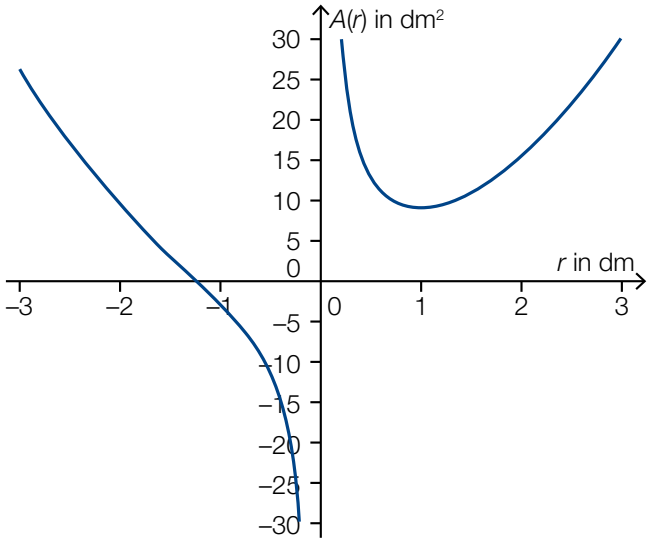
Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Für den Inhalt der Außenfläche eines zylindrischen, oben offenen Gefäßes gilt:

$A(r) = r^2 \cdot \pi + \frac{2 \cdot V}{r}$ mit V = konstant

r … Radius in dm
V … Volumen des Gefäßes in L
$A(r)$ … Flächeninhalt der Außenfläche bei einem Radius r in dm²

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Funktion A für ein Volumen von $V = 3$ L dargestellt.



a) – Beschreiben Sie das Verhalten der Funktion, wenn r gegen 0 strebt.
– Geben Sie unter Berücksichtigung der Tatsache, dass die Funktion A eine Außenfläche beschreiben soll, einen sinnvollen Definitionsbereich an.

b) – Lesen Sie aus dem Graphen die möglichen Radien für eine Außenfläche von 25 dm² ab.
– Begründen Sie, warum es sich nicht um eine Funktion handelt, wenn man den Radius in Abhängigkeit vom Flächeninhalt der Außenfläche betrachtet.

c) – Berechnen Sie denjenigen Radius r, für den der Flächeninhalt der Außenfläche eines oben offenen Zylinders mit dem Volumen $V = 5$ L am geringsten ist.
Runden Sie Ihr Ergebnis auf 1 Nachkommastelle.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Bei einer linksseitigen Annäherung von r an 0 strebt der Funktionswert gegen $-\infty$.
Bei einer rechtsseitigen Annäherung von r an 0 strebt der Funktionswert gegen ∞.
An der Stelle $r = 0$ hat die Funktion eine Polstelle. Der Funktionswert an der Stelle 0 ist nicht definiert.

Definitionsbereich $D = \mathbb{R}^+$

b) Die möglichen Radien sind 0,2 dm und 2,7 dm.
Eine angemessene Ungenauigkeit beim Ablesen der Werte wird toleriert.

Diese Zuordnung ist keine Funktion, da bei dieser Zuordnung einem Wert A aus der Definitionsmenge bis auf eine Ausnahme immer 2 Werte r der Wertemenge zugeordnet werden. Dies widerspricht der Definition einer Funktion.

c) $A'(r) = 2 \cdot r \cdot \pi - \frac{10}{r^2}$

$A'(r) = 0 \quad \Rightarrow \quad r = 1{,}16...$
Bei einem Radius von rund 1,2 dm ist der Flächeninhalt der Außenfläche am geringsten.
(Auf die rechnerische Kontrolle, ob es sich beim berechneten Wert tatsächlich um ein Minimum handelt, kann verzichtet werden, da die Funktion A für $V = 3$ L bereits in der Angabe grafisch dargestellt ist.)

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) —

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) leicht
c) leicht

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2
c) 1

Thema: Alltag

Quellen: —

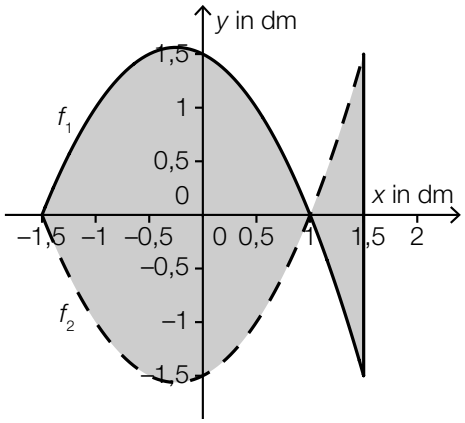
Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Pinboard

Aufgabennummer: A_037

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Es sollen Pinboards in Form eines Fisches angefertigt werden. Die obere und die untere Begrenzungslinie können durch die Funktionen f_1 und f_2 beschrieben werden:



Die Graphen von f_1 und f_2 sind symmetrisch bezüglich der x-Achse. Es gilt:

$f_2(x) = x^2 + \frac{1}{2} \cdot x - \frac{3}{2}$ mit $-1{,}5 \leq x \leq 1{,}5$

x, $f_1(x)$, $f_2(x)$ … Koordinaten in dm

a) – Erstellen Sie eine Formel für den Flächeninhalt A des Fisches mithilfe von f_2.

$A =$ _____

– Berechnen Sie den Flächeninhalt des Fisches.

b) – Argumentieren Sie mithilfe der Differenzialrechnung, dass die Funktion f_2 nur eine lokale Extremstelle und keine Wendestelle hat.

c) Eine Begrenzungslinie eines anderen Pinboards kann durch eine quadratische Funktion f beschrieben werden. Der Graph von f enthält die Punkte $(-1{,}5\,|\,0)$, $(0\,|\,1)$ und $(1\,|\,0)$.

– Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten von f.
– Ermitteln Sie eine Gleichung der Funktion f.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $A = 2 \cdot \left(-\int_{-1,5}^{1} f_2(x)\,dx + \int_{1}^{1,5} f_2(x)\,dx\right)$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$A = 5{,}91\overline{6}\ \text{dm}^2 \approx 5{,}92\ \text{dm}^2$

b) $f_2'(x) = 2 \cdot x + \frac{1}{2}$
$f_2''(x) = 2$

Die 1. Ableitung von f_2 ist eine lineare Funktion und hat somit genau eine Nullstelle. Diese ist die einzige lokale Extremstelle von f_2.

Eine Wendestelle von f_2 kann nur dort vorliegen, wo die 2. Ableitung von f_2 eine Nullstelle hat. Da f_2'' keine Nullstelle hat, kann f_2 keine Wendestelle haben.

c) $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

$f(-1{,}5) = 0$ bzw. $a \cdot (-1{,}5)^2 + b \cdot (-1{,}5) + c = 0$
$f(0) = 1$ bzw. $c = 1$
$f(1) = 0$ bzw. $a + b + c = 1$

Lösung mittels Technologieeinsatz:

$a = -\frac{2}{3},\ b = -\frac{1}{3},\ c = 1$
$f(x) = -\frac{2}{3} \cdot x^2 - \frac{1}{3} \cdot x + 1$

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 4 Analysis
c) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) —
c) A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) leicht
c) leicht

Punkteanzahl:

a) 2
b) 1
c) 2

Thema: Alltag

Quellen: —

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Gletschermarathon Pitztal – Imst

Aufgabennummer: A_039

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Beim Gletschermarathon Pitztal – Imst werden unter anderem die folgenden beiden Bewerbe angeboten:

- Der *Marathonlauf* mit einer Länge von 42,195 km startet um 8:00 Uhr in Mandarfen und führt über Wenns nach Imst.
- Der *Run-&-Fun-Lauf* mit einer Länge von 11,2 km startet um 10:00 Uhr in Wenns und endet ebenfalls in Imst.

Von Wenns bis Imst laufen die Teilnehmer/innen beider Bewerbe auf derselben Strecke.

Im Folgenden soll vereinfacht davon ausgegangen werden, dass die Teilnehmer/innen mit konstanter Geschwindigkeit laufen.

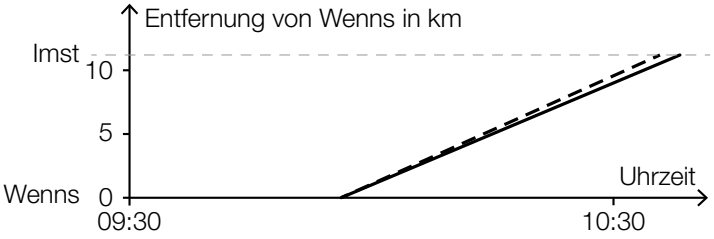
a) Im Jahr 2018 lief der Sieger des Marathonlaufs mit einer mittleren Geschwindigkeit von 16 km/h, der Sieger des Run-&-Fun-Laufs lief mit einer mittleren Geschwindigkeit von 17 km/h.

– Erstellen Sie für beide Läufer jeweils eine Gleichung der Weg-Zeit-Funktion. Verwenden Sie folgende Bezeichnungen:

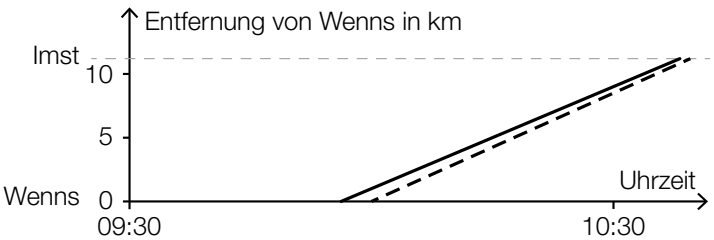
t … Zeit ab dem Start des Marathonlaufs in h
$s_M(t)$ … zurückgelegter Weg des Siegers des Marathonlaufs zur Zeit t in km
$s_R(t)$ … zurückgelegter Weg des Siegers des Run-&-Fun-Laufs zur Zeit t in km

b) Im Jahr 2018 lief der Sieger des Marathonlaufs mit einer mittleren Geschwindigkeit von 16 km/h, der Sieger des Run-&-Fun-Laufs lief mit einer mittleren Geschwindigkeit von 17 km/h.
Eines der nachstehenden Diagramme stellt diese Situation für den Streckenabschnitt von Wenns nach Imst richtig dar.

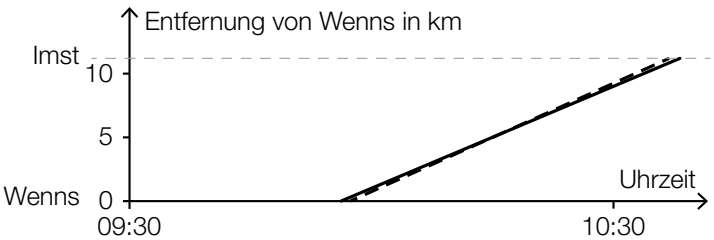
– Kreuzen Sie dieses Diagramm an. *[1 aus 5]*



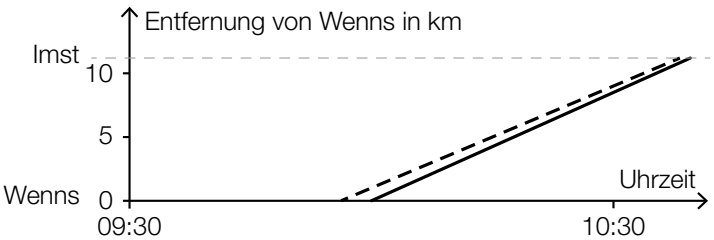
☐



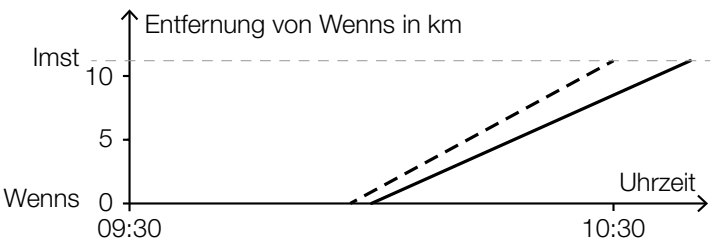
☐



☐



☐



☐

c) Beim Marathonlauf läuft Sabine gleichmäßig mit einer Geschwindigkeit von 11,4 km/h. Hubert geht Sabine um 9:00 Uhr gleichmäßig mit einer Geschwindigkeit von 3,5 km/h vom Zielgelände aus entgegen.
Die Entfernung vom Zielgelände lässt sich näherungsweise durch die folgenden Funktionen beschreiben:

$s_{\text{Sabine}}(t) = 42{,}195 - 11{,}4 \cdot t$
$s_{\text{Hubert}}(t) = 3{,}5 \cdot (t - 1)$

t … Sabines Laufzeit in h
$s(t)$ … Entfernung vom Zielgelände zur Zeit t in km

– Berechnen Sie, wann die beiden einander treffen.

d) Eine Läuferin benötigt für die 11,2 km lange Strecke des Run-&-Fun-Laufs a Minuten und b Sekunden.

– Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung der mittleren Geschwindigkeit v dieser Läuferin in km/h.

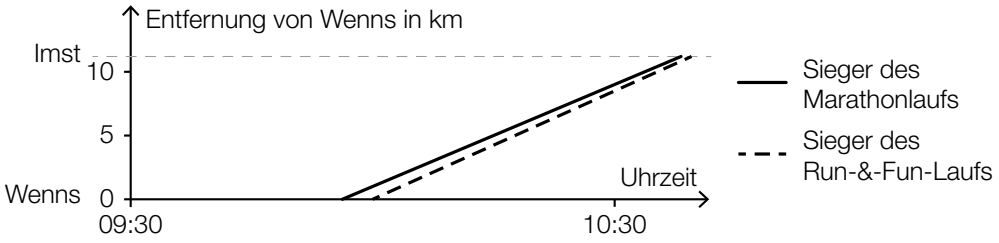
$v =$ _____

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $s_M(t) = 16 \cdot t$
$s_R(t) = 17 \cdot (t - 2)$ bzw. $s_R(t) = 17 \cdot t - 34$

b)

[…]	
	☒
[…]	
[…]	
[…]	

c) $42{,}195 - 11{,}4 \cdot t = 3{,}5 \cdot (t - 1) \quad \Rightarrow \quad t = 3{,}066\ldots$
Die beiden treffen einander nach rund 3,07 Stunden, also um 11:04 Uhr.

d) $v = \dfrac{11{,}2}{\frac{a}{60} + \frac{b}{60^2}}$

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 2 Algebra und Geometrie
d) 1 Zahlen und Maße

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) 3 Funktionale Zusammenhänge
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) —
c) —
d) —

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) schwer
c) leicht
d) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 1
c) 1
d) 1

Thema: Sport

Quellen: —

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

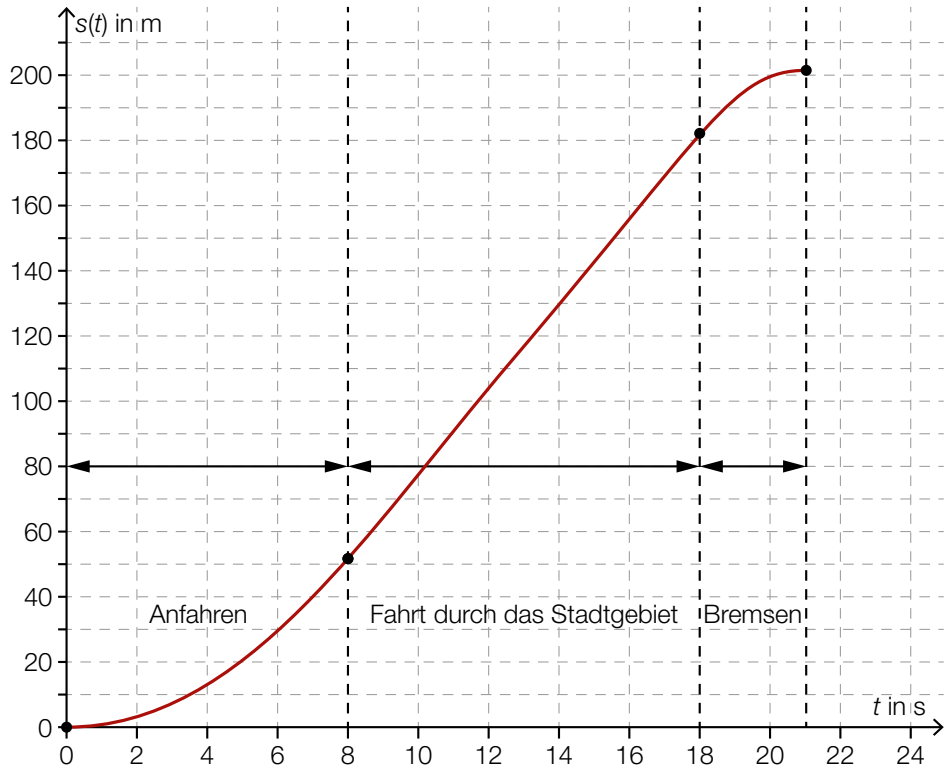
Stadtverkehr

Aufgabennummer: A_034

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Ein Auto im Stadtverkehr steht bei einer roten Ampel, fährt bei Grün an und muss bei der darauffolgenden Ampel wieder abbremsen.

a) Die nachstehende Grafik stellt einen solchen Vorgang dar.



t … Zeit in s
$s(t)$ … zurückgelegter Weg zur Zeit t in m

– Lesen Sie aus der Grafik für das 3. dargestellte Zeitintervall den Bremsweg ab.
– Bestimmen Sie aus dem Graphen die durchschnittliche Geschwindigkeit des Autos im 2. Zeitintervall.

b) Die nächsten beiden Ampeln sind 189 m voneinander entfernt. Die Fahrt des Autos zwischen diesen beiden Ampeln dauert 18 s und kann durch folgende stetige Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v beschrieben werden:

$$v(t) = \begin{cases} 2{,}8 \cdot t & \text{für } 0 \le t \le 5 \\ 14 & \text{für } 5 < t \le 14 \\ a \cdot t + b & \text{für } 14 < t \le 18 \end{cases}$$

t … Zeit in s
$v(t)$ … Geschwindigkeit zur Zeit t in m/s

Die Parameter a und b können mithilfe des folgenden Gleichungssystems berechnet werden:

I: $a \cdot 14 + b =$ ☐

II: $\int_0^5 2{,}8 \cdot t \, dt + 14 \cdot 9 + \int_{14}^{18} (a \cdot t + b) \, dt =$ ☐

– Ergänzen Sie im obigen Gleichungssystem die fehlenden Zahlen in den dafür vorgesehenen Kästchen.

s_2 ist die Weg-Zeit-Funktion für diese Fahrt für das Zeitintervall [5; 14].
$s_2(t)$ … zurückgelegter Weg (ab dem Zeitpunkt $t = 0$) zur Zeit t in m

– Erstellen Sie eine Gleichung der Funktion s_2.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Weg nach 18 s: rund 180 m
Weg nach 21 s: rund 200 m
Der Bremsweg beträgt rund 20 m.
Ableseungenauigkeiten sind zu tolerieren.

$$\frac{180 - 50}{18 - 8} = 13$$

Die Geschwindigkeit des Autos beträgt im 2. Zeitintervall rund 13 m/s.

b) I: $a \cdot 14 + b =$ 14

II: $\int_0^5 2{,}8 \cdot t \, dt + 14 \cdot 9 + \int_{14}^{18} (a \cdot t + b) \, dt =$ 189

$s_2(t) = \int 14 \, dt = 14 \cdot t + C$

$s_2(5) = \int_0^5 2{,}8 \cdot t \, dt \quad \Rightarrow \quad 14 \cdot 5 + C = 35 \quad \Rightarrow \quad C = -35$

$s_2(t) = 14 \cdot t - 35$

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) —

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) schwer

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2

Thema: Verkehr

Quellen: —

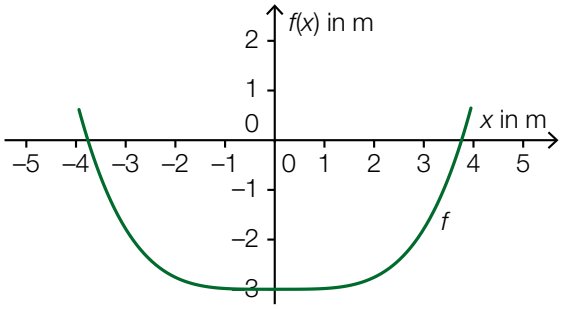
Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Wasserkanal

Aufgabennummer: A_032

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Die Querschnittsfläche eines Kanals ist unten von einer Randkurve begrenzt, die mit der Funktion f beschrieben werden kann, wobei der Wasserspiegel genau entlang der x-Achse verläuft (siehe nachstehende Abbildung).



a) – Dokumentieren Sie, wie man mithilfe der Differenzialrechnung den Winkel der Seitenwände bestimmen kann, den diese jeweils mit der x-Achse einschließen.

b) Für die Funktion f gilt:

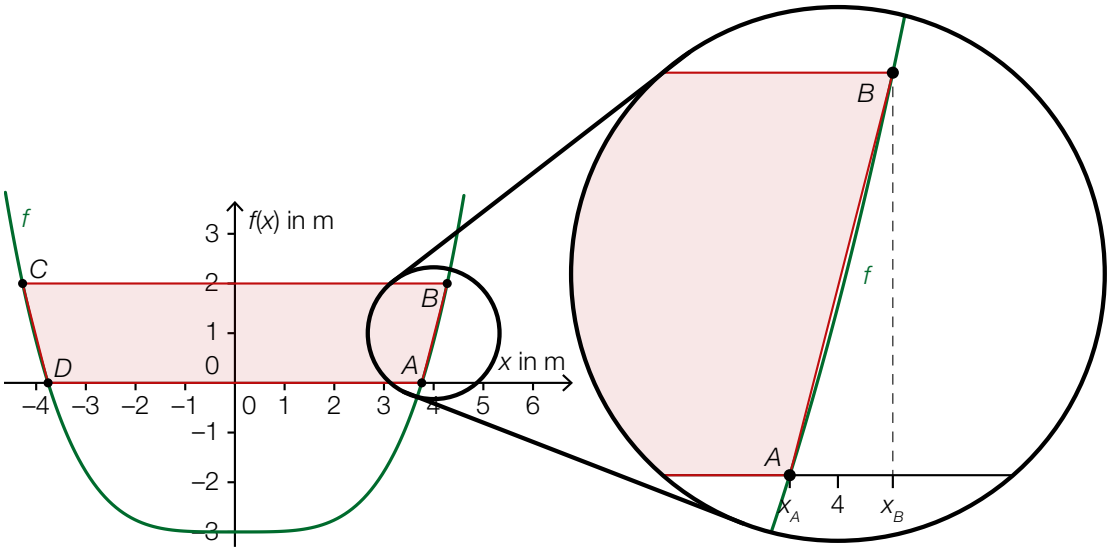
$f(x) = 0{,}015 \cdot x^4 - 3$

x, $f(x)$ ... Koordinaten in m

Das Wasser fließt mit einer Geschwindigkeit von 1,2 m/s durch den Kanal.

– Berechnen Sie, wie viele Kubikmeter Wasser pro Sekunde durch den Kanalquerschnitt fließen.

c) Die Kanalhöhe wird durch Verlängerung der Randkurve bis zu einer Höhe von 2 m über dem Wasserspiegel vergrößert.
Der Flächeninhalt der zusätzlichen Querschnittsfläche kann näherungsweise als Flächeninhalt des Vierecks *ABCD* bestimmt werden. Der Flächeninhalt dieses Vierecks ist um ΔF m² kleiner als der tatsächliche Flächeninhalt der zusätzlichen Querschnittsfläche (siehe nachstehende Abbildung).



vergrößertes Detail aus der Abbildung

– Erstellen Sie eine Formel für ΔF mithilfe von x_A, x_B und f.

$\Delta F =$ _____

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Man muss zuerst die Steigungen des Funktionsgraphen an den beiden Nullstellen berechnen.
Hierzu leitet man die Funktion f ab und setzt die Nullstellen jeweils in die Ableitungsfunktion ein.
Die so erhaltenen Werte entsprechen jeweils dem Tangens des gesuchten Winkels.
Mit dem Arkustangens dieser Werte erhält man die gesuchten Winkel.

b) Berechnung der Nullstellen von f mittels Technologieeinsatz: $x_1 \approx -3{,}76$ m, $x_2 \approx 3{,}76$ m
$\int_{-3,76}^{3,76} (0{,}015 \cdot x^4 - 3)\,dx = 18{,}05$
$A = 18{,}05$ m^2
$V = 18{,}05 \cdot 1{,}2 \approx 21{,}66$

Der Durchfluss beträgt rund 21,66 m^3/s.

c) $\Delta F = 2 \cdot \left(x_B - x_A - \int_{x_A}^{x_B} f(x)\,dx\right)$

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 4 Analysis
c) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 4 Analysis

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) A Modellieren und Transferieren
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) –
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) –

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 1
b) 2
c) 1

Thema: Tiefbau

Quellen: Alexander Schwarz, www.mathe-aufgaben.com;
http://www.mathe-aufgaben.com/aufgaben/abitur/bw-berufliche-gymnasien.html

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Reinanken

Aufgabennummer: A_029

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

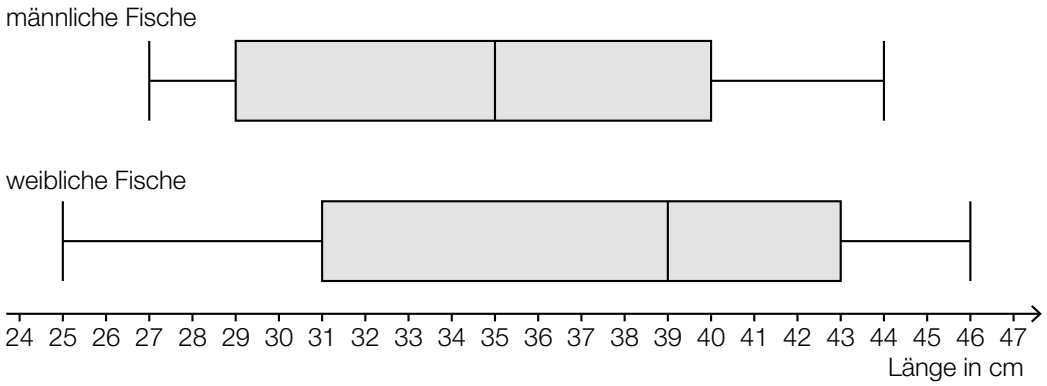
Man hat Längenmessungen an einer bestimmten Sorte von Fischen (Reinanken) im Wörthersee durchgeführt und tabellarisch festgehalten. Die Altersklasse von Fischen wurde dabei in Lebens-Sommern („sömmrig“) angegeben.

Altersklasse (sömmrig)	männliche Fische	weibliche Fische	mittlere Länge in cm
3	18	4	31,4
4	28	10	34,7
5	22	12	38
6	12	8	40,3
7	8	14	44
8	2	10	46,9

a) – Berechnen Sie die relativen Häufigkeiten für das Vorkommen weiblicher Fische in den unterschiedlichen Altersklassen bezogen auf die Gesamtzahl der Fische in der jeweiligen Altersklasse.
– Stellen Sie diese relativen Häufigkeiten in einem Säulendiagramm dar.

b) – Berechnen Sie das arithmetische Mittel der mittleren Längen für alle gefangenen Fische und dokumentieren Sie Ihre Vorgehensweise in Worten.

c) Bei einer Untersuchung der Längen von männlichen und weiblichen Fischen wurden die untenstehenden Boxplots erstellt. Es wurden jeweils 120 Fische untersucht.



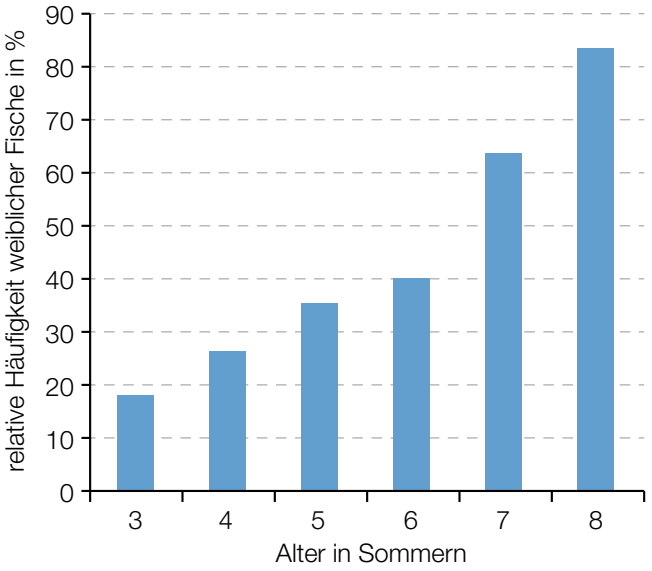
– Vergleichen Sie die Diagramme der männlichen und der weiblichen Fische bezüglich der Aussage des Parameters *Spannweite*.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)

Altersklasse (sömmrig)	relative Häufigkeit weiblicher Fische in Prozent (gerundet)
3	18,2
4	26,3
5	35,3
6	40,0
7	63,6
8	83,3



b) $\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{6} x_i \cdot H_i \approx 38{,}1$ cm

Die einzelnen Werte x_i (mittlere Fischlänge in cm) werden mit der absoluten Häufigkeit H_i ihres Auftretens multipliziert und danach addiert. Diese Summe wird dann durch die Gesamtzahl der Werte n dividiert.

Die mittlere Länge aller gefangenen Fische beträgt rund 38,1 cm.

c) Die Spannweite, also die Differenz zwischen dem kleinsten und dem größten Fisch, ist bei den weiblichen Fischen größer. Sie weisen also hinsichtlich der Länge eine größere Streuung auf:
– weibliche Fische: Min.: 25 cm Max.: 46 cm
– männliche Fische: Min.: 27 cm Max.: 44 cm

Die größten, aber auch die kleinsten Fische sind also weiblich.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 5 Stochastik
c) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) —

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) leicht

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2
c) 1

Thema: Biologie

Quellen: —

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Mountainbike

Aufgabennummer: A_015

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Eine der europaweit steilsten Downhillstrecken für Mountainbiker/innen findet man in der Nordkette bei Innsbruck. Sie führt von der Seegrube (1 905 Meter über dem Meeresspiegel) zur Hungerburg (875 Meter über dem Meeresspiegel).

a) Die Seilbahn, die die Biker/innen nach oben befördert, hat – bei angenommener geradliniger Verbindung zwischen der Seegrube und der Hungerburg – eine Länge von rund 2 885 m.

– Bestimmen Sie auf Grad gerundet den Steigungswinkel der Seilbahn zwischen der Hungerburg und der Seegrube.

b) Die Downhillstrecke ist 4 200 m lang. Im Jahr 2011 lag die Rekordzeit für die Bewältigung der Rennstrecke bei 9 Minuten und 27 Sekunden.

– Berechnen Sie für diesen Fall die durchschnittliche Geschwindigkeit des Bikers in km/h.

c) Die Rennstrecke von der Seegrube zur Hungerburg ist sehr steil und hat Felssprünge und Stufen. Es gibt daher dort kurze Streckenabschnitte mit einem Gefälle von 100 % und mehr.

– Erklären Sie anhand einer Skizze unter Angabe des zugehörigen Neigungswinkels, was man unter einem Gefälle von 100 % versteht.

Die nachstehende Abbildung zeigt einen Biker auf einem weniger steilen Abschnitt:

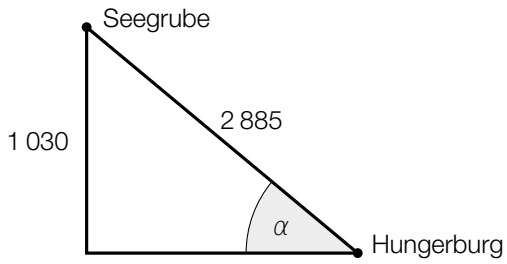


– Schätzen Sie ab, auf wie viel Prozent Gefälle der eingezeichnete Winkel in der oben stehenden Abbildung schließen lässt.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



(Eine Skizze ist nicht erforderlich.)

$\sin(\alpha) = \frac{1\,030}{2\,885} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arcsin\left(\frac{1\,030}{2\,885}\right) = 20{,}9...°$

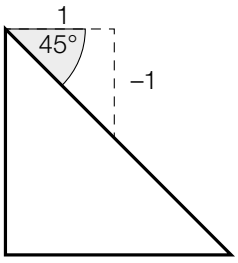
Der Steigungswinkel der Seilbahn beträgt rund 21°.

b) Strecke $s = 4\,200$ m, Zeit $t = 9{,}45$ min

$v = \frac{s}{t} = 444{,}\overline{4}$ m/min $= 26{,}\overline{6}$ km/h

Die durchschnittliche Geschwindigkeit beträgt rund 27 km/h.

c)



Ein Gefälle von 100 % bedeutet, dass der Neigungswinkel 45° beträgt, weil dann das Verhältnis von vertikalem zu horizontalem Abstand zwischen 2 Punkten auf der Strecke gleich –1 ist.
(Falls mit dem positiven Anstieg mit 45° argumentiert wird, so ist das grundsätzlich ebenfalls richtig.)

Der Winkel in der Abbildung beträgt grob geschätzt –15°.
tan(–15°) = –0,267...
Der eingezeichnete Winkel weist auf ein Gefälle von ungefähr 27 % hin.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 1 Zahlen und Maße
c) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) —
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) leicht
c) leicht

Punkteanzahl:

a) 1
b) 1
c) 2

Thema: Sport

Quellen: Daten von http://www.nordkette.com/der-berg-im-sommer/nordkette-singletrail.html
Foto: Werner Madlencnik

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Ortsumfahrung

Aufgabennummer: A_013

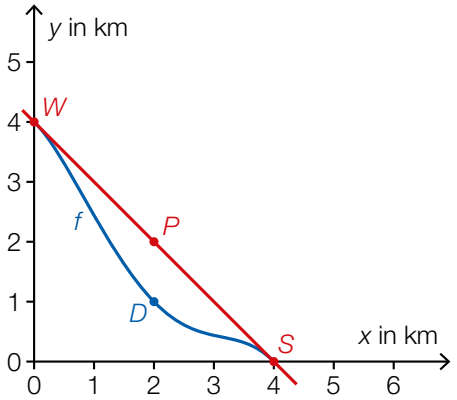
Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Eine große Ortschaft $P = (2|2)$ liegt auf einer geraden Straße zwischen den Dörfern $W = (0|4)$ und $S = (4|0)$. Es soll um die Ortschaft P eine Umfahrungsstraße gebaut werden, die über den Punkt $D = (2|1)$ führt und bei W bzw. S wieder in die gerade Straße einmündet. Die Koordinatenwerte sind in Kilometern angegeben.

a) Eine Umfahrungsstraße, die durch die Funktion

$f(x) = -0{,}0625 \cdot x^4 + 0{,}5 \cdot x^3 - x^2 - x + 4$

beschrieben werden kann, hat den Vorteil, dass sie in den Punkten S und W tangential in die ursprüngliche Straße einmündet.



– Zeigen Sie durch Berechnung, dass die Gerade durch die Punkte S und W in diesen beiden Punkten eine Tangente an die Funktion f ist.

b) Eine Umfahrungsvariante soll im Definitionsbereich $0 \leq x \leq 4$ durch eine quadratische Funktion h beschrieben werden, die die Punkte W, D und S enthält.

– Stellen Sie eine Gleichung der Funktion h auf.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Anstieg der Geraden g durch S und W: $k = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, $k = -1$

Gleichung der Geraden: $g(x) = -x + 4$

Die Steigungen (der Tangenten) von f in den Punkten W ($x = 0$) und S ($x = 4$) erhält man über die 1. Ableitung:

$f'(x) = -0{,}25 \cdot x^3 + 1{,}5 \cdot x^2 - 2 \cdot x - 1$
$f'(0) = -1$ und $f'(4) = -1$

Der Anstieg ist in beiden Punkten gleich, nämlich $k = -1$.
Die Punkte $(0|4)$ und $(4|0)$ liegen auf den Graphen von f und g, daher gilt:

Die Tangente in beiden Punkten hat die Gleichung $y = -x + 4$ und dies entspricht der Geraden $g(x)$, die die alte Straßenführung beschreibt.

b) $h(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

$h(0) = 4 \quad \Rightarrow \quad c = 4$
$h(4) = 0 \quad \Rightarrow \quad 16 \cdot a + 4 \cdot b + 4 = 0$
$h(2) = 1 \quad \Rightarrow \quad 4 \cdot a + 2 \cdot b + 4 = 1$

Lösen des Gleichungssystems:
$a = 0{,}25, \; b = -2, \; c = 4$

$h(x) = 0{,}25 \cdot x^2 - 2 \cdot x + 4$

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2

Thema: Verkehr

Quellen: —

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Kleintransporte

Aufgabennummer: A_012

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Ein privates Kleintransportunternehmen berechnet für eine Fahrt eine Grundgebühr und ein Kilometergeld.

a) – Argumentieren Sie, welcher der 3 angegebenen Graphen die Abhängigkeit der Gesamtkosten einer Fahrt von der Fahrtstrecke bei diesem Unternehmen wiedergibt.

Abbildung 1

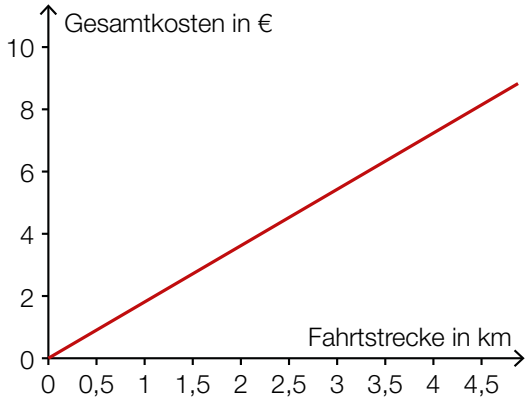


Abbildung 2

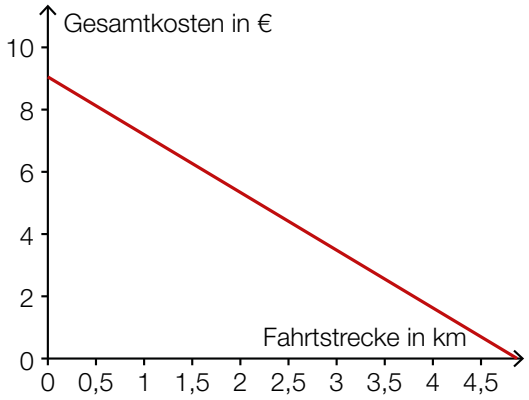
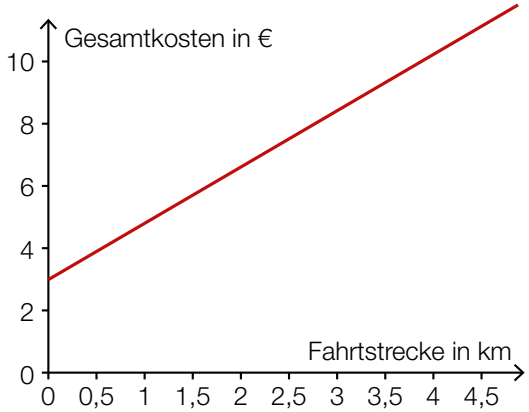


Abbildung 3



b) Das Unternehmen berechnet unterschiedliche Tarife für 2 verschiedene Kleintransporter:

1. Transporter: Grundgebühr … € 3,60; Preis pro gefahrenem Kilometer … € 1,40
2. Transporter: Grundgebühr … € 1,90; Preis pro gefahrenem Kilometer … € 1,80

– Ermitteln Sie, bei welcher Fahrtstrecke bei beiden Kleintransportern gleich hohe Kosten anfallen.
– Argumentieren Sie, welcher der beiden Transporter bei längerer Fahrtstrecke günstiger ist.

c) Für die Fahrt mit einem 3. Kleintransporter werden € 3 Grundgebühr und ein Kilometergeld von € 1,70 berechnet. Für die Zeit zum Be- und Entladen kommen zusätzlich pro Minute 11 % der Grundgebühr hinzu.
Dieser Transporter wird für eine Fahrtstrecke von 10 km gemietet.

– Erstellen Sie eine Funktion, die die Gesamtkosten in Abhängigkeit von der Ladezeit beschreibt.
– Berechnen Sie diejenige Zeit zum Be- und Entladen, bei der die Gesamtkosten doppelt so hoch sind wie ohne Ladezeit.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Bei den Tarifen des privaten Unternehmens handelt es sich um eine steigende lineare Funktion, deren Graph wegen der fixen Grundgebühr nicht durch den Ursprung gehen kann. Daher ist der 3. Graph richtig.

b) $1{,}4 \cdot x + 3{,}6 = 1{,}8 \cdot x + 1{,}9$
$x = 4{,}25$
Bei einer Fahrtstrecke von 4,25 km fallen bei beiden Kleintransportern gleich hohe Kosten an.

Der 2. Transporter hat eine geringere Grundgebühr, aber einen höheren Preis pro gefahrenem Kilometer. Der 2. Transporter ist daher bis zu einer Fahrtstrecke von weniger als 4,25 km günstiger. Bei längerer Fahrtstrecke ist der 1. Transporter günstiger.

c) $K(t) = 3 + 1{,}7 \cdot 10 + 0{,}33 \cdot t$
$K(t) = 20 + 0{,}33 \cdot t$

t … Ladezeit in Minuten
$K(t)$ … Gesamtkosten bei der Ladezeit t in Euro

$2 \cdot K(0) = K(t)$
$2 \cdot 20 = 20 + 0{,}33 \cdot t$
$t = 60{,}\overline{60}$

Bei einer Ladezeit von etwa 61 Minuten sind die Gesamtkosten doppelt so hoch wie ohne Ladezeit.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) 1 Zahlen und Maße

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) leicht
c) leicht

Punkteanzahl:

a) 1
b) 2
c) 2

Thema: Verkehr

Quellen: —

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Wanderweg

Aufgabennummer: A_005

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Ein Wanderweg führt von Klessheim zum 10 km entfernten Ort Siezenheim.

a) Renate geht auf diesem Weg mit gleichbleibender Geschwindigkeit von Klessheim in Richtung Siezenheim. Nach 1 Stunde und 6 Minuten ist sie 4,4 km von Klessheim entfernt. Jim startet zum gleichen Zeitpunkt wie Renate. In 1 Stunde läuft er von Siezenheim nach Klessheim.

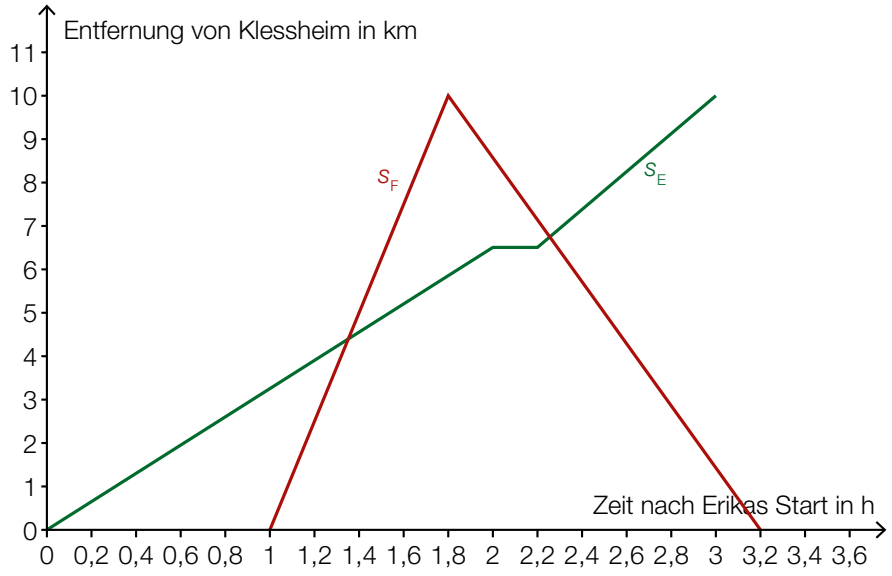
Die Bewegungen von Renate und Jim können durch die Weg-Zeit-Funktionen s_R und s_J beschrieben werden.

t … Zeit in h
$s_R(t)$, $s_J(t)$ … Renates bzw. Jims Entfernung von Klessheim zur Zeit t in km

– Stellen Sie jeweils eine Gleichung der Funktion s_R und der Funktion s_J auf.

b) In der unten stehenden Abbildung sind die Weg-Zeit-Diagramme von Erika (s_E) und Fritz (s_F) dargestellt, die diesen Wanderweg benützen.

– Interpretieren Sie die Abbildung hinsichtlich Richtung und Geschwindigkeit von Erika und Fritz.



c) Lore und Nena sind in entgegengesetzten Richtungen auf diesem Weg unterwegs. Lore bricht von Siezenheim auf. Nena geht eine Stunde später als Lore von Klessheim weg. Lores Entfernung von Klessheim kann durch die Funktion s_L und jene von Nena durch die Funktion s_N beschrieben werden.

$s_L(t) = 10 - \frac{68}{11} \cdot t$
$s_N(t) = 12{,}5 \cdot (t - 1)$

t … Lores Gehzeit in h
$s_L(t)$, $s_N(t)$ … Entfernungen von Klessheim zur Zeit t in km

– Berechnen Sie, wie lange Lore bis zum Treffpunkt unterwegs ist. Geben Sie diesen Zeitpunkt in Stunden und Minuten genau an.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Renate geht 4,4 km in 1,1 h.

Geschwindigkeit: $\frac{4{,}4 \text{ km}}{1{,}1 \text{ h}} = 4 \text{ km/h}$

$s_R(t) = 4 \cdot t$
$s_J(t) = -10 \cdot t + 10$

b) Erika geht mit einer gleichbleibenden Geschwindigkeit von Klessheim weg. Nach 2 Stunden Gehzeit erreicht sie einen 6,5 km von Klessheim entfernten Rastplatz. Ihre durchschnittliche Wandergeschwindigkeit war daher 3,25 km/h. Nach einer Pause von 12 Minuten geht sie etwas rascher weiter und erreicht nach 0,8 Stunden Siezenheim. Die Geschwindigkeit auf dem letzten Wegabschnitt beträgt ca. 4,4 km/h.

Fritz läuft 1 Stunde später als Erika von Klessheim mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von 12,5 km/h weg. Er erreicht Siezenheim nach 48 Minuten, kehrt dort um und läuft den Weg nach Klessheim langsamer zurück. Er benötigt für die Strecke zurück 1,4 Stunden, hat daher eine Geschwindigkeit von rund 7,14 km/h.

Die Ablesung ist nicht ganz genau möglich, Toleranz bei ungenauer Ablesung ist notwendig. Das Interpretieren ist eine offene Aufgabe und nur sinngemäß in obiger Weise möglich. Es geht um folgende Stichworte: Länge und Richtung der zurückgelegten Strecken, markante Zeitpunkte und die Geschwindigkeiten.

c) $s_L(t) = s_N(t)$

$10 - \frac{68}{11} \cdot t = 12{,}5 \cdot (t - 1)$

$t = 1{,}204...$

0,204... h = 12,262... min

Lore trifft nach insgesamt 1 Stunde und 12 Minuten Gehzeit auf Nena.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) —
c) —

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) leicht
c) leicht

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2
c) 2

Thema: Physik

Quellen: —

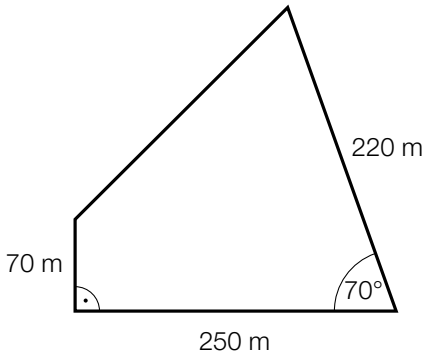
Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Vergnügungspark (3)

Aufgabennummer: B_033

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Im Wiener Prater soll ein Grundstück mit der nachstehend dargestellten Form zur Aufstellung neuer Attraktionen erfasst werden.



– Berechnen Sie den Flächeninhalt des Grundstücks.

Folgende Aussagen beziehen sich auf die Berechnung von Seiten und Winkeln allgemeiner Dreiecke.

– Kreuzen Sie die zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]*

Wenn 3 Seiten eines Dreiecks bekannt sind, kann mit dem Sinussatz ein Winkel bestimmt werden.	☐
Wenn 2 Seiten eines Dreiecks bekannt sind, dann kann die nicht gegebene Seite in jedem Fall mit dem Satz des Pythagoras bestimmt werden.	☐
Wenn 2 Seiten und ein beliebiger Winkel eines Dreiecks bekannt sind, dann kann die nicht gegebene Seite in jedem Fall mit dem Cosinussatz bestimmt werden.	☐
Wenn genau 1 Seite und genau 1 Winkel eines Dreiecks bekannt sind, dann kann mithilfe des Sinussatzes eine andere Seite bestimmt werden.	☐
Wenn 3 Winkel eines Dreiecks bekannt sind, dann kann eine Seite mit dem Sinussatz bestimmt werden.	☐

b) Die Fahrt eines Achterbahnwagens kann während der ersten 10 Sekunden durch die Beschleunigung-Zeit-Funktion *a* beschrieben werden. Zu Beginn der Fahrt steht der Wagen still.

$a(t) = 0{,}4 \cdot t$ mit $0 \leq t \leq 10$

t … Zeit in s
$a(t)$ … Beschleunigung zur Zeit t in m/s^2

– Stellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Geschwindigkeit-Zeit-Funktion *v* auf.
– Zeichnen Sie den Graphen der Funktion *v*.
– Berechnen Sie, welche Geschwindigkeit in km/h der Wagen nach 10 Sekunden erreicht hat.
– Ermitteln Sie die mittlere Geschwindigkeit des Wagens im Intervall [5; 10].

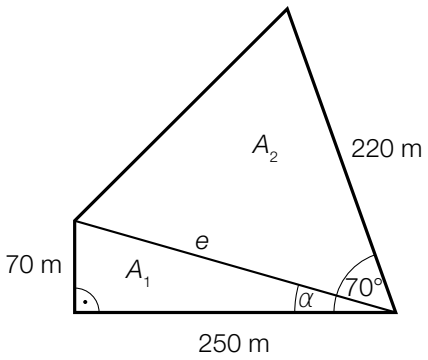
c) Erfahrungsgemäß weiß man, dass bei einer Achterbahnfahrt 5 % der Fahrgäste übel wird. 30 Personen werden zufällig ausgewählt.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 2 der ausgewählten Personen während der Achterbahnfahrt übel wird.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Die Fläche kann z. B. in 2 Dreiecke zerlegt werden.



Berechnung:

$A_1 = \frac{250 \cdot 70}{2} = 8\,750 \text{ m}^2$

$e = \sqrt{70^2 + 250^2} = 259{,}615\ldots \text{ m}$

$\alpha = \arctan\left(\frac{70}{250}\right) = 15{,}642\ldots°$

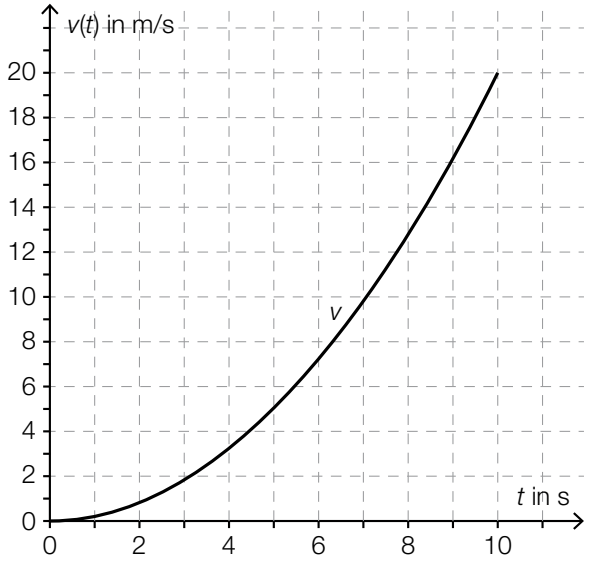
$A_2 = \frac{1}{2} \cdot e \cdot 220 \cdot \sin(70° - \alpha) = 23\,207{,}991\ldots \text{ m}^2$

$A_{\text{gesamt}} = A_1 + A_2 = 31\,957{,}9...$

$A_{\text{gesamt}} = 31\,958 \text{ m}^2$

Wenn 2 Seiten und ein beliebiger Winkel eines Dreiecks bekannt sind, dann kann die nicht gegebene Seite in jedem Fall mit dem Cosinussatz bestimmt werden.	☒

b) $v(t) = \int a(t)\,dt = 0{,}4 \cdot \frac{t^2}{2} + C$ mit $C = 0$ (Anfangsgeschwindigkeit = 0)
also: $v(t) = 0{,}2 \cdot t^2$



$v(10) = 0{,}2 \cdot 10^2 = 20$ m/s
20 m/s = 20 · 3,6 km/h = 72 km/h

$s(t) = \int v(t)\,dt = \frac{2}{30} \cdot t^3 + C$
mittlere Geschwindigkeit: $\overline{v} = \frac{s(10) - s(5)}{10 - 5} = \frac{58{,}\overline{3}}{5} = 11{,}66...$

Die mittlere Geschwindigkeit im Intervall [5; 10] beträgt rund 11,7 m/s.

c) Binomialverteilung:
X … Anzahl der Personen, denen während der Achterbahnfahrt übel wird
$n = 30$, $p = 0{,}05$
Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$P(X > 2) = P(X \geq 3) = 0{,}18782… \approx 18{,}78\ \%$

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 4 Analysis
c) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren, A Modellieren und Transferieren
b) A Modellieren und Transferieren
c) –

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 3
b) 4
c) 1

Thema: Freizeit

Quellen: –

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Arbeitslosigkeit

Aufgabennummer: A_065

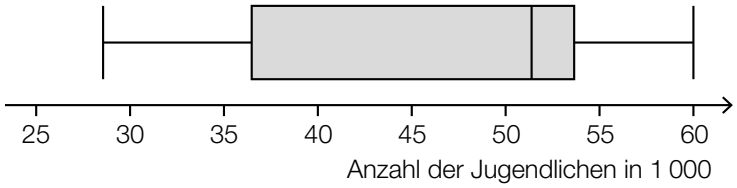
Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Die nachstehende Tabelle zeigt die Entwicklung der Arbeitslosigkeit in Österreich von 1994 bis 2011.

Jahr	Anzahl der Arbeitslosen in 1 000
1994	133,9
1995	139,3
1996	155,4
1997	158,9
1998	159,6
1999	141,6
2000	133,8
2001	137,1
2002	156,2
2003	169,6
2004	194,6
2005	207,7
2006	195,6
2007	185,6
2008	162,3
2009	204,4
2010	188,2
2011	179,0

– Berechnen Sie die Spannweite der Arbeitslosenzahlen im angegebenen Zeitraum.
– Berechnen Sie, wie viel Prozent des Höchststands der niedrigste Stand an Arbeitslosen beträgt.
– Stellen Sie die Daten aus der Tabelle in einem Liniendiagramm dar.

b) Im nachstehenden Boxplot ist die Anzahl arbeitsloser Jugendlicher im Alter von 15 bis 24 Jahren für die Jahre 1994 bis 2011 dargestellt.



– Lesen Sie aus dem obigen Boxplot den Median und das 1. Quartil ab.
– Erklären Sie deren Bedeutung.

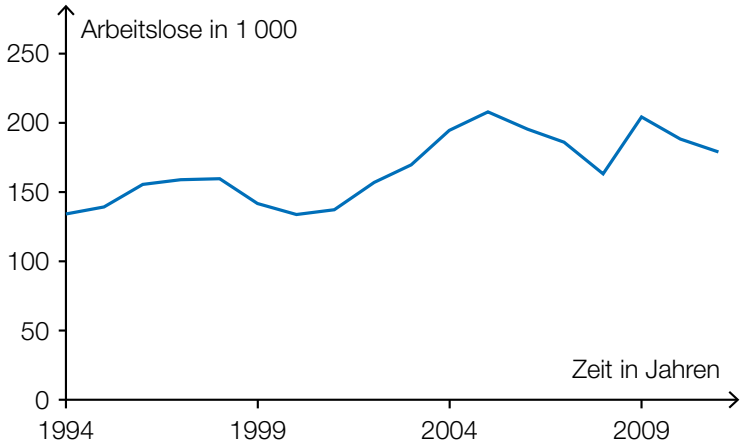
Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) höchste Arbeitslosigkeit: 207 700
geringste Arbeitslosigkeit: 133 800
Spannweite: 73 900

$$\frac{133\,800}{207\,700} = 0{,}64419...$$

Der niedrigste Stand an Arbeitslosen in diesen Jahren beträgt rund 64,42 % des Höchststands.



b) Der Median liegt bei rund 51 500 (Toleranzbereich: [51 000; 52 000], das 1. Quartil bei rund 36 500 (Toleranzbereich: [36 000; 37 000]) arbeitslosen Jugendlichen.

Median: rund 50 % aller Merkmalswerte liegen rechts bzw. links vom Median
1. Quartil: rund 25 % aller Merkmalswerte liegen links vom 1. Quartil

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) 1 Zahlen und Maße
b) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) D Argumentieren und Kommunizieren

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) leicht

Punkteanzahl:

a) 3
b) 2

Thema: Alltag

Quelle: Statistik Austria, 22.03.2012

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Wasserverbrauch

Aufgabennummer: A_058

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

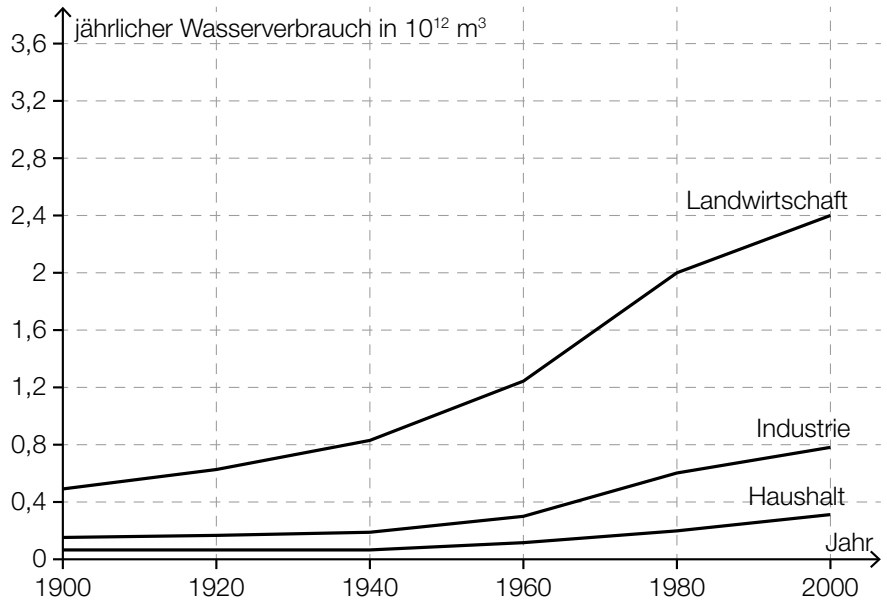
a) Durch die schadhafte Dichtung eines Wasserhahns gehen pro Stunde 0,2 Liter Wasser verloren.

– Berechnen Sie die dadurch entstehenden Mehrkosten in einem Jahr, wenn das Wasserwerk pro Kubikmeter Wasser € 2,50 verrechnet.

b) Ein Schwimmbecken wird über den Zufluss in 15 Stunden gefüllt. Über den Abfluss dauert es 20 Stunden, bis das volle Becken geleert ist.
Beim Füllen des Beckens war der Abfluss unbemerkt 4 Stunden lang offen.

– Erstellen Sie eine Gleichung zur Berechnung der Füllzeit des Schwimmbeckens.
– Berechnen Sie die Füllzeit des Schwimmbeckens.

c) Die nachstehende Grafik zeigt den ungefähren weltweiten jährlichen Wasserverbrauch in den Jahren von 1900 bis 2000.



– Ermitteln Sie grafisch den ungefähren Gesamtverbrauch für Landwirtschaft, Industrie und Haushalt im Jahr 2000.
– Ermitteln Sie, um wie viel Prozent der jährliche Wasserverbrauch im Bereich *Landwirtschaft* im Jahr 1980 höher als im Jahr 1900 war.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

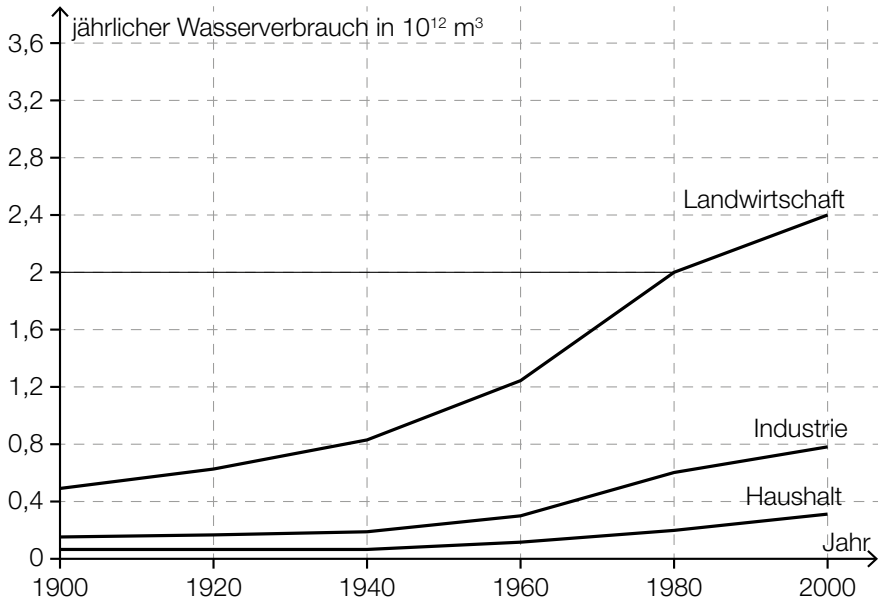
Möglicher Lösungsweg

a) Menge pro Tag: 0,2 L · 24 = 4,8 L
Menge pro Jahr: 4,8 L · 365 = 1 752 L = 1,752 m^3
Kosten: 1,752 m^3 · € 2,50/m^3 = € 4,38
Durch die schadhafte Dichtung entstehen in einem Jahr Mehrkosten von € 4,38.

b) V … Gesamtfüllmenge des Schwimmbeckens
Zuflussmenge pro Stunde: $\frac{V}{15}$
Abflussmenge pro Stunde: $\frac{V}{20}$
Der Abfluss ist 4 Stunden offen.

x … Anzahl der Stunden, die der Zufluss offen sein muss
$V = \frac{V \cdot x}{15} - \frac{V \cdot 4}{20}$
$x = 18$
Die Füllung dauert 18 Stunden.

c)



Gesamtverbrauch im Jahr 2000: rund 3,5 · 10^{12} m^3

Verbrauch 1900: ca. 0,5 · 10^{12} m^3
Verbrauch 1980: ca. 2 · 10^{12} m^3
$\frac{2 \cdot 10^{12} - 0{,}5 \cdot 10^{12}}{0{,}5 \cdot 10^{12}} = 3$
Der jährliche Wasserverbrauch im Bereich *Landwirtschaft* war im Jahr 1980 um rund 300 % höher als im Jahr 1900.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 1 Zahlen und Maße
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) A Modellieren und Transferieren
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) –
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) –

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) schwer
c) leicht

Punkteanzahl:

a) 1
b) 2
c) 2

Thema: Alltag

Quellen: –

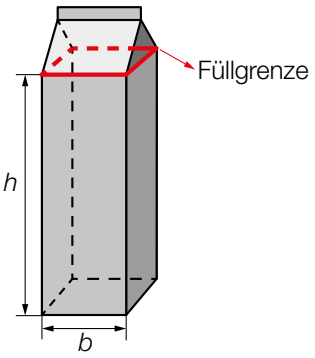
Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Milchverpackung

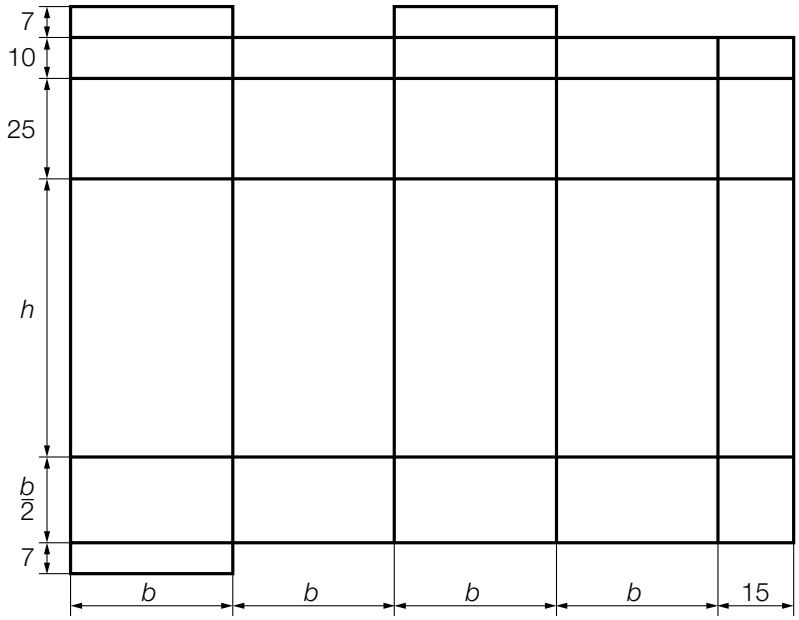
Aufgabennummer: A_052

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Milch wird in verschiedenen Verpackungen angeboten. Eine Möglichkeit ist ein quaderförmiger Getränkekarton mit Giebel (siehe nebenstehende Abbildung).



a) Das Fassungsvermögen bis zur Füllgrenze beträgt genau 1 L. Der Getränkekarton wird aus folgendem Schnittmuster hergestellt (Maße in Millimetern):

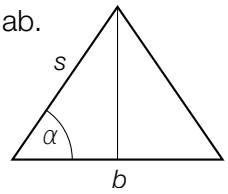


O ist der Oberflächeninhalt (Materialverbrauch ohne Verschnitt) eines solchen Getränkekartons in mm^2.

– Erstellen Sie mithilfe von b und anhand des Schnittmusters und der angegebenen Füllmenge eine Formel zur Berechnung von O.

O = _____

b) Der Materialverbrauch für den Giebel hängt von der Steilheit des Giebels ab.



– Erstellen Sie mithilfe von α und b eine Formel zur Berechnung von s.

$s =$ _____

Für $\alpha = 35°$ ist die Seitenlänge s nur von b abhängig.

– Zeichnen Sie den Graphen der zugehörigen Funktion für $b \in]0\text{ mm}; 100\text{ mm}]$.

c) Die Milchverpackungen werden maschinell ausgestanzt. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine bestimmte Maschine eine Milchverpackung korrekt ausstanzt, beträgt 96 %. Bei einer Qualitätsprüfung der Produktion werden 4 zufällig ausgewählte Milchverpackungen kontrolliert.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass unter den kontrollierten Milchverpackungen mindestens 1 Milchverpackung fehlerhaft ist.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $O = 4 \cdot \left(b \cdot \frac{b}{2} + b \cdot h + b \cdot 25 + b \cdot 10\right) + 3 \cdot b \cdot 7 + 15 \cdot \frac{b}{2} + 15 \cdot h + 15 \cdot 25 + 15 \cdot 10$

$V = 1\ \text{dm}^3 = 10^6\ \text{mm}^3$

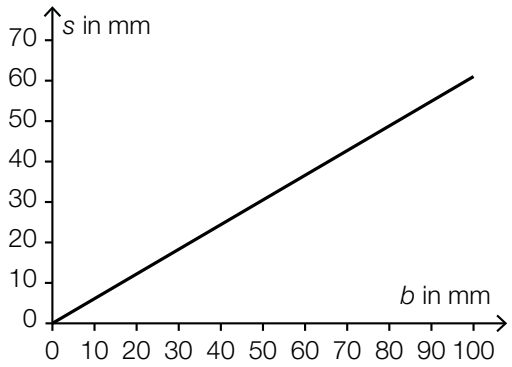
$b^2 \cdot h = 10^6 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{10^6}{b^2}$

$O = 2 \cdot b^2 + \frac{4 \cdot 10^6}{b} + 100 \cdot b + 40 \cdot b + 21 \cdot b + 7{,}5 \cdot b + 15 \cdot \frac{10^6}{b^2} + 375 + 150$

$O = 2 \cdot b^2 + 168{,}5 \cdot b + \frac{4 \cdot 10^6}{b} + \frac{15 \cdot 10^6}{b^2} + 525$

b) $s = \frac{b}{2 \cdot \cos(\alpha)}$

$\alpha = 35° \quad \Rightarrow \quad s(b) = \frac{b}{2 \cdot \cos(35°)} = 0{,}61... \cdot b$



c) X … Anzahl der Milchverpackungen, die nicht korrekt ausgestanzt wurden

$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}96^4 = 0{,}150...$

Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 1 Milchverpackung nicht korrekt ausgestanzt wurde, beträgt rund 15 %.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) 2 Algebra und Geometrie
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) A Modellieren und Transferieren
c) –

Schwierigkeitsgrad:

a) schwer
b) mittel
c) leicht

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2
c) 1

Thema: Alltag

Quellen: –

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Fräsmaschine

Aufgabennummer: A_038

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Für eine Fräsmaschine werden 18 Rohlinge (das sind Werkstücke, die noch weiterbearbeitet werden müssen) geliefert.

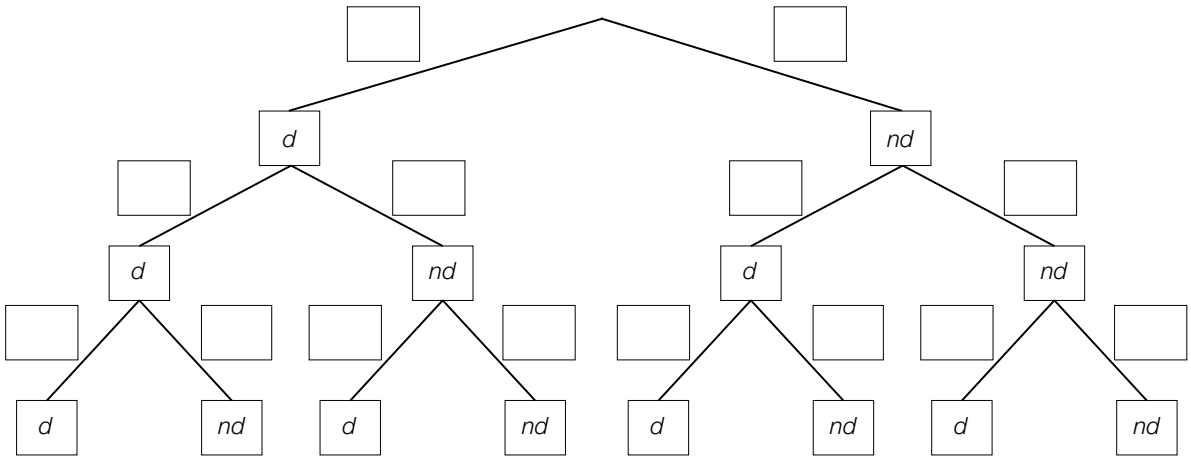
a) Die Rohlinge werden in 3 Behältern geliefert. Im ersten Behälter befinden sich 6 Rohlinge, im zweiten Behälter 5 Rohlinge und im dritten Behälter 7 Rohlinge. Aufgrund von Transportschädigung befindet sich in jedem Behälter je 1 defekter Rohling.

Jedem Behälter wird genau 1 Rohling entnommen. Von diesen 3 Rohlingen ist keiner defekt.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis.

b) Umbauarbeiten an der Maschine erfordern eine Umstellung. Die 18 Rohlinge werden nun in einem Behälter geliefert, der 3 defekte Rohlinge enthält. Aus dem Behälter werden ohne Zurücklegen 3 Rohlinge zufällig gezogen. Von diesen 3 Rohlingen sind 2 defekt.

d … defekt, *nd* … nicht defekt



– Beschreiben Sie, ohne die Rechnung durchzuführen, die erforderlichen Lösungsschritte, die zur Ermittlung der Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses notwendig sind.
– Ergänzen Sie im obigen Baumdiagramm die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten.

c) Der Abteilungsleiter soll für die 13 Arbeiter im April (30 Tage) einen Dienstplan für die Fräsmaschine erstellen. Neben den Vollzeitarbeitern (mit einem 100%igen Beschäftigungsgrad) gibt es auch Teilzeitarbeiter. Teilzeitarbeiter leisten eine ihrem prozentuellen Beschäftigungsgrad entsprechende Anzahl an Schichten. Die Anzahl der Arbeiter und der Beschäftigungsgrad sind in der folgenden Tabelle angegeben:

Anzahl der Arbeiter	Beschäftigungsgrad der Arbeiter in %
5	100
4	75
4	50

Die Fräsmaschine benötigt zur Bedienung 2 Arbeiter pro Schicht. Es wird in 2 Schichten pro Tag gearbeitet.

– Berechnen Sie, wie viele Schichten auf jeden Arbeiter entfallen.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Ereignis E = „keine defekten Rohlinge in der Auswahl“
nd … nicht defekt

$$P(E) = \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} = \frac{4}{7} = 0{,}571...$$

Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „keine defekten Rohlinge in der Auswahl“ beträgt rund 57 %.

b) Ereignis E = „von 3 entnommenen Rohlingen sind genau 2 defekt“

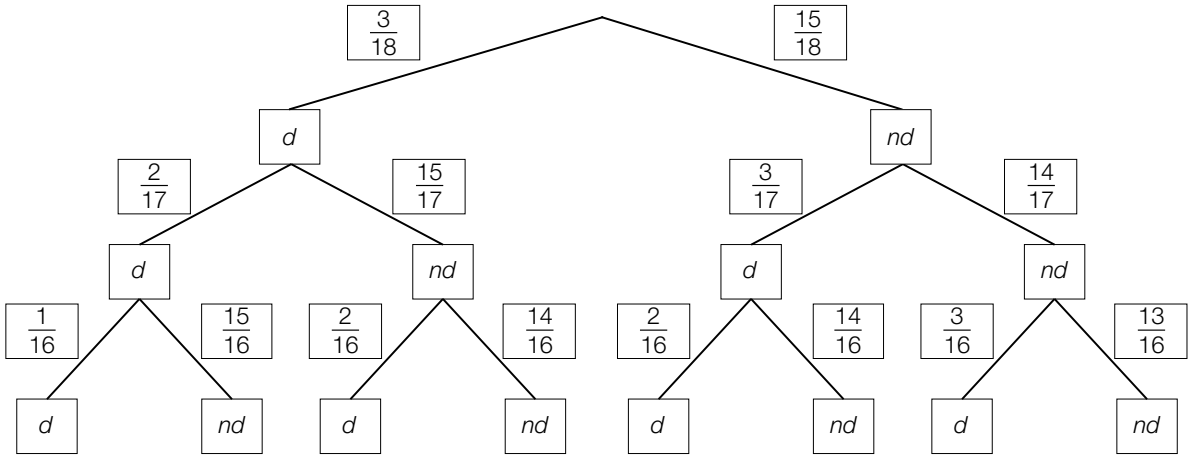
Um die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E zu ermitteln, sind folgende Schritte notwendig:

1. Die Wahrscheinlichkeiten der zu dem Ereignis gehörenden Pfade ermitteln:

$P(„d, d, nd“) = P(„d“) \cdot P(„d“) \cdot P(„nd“)$
$P(„d, nd, d“) = P(„d“) \cdot P(„nd“) \cdot P(„d“)$
$P(„nd, d, d“) = P(„nd“) \cdot P(„d“) \cdot P(„d“)$

2. Addieren der Wahrscheinlichkeiten:

$P(E) = P(„d, d, nd“) + P(„d, nd, d“) + P(„nd, d, d“)$



c) x … Anzahl der Schichten eines Vollzeitarbeiters

$5 \cdot x + 4 \cdot 0{,}75 \cdot x + 4 \cdot 0{,}5 \cdot x = 120$
$x = 12$ Schichten

Anzahl der Arbeiter	Beschäftigungsgrad der Arbeiter in %	Anzahl der Schichten
5	100	12
4	75	9
4	50	6

Die Arbeiter mit dem 100%igen Beschäftigungsausmaß leisten 12 Schichten, jene mit dem 75%igen Beschäftigungsausmaß 9 Schichten und jene mit dem 50%igen Beschäftigungsausmaß 6 Schichten.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 5 Stochastik
c) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) —
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 1
b) 2
c) 2

Thema: Produktion

Quellen: —

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Hefepilze

Aufgabennummer: A_030

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

In einer Petrischale (kreisrunde Glasschale mit ebenem Boden) wird eine Hefekultur angesetzt. Der Inhalt der mit Hefepilzen bedeckten Fläche lässt sich durch die folgende Funktion A beschreiben:

$$A(t) = c \cdot \frac{e^{a \cdot t}}{e^{a \cdot t} + 80}$$

t … Zeit in h
$A(t)$ … Inhalt der mit Hefepilzen bedeckten Fläche zur Zeit t in cm²
a, c … positive Parameter

a) Zu Beobachtungsbeginn ($t = 0$) ist in der Schale eine Fläche von 1 cm² mit Hefepilzen bedeckt. Nach 24 Stunden hat sich die bedeckte Fläche auf 9 cm² vergrößert.

– Bestimmen Sie die Parameter c und a.

b) – Zeichnen Sie den Graphen der Funktion A für $c = 40$ und $a = 0{,}1$ im Intervall [0 h; 100 h].
– Interpretieren Sie anhand der Grafik die Bedeutung des Parameters c im gegebenen Sachzusammenhang.

c) – Erklären Sie, wie man mithilfe der Differenzialrechnung denjenigen Zeitpunkt berechnet, zu dem der Inhalt der mit Hefepilzen bedeckten Fläche in der Schale am schnellsten zunimmt.

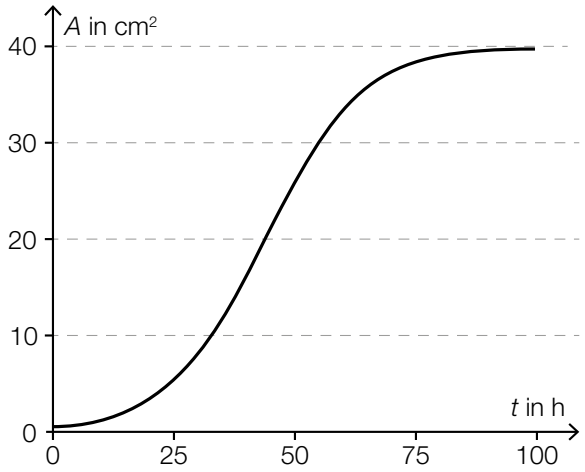
Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $A(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad c \cdot \frac{e^{a \cdot 0}}{e^{a \cdot 0} + 80} = 1 \quad \Rightarrow \quad c = 81$

$A(24) = 9 \quad \Rightarrow \quad 81 \cdot \frac{e^{24 \cdot a}}{e^{24 \cdot a} + 80} = 9 \quad \Rightarrow \quad a = 0{,}0959...$

b)



Der Graph von A nähert sich asymptotisch dem Wert 40 an. Die Hefepilze bedecken also auf lange Sicht gesehen eine Fläche von (fast) 40 cm², wachsen aber nie darüber hinaus.

c) Man berechnet die Nullstelle der 2. Ableitung von A.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) D Argumentieren und Kommunizieren

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) —

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) leicht
c) leicht

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2
c) 1

Thema: Chemie, Biologie

Quellen: —

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Erdbeben

Aufgabennummer: A_027

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Die Stärke von Erdbeben wird meist auf der Richterskala angegeben. Dabei wird der Ausschlag gemessen, den ein Erdbeben auf einem Seismographen (Messgerät) verursacht, und so die Magnitude M ermittelt.

a) Für die bei einem Erdbeben freigesetzte Energie gilt:

$E(M) = 63 \cdot 10^{1,5 \cdot M}$

M ... Magnitude (Maß für die Stärke von Erdbeben)
$E(M)$ ... freigesetzte Energie bei der Magnitude M in Kilojoule (kJ)

– Erklären Sie mithilfe der Potenzregeln, warum sich die freigesetzte Energie um den Faktor 1 000 erhöht, wenn die Magnitude M um 2 größer wird.

b) Die bei einem Erdbeben freigesetzte Energie kann auch mithilfe des TNT-Äquivalents beschrieben werden. Dabei wird die Masse des Sprengstoffs TNT angegeben, die der freigesetzten Energie entspricht:

$W(M) = \frac{1}{1\,000} \cdot 10^{1,5 \cdot M}$

M ... Magnitude (Maß für die Stärke von Erdbeben)
$W(M)$ ... TNT-Masse bei der Magnitude M in Tonnen

Im Jahr 1972 ereignete sich ein Erdbeben mit dem Epizentrum in Seebenstein (NÖ). Dabei wurde eine Energie mit einem TNT-Äquivalent von ca. 89 125 Tonnen freigesetzt.

– Berechnen Sie die Magnitude dieses Erdbebens.

c) Für einen d Kilometer vom Epizentrum des Bebens entfernten Seismographen gilt:

$$M = \lg\left(\frac{A(d)}{A_0(d)}\right)$$

M ... Magnitude (Maß für die Stärke von Erdbeben)
$A(d)$ ... Ausschlag des Bebens in Mikrometern (µm)
$A_0(d)$ ... Ausschlag eines Bebens der Magnitude $M = 0$ in µm

– Geben Sie an, wie sich die Magnituden zweier Beben unterscheiden, wenn der Ausschlag des zweiten Bebens 10-mal so groß ist wie derjenige des ersten Bebens.
– Erklären Sie Ihr Ergebnis mithilfe der Rechenregeln für Logarithmen.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein.

Möglicher Lösungsweg

a) $E(M + 2) = 63 \cdot 10^{1,5 \cdot (M+2)} =$
$= 63 \cdot 10^{1,5 \cdot M+3} =$
$= 63 \cdot 10^{1,5 \cdot M} \cdot 10^{3} =$
$= 63 \cdot 10^{1,5 \cdot M} \cdot 1\,000 =$
$= E(M) \cdot 1\,000$

Wird die Magnitude M um 2 vergrößert, so wird die Hochzahl um 3 größer. Da beim Multiplizieren von Potenzen mit gleicher Basis die Hochzahlen addiert werden, entspricht der Addition von 3 in der Hochzahl der Faktor $10^3 = 1\,000$.

b) $89\,125 = \frac{1}{1\,000} \cdot 10^{1,5 \cdot M}$

Lösung mittels Technologieeinsatz:
$M = 5{,}29...$

Das Beben hatte eine Magnitude von rund 5,3.

c) Ausschlag des ersten Bebens ... $A(d) \quad \Rightarrow \quad M_1 = \lg\left(\frac{A(d)}{A_0(d)}\right)$

Ausschlag des zweiten Bebens ... $10 \cdot A(d) \quad \Rightarrow \quad M_2 = \lg\left(\frac{10 \cdot A(d)}{A_0(d)}\right)$

$M_2 = \lg\left(\frac{10 \cdot A(d)}{A_0(d)}\right) = \lg\left(10 \cdot \frac{A(d)}{A_0(d)}\right) = \lg(10) + \lg\left(\frac{A(d)}{A_0(d)}\right) = 1 + M_1$

Ist der Ausschlag 10-mal so stark, dann ist die Magnitude um 1 größer.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) D Argumentieren und Kommunizieren

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) —
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

a) schwer
b) leicht
c) schwer

Punkteanzahl:

a) 1
b) 1
c) 2

Thema: Geografie

Quellen: —

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Beleuchtungsstärke

Aufgabennummer: A_025

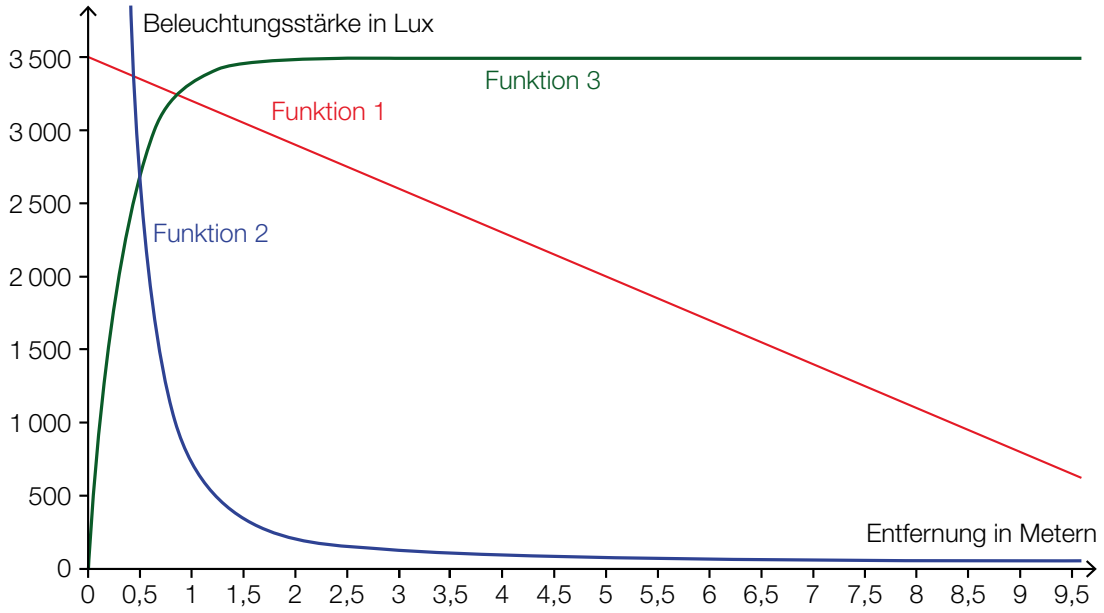
Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Eine Wand wird mit einem Beamer beleuchtet. Die Beleuchtungsstärke B durch den Beamer ist indirekt proportional zum Quadrat der Entfernung x von der beleuchteten Wand.

B … Beleuchtungsstärke in Lux
x … Entfernung zwischen Beamer und beleuchteter Wand in m

a) – Berechnen Sie, um wie viel Prozent man die Entfernung verändern muss, um die Beleuchtungsstärke auf das 1,5-Fache zu erhöhen.
– Interpretieren Sie anhand des Ergebnisses, ob es sich um eine Erhöhung oder Verringerung der Entfernung handelt.

b) In der nachstehenden Abbildung sind die Graphen dreier Funktionen dargestellt.



– Begründen Sie, warum nur Funktion 2 den gegebenen Sachverhalt richtig darstellt.
– Ermitteln Sie die mittlere Änderungsrate der Funktion 2 im Intervall [1; 2].
– Erklären Sie, warum bei Funktion 1 der Wert des Differenzenquotienten für ein beliebiges Intervall dem Wert des Differenzialquotienten an einer beliebigen Stelle entspricht.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $B = \frac{C}{x^2}$

$B_{neu} = 1{,}5 \cdot B$

$B_{neu} = \frac{C}{x_{neu}^2}$

$\Rightarrow \quad x_{neu} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot x = 0{,}81649... \cdot x$

$1 - 0{,}81649... = 0{,}18350...$

Die Entfernung muss um rund 18,35 % verringert werden.

b) Funktion 3 kann nicht richtig sein, weil mit steigender Entfernung die Beleuchtungsstärke steigt. Funktion 1 kann nicht richtig sein, weil es sich zwar um eine fallende Funktion handelt, die allerdings linear ist.

$\frac{200 - 700}{2 - 1} = -500$

Die mittlere Änderungsrate beträgt rund –500 Lux/Meter.

Da es sich bei Funktion 1 um eine lineare Funktion handelt, entspricht der Differenzenquotient für ein beliebiges Intervall dem Wert des Differenzialquotienten einer beliebigen Stelle.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) 4 Analysis

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) D Argumentieren und Kommunizieren

Nebenhandlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:

a) schwer
b) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 3

Thema: Physik

Quellen: –

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Holzbestand und Waldfläche

Aufgabennummer: A_010

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

In einzelnen Waldgebieten werden eine Abnahme des Holzbestands und die Zerstörung von Waldfläche beobachtet.

a) Der Holzbestand eines bestimmten Waldgebiets nimmt jährlich um einen gleichbleibenden Betrag D ab.

– Erklären Sie, ob der Holzbestand in Abhängigkeit von der Zeit in diesem Gebiet durch eine lineare oder durch eine exponentielle Funktion beschrieben werden kann.
– Erstellen Sie eine Gleichung derjenigen Funktion, die den Holzbestand $B(t)$ in Abhängigkeit von der Zeit t in Jahren beschreibt.

b) Ein weiteres Waldgebiet hatte ursprünglich einen Holzbestand von 110 000 m^3 Holz. Dieser nimmt jährlich um 4 % bezogen auf den jeweils vorigen Wert ab.

– Erstellen Sie eine Gleichung derjenigen Funktion, die den Holzbestand in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt.
– Berechnen Sie, wann der Holzbestand in diesem Waldgebiet nur mehr halb so groß wie zu Beginn sein wird. Runden Sie Ihr Ergebnis auf Jahre.

c) Die Zerstörung von Waldfläche zum Zwecke anderer Landnutzungsformen kann für ein bestimmtes Gebiet näherungsweise durch die Funktion A beschrieben werden:

$A(t) = 2{,}16 \cdot 10^6 \cdot t$

t … Zeit in Monaten
$A(t)$ … zerstörte Fläche zum Zeitpunkt t in Hektar (ha)

– Berechnen Sie, wie viel Hektar Waldfläche in diesem Gebiet pro Minute zerstört werden. (Jeder Monat wird mit 30 Tagen gerechnet.)

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Die Abnahme um einen gleichbleibenden Betrag D bedeutet, dass eine lineare Funktion vorliegt.

Begründung:
Holzbestand zu Beginn: B_0
Holzbestand nach 1 Jahr: $B_0 - D$
Holzbestand nach 2 Jahren: $B_0 - 2 \cdot D$

D … jährliche Abnahme

Holzbestand nach t Jahren:
$B(t) = B_0 - t \cdot D$

b) $f(t) = 110\,000 \cdot 0{,}96^t$

t ... Zeit in Jahren
$f(t)$ ... Holzbestand zur Zeit t in m^3

halber Bestand: $55\,000 = 110\,000 \cdot 0{,}96^t$

Lösung mittels Technologieeinsatz:
$t = 16{,}9...$

Nach rund 17 Jahren wird der Holzbestand nur mehr halb so groß wie zu Beginn sein.

c) $\frac{2{,}16 \cdot 10^6}{30 \cdot 24 \cdot 60} = 50$

Pro Minute werden in diesem Gebiet 50 ha Wald zerstört.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) 1 Zahlen und Maße

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) A Modellieren und Transferieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) —

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) leicht

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2
c) 1

Thema: Biologie

Quelle: http://de.wikipedia.org/wiki/Tropischer_Regenwald

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Altersbestimmung

Aufgabennummer: A_007

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Zur Altersbestimmung von organischen archäologischen Fundstücken eignet sich die sogenannte *Radiokarbon-Methode*. Das Kohlenstoffisotop ^{14}C ist radioaktiv und in jedem lebenden Organismus in Spuren vorhanden. Nach dem Tod eines Organismus verringert sich der Anteil an ^{14}C entsprechend dem Gesetz für den radioaktiven Zerfall.
Dieses Gesetz lautet:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

t ... Alter des Fundstücks
$N(t)$ ... noch vorhandene Menge an ^{14}C zur Zeit t
N_0 ... Menge an ^{14}C zum Zeitpunkt des Todes
λ ... Zerfallskonstante

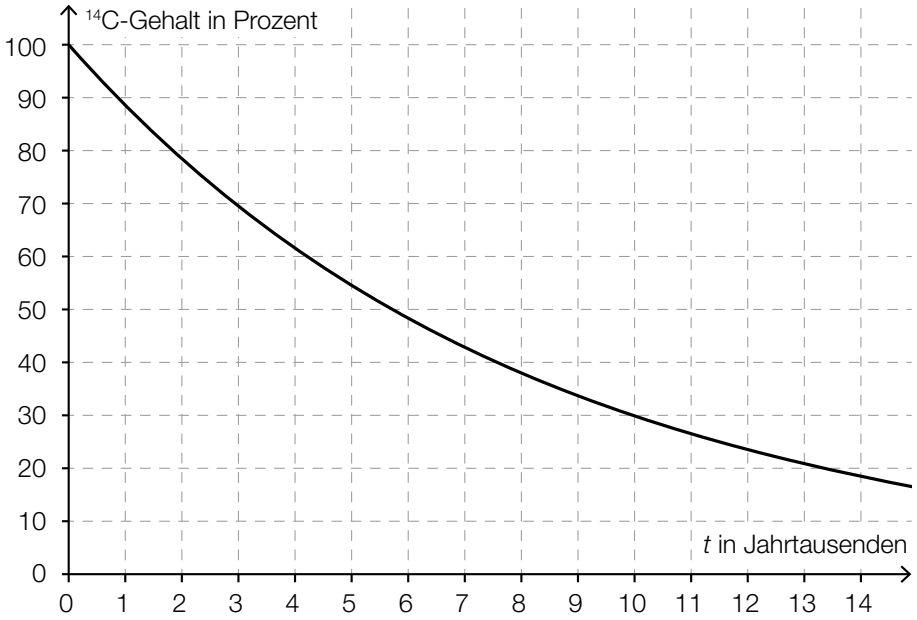
a) – Formen Sie die angegebene Funktionsgleichung nach dem Alter t des Fundstücks um.

$t =$ _____

– Begründen Sie, warum die Umformung das Logarithmieren erfordert.

b) – Erklären Sie, was man unter der Halbwertszeit versteht.
– Stellen Sie den Ansatz für die Berechnung der Halbwertszeit $T_{1/2}$ auf.

c) – Ermitteln Sie aus der gegebenen grafischen Darstellung der Zerfallsfunktion von ^{14}C, um wie viel Prozent der ^{14}C-Gehalt im ersten Jahrtausend ungefähr abnimmt.



Die berühmte Gletschermumie *Ötzi* hat heute noch ca. 53 % der ursprünglichen Menge an ^{14}C.

– Bestimmen Sie aus der Grafik das Alter von Ötzi.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $t = -\frac{1}{\lambda} \cdot \ln\left(\frac{N(t)}{N_0}\right)$

Man berechnet die Variable t, die sich in der Hochzahl der e-Potenz befindet, mithilfe des Logarithmierens, weil diese Rechenoperation eine Umkehroperation des Potenzierens ist, die bei Anwendung auf die Potenz deren Hochzahl liefert.

b) Unter der Halbwertszeit versteht man diejenige Zeit, in der die Hälfte des Ausgangsprodukts (in diesem Falle des ^{14}C) zerfallen ist.

$0{,}5 \cdot N_0 = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot T_{1/2}}$ bzw. $0{,}5 = e^{-\lambda \cdot T_{1/2}}$

c) Im ersten Jahrtausend nimmt der ^{14}C-Gehalt um rund 11 % ab.
Das Alter von Ötzi beträgt rund 5 200 Jahre.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) A Modellieren und Transferieren
c) —

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) leicht

Punkteanzahl:

a) 1
b) 2
c) 2

Thema: Biologie, Physik, Chemie

Quellen: —

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Wasserquelle

Aufgabennummer: A_129

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Unter dem *Volumenstrom* einer Wasserquelle versteht man dasjenige Wasservolumen, das pro Zeiteinheit durch die Öffnung der Quelle fließt. Man führt 3 unabhängige Messungen an einer Quelle durch, bei der im Laufe der Zeit der Volumenstrom abnimmt. Der Volumenstrom wird in der Einheit Liter pro Stunde (L/h) angegeben.

a) Zu Beginn der 1. Messung hat man einen Volumenstrom von 20 000 L/h.
Nach 150 h misst man 17 800 L/h.

– Stellen Sie eine Gleichung derjenigen Exponentialfunktion f auf, die den Volumenstrom in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt. Wählen Sie $t = 0$ für den Beginn der 1. Messung.

b) Während einer 2. Messung kann der Volumenstrom mit der Funktion g beschrieben werden:

$g(t) = 17\,000 \cdot e^{-0{,}01 \cdot t}$

t … Zeit in h
$g(t)$ … Volumenstrom zur Zeit t in L/h

– Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate des Volumenstroms in den ersten 12 Stunden dieser Messung.
– Interpretieren Sie die Bedeutung der 1. Ableitung von g zur Zeit $t = 5$ h im gegebenen Sachzusammenhang.

c) Während einer 3. Messung lässt sich der Volumenstrom mit der Funktion u beschreiben:

$u(t) = 15\,000 \cdot 0{,}998^t$

t … Zeit in h
$u(t)$ … Volumenstrom zur Zeit t in L/h

– Kreuzen Sie an, mit welchem Ausdruck das ausgetretene Wasservolumen in den ersten 9 Tagen berechnet werden kann. *[1 aus 5]*

$\int_0^{216} (15\,000 \cdot 0{,}998 \cdot t)\,dt$	☐
$15\,000 + \int_0^{216} 0{,}998^t\,dt$	☐
$\int_0^{9} (15\,000 + 0{,}998 \cdot t)\,dt$	☐
$\int_0^{9} (15\,000 + 0{,}998^t)\,dt$	☐
$15\,000 \cdot \int_0^{216} 0{,}998^t\,dt$	☐

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $f(t) = 20\,000 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$

t ... Zeit in h
$f(t)$ ... Volumenstrom zur Zeit t in L/h

$17\,800 = 20\,000 \cdot e^{-\lambda \cdot 150}$
$\Rightarrow \quad \lambda = 0{,}0007768...$
$f(t) = 20\,000 \cdot e^{-0{,}0007768... \cdot t}$

oder:

$f(t) = 20\,000 \cdot 0{,}9992...^{t}$

b) $\frac{g(12) - g(0)}{12 - 0} = \frac{15\,077{,}647... - 17\,000}{12} = -160{,}196\ldots$

Die mittlere Änderungsrate in den ersten 12 Stunden entspricht einer stündlichen Abnahme des Volumenstroms von rund 160,20 L/h.

$g'(5)$ ist die momentane Änderungsrate des Volumenstroms nach 5 Stunden.
Das heißt, 5 Stunden nach Beobachtungsbeginn nimmt der Volumenstrom pro Stunde ungefähr um den Wert $|g'(5)|$ ab.

c)

[...]	
[...]	
[...]	
[...]	
$15\,000 \cdot \int_0^{216} 0{,}998^t \, dt$	☒

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 4 Analysis
c) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) —

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) leicht
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 1
b) 2
c) 1

Thema: Physik

Quellen: —

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

PKW-Bestand

Aufgabennummer: A_106

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Der PKW-Bestand ist in Österreich von 2 991 284 Fahrzeugen im Jahr 1990 auf 4 359 944 Fahrzeuge im Jahr 2009 gestiegen (Quelle: Statistik Austria, Statistisches Jahrbuch 2011).

a) Die Veränderung des PKW-Bestands in Österreich soll in Abhängigkeit von der Zeit durch eine lineare Funktion modelliert werden.

- Ermitteln Sie die mittlere Änderungsrate des PKW-Bestands pro Jahr für den Zeitraum von 1990 bis 2009.
- Berechnen Sie, welcher PKW-Bestand im Jahr 2020 gemäß diesem Modell zu erwarten wäre.

b) Die Veränderung des PKW-Bestands in Österreich soll in Abhängigkeit von der Zeit t durch eine Exponentialfunktion modelliert werden.

- Stellen Sie eine Gleichung dieser Exponentialfunktion auf. Wählen Sie $t = 0$ für das Jahr 1990.
- Berechnen Sie, welcher PKW-Bestand im Jahr 2020 gemäß diesem Modell zu erwarten wäre.

c) – Erklären Sie, warum weder ein lineares noch ein exponentielles Wachstumsmodell die langfristige Entwicklung des PKW-Bestands korrekt beschreibt.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) mittlere Änderungsrate: $\frac{4\,359\,944 - 2\,991\,284}{2009 - 1990} = 72\,034{,}7...$

Der PKW-Bestand hat in Österreich durchschnittlich um 72 035 PKWs pro Jahr zugenommen.

Prognose für 2020: $4\,359\,944 + 72\,035 \cdot 11 \approx 5\,152\,329$
Der PKW-Bestand würde im Jahr 2020 rund 5,15 Mio. PKWs betragen.

b) $4\,359\,944 = 2\,991\,284 \cdot a^{19}$
$a = 1{,}02002...$

$P(t) = 2\,991\,284 \cdot 1{,}02002...^{t}$

t ... Zeit in Jahren mit $t = 0$ für das Jahr 1990
$P(t)$ ... PKW-Bestand zur Zeit t

Prognose für 2020: $P(30) = 2\,991\,284 \cdot a^{30} = 5\,422\,632{,}4...$
Der PKW-Bestand würde im Jahr 2020 rund 5,42 Mio. PKWs betragen.

c) Bei beiden Berechnungsmodellen wächst der PKW-Bestand über jede Grenze.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 2 Algebra und Geometrie
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) A Modellieren und Transferieren
c) D Argumentieren und Kommunizieren

Nebenhandlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) –

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) leicht
c) leicht

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2
c) 1

Thema: Verkehr

Quellen: –

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

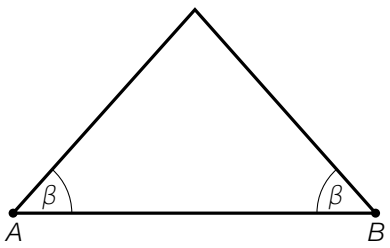
Zimmerei

Aufgabennummer: A_099

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

In einem Zimmereibetrieb ergeben sich die folgenden Aufgabenstellungen:

a) Der Querschnitt eines Dachstuhls hat die Form eines gleichschenkeligen Dreiecks (siehe nachstehende Skizze). Eine Dachneigung von $\beta = 30°$ ist vorgesehen. Die Breite des Hauses ($\overline{AB}$) beträgt 10 m.



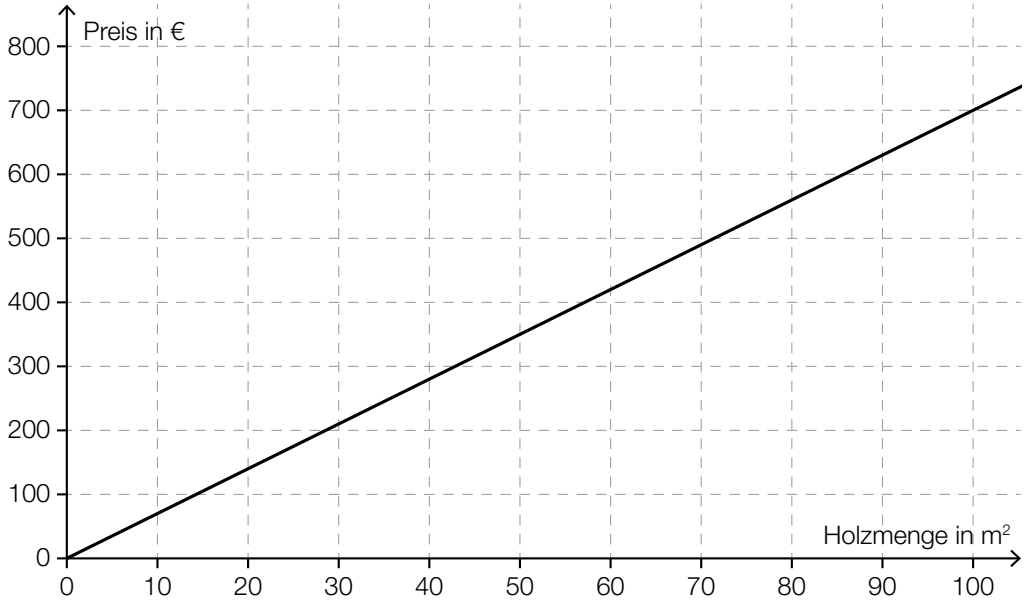
– Stellen Sie eine Gleichung auf, mit der die Höhe dieses Dachstuhls berechnet werden kann.
– Berechnen Sie diese Höhe.

b) Der Zimmereibetrieb überprüft eine Lieferung von Konstruktionsholz aus Fichte. Erfahrungsgemäß ist ein bestimmter Prozentsatz der Fichtenstämme von minderer Qualität und daher nicht verwendbar. Die Zufallsvariable X ist die Anzahl der Fichten von minderer Qualität in einer Lieferung.

– Beschreiben Sie ein Ereignis E im gegebenen Sachzusammenhang, dessen Wahrscheinlichkeit folgendermaßen berechnet wird:
$P(E) = 1 - P(X \leq 2)$

c) Ein Kunde des Zimmereibetriebs plant den Bau eines Holzdachs. Er benötigt Fichtenbretter einer bestimmten Stärke. Er holt zwei Angebote ein:

Angebot 1: in der nachstehenden Grafik als Graph einer linearen Funktion abgebildet



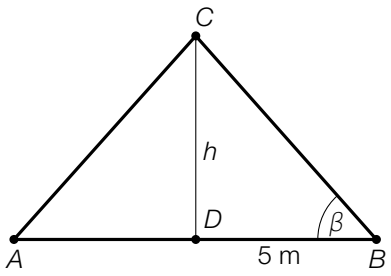
Angebot 2: € 6 je Quadratmeter Fichtenbretter, dazu mengenunabhängige Transportkosten von € 50

– Veranschaulichen Sie das Angebot 2 in der obigen Grafik.
– Lesen Sie ab, ab welcher Holzmenge in m^2 das Angebot 2 billiger ist.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



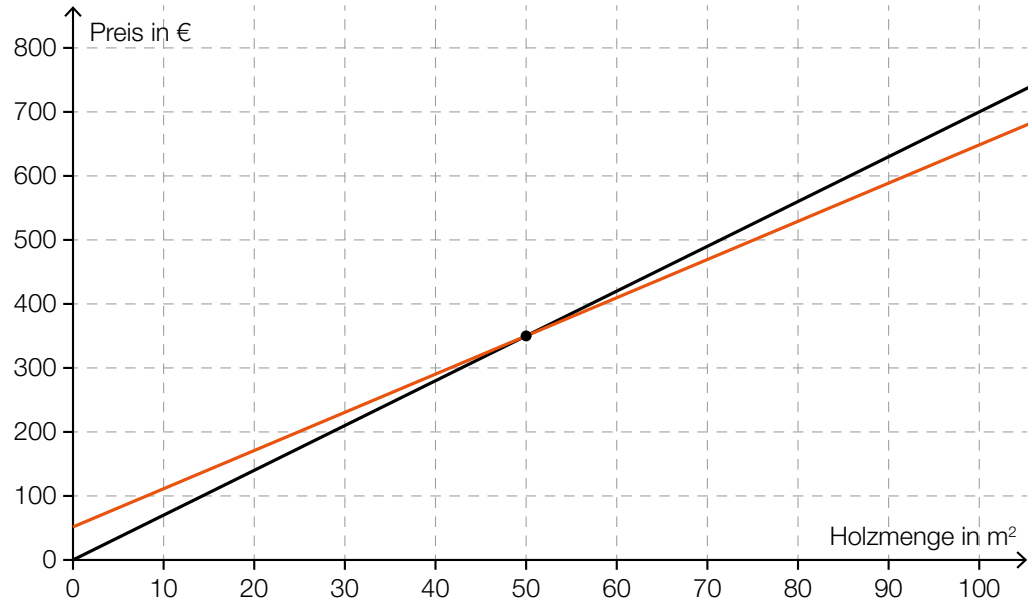
$\tan(30°) = \frac{h}{5}$

$h = 5 \cdot \tan(30°) = 2{,}88\ldots$

$h \approx 2{,}9$ m

b) E ... in einer Lieferung sind mehr als 2 Fichten von minderer Qualität

c)



Ab einer Holzmenge von mehr als 50 m² ist das Angebot 2 günstiger.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 5 Stochastik
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) —
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) leicht

Punkteanzahl:

a) 2
b) 1
c) 2

Thema: Bauwesen

Quellen: —

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Neuronen der Großhirnrinde

Aufgabennummer: A_061

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Die Anzahl der Neuronen in der Großhirnrinde bei Frauen kann näherungsweise durch folgende Funktion N beschrieben werden:

$N(t) = e^{3{,}05 - 0{,}00145 \cdot t}$

t ... Lebensalter in Jahren
$N(t)$ ... Anzahl der Neuronen im Lebensalter t in Milliarden

a) In einem Zeitschriftenartikel wird behauptet: „Innerhalb von 50 Jahren nimmt die Anzahl der Neuronen in der Großhirnrinde bei Frauen um 10 % ab."

– Überprüfen Sie mithilfe des gegebenen Modells, ob diese Behauptung für die ersten 50 Lebensjahre zutrifft.

b) – Formen Sie die gegebene Funktionsgleichung in die Form $N(t) = N_0 \cdot a^t$ um.

c) Die Anzahl der Neuronen kann näherungsweise auch durch eine lineare Funktion M beschrieben werden. Für die Lebensalter 0 Jahre und 80 Jahre stimmen die Funktionswerte von N und M überein.

– Erstellen Sie eine Gleichung der Funktion M.

Die Funktionen N und M sind von folgender Form:

$N(t) = e^{a-b\cdot t}$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$
$M(t) = N_0 - k \cdot t$ mit $N_0, k \in \mathbb{R}^+$

Es soll untersucht werden, für welches Lebensalter (zwischen 0 und 80 Jahren) sich die Funktionswerte von N und M am stärksten unterscheiden. Dieses Lebensalter erhält man als Lösung einer der folgenden Gleichungen.

– Kreuzen Sie die zutreffende Gleichung an. *[1 aus 5]*

$-k + b \cdot e^{a-b\cdot t} = 0$	☐
$-k - b \cdot e^{a-b\cdot t} = 0$	☐
$-k - e^{a-b\cdot t} = 0$	☐
$N_0 - k \cdot t + e^{a-b\cdot t} = 0$	☐
$N_0 - k \cdot t - b \cdot e^{a-b\cdot t} = 0$	☐

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $\frac{N(50) - N(0)}{N(0)} = \frac{19{,}638... - 21{,}115...}{21{,}115...} = -0{,}069... \approx -7\ \%$

Die Aussage ist falsch. Die Abnahme der Neuronenanzahl innerhalb von 50 Jahren beträgt rund 7 %.

b) unter Anwendung von Potenzregeln:

$N(t) = e^{3{,}05} \cdot e^{-0{,}00145 \cdot t} = e^{3{,}05} \cdot (e^{-0{,}00145})^t \approx \underbrace{21{,}115}_{N_0} \cdot \underbrace{0{,}99855^t}_{a}$

c) $M(t)$ … Anzahl der Neuronen im Lebensalter t in Milliarden

Steigung der linearen Funktion M: $\frac{N(80) - N(0)}{80 - 0} = -0{,}0289…$

$M(0) = N(0) = 21{,}1153…$

$M(t) = 21{,}1153… - 0{,}0289… \cdot t$

$-k + b \cdot e^{a-b \cdot t} = 0$	☒

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) 1 Zahlen und Maße
b) —
c) 4 Analysis

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) —
c) A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) schwer
c) schwer

Punkteanzahl:

a) 1
b) 1
c) 2

Thema: Biologie

Quelle: Spitzer, M. (2007). *Lernen. Gehirnforschung und die Schule des Lebens.* München: Spektrum Akademischer Verlag.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Bungeejumping

Aufgabennummer: A_088

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Beim Bungeejumping befindet man sich so lange im freien Fall, bis sich das Seil zu dehnen beginnt. Der während des freien Falles zurückgelegte Weg wird annähernd durch die Weg-Zeit-Funktion s beschrieben:

$$s(t) = \frac{g}{2} \cdot t^2$$

t … Zeit in s
$s(t)$ … zurückgelegter Weg zum Zeitpunkt t in m
g … Erdbeschleunigung ($\approx$ 10 m/s^2)

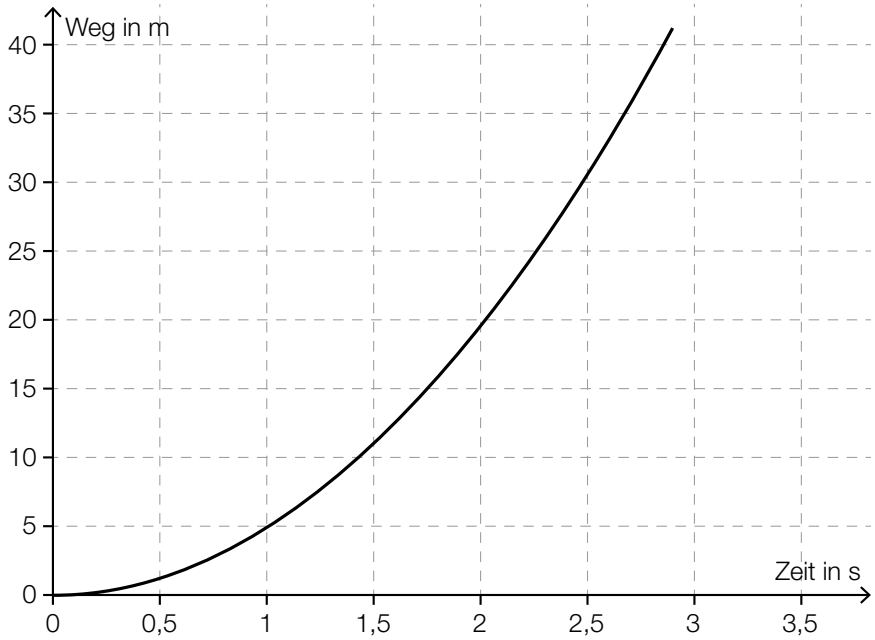
a) Für einen Bungeejump von der Jauntalbrücke in Kärnten wird ein 23 m langes Seil verwendet.

– Berechnen Sie, wie lang der freie Fall dauert.

b) Beim Sprung vom Wiener Donauturm wird ein längeres Seil verwendet. Der freie Fall dauert 2,8 Sekunden.

– Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung der Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt t.
– Berechnen Sie die Momentangeschwindigkeit nach 2,8 Sekunden.

c) Das nachstehende Weg-Zeit-Diagramm zeigt den freien Fall eines Bungeejumpers.



– Kreuzen Sie die zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]*

Für 30 m im freien Fall braucht der Bungeejumper etwa 2 Sekunden.	☐
Die Geschwindigkeit erhöht sich, je länger der freie Fall dauert.	☐
Nach 1,5 Sekunden im freien Fall hat der Bungeejumper rund 16 m zurückgelegt.	☐
In der 2. und der 3. Sekunde legt der Bungeejumper die gleiche Strecke zurück.	☐
Die Geschwindigkeit während der ersten 2 Sekunden ist konstant.	☐

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $s(t) = 23$

$\frac{10}{2} \cdot t^2 = 23$

$t = 2{,}14...$

Der freie Fall dauert rund 2,1 Sekunden.

b) $v(t)$... Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt t in m/s

$v(t) = s'(t) = g \cdot t$

$v(2{,}8) = 10 \cdot 2{,}8 = 28$

Die Momentangeschwindigkeit nach 2,8 Sekunden beträgt 28 m/s.

c)

Die Geschwindigkeit erhöht sich, je länger der freie Fall dauert.	☒

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 4 Analysis
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) —
c) 4 Analysis

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) A Modellieren und Transferieren
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) —

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) leicht
c) leicht

Punkteanzahl:

a) 1
b) 2
c) 1

Thema: Physik

Quellen: —

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Laptops

Aufgabennummer: A_033

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Vor 2 Jahren kaufte eine Unternehmerin eine bestimmte Anzahl an identischen Laptops um insgesamt € 9.600. Heute würde sie um den gleichen Betrag um 2 Laptops mehr bekommen, weil der Preis um € 400 pro Laptop gefallen ist.

– Berechnen Sie, wie viele Laptops die Unternehmerin heute für € 9.600 bekommen würde.

b) Ein Computerhersteller hat für den Verkauf von Laptops folgende Gewinnfunktion G ermittelt:

$G(x) = -0{,}2 \cdot x^2 + b \cdot x + c$ (mit $b, c \in \mathbb{R}$)

x … verkaufte Menge in ME
$G(x)$ … Gewinn bei der Absatzmenge x in GE

Zur Berechnung der Gewinngrenzen benötigt man die Nullstellen der Gewinnfunktion G.

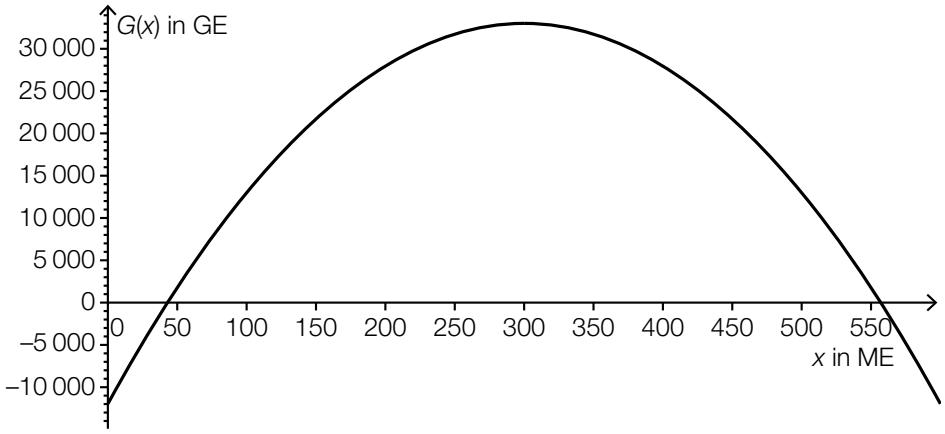
– Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine korrekte Aussage entsteht. *[Lückentext]*

Die Funktion G hat genau _____①_____, wenn _____②_____ gilt.

①	
1 Nullstelle	☐
2 Nullstellen	☐
3 Nullstellen	☐

②	
$5 \cdot b^2 > -4 \cdot c$	☐
$c < -1{,}25 \cdot b^2$	☐
$b^2 + 0{,}8 \cdot c = -1$	☐

c) In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Gewinnfunktion G für Laptops mit Touchscreen eines bestimmten Herstellers dargestellt.



– Kreuzen Sie die für G zutreffende Funktionsgleichung an. *[1 aus 5]*

$G(x) = -0{,}5 \cdot x^2 - 12\,000$	☐
$G(x) = -0{,}5 \cdot x^2 + 300 \cdot x - 12\,000$	☐
$G(x) = 0{,}5 \cdot x^2 + 300 \cdot x - 12\,000$	☐
$G(x) = -0{,}5 \cdot x^2 + 300 \cdot x - 9\,000$	☐
$G(x) = -0{,}5 \cdot x^2 + 300 \cdot x + 12\,000$	☐

– Begründen Sie mithilfe der Koeffizienten der Funktion, warum nur die von Ihnen gewählte Funktionsgleichung in Frage kommt.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) x … Anzahl der Laptops, die man vor 2 Jahren für € 9.600 bekommen hat
p … Preis für einen Laptop vor 2 Jahren in €

I: $p \cdot x = 9600 \quad \Rightarrow \quad p = \frac{9600}{x}$

II: $(p - 400) \cdot (x + 2) = 9600$

Einsetzen von $p = \frac{9600}{x}$ in II:

$\left(\frac{9600}{x} - 400\right) \cdot (x + 2) = 9600$

$400 \cdot x^2 + 800 \cdot x - 19200 = 0$

$x_1 = 6, (x_2 = -8)$

Die Unternehmerin würde heute 8 Laptops für € 9.600 bekommen.

b)

①	
2 Nullstellen	☒

②	
$5 \cdot b^2 > -4 \cdot c$	☒

c)

$G(x) = -0{,}5 \cdot x^2 + 300 \cdot x - 12000$	☒

Der Graph der Funktion ist eine nach unten geöffnete Parabel, daher muss der Koeffizient des quadratischen Gliedes negativ sein. Somit kann die 3. Funktionsgleichung nicht richtig sein.
Die Parabel ist nicht symmetrisch bezüglich der 2. Achse, daher kann der Koeffizient des linearen Gliedes nicht null sein. Somit kann die 1. Funktionsgleichung nicht richtig sein.
Der Funktionswert an der Stelle 0 ist –12000, das ist der konstante Summand in der Funktionsgleichung. Somit können die 4. und die 5. Funktionsgleichung nicht richtig sein.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) —
c) D Argumentieren und Kommunizieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) leicht

Punkteanzahl:

a) 2
b) 1
c) 2

Thema: Wirtschaft

Quellen: —

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Ölabfüllung

Aufgabennummer: A_047

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Die Genauigkeit einer Abfüllanlage für Olivenöl wird mit einer Stichprobe von 25 Flaschen überprüft. Es ergeben sich die folgenden Abfüllmengen in ml:

296	298	302	301	304
300	295	296	297	301
298	296	295	300	302
295	297	295	296	303
300	295	297	298	300

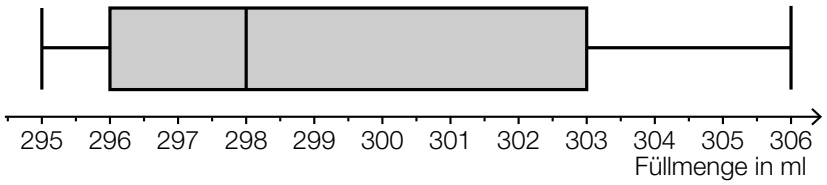
a) – Ermitteln Sie das arithmetische Mittel und den Median der gemessenen Abfüllmengen.
– Erklären Sie, wie sich beide Größen verändern, wenn die Flasche mit der Abfüllmenge 304 ml einen wesentlich höheren Messwert hat.

b) Eine weitere Überprüfung der Anlage hat die nachstehenden Kennzahlen geliefert.

statistische Größe	Füllmenge in ml
Minimum	295
1. Quartil	296
Median	298
3. Quartil	301
Maximum	304

– Erstellen Sie den zugehörigen Boxplot.

c) Als Ergebnis einer 3. Überprüfung der Abfüllanlage wurde der folgende Boxplot erstellt:



– Interpretieren Sie den Boxplot im Hinblick auf die Bedeutung der 5 Kennzahlen (Min., q_1, $\tilde{x}$, q_3, Max.).
– Beschreiben Sie die Verteilung der Daten links und rechts vom Median.

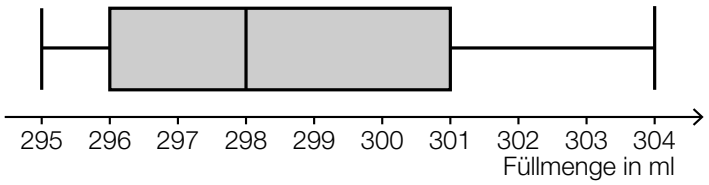
Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) arithmetisches Mittel: 298,28 ml
Median: 298 ml

Hätte die Flasche, die im Test 304 ml enthalten hat, einen wesentlich höheren Messwert aufgewiesen, dann hätte sich das arithmetische Mittel verändert, es wäre höher. Der Median dagegen wäre gleich geblieben, weil sein Wert nur von der mittleren Lage der nach Größe geordneten Messwerte abhängt. In diesem Fall ist es der Wert auf „Platz“ 13 der nach der Größe sortierten Werte (298).

b)



c) Aus dem Boxplot kann man die folgenden Größen ablesen:

Die Füllmengen liegen zwischen 295 ml und 306 ml.
Der Median liegt bei 298 ml. Das heißt, dass mindestens 50 % der Flaschen eine Füllmenge größer gleich 298 ml aufweisen.

Die Angabe in Quartile ermöglicht eine Einteilung, die jeweils ca. 25 % der Flaschen enthält.

Der Unterschied der Füllmenge zwischen Minimum und 1. Quartil beträgt nur 1 ml.
Der Unterschied zwischen 1. Quartil und Median beträgt 2 ml, jener zwischen Median und 3. Quartil 5 ml.
Der Unterschied zwischen 3. Quartil und Maximum ist 3 ml.
Der Median liegt nicht in der Mitte des Boxplots, sondern näher am linken Rand. Die Verteilung der Daten ist daher nicht symmetrisch. Die Daten rechts vom Median sind breiter gestreut.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 5 Stochastik
c) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) A Modellieren und Transferieren
c) —

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) leicht
c) leicht

Punkteanzahl:

a) 2
b) 1
c) 2

Thema: Alltag

Quellen: —

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Nennfüllmenge

Aufgabennummer: A_132

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Eine Verordnung stellt sicher, dass die Nennfüllmenge eines Produkts innerhalb eines vorgegebenen Toleranzbereichs eingehalten wird.

a) Die Füllmenge bestimmter Packungen von Tiefkühlerbsen ist normalverteilt mit dem Erwartungswert μ = 400 g und der Standardabweichung σ = 3,5 g.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Packung die Nennfüllmenge (Erwartungswert) um mehr als 3 % unterschreitet.

b) Eine Kontrolle von 12 Packungen Tiefkühlgemüse mit einer Nennfüllmenge von je 400 g ergab folgende Ergebnisse:

Füllmenge in g	391	392	394	395	399	400	401	402	405
Anzahl der Packungen	1	1	2	2	1	1	2	1	1

– Überprüfen Sie nachweislich, ob das Ergebnis der Kontrolle durch den nachstehenden Boxplot richtig dargestellt wird.



c) Ein Betrieb füllt Tee ab. Man weiß, dass durchschnittlich 2,5 % der Packungen aus diesem Betrieb weniger als die angeführte Nennmenge enthalten. Aus einer Lieferung werden 40 Packungen nach dem Zufallsprinzip entnommen und überprüft.

– Berechnen Sie die Anzahl derjenigen Packungen, bei denen ein geringerer Inhalt als die angegebene Nennfüllmenge zu erwarten ist.

Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit, dass 2 oder mehr Packungen eine zu geringe Füllmenge aufweisen, verwendet ein Schüler den folgenden Ausdruck:

$$0{,}975^{40} + \binom{40}{1} \cdot 0{,}025^{1} \cdot 0{,}975^{39} + \binom{40}{2} \cdot 0{,}025^{2} \cdot 0{,}975^{38}$$

– Argumentieren Sie unter Angabe des richtigen Ausdrucks, warum der verwendete Ausdruck falsch ist.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) 3 % von 400 g sind 12 g.
X ... Füllmenge in g

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$P(X \leq 388) = 0{,}00030\ldots$

Rund 0,03 % der Packungen unterschreiten die Nennfüllmenge um mehr als 3 %.

b) Es stimmen der Median q_2 (397 g) und die Quartile q_1 (394 g) und q_3 (401 g) sowie das Minimum (391 g) und das Maximum (405 g) mit der Darstellung überein.
Deshalb stellt der Graph das Ergebnis der Kontrolle richtig dar.

c) p … Wahrscheinlichkeit, dass die Nennfüllmenge nicht erreicht wird
n … Anzahl der überprüften Packungen

$p = 0{,}025$
$n = 40$

Der Erwartungswert $\mu = 40 \cdot 0{,}025 = 1$, also kann man bei 40 Packungen durchschnittlich mit 1 Packung rechnen, die die Nennfüllmenge unterschreitet.

Der Ausdruck gibt nicht die gesuchte Wahrscheinlichkeit, sondern die Wahrscheinlichkeit an, dass höchstens 2 Packungen eine zu geringe Füllmenge aufweisen.
Richtig wäre: $P(X \geq 2) = 1 - \left(0{,}975^{40} + \binom{40}{1} \cdot 0{,}025^{1} \cdot 0{,}975^{39}\right)$.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 5 Stochastik
c) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) D Argumentieren und Kommunizieren

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) —
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) leicht
c) leicht

Punkteanzahl:

a) 1
b) 1
c) 2

Thema: Wirtschaft

Quellen: Fertigverpackungsverordnung, WKO

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Brieflos

Aufgabennummer: A_023

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Die Österreichischen Lotterien bieten eine Onlineform des Briefloses an.
Ein Online-Brieflos kostet € 1. Die Höhe und die Anzahl der Gewinne können der nachstehenden Tabelle entnommen werden.

Gewinne in €	100 000	10 000	1 000	500	100	10	5	2	1
Anzahl	3	5	50	100	1 500	11 000	45 000	361 000	1 560 000

Insgesamt wurden 6,6 Millionen Online-Lose aufgelegt.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass jemand beim Online-Kauf eines einzelnen Loses
  • genau seinen Spieleinsatz in Höhe von € 1 zurückgewinnt,
  • einen höheren Gewinn als den Lospreis erzielt.

b) Bei der „klassischen“ Variante des Briefloses ermöglicht ein Fünftel aller Lose, dass die Besitzerin/der Besitzer sich für die Teilnahme an der Brieflos-Show anmeldet.
In jeder Brieflos-Show wird 1 Los aus *N* Einsendungen für die darauf folgende Show gezogen. Die Besitzerin/der Besitzer dieses Loses kann in der nächsten Show ein Glücksrad mit 80 gleich großen Gewinnfeldern drehen. Insgesamt 3 dieser Felder zeigen den Hauptgewinn an.

– Dokumentieren Sie, wie sich für die Käuferin/den Käufer eines Briefloses die Wahrscheinlichkeit für den Hauptgewinn beim Glücksrad berechnen lässt.

c) Die Wahrscheinlichkeit, dass jemand beim Glücksrad mindestens € 50.000 gewinnt, beträgt ungefähr 7,8 %.

– Berechnen Sie, wie viele Personen das Glücksrad drehen müssen, damit mit mindestens 90%iger Wahrscheinlichkeit mindestens 1-mal ein Betrag dieser Höhe ausbezahlt werden muss.

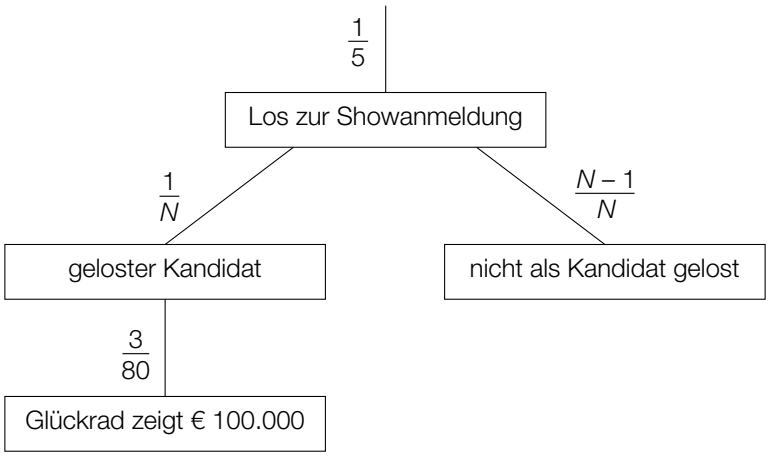
Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) • $P(\text{„nur Deckung der Kosten“}) = P(\text{„Gewinnhöhe € 1“}) = \frac{1\,560\,000}{6\,600\,000} \approx 23{,}64\ \%$

• $P(\text{„Gewinn > Lospreis“}) = P(\text{„Gewinn größer als € 1“}) = \frac{418\,658}{6\,600\,000} \approx 6{,}34\ \%$

b) zum Beispiel mit Baumdiagramm:



Die Wahrscheinlichkeiten entlang des betreffenden Astes werden multipliziert.
$P(\text{„Hauptgewinn bei Glücksrad“}) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{N} \cdot \frac{3}{80}$

c) $P(\text{„mindestens 1 Mal mindestens € 50.000“}) = 1 - P(\text{„immer weniger als € 50.000“}) \geq 90\ \%$
$1 - 0{,}922^n \geq 0{,}9$
$0{,}922^n \leq 0{,}1$
$n \geq \frac{\ln(0{,}1)}{\ln(0{,}922)} = 28{,}35$

Es müssen mindestens 29 Kandidatinnen/Kandidaten das Glücksrad drehen.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 5 Stochastik
c) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) A Modellieren und Transferieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) —

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) schwer
c) schwer

Punkteanzahl:

a) 2
b) 1
c) 1

Thema: Glücksspiel

Quelle: http://www.win2day.at/gaming/BL_brieflosshow.jsp?sessionID=72e1a436-1401-583d14a-f1ce-a5a0bceb70ae

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Elektrischer Widerstand eines Drahtes

Aufgabennummer: A_050

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Der elektrische Widerstand R einer Drahtleitung mit kreisförmigem Querschnitt wird mithilfe folgender Formel beschrieben:

$$R = \varrho \cdot \frac{l}{r^2 \cdot \pi}$$

R … Widerstand in Ohm (Ω)
l … Drahtlänge in m
r … Radius des Drahtquerschnitts in mm
ϱ … spezifischer Widerstand (Materialkonstante) in $\frac{\Omega \cdot \text{mm}^2}{\text{m}}$

a) – Begründen Sie, welcher der nachstehend dargestellten Graphen die Abhängigkeit des Widerstands R von der Drahtlänge l angibt.

Abbildung 1:

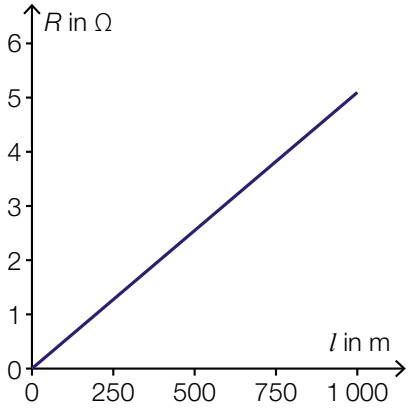
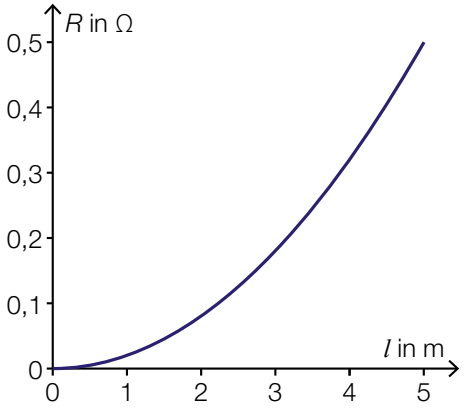


Abbildung 2:



b) – Erklären Sie, wie sich eine Verdoppelung des Radius des Drahtquerschnitts auf den Widerstand R auswirkt.

c) Da die Hersteller von Drähten normalerweise den Durchmesser d und nicht den Radius r des Drahtes angeben, wurde in der nachstehenden Formel der Radius r durch den Durchmesser d des Drahtquerschnitts ersetzt:

$$R = \varrho \cdot \frac{2 \cdot l}{d^2 \cdot \pi}$$

– Argumentieren Sie unter Angabe der richtigen Formel, dass die Umformung nicht richtig vorgenommen wurde.

d) In einem Labor wurde bei einem 1 m langen Kupferdraht mit einem spezifischen Widerstand von $\varrho = 0{,}017 \frac{\Omega \cdot mm^2}{m}$ ein Widerstand von 20 Milliohm (mΩ) gemessen.

– Berechnen Sie den Radius des untersuchten Drahtes.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Die richtige Abbildung ist Abbildung 1, da die Drahtlänge und der Widerstand in einem linearen Zusammenhang stehen. Dies lässt sich durch die gegebene Formel zeigen:

$R = \cdot \frac{\varrho}{r^2 \cdot \pi} \cdot l$,

wobei $\frac{\varrho}{r^2 \cdot \pi}$ eine konstante, reelle Zahl ist.

b) Da der Radius r des Drahtes in der Formel im Nenner steht, bedeutet eine Verdoppelung des Radius eine Verkleinerung des Widerstands. Der Radius wird im Nenner quadriert, wodurch der Widerstand mit dem doppelt so großen Radius ein Viertel des ursprünglichen Widerstands ausmacht.

c) Die Umformung der Formel ist falsch, da $r = \frac{d}{2}$.

$r^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{d^2}{4}$

Die richtige Formel lautet daher: $R = \varrho \cdot \frac{4 \cdot l}{d^2 \cdot \pi}$

d) $20\ \text{m}\Omega = 0{,}02\ \Omega$

$0{,}02 = 0{,}017 \cdot \frac{1}{r^2 \cdot \pi} \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{\frac{0{,}85}{\pi}} = 0{,}520...$

Der untersuchte Draht hat einen Radius von rund 0,52 mm.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 2 Algebra und Geometrie
d) 1 Zahlen und Maße

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —
d) 2 Algebra und Geometrie

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) D Argumentieren und Kommunizieren
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) —
c) —
d) —

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) leicht
c) mittel
d) mittel

Punkteanzahl:

a) 1
b) 1
c) 1
d) 1

Thema: Physik

Quellen: —

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Taschengeld

Aufgabennummer: A_002

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Sandra, Barbara und Monika erhalten heuer zum ersten Mal Taschengeld. Jedes Mädchen bekommt in diesem 1. Jahr 10 Euro monatlich. In den folgenden Jahren wird das monatliche Taschengeld Jahr für Jahr erhöht.

a) Sandra bekommt vom 2. Jahr bis einschließlich des 7. Jahres jährlich eine Erhöhung des monatlichen Taschengelds um 5 Euro. Ab dem 8. Jahr erhält sie jährlich einen um 30 % höheren Monatsbetrag als im jeweils vorhergehenden Jahr.

– Stellen Sie die Höhe des monatlichen Taschengelds von Sandra in den ersten 10 Jahren in einem Säulendiagramm dar.

– Geben Sie den Betrag (gerundet auf Euro) an, den Sandra im 10. Jahr monatlich erhält.

b) Das monatliche Taschengeld von Barbara wird jedes Jahr um 25 % bezogen auf das jeweils vorige Jahr erhöht. Die Höhe ihres monatlichen Taschengelds in den einzelnen Jahren kann durch die Funktion G beschrieben werden:

$G(n) = a \cdot b^{n-1}$

n … Anzahl der Jahre (heuer bedeutet $n = 1$)
$G(n)$ … Höhe des monatlichen Taschengelds im n-ten Jahr in Euro

– Ermitteln Sie die Parameter a und b.

Der Ausdruck $a \cdot b^{n-1}$ kann auch in der Form $c \cdot b^n$ dargestellt werden.

– Kreuzen Sie an, welche Bedingung für c gelten muss. *[1 aus 5]*

$c = a^{-1}$	☐
$c = a - b$	☐
$c = a - 1$	☐
$c = \frac{a}{b}$	☐
$c = a^b$	☐

c) Die Entwicklung des Taschengelds von Monika in den ersten 3 Jahren ist in der folgenden Tabelle dargestellt:

	monatliches Taschengeld in Euro
1. Jahr	10
2. Jahr	12
3. Jahr	14,4

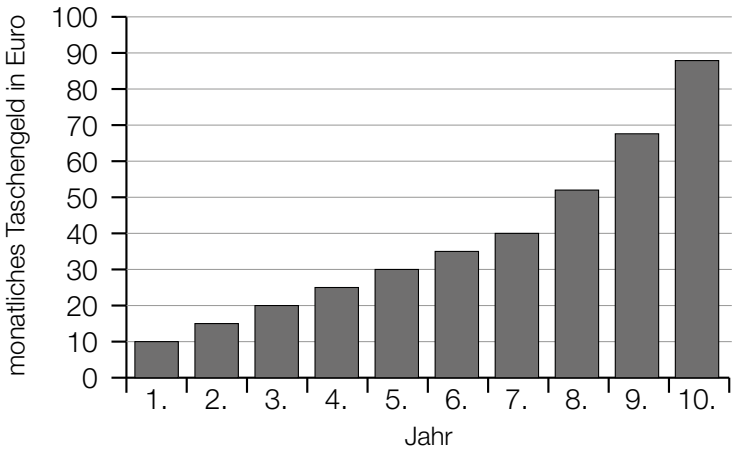
– Zeigen Sie, dass das monatliche Taschengeld von Monika in diesen 3 Jahren jeweils um den gleichen Faktor erhöht wird.

– Berechnen Sie die Höhe des monatlichen Taschengelds (auf Euro gerundet) von Monika im 10. Jahr, wenn dieses weiterhin jährlich um diesen Faktor erhöht wird.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



Jahr	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Monatsbetrag in Euro	10	15	20	25	30	35	40	52	67,6	87,88

Im 10. Jahr erhältSandra jeden Monat rund 88 Euro Taschengeld.

b) $G(1) = 10 \quad \Rightarrow \quad a \cdot \underbrace{b^0}_{=1} = 10 \quad \Rightarrow \quad a = 10$

b ist der jährliche Wachstumsfaktor: $b = 1{,}25$

$c = \frac{a}{b}$	☒

c) 12 : 10 = 14,4 : 12 = 1,2
Der Faktor ist 1,2.

$10 \cdot 1{,}2^9 = 51{,}5... \approx 52$

Im 10. Jahr erhält Monika monatlich rund 52 Euro Taschengeld.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 1 Zahlen und Maße

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) D Argumentieren und Kommunizieren

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) leicht

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2
c) 2

Thema: Wirtschaft

Quellen: –

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Fußballtore

Aufgabennummer: B_279

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Ein Betrieb produziert Fußballtore.

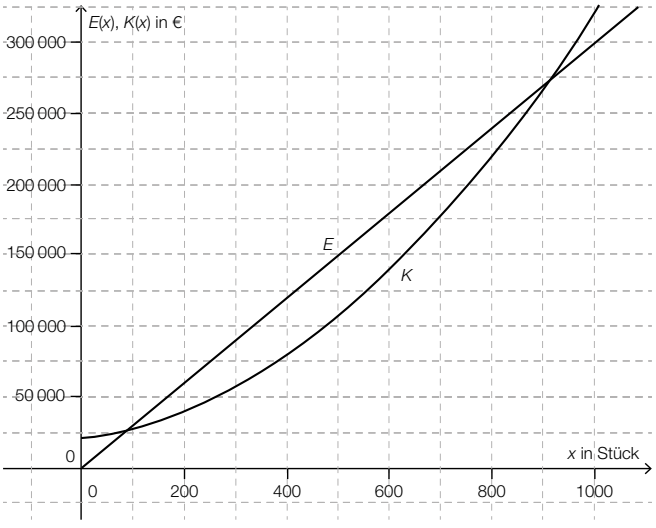
a) Die Preisfunktion der Nachfrage p_N ist bekannt:

$p_N(x) = -40 \cdot x + 920$ mit $0 \leq x \leq 23$

x … nachgefragte Menge in ME
p_N … Preis bei der Nachfrage x in GE/ME

– Stellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Erlösfunktion E auf.
– Zeichnen Sie den Graphen der Erlösfunktion E für den angegebenen Definitionsbereich in ein Koordinatensystem.
– Lesen Sie aus der Grafik diejenige Menge ab, bei der der maximale Erlös erzielt wird.

b) In der nebenstehenden Abbildung sind die Graphen der Gesamtkostenfunktion K und der Erlösfunktion E für Trainingstore dargestellt.



– Kennzeichnen Sie in der Abbildung den Gewinnbereich.
– Lesen Sie aus der Abbildung die Werte für die Gewinnschwelle und die obere Gewinngrenze ab.
– Dokumentieren Sie, wie man mithilfe der Differenzialrechnung jene Anzahl x_{max} ermittelt, für die der größte Gewinn erzielt wird, wenn die Funktionsgleichungen von E und K bekannt sind.

c) Für die Fußballtore werden Netze produziert.
Die Fixkosten betragen € 3.000.
Bei der Produktion von 10 Netzen betragen die Stückkosten € 320 pro Netz.
Bei der Produktion von 100 Netzen betragen die Gesamtkosten € 5.450.

– Stellen Sie ein Gleichungssystem auf, mit dem die Koeffizienten der zugehörigen quadratischen Gesamtkostenfunktion ermittelt werden können.
– Übertragen Sie das Gleichungssystem in Matrizenschreibweise.

d) Für nichtlineare Gesamtkostenfunktionen gilt: Der Graph der Grenzkostenfunktion schneidet den Graphen der Stückkostenfunktion an der Stelle des lokalen Stückkostenminimums.

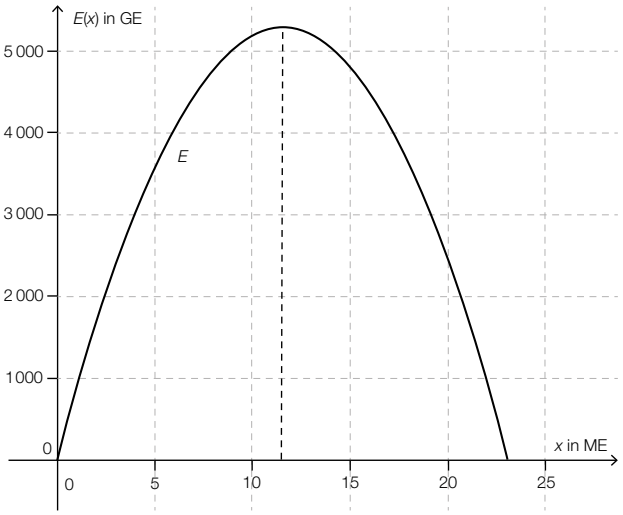
– Zeigen Sie die Richtigkeit dieses Sachverhalts mithilfe der 1. Ableitung der Stückkostenfunktion.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

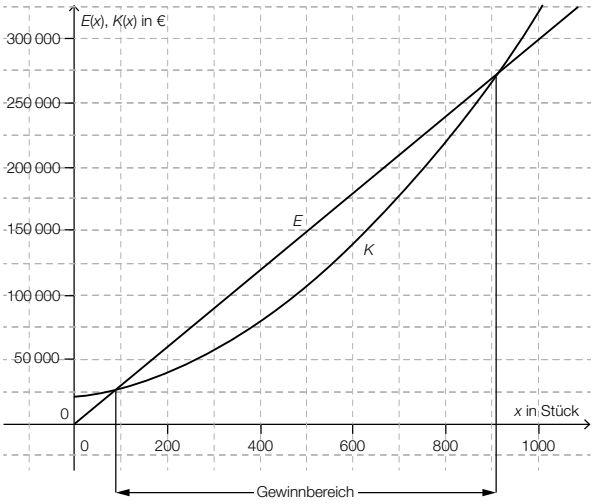
Möglicher Lösungsweg

a) $E(x) = p_N(x) \cdot x$
$E(x) = -40 \cdot x^2 + 920 \cdot x$

Der maximale Erlös wird bei $x = 11{,}5$ ME erzielt.
(Ablesetoleranz: ±0,5 ME)



b)



Gewinnschwelle bei $x \approx 90$ Stück
obere Gewinngrenze bei $x \approx 910$ Stück
(Ablesetoleranz: ±10 Stück)

Zuerst wird die Gewinnfunktion G ermittelt: $G(x) = E(x) - K(x)$
Das Lösen der Gleichung $G'(x) = 0$ liefert die Stückzahl x_{max}, für die der maximale Gewinn erzielt wird (Überprüfung des Maximums mit $G''(x_{max}) < 0$).

c) $K(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

$\overline{K}(x) = \frac{K(x)}{x} = a \cdot x + b + \frac{c}{x}$

x … Anzahl der produzierten Netze

$K(x)$ … Gesamtkosten bei der Produktion von x Netzen in €

$\overline{K}(x)$ … Stückkosten bei der Produktion von x Netzen in € pro Netz

I: $K(0) = 3000 \quad \Rightarrow \; c = 3000$

II: $\overline{K}(10) = 320 \quad \Rightarrow \; 10 \cdot a + b + 0{,}1 \cdot c = 320$

III: $K(100) = 5450 \; \Rightarrow \; 10000 \cdot a + 100 \cdot b + c = 5450$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 10 & 1 & 0{,}1 \\ 10000 & 100 & 1 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3000 \\ 320 \\ 5450 \end{pmatrix}$$

d) Das lokale Minimum der Stückkostenfunktion ermittelt man durch das Nullsetzen ihrer 1. Ableitung:

$$\left(\frac{K(x)}{x}\right)' = 0$$

Die Quotientenregel liefert:

$$\frac{K'(x) \cdot x - K(x)}{x^2} = 0 \;\Rightarrow\; K'(x) = \frac{K(x)}{x} \text{ (Grenzkosten = Stückkosten)}$$

Die Lösungen dieser Gleichung sind die x-Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen von Grenzkostenfunktion und Stückkostenfunktion.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 2 Algebra und Geometrie
d) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) 4 Analysis
c) 3 Funktionale Zusammenhänge
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) A Modellieren und Transferieren
d) D Argumentieren und Kommunizieren

Nebenhandlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren, C Interpretieren und Dokumentieren
b) —
c) —
d) A Modellieren und Transferieren, B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) leicht
c) mittel
d) schwer

Punkteanzahl:

a) 3
b) 3
c) 3
d) 3

Thema: Sonstiges

Quellen: —

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Babynahrung

Aufgabennummer: B_028

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

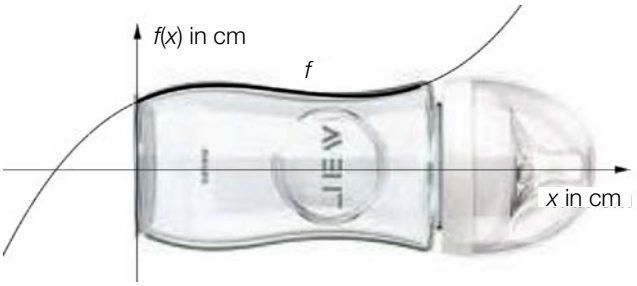
a) Bei der Zubereitung von Säuglingsmilch muss das Dosierungsverhältnis genau eingehalten werden. Ein gestrichener Messlöffel Pulver wird in 30 ml Wasser gegeben.

– Stellen Sie eine Gleichung derjenigen Funktion auf, die die Anzahl der Messlöffel L in Abhängigkeit von der Wassermenge w in Millilitern modellhaft beschreibt.

– Beschreiben Sie, welchen Zusammenhang die Umkehrfunktion in diesem Fall angibt.

b) Der Querschnitt der abgebildeten ca. 10 cm hohen Babyflasche hat als Begrenzungslinie den Graphen der Funktion f mit $f(x) = 0{,}008 \cdot x^3 - 0{,}13 \cdot x^2 + 0{,}494 \cdot x + 2{,}596$.

x … Flaschenhöhe in cm
$f(x)$ … Radius der Flasche in der Höhe x in cm

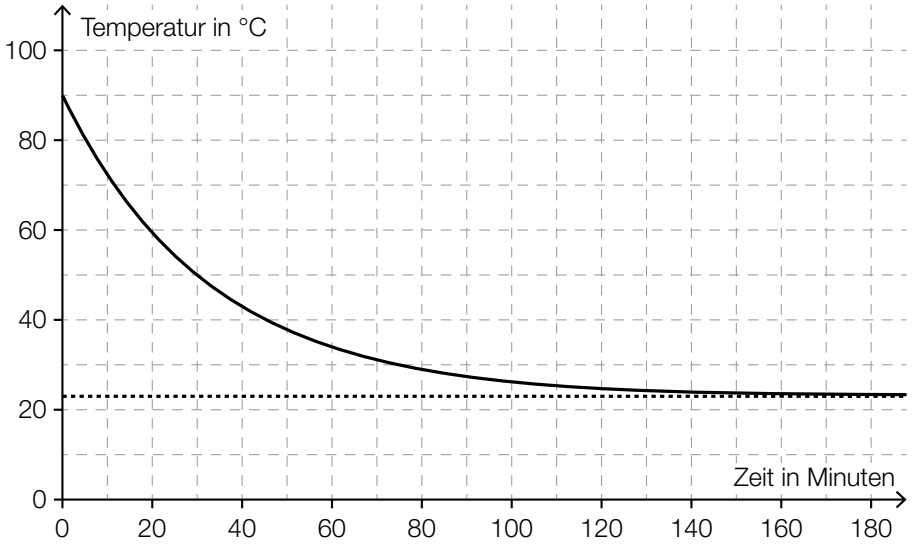


– Bestimmen Sie den maximalen Durchmesser der Flasche.

– Erstellen Sie eine Formel für das Füllvolumen in Abhängigkeit von der Flaschenhöhe.

– Berechnen Sie, in welcher Höhe sich die Markierung für 150 ml befinden muss.

c) Die nachstehende Grafik zeigt den Graphen einer Funktion, die das Abkühlen von heißem Wasser in einer Babyflasche bei einer Raumtemperatur von 23 °C darstellt.



– Kreuzen Sie die richtige Aussage an. *[1 aus 5]*

Nach 3 Stunden ist die Wassertemperatur unter 23 °C gesunken.	☐
Die Wassertemperatur halbiert sich jede halbe Stunde.	☐
Die Temperaturabnahme wird durch eine quadratische Funktion beschrieben.	☐
Nach ca. 35 Minuten ist die Temperatur des Wassers auf die Hälfte der Anfangstemperatur gesunken.	☐
Je mehr Zeit vergeht, desto schneller kühlt das Wasser ab.	☐

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $L(w) = \frac{w}{30}$

Die Umkehrfunktion gibt in diesem Fall an, welche Menge Wasser für eine bestimmte Anzahl von Messlöffeln benötigt wird.

b) Hochpunkt der Funktion f: (2,45… | 3,14…)
Die y-Koordinate muss verdoppelt werden, um den maximalen Durchmesser zu erhalten.
Der maximale Durchmesser beträgt rund 6,3 cm.

Formel für das Volumen: $V = \pi \cdot \int_0^h (0{,}008 \cdot x^3 - 0{,}13 \cdot x^2 + 0{,}494 \cdot x + 2{,}596)^2 \, dx$
150 ml = 150 cm^3

$\pi \cdot \int_0^h (0{,}008 \cdot x^3 - 0{,}13 \cdot x^2 + 0{,}494 \cdot x + 2{,}596)^2 \, dx = 150 \quad \Rightarrow \quad h = 5{,}35\ldots$

Die Markierung muss sich in rund 5,4 cm Höhe befinden.

c)

	☐
	☐
	☐
Nach ca. 35 Minuten ist die Temperatur des Wassers auf die Hälfte der Anfangstemperatur gesunken.	☒
	☐

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 4 Analysis
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) A Modellieren und Transferieren
c) —

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) schwer
c) leicht

Punkteanzahl:

a) 2
b) 3
c) 1

Thema: Sonstiges

Quellen: —

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Produktion von Golfschlägern

Aufgabennummer: B_303

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein Unternehmen produziert und verkauft Golfschläger.

a) Durch Marktforschung konnten folgende Verkaufsdaten ermittelt werden:

Nachfrage in Stück	240	310	400	500
Preis in €/Stk.	230	217	203	182

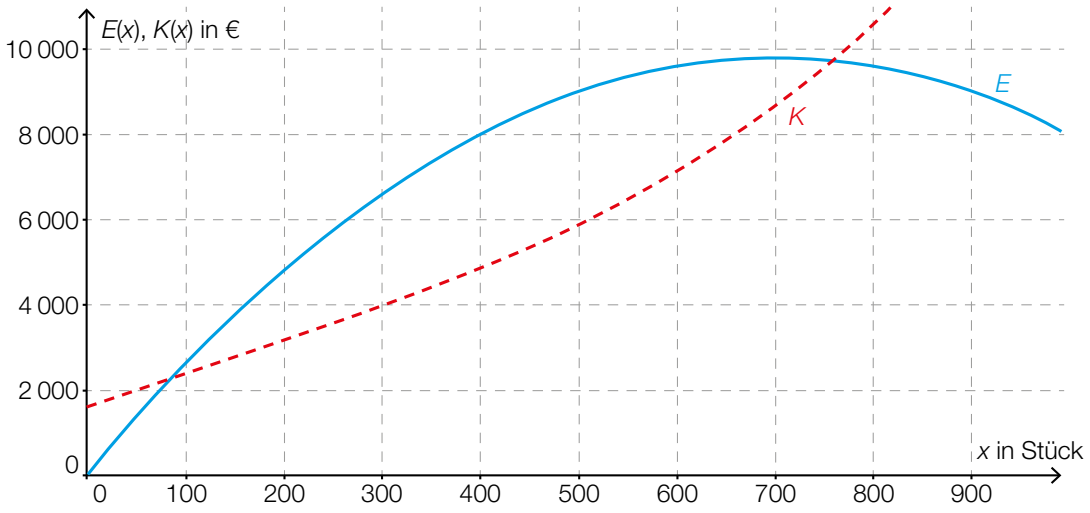
Auf Grundlage dieser Daten soll eine Preisfunktion der Nachfrage p_N mit $p_N(x) = a \cdot x + b$ ermittelt werden.

x … Anzahl der Golfschläger in Stück
$p_N(x)$ … Preis bei einer Nachfrage von x Stück in Euro pro Stück (€/Stk.)

– Ermitteln Sie mithilfe von Regression eine Gleichung der Funktion p_N.

– Interpretieren Sie die Parameter a und b der Preisfunktion der Nachfrage p_N im gegebenen Sachzusammenhang.

b) Für einen speziellen Golfschläger sind die Graphen der Erlösfunktion E und der Kostenfunktion K dargestellt:



– Beschreiben Sie, wie Sie aus der obigen Grafik die Gewinngrenzen ermitteln können.

– Beschreiben Sie, wie Sie aus der obigen Grafik diejenige Stückzahl ermitteln können, für die der Gewinn maximal ist.

c) Von einer Golfschlägerproduktion sind die Gewinnfunktion G und die Preisfunktion der Nachfrage p_N bekannt.

$G(x) = -0{,}0001 \cdot x^3 - 0{,}17 \cdot x^2 + 200 \cdot x - 16\,000$
$p_N(x) = -0{,}2 \cdot x + 280$

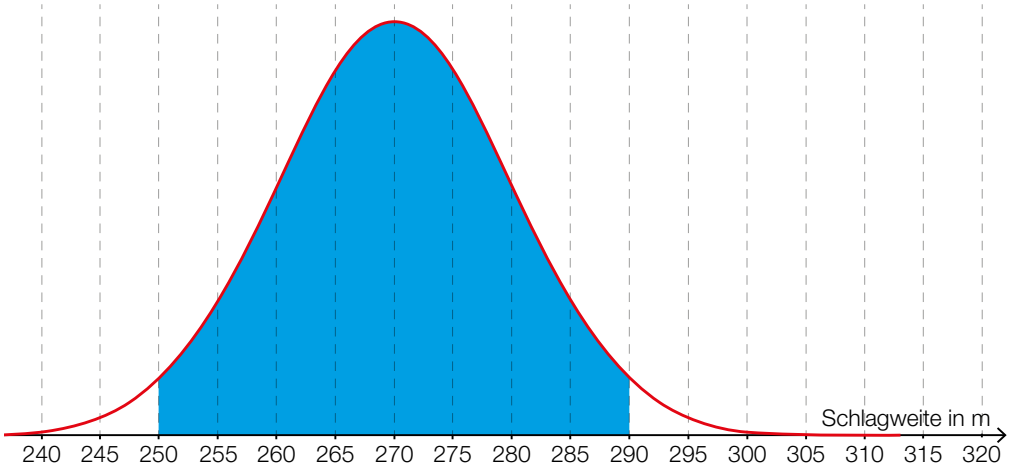
x … Anzahl der Golfschläger in Stück
$G(x)$ … Gewinn bei x Stück in €
$p_N(x)$ … Preis bei x Stück in €/Stk.

– Berechnen Sie den Cournot'schen Punkt.

d) Von einem Roboter wird ein Schlägertest durchgeführt. Dabei wird ein Ball abgeschlagen und die dabei erzielte Schlagweite gemessen. Die Schlagweite wird als annähernd normalverteilt mit $\mu = 270$ m und $\sigma = 10$ m angenommen.
Liegt die Schlagweite bei einem getesteten Schläger unter einer bestimmten Grenze, wird er aussortiert.

– Berechnen Sie, welche Schlagweite als Grenze angesetzt wurde, wenn 7 % der Schläger aussortiert werden.

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der zugehörigen Dichtefunktion dargestellt.



– Kreuzen Sie die korrekte Beschreibung des dunkel hinterlegten Bereichs an. *[1 aus 5]*

der Anteil der Schläger, deren Schlagweite mindestens um $\pm 2 \cdot \sigma$ vom Erwartungswert abweicht	☐
der Anteil der Schläger, deren Schlagweite genau um $\pm 2 \cdot \sigma$ vom Erwartungswert abweicht	☐
der Anteil der Schläger, deren Schlagweite genau um $\pm 4 \cdot \sigma$ vom Erwartungswert abweicht	☐
der Anteil der Schläger, deren Schlagweite höchstens um $\pm 2 \cdot \sigma$ vom Erwartungswert abweicht	☐
der Anteil der Schläger, deren Schlagweite höchstens um $\pm 4 \cdot \sigma$ vom Erwartungswert abweicht	☐

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Ermittlung der Funktionsgleichung mittels Technologieeinsatz:
$p_N(x) = -0{,}18 \cdot x + 273{,}98$ (Parameter gerundet)

Interpretation der Parameter:
$a \approx -0{,}18$: Bei einer Preissenkung um € 0,18 pro Stück steigt die Nachfrage um 1 Stück.
$b \approx 273{,}98$: Der Höchstpreis beträgt € 273,98.

b) Die Gewinngrenzen sind diejenigen Stückzahlen, bei denen die Graphen der Kostenfunktion und der Erlösfunktion einander schneiden.

Man misst, bei welcher Stückzahl der senkrechte Abstand zwischen den Graphen der Kostenfunktion und der Erlösfunktion innerhalb der Gewinngrenzen am größten ist.

c) denjenigen x-Wert, für den $G'(x) = 0$ ist, in p_N einsetzen
Cournot'scher Punkt: (427,20… | 194,55…) bzw., falls die x-Koordinate auf ganze Stück gerundet wird: (427 | 194,6)

d) X … Schlagweite in m
$P(X \leq a) = 0{,}07 \Rightarrow a = 255{,}2\ldots$

Die Grenze der Schlagweite liegt bei rund 255 m.

	☐
	☐
	☐
der Anteil der Schläger, deren Schlagweite höchstens um $\pm 2 \cdot \sigma$ vom Erwartungswert abweicht	☒
	☐

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 4 Analysis
c) 4 Analysis
d) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) —
c) —
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) —
c) —
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel
d) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2
c) 1
d) 2

Thema: Wirtschaft

Quellen: —

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Süßigkeiten

Aufgabennummer: B_290

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Es wird eine neue Süßigkeiten-Produktion geplant, die aus Kugeln mit Schokolade- bzw. mit Kaffee-Füllung besteht.

a) Der Wert der Maschine, die die Kugeln herstellt, nimmt im Laufe der Zeit ab. Diese Wertabnahme kann mit einer Folge beschrieben werden. Die einzelnen Folgenglieder geben den Wert der Maschine im entsprechenden Jahr an. Die Maschine hat im 1. Jahr einen Wert von € 97.500. Zu Beginn jedes weiteren Jahres verringert sich der Wert der Maschine jeweils um € 7.500.

– Geben Sie an, um welchen Folgentyp es sich hierbei handelt. Begründen Sie Ihre Auswahl.
– Berechnen Sie die ersten 3 Folgenglieder.
– Stellen Sie ein explizites Bildungsgesetz dieser Folge auf.
– Berechnen Sie, wann die Maschine € 60.000 wert ist.

b) In einer Packung befinden sich 31 Schokolade-Kugeln und 23 Kaffee-Kugeln. Eine Person zieht 3-mal hintereinander zufällig eine Kugel aus der Packung. Da die Person keine Kaffee-Kugeln mag, legt sie eine gezogene Kaffee-Kugel sofort wieder zurück in die Packung. Schokolade-Kugeln werden nicht zurückgelegt.

– Veranschaulichen Sie diesen Sachzusammenhang in einem mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten beschrifteten Baumdiagramm.
– Kennzeichnen Sie im Baumdiagramm alle Pfade, in denen genau eine Schokolade-Kugel gezogen wird.
– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Person 3-mal hintereinander eine Kaffee-Kugel zieht.

c) Verschiedene Packungen enthalten eine unterschiedliche Anzahl an Schokolade-Kugeln. Es werden 34 Packungen untersucht. Die nachstehende Tabelle gibt an, wie viele Packungen eine bestimmte Anzahl an Schokolade-Kugeln enthält.

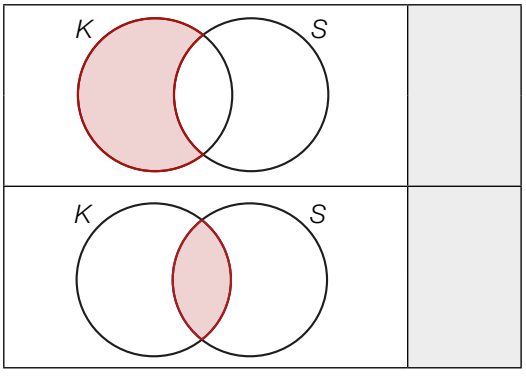
Anzahl an Packungen	8	7	6	6	5	2
Anzahl an Schokolade-Kugeln pro Packung	30	32	33	34	36	38

– Berechnen Sie das arithmetische Mittel der Anzahl an Schokolade-Kugeln pro Packung.
– Berechnen Sie den relativen Anteil der Packungen, die 30 Schokolade-Kugeln enthalten bezogen auf alle untersuchten Packungen.
– Interpretieren Sie die Bedeutung der Summe
$30 \cdot 8 + 32 \cdot 7 + 33 \cdot 6 + 34 \cdot 6 + 36 \cdot 5 + 38 \cdot 2$ im gegebenen Sachzusammenhang.

d) Bei einer Umfrage kosten 50 Personen die Süßigkeiten. Die nachstehende Tabelle gibt das Ergebnis dieser Umfrage an.

	„Mir schmeckt keine Kugel.“	„Mir schmecken nur Schokolade-Kugeln.“	„Mir schmecken nur Kaffee-Kugeln.“	„Mir schmecken beide Kugeln.“
Anzahl der Nennungen	5	10	9	26

– Übertragen Sie die Informationen aus der obigen Tabelle in ein Venn-Diagramm.
– Ordnen Sie den beiden Venn-Diagrammen jeweils diejenige Mengenschreibweise aus A bis D zu, die die markierte Teilmenge beschreibt. *[2 zu 4]*



A	$S \cap K$
B	$K \setminus S$
C	$S \setminus K$
D	$S \cup K$

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

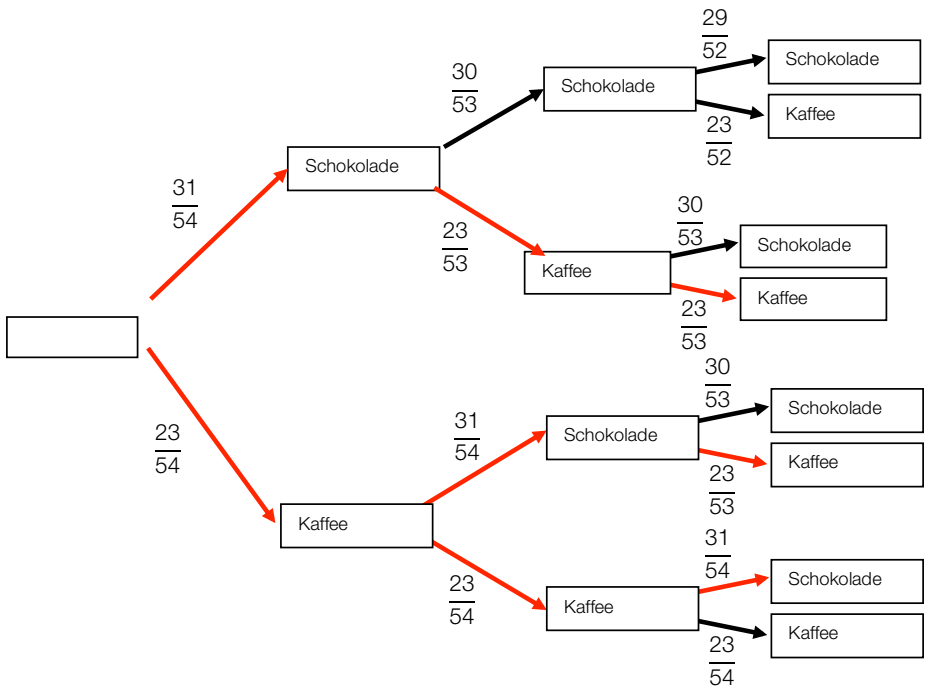
a) $a_1 = € 97.500$
$a_2 = € 90.000$
$a_3 = € 82.500$

Es handelt sich um eine arithmetische Folge, da die Differenz zweier aufeinanderfolgender Folgenglieder konstant ist.

$a_n = 97\,500 - (n - 1) \cdot 7\,500$

$60\,000 = 97\,500 - (n - 1) \cdot 7\,500$
$n = 6$
Zu Beginn des 6. Jahres hat die Maschine einen Wert von € 60.000.

b)



X … Anzahl der hintereinander gezogenen Kaffee-Kugeln

$P(X = 3) = \frac{23}{54} \cdot \frac{23}{54} \cdot \frac{23}{54} = 0{,}0772\ldots \approx 7{,}7\ \%$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von rund 7,7 % zieht die Person 3-mal hintereinander eine Kaffee-Kugel.

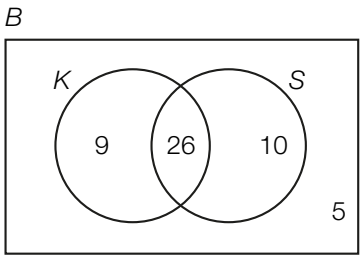
c) $\frac{30 \cdot 8 + 32 \cdot 7 + 33 \cdot 6 + 34 \cdot 6 + 36 \cdot 5 + 38 \cdot 2}{34} = 33$

$\frac{8}{34} = 0{,}2352\ldots \approx 23{,}5\ \%$

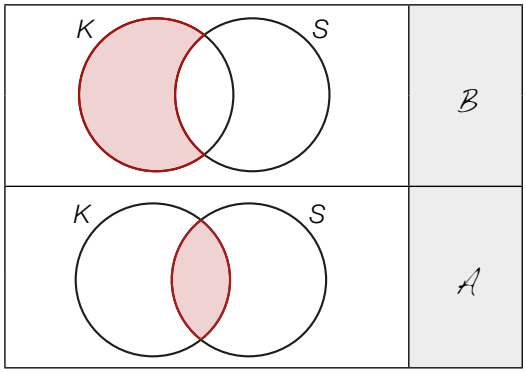
Rund 23,5 % der Packungen enthalten 30 Schokolade-Kugeln.

Mit dieser Summe wird die Gesamtanzahl der Schokolade-Kugeln in den 34 Packungen berechnet.

d)



B ... Menge aller befragten Personen
K ... Menge der Personen, denen Kaffee-Kugeln schmecken
S ... Menge der Personen, denen Schokolade-Kugeln schmecken



A	$S \cap K$
B	$K \setminus S$
C	$S \setminus K$
D	$S \cup K$

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 5 Stochastik
c) 5 Stochastik
d) 1 Zahlen und Maße

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) A Modellieren und Transferieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren, A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) C Interpretieren und Dokumentieren
d) A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) mittel
d) leicht

Punkteanzahl:

a) 4
b) 3
c) 3
d) 2

Thema: Sonstiges

Quellen: —

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Allergie

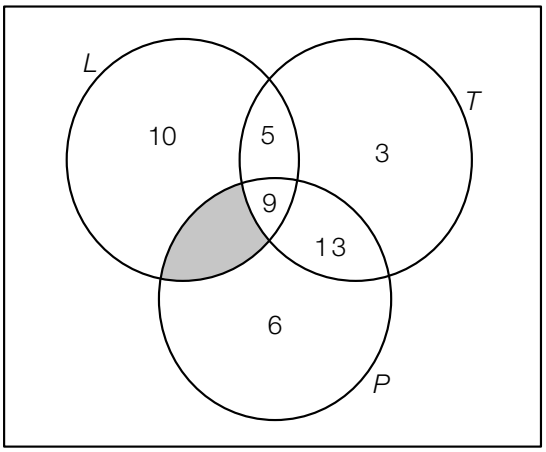
Aufgabennummer: B_289

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Es kommen immer mehr Kinder mit unterschiedlichen Allergien in den Kindergarten.

a) Im Kindergarten befinden sich insgesamt 53 Kinder mit mindestens einer Allergie. Es werden generell die verschiedenen Allergien in die Gruppen Lebensmittelallergie (L), Tierhaarallergie (T) und Pollenallergie (P) eingeteilt. Das folgende Venn-Diagramm zeigt die Verteilung der Kinder auf die einzelnen Allergiegruppen.

– Bestimmen Sie die Anzahl der Kinder in der grau markierten Schnittmenge.
– Interpretieren Sie die Bedeutung der Menge $L \setminus (T \cup P)$ im gegebenen Sachzusammenhang.



b) Einem Kind wurde ein Antiallergikum verschrieben. 48 Stunden nach der Einnahme dieses Antiallergikums sind noch 0,1 % des Wirkstoffs der verabreichten Dosis vorhanden.

– Stellen Sie eine Gleichung derjenigen Exponentialfunktion auf, die die Abnahme der Menge des Wirkstoffs des Antiallergikums in Abhängigkeit von der Zeit in Stunden nach der Einnahme beschreibt. Es wird von einer Anfangsmenge N_0 ausgegangen.
– Bestimmen Sie die Halbwertszeit der Menge des Wirkstoffs des Antiallergikums.

c) Im Monat Juni wird die Häufigkeit von allergischen Reaktionen auf Pollen bei einer Gruppe von 35 Kindern aufgezeichnet.

Anzahl der allergischen Reaktionen	0	1	2	3	4
Anzahl der Kinder	5	6	8	10	6

– Berechnen Sie die relative Häufigkeit der Kinder, die 2 allergische Reaktionen zeigen.
– Geben Sie an, welche statistische Kenngröße mit dem Ausdruck $\frac{5 \cdot 0 + 6 \cdot 1 + 8 \cdot 2 + 10 \cdot 3 + 6 \cdot 4}{35}$ berechnet wird.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $53 - 10 - 5 - 9 - 3 - 13 - 6 = 7$
Es sind 7 Kinder in der Schnittmenge.

$L \setminus (T \cup P)$ ist die Menge aller Kinder, die nur an einer Lebensmittelallergie leiden.

b) $N(t) = N_0 \cdot a^t$
t ... Zeit in Stunden nach der Einnahme
$N(t)$ ... Menge des Wirkstoffs zur Zeit t

$0{,}001 = a^{48} \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt[48]{0{,}001} = 0{,}8659\ldots$
$N(t) = N_0 \cdot 0{,}8659...^t$ oder $N(t) = N_0 \cdot e^{-0{,}1439... \cdot t}$

$0{,}5 = 0{,}8659...^t \quad \Rightarrow \quad t = 4{,}816\ldots$
Die Halbwertszeit beträgt rund 4,82 Stunden.

c) $\frac{8}{35} = 0{,}2285\ldots$
Von den Kindern die an einer Pollenallergie leiden, haben rund 22,9 % 2 allergische Reaktionen im Monat Juni.

Mit dem Ausdruck wird das arithmetische Mittel der Anzahl von allergischen Reaktionen auf Pollen pro Kind berechnet.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 1 Zahlen und Maße
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) A Modellieren und Transferieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) leicht

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2
c) 2

Thema: Sonstiges

Quellen: —

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Brettspiel

Aufgabennummer: B_288

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Bei einem Spiel gewinnt diejenige Person, die als erstes ein vorgegebenes Muster auf ihrem Spielbrett mit roten und grünen Farbsteinen ausgelegt hat.
Bei einem Spielzug wird zuerst mit 2 Zahlenwürfeln („normale“ Würfeln mit den Augenzahlen 1 bis 6) geworfen. Die aus den Augenzahlen gebildete Summe (Augensumme) bestimmt, wie viele Farbsteine man auf das Spielbrett legen darf.
Anschließend wird für jeden zu legenden Farbstein die Farbe gewürfelt. Dazu wird ein spezieller Farbwürfel mit 4 grünen und 2 roten Seiten verwendet.
Ein Spielzug besteht daher aus dem Werfen der 2 Zahlenwürfel und dem darauffolgenden mehrmaligen Werfen des Farbwürfels.

a) Die Augensumme der beiden Zahlenwürfel kann als Zufallsvariable X betrachtet werden.

– Erstellen Sie eine Tabelle, in der man für alle möglichen Augensummen der beiden Würfel die jeweilige Wahrscheinlichkeit ablesen kann.
– Interpretieren Sie den Ausdruck $\sum_{i=2}^{12} (i \cdot P(X = i)) = 7$ im gegebenen Sachzusammenhang.

b) Ein Kind darf den Farbwürfel 3-mal werfen.

– Erstellen Sie ein Baumdiagramm, in dem die möglichen Farbabfolgen und die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten dargestellt sind.
– Dokumentieren Sie, wie man mithilfe des Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeit, dass 3 rote Farbsteine auf das Spielbrett gelegt werden dürfen, bestimmen kann.
– Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kind bei 3-maligem Werfen des Farbwürfels 1 roten Stein und 2 grüne Steine auf das Spielbrett legen darf.

c) Ein Kind wirft in einem Spielzug 7-mal den Farbwürfel.

– Ordnen Sie den beiden gegebenen Ausdrücken jeweils das passende Ereignis aus A bis D zu. *[2 zu 4]*

$\sum_{k=0}^{4} \binom{7}{k} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{k} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{7-k}$	
$\sum_{k=0}^{5} \binom{7}{k} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{k} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{7-k}$	

A	Es werden weniger als 5 grüne Steine gelegt.
B	Es werden maximal 5 rote Steine gelegt.
C	Es werden weniger als 5 rote Steine gelegt.
D	Es werden maximal 5 grüne Steine gelegt.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass das Kind mindestens 4-mal die Farbe Grün würfelt.

d) Ein Kind steht kurz vor dem Gewinn des Spiels. Es benötigt im nächsten Spielzug zum Fertigstellen des Musters noch genau 2 rote Steine.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass das Kind nach dem Würfeln genau 2 Steine, die beide rot sind, zur Verfügung hat.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

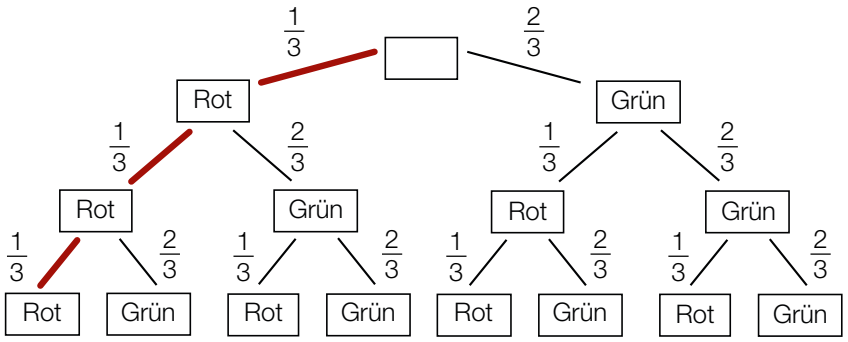
Möglicher Lösungsweg

a)

Augensumme x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Mit dem Ausdruck wird der Erwartungswert der Zufallsvariablen X berechnet. Man kann erwarten, dass man bei oftmaliger Wiederholung des Spielzugs im Mittel 7 Farbsteine pro Runde auf das Spielbrett legen darf.

b)



Am Baumdiagramm wählt man den Ast, der nur aus roten Würfelergebnissen besteht (in der Abbildung mit Rot markiert). Entlang des Astes werden die Wahrscheinlichkeiten multipliziert.

$$P(\text{„1 Rot“, „2 Grün“}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 = \frac{4}{9} = 0{,}\overline{4}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kind bei 3 Würfen 1-mal die Farbe Rot und 2-mal die Farbe Grün würfelt, beträgt rund 44,4 %.

c)

$\sum_{k=0}^{4} \binom{7}{k} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^k \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{7-k}$	C
$\sum_{k=0}^{5} \binom{7}{k} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{7-k}$	D

A	Es werden weniger als 5 grüne Steine gelegt.
B	Es werden maximal 5 rote Steine gelegt.
C	Es werden weniger als 5 rote Steine gelegt.
D	Es werden maximal 5 grüne Steine gelegt.

X ... Anzahl der Würfe, bei denen die Farbe Grün gewürfelt wird

Binomialverteilung mit $n = 7$ und $p = \frac{2}{3}$:
$P(X \geq 4) = 0{,}8267\ldots \approx 82{,}7\ \%$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von rund 82,7 % wird bei 7 Würfen mit dem Farbwürfel mindestens 4-mal die Farbe Grün geworfen.

d) Die Wahrscheinlichkeit, dass das Kind die Augensumme 2 und mit dem Farbwürfel 2-mal die Farbe Rot wirft, wird gebildet mit:

$P(\text{„Augensumme = 2“}) \cdot P(\text{„der Farbwürfel zeigt bei beiden Würfeln Rot“})$
$= \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = 0{,}0030\ldots$
Mit einer Wahrscheinlichkeit von rund 0,3 % hat das Kind genau 2 Steine, die beide rot sind.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 5 Stochastik
c) 5 Stochastik
d) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) A Modellieren und Transferieren
c) C Interpretieren und Dokumentieren
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren, B Operieren und Technologieeinsatz
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) —

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel
d) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 3
c) 2
d) 1

Thema: Sonstiges

Quellen: —

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Ampelschaltung

Aufgabennummer: B_329

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Laut § 38 Abs. 6 Satz 1 der Straßenverkehrsordnung (StVO) gilt:
„Das grüne Licht ist jeweils mit viermal grünblinkendem Licht zu beenden, wobei die Leucht- und die Dunkelphase abwechselnd je eine halbe Sekunde zu betragen haben."

a) Ein Auto fährt mit 72 km/h auf eine Kreuzung zu. Als es sich 100 m vor der Ampel befindet, beginnt das Grünblinken.

– Überprüfen Sie nachweislich, ob der Fahrer noch beim Grünblinken in die Kreuzung einfahren kann, wenn er mit gleicher Geschwindigkeit weiterfährt.

Bei konstanter Bremsung hat das Auto eine Bremsverzögerung von 8 m/s^2.

– Berechnen Sie die Bremszeit des Autos bis zum Stillstand.

b) Auf einer Straße mit einer Geschwindigkeitsbegrenzung von 60 km/h sind zwei Ampeln 300 m voneinander entfernt. Ein Auto steht vor der ersten Ampel, die Rot anzeigt. Für die Beschleunigung-Zeit-Funktion a gilt bis zum Erreichen von 60 km/h:

$a(t) = -2{,}5 \cdot t^2 + 8{,}55 \cdot t$

t … Zeit in s
$a(t)$ … Beschleunigung zur Zeit t in m/s^2

– Berechnen Sie, nach wie vielen Metern das Auto die Geschwindigkeit von 60 km/h erreicht hat.

Nach dem Erreichen von 60 km/h fährt das Auto mit dieser Geschwindigkeit weiter. Das Auto soll noch beim Grünblinken die zweite Ampel erreichen.

– Berechnen Sie, nach wie vielen Sekunden die zweite Ampel zu blinken anfangen darf, wenn das Auto genau bei Schaltung auf Grün von der ersten Ampel wegfährt.

c) Eine Ampel hat folgendes Anzeigeprogramm:

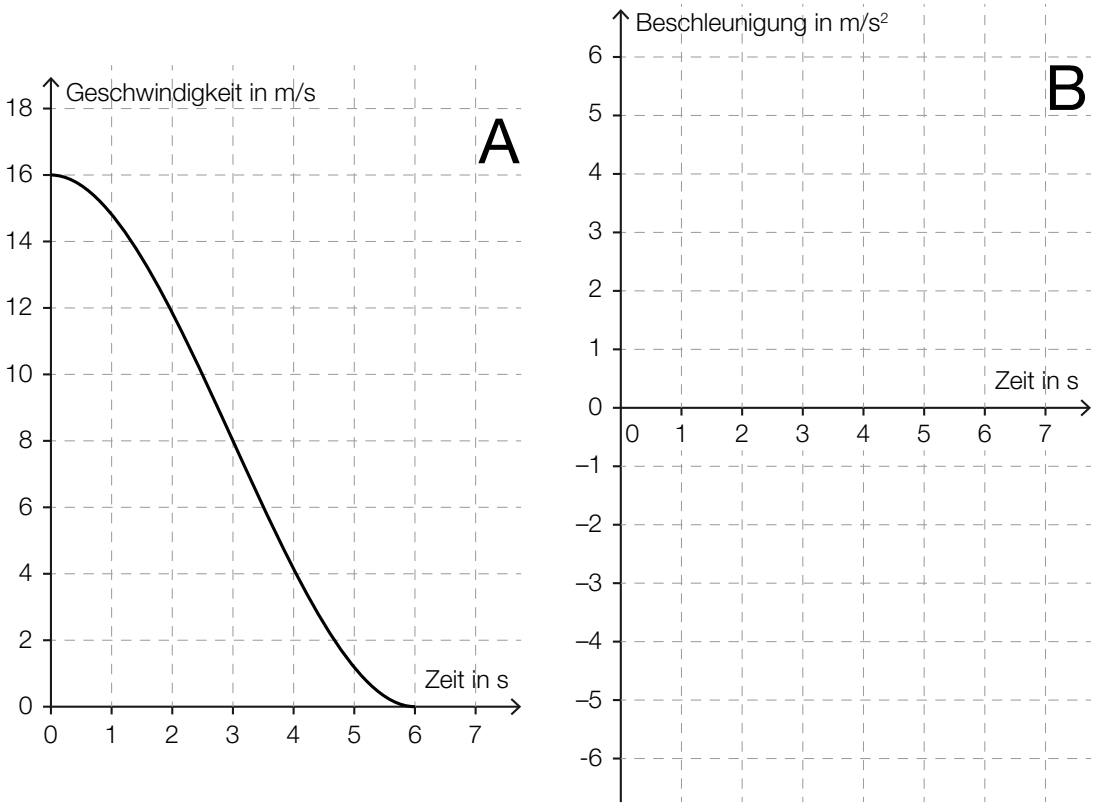
Ampelphase	Dauer
Rot	30 s
Gelb	3 s
Grün	20 s
Grün blinkend	4 s

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, die Ampel bei einer Gelbphase anzutreffen.

– Interpretieren Sie den Ausdruck $\left(1 - \frac{30}{57}\right)^n$ im gegebenen Sachzusammenhang.

d) Das Abbremsen vor der Ampel erfolgt nicht konstant, sondern lässt sich mit einer Polynomfunktion 3. Grades beschreiben. In Grafik A ist das Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm des Bremsvorgangs dargestellt.

– Skizzieren Sie in Grafik B das zugehörige Beschleunigung-Zeit-Diagramm.



– Kreuzen Sie diejenige Aussage an, die zu Grafik A passt. *[1 aus 5]*

Das Auto hat nach 3 Sekunden seine Höchstgeschwindigkeit erreicht.	☐
Das Auto ist am Anfang (t = 0 s) 16 m von der Ampel entfernt.	☐
Der Bremsweg des Autos beträgt rund 24 m.	☐
Die Anfangsgeschwindigkeit des Autos beträgt 16 km/h.	☐
Die durchschnittliche Beschleunigung während des Bremsvorgangs beträgt $-\frac{16}{6}$ m/s².	☐

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Zeit für die Strecke bis zur Ampel: $\frac{100}{20} = 5$

Der Fahrer braucht bis zur Ampel 5 s, das Grünblinken endet jedoch schon nach 4 s, er kann daher nicht mehr beim Grünblinken in die Kreuzung einfahren.

$\text{Bremszeit} = \frac{\text{Geschwindigkeit}}{\text{Bremsverzögerung}} = \frac{20}{8} = 2{,}5$
Die Bremszeit beträgt 2,5 s.

b) $v(t) = \int a(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{2{,}5}{3} \cdot t^3 + 4{,}275 \cdot t^2 + v(0)$, wobei $v(0) = 0$
$\frac{60}{3{,}6} = -\frac{2{,}5}{3} \cdot t^3 + 4{,}275 \cdot t^2$
$t_1 = -1{,}709\ldots$, $t_2 = 3{,}407\ldots$, $t_3 = 3{,}432\ldots$
Nach rund 3,41 s hat das Auto eine Geschwindigkeit von 60 km/h erreicht.

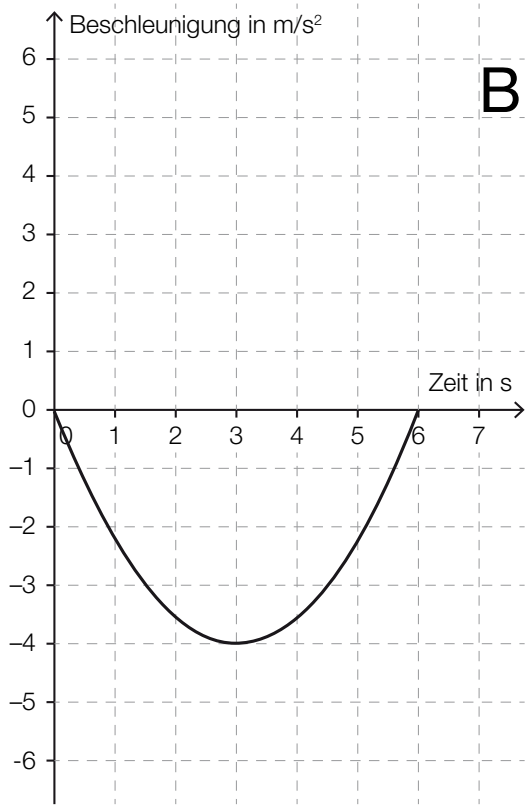
$\int_0^{3{,}407\ldots} \left(-\frac{2{,}5}{3} \cdot t^3 + 4{,}275 \cdot t^2\right) \mathrm{d}t = 28{,}287\ldots$
$300 - 28{,}287\ldots = 271{,}712\ldots$

Es bleiben noch rund 271,71 m bis zur Ampel. Bei einer konstanten Geschwindigkeit von 60 km/h $\left(= \frac{60}{3{,}6}\ \text{m/s}\right)$ braucht das Auto dafür rund 16,30 s. Insgesamt braucht das Auto bis zur nächsten Ampel rund 19,71 s. 4 s vorher fängt die Ampel zu blinken an.
Nach rund 15,71 s darf die Ampel frühestens zu blinken anfangen.

c) $P(\text{„Gelb“}) = \frac{3}{57} = \frac{1}{19}$

Der Ausdruck $\left(1 - \frac{30}{57}\right)^n$ entspricht der Wahrscheinlichkeit, dass man bei n Anfahrten die Ampel nie bei Rot erreicht.

d)



Die durchschnittliche Beschleunigung während des Bremsvorgangs beträgt $-\frac{16}{6}$ m/s².	☒

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 1 Zahlen und Maße
b) 4 Analysis
c) 5 Stochastik
d) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) —
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) A Modellieren und Transferieren
c) C Interpretieren und Dokumentieren
d) C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) schwer
c) mittel
d) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 4
c) 2
d) 2

Thema: Verkehr

Quellen: —

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

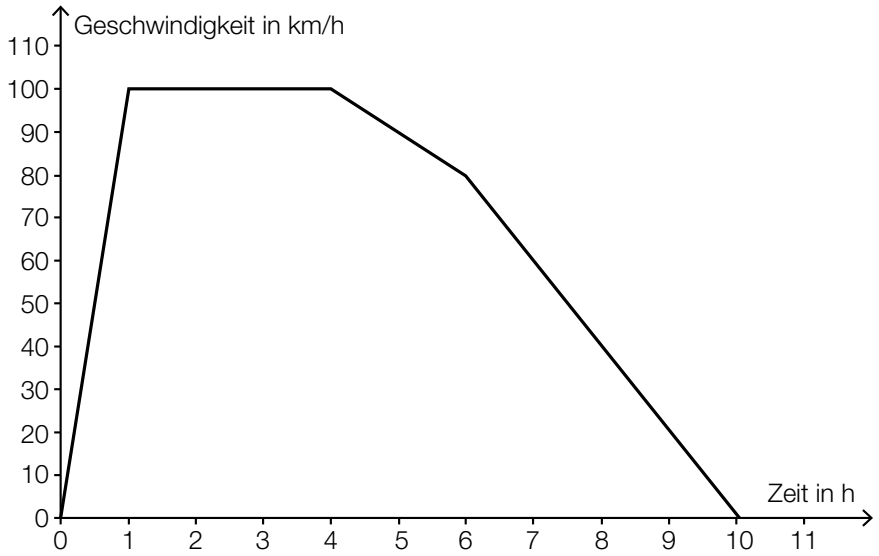
Bewegung

Aufgabennummer: A_273

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Mithilfe von mathematischen Modellen lassen sich Bewegungsvorgänge beschreiben.

a) Die nachstehende Grafik zeigt das Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm einer Autofahrt.



– Berechnen Sie denjenigen Flächeninhalt, den der Funktionsgraph mit der horizontalen Achse einschließt.
– Interpretieren Sie, welcher physikalischen Größe dieser Flächeninhalt entspricht.

b) Der Verlauf der Geschwindigkeit eines Fahrzeugs auf einer bestimmten Strecke kann durch die folgende Funktion beschrieben werden:

$v(t) = -0{,}002 \cdot t^4 + 0{,}3 \cdot t^3 - 10 \cdot t^2 + 106 \cdot t$ mit $0 \le t \le 30$

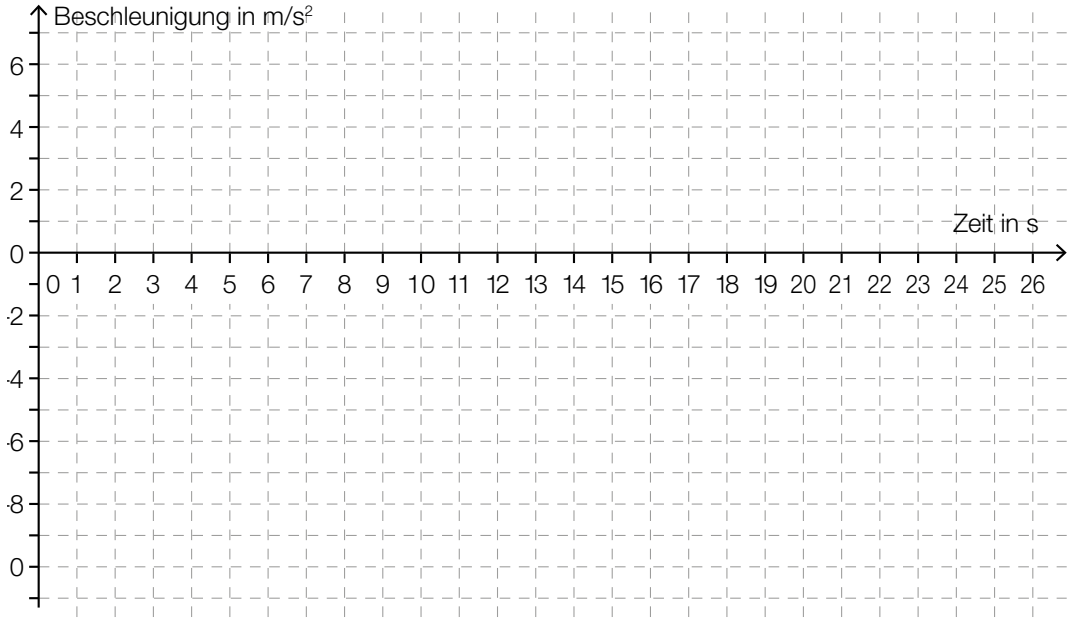
t … Zeit in min
$v(t)$ … Geschwindigkeit zur Zeit t in m/min

Bis zur Zeit t_1 legt das Fahrzeug einen Weg von 2 645 m zurück.

– Stellen Sie eine Gleichung zur Berechnung der Zeit t_1 auf.
– Berechnen Sie die Zeit t_1.

c) Ein Motorradfahrer beschleunigt gleichmäßig in 5 Sekunden aus dem Stillstand auf eine Geschwindigkeit von 30 m/s. Die nächsten 10 Sekunden fährt er mit einer konstanten Geschwindigkeit von 30 m/s. Danach muss er auf eine Geschwindigkeit von 10 m/s abbremsen und benötigt dafür 2 Sekunden. 5 Sekunden lang kann er diese Geschwindigkeit beibehalten, um anschließend in 2 Sekunden auf Stillstand abzubremsen. Die Bremsvorgänge erfolgen gleichmäßig.

– Zeichnen Sie im nachstehenden Koordinatensystem das zugehörige Beschleunigung-Zeit-Diagramm ein.



d) Nur eine der folgenden beiden Abbildungen stellt das Weg-Zeit-Diagramm eines bewegten Objekts dar.

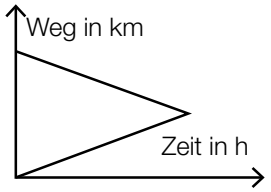


Abbildung 1

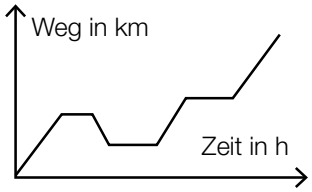


Abbildung 2

– Argumentieren Sie, welche der beiden Abbildungen keinen Funktionsgraphen darstellt.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Berechnung des Flächeninhalts:

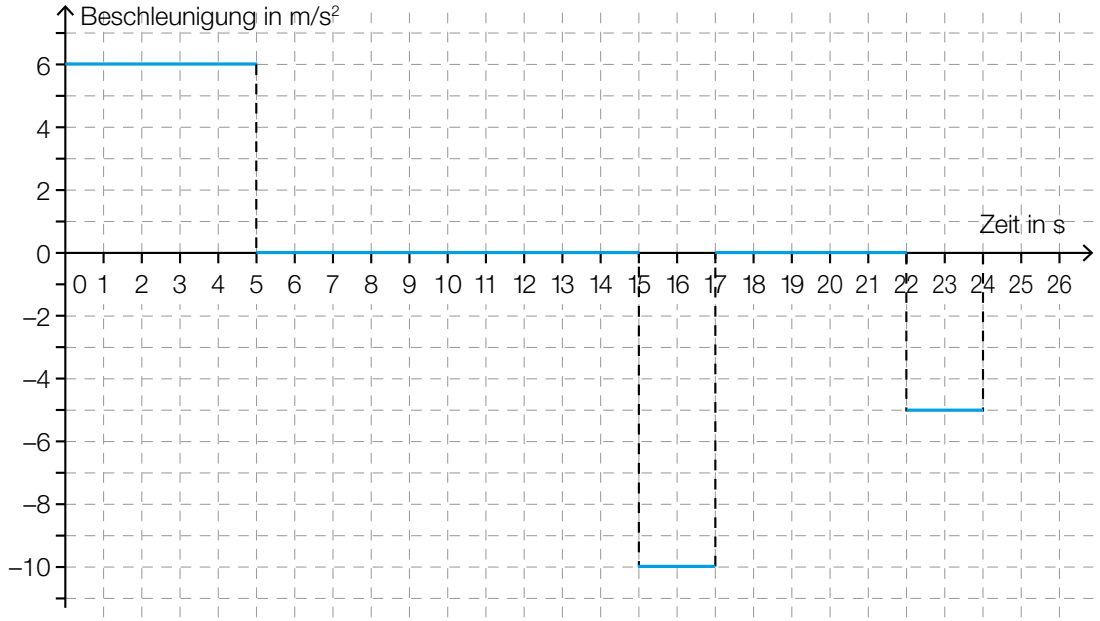
$$\frac{1 \cdot 100}{2} + 3 \cdot 100 + \frac{(100 + 80) \cdot 2}{2} + \frac{4 \cdot 80}{2} = 690$$

Der Flächeninhalt unter der Geschwindigkeit-Zeit-Funktion entspricht dem zurückgelegten Weg. Das Auto legt einen Weg von 690 km zurück.

b) $\int_0^{t_1} v(t)\,dt = 2645$

Lösung der Gleichung mittels Technologieeinsatz:
$t = 9{,}907\ldots$
Nach rund 9,91 Minuten hat das Fahrzeug einen Weg von 2 645 m zurückgelegt.

c)



d) Abbildung 1 stellt keinen Funktionsgraphen dar, da eine Funktion eine eindeutige Zuordnung ist. In Abbildung 1 gibt es aber Zeitpunkte, denen 2 Wege zugeordnet werden.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 4 Analysis
c) 4 Analysis
d) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 3 Funktionale Zusammenhänge
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) A Modellieren und Transferieren
c) A Modellieren und Transferieren
d) D Argumentieren und Kommunizieren

Nebenhandlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) —
d) —

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) schwer
d) leicht

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2
c) 1
d) 1

Thema: Sonstiges

Quellen: —

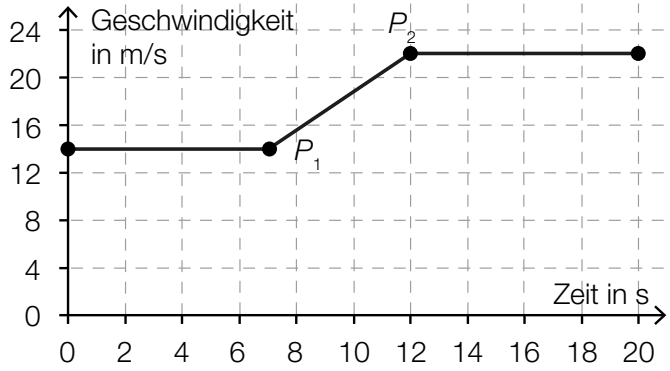
Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Linienbus

Aufgabennummer: B_070

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Die nachstehende Abbildung zeigt das Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm der Bewegung eines Busses.



a) – Beschreiben Sie die 3 verschiedenen Bewegungsabläufe hinsichtlich der Geschwindigkeit des Busses.

– Berechnen Sie denjenigen Weg, den der Bus in den ersten 20 Sekunden zurücklegt.

b) – Stellen Sie eine Gleichung der Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v im Bereich von P_1 bis P_2 auf.

– Erstellen Sie das Beschleunigung-Zeit-Diagramm für das Intervall [0 s; 20 s].

c) Der Geschwindigkeitsverlauf in Abhängigkeit von der Zeit t im Bereich von P_1 bis P_2 soll durch eine Funktion der Form $v(t) = a \cdot t^3 + b \cdot t^2 + c \cdot t + d$ angenähert werden, deren Graph durch die Punkte P_1 und P_2 verläuft. Zu den Zeitpunkten $t = 7$ s und $t = 12$ s ist die Beschleunigung null.

– Stellen Sie die zur Bestimmung der Koeffizienten a, b, c und d benötigten Bedingungen auf.

– Geben Sie das entstehende Gleichungssystem in Matrixform an.

– Berechnen Sie die Koeffizienten a, b, c und d der Funktion v.

d) In den Bussen einer bestimmten Linie soll die Auslastung überprüft werden.
Die Anzahl der Passagiere pro Bus ist näherungsweise normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 44$ Personen und der Standardabweichung $\sigma = 12$ Personen.
In 25 Bussen wird eine Überprüfung der Passagieranzahl durchgeführt.

– Ermitteln Sie den zum Erwartungswert symmetrischen Zufallsstreubereich, in dem der Stichprobenmittelwert mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % liegt.

– Argumentieren Sie, wie sich der Stichprobenumfang ändern muss, wenn sich die Breite des 95-%-Zufallsstreubereichs halbieren soll.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Intervall [0 s; 7 s]: Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit von 14 m/s (gleichförmige Bewegung)
Intervall [7 s; 12 s]: (gleichförmig) beschleunigte Bewegung
Intervall [12 s; 20 s]: Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit von 22 m/s (gleichförmige Bewegung)

Der zurückgelegte Weg entspricht der Fläche unter dem Graphen der Funktion v.

$s_1 = 14 \cdot 7 = 98$

$s_2 = \frac{14 + 22}{2} \cdot 5 = 90$

$s_3 = 22 \cdot 8 = 176$

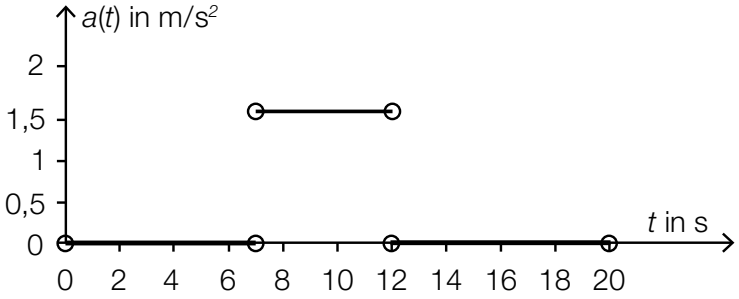
$s_{gesamt} = s_1 + s_2 + s_3 = 364$ m

b) $v(t) = k \cdot t + d$

$k = \frac{22 - 14}{12 - 7} = 1{,}6$

$d = 14 - 1{,}6 \cdot 7 = 2{,}8$

$v(t) = 1{,}6 \cdot t + 2{,}8$



c) I: $v(7) = 14$
II: $v(12) = 22$
III: $v'(7) = 0$
IV: $v'(12) = 0$

$$\begin{pmatrix} 343 & 49 & 7 & 1 \\ 1728 & 144 & 12 & 1 \\ 147 & 14 & 1 & 0 \\ 432 & 24 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 22 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Berechnen der Koeffizienten mittels Technologieeinsatz:

$a = -0{,}128$; $b = 3{,}648$; $c = -32{,}256$; $d = 104{,}944$

d) zweiseitigen 95-%-Zufallsstreubereich mithilfe der Normalverteilung bestimmen:

$44 \pm z_{0{,}975} \cdot \frac{12}{\sqrt{25}}$

$z_{0{,}975} = 1{,}959\ldots$

Daraus ergibt sich folgender Zufallsstreubereich:
[39; 49] (Intervallgrenzen gerundet auf Ganze)

Die Breite des Zufallsstreubereichs ist $b = 2 \cdot z_{0{,}975} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Um b zu halbieren, müsste der Stichprobenumfang n vervierfacht werden, weil

$\frac{b}{2} = 2 \cdot z_{0{,}975} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{4 \cdot n}}$.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 4 Analysis
d) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 4 Analysis
c) 2 Algebra und Geometrie
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) A Modellieren und Transferieren
c) A Modellieren und Transferieren
d) D Argumentieren und Kommunizieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) —
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) leicht
c) leicht
d) schwer

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2
c) 4
d) 2

Thema: Sonstiges

Quellen: —

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

pH-Wert

Aufgabennummer: A_272

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

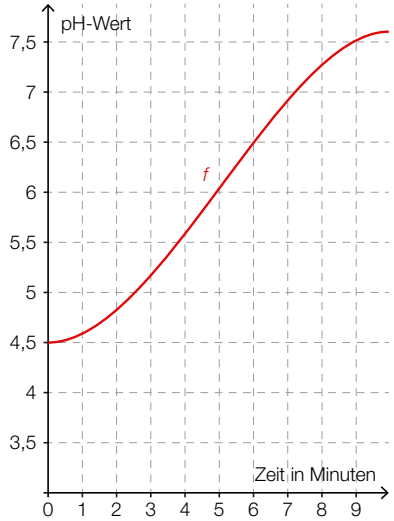
Der pH-Wert ist ein Messwert für die Konzentration der H_3O^+-Ionen. Die Skala der pH-Werte definiert man üblicherweise von 0 bis 14 (sie reicht aber in der Praxis bei starken Säuren und Basen von –1,7 bis 15,7).

a) Die Funktionsgleichung der Konzentration der H_3O^+-Ionen in Abhängigkeit vom pH-Wert lautet: $y = 10^{-x}$

x … pH-Wert
y … Konzentration der H_3O^+-Ionen

– Logarithmieren Sie die Gleichung mit dem Logarithmus zur Basis 10 und ersetzen Sie die logarithmierte linke Seite $\log_{10}(y)$ durch Y.
– Zeichnen Sie den Graphen der Funktion Y für den pH-Wertebereich 0 bis 14.

b) Der pH-Wert des Speichels beim Kauen eines zuckerfreien Kaugummis unmittelbar nach einer Mahlzeit wurde in einer Testreihe in Abhängigkeit von der Zeit gemessen.
Der pH-Wert innerhalb der ersten 10 Minuten kann annähernd durch die Funktion f beschrieben werden:



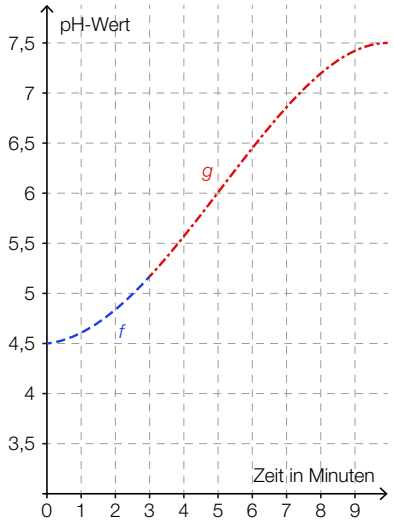
Für die momentane Änderungsrate f' des pH-Werts gilt:

$f'(t) = -0{,}0183 \cdot t^2 + 0{,}183 \cdot t$

t … Zeit seit Beginn des Kaugummikauens in min
$f'(t)$ … momentane Änderungsrate des pH-Werts zur Zeit t

– Bestimmen Sie eine Gleichung der Funktion f.
– Interpretieren Sie die Bedeutung der Nullstellen von f' im gegebenen Sachzusammenhang.

c) Man kann die Messwerte des pH-Werts beim Kaugummikauen auch durch das Zusammensetzen von 2 Funktionen f und g näherungsweise beschreiben, wie in der nebenstehenden Grafik dargestellt.
f und g sind so gewählt, dass die zusammengesetzte Funktion im gesamten Intervall stetig ist und ihr Graph keinen Knick aufweist.



– Kreuzen Sie die zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]*

Beide Funktionen müssen positiv gekrümmt sein.	☐
Beide Funktionen müssen an der Verbindungsstelle die gleiche Steigung und den gleichen Funktionswert haben.	☐
Beide Funktionen müssen den gleichen durchschnittlichen Anstieg haben.	☐
Beide Funktionen müssen durch den Punkt (0|4,5) gehen.	☐
Beide Funktionen müssen den gleichen Wendepunkt haben.	☐

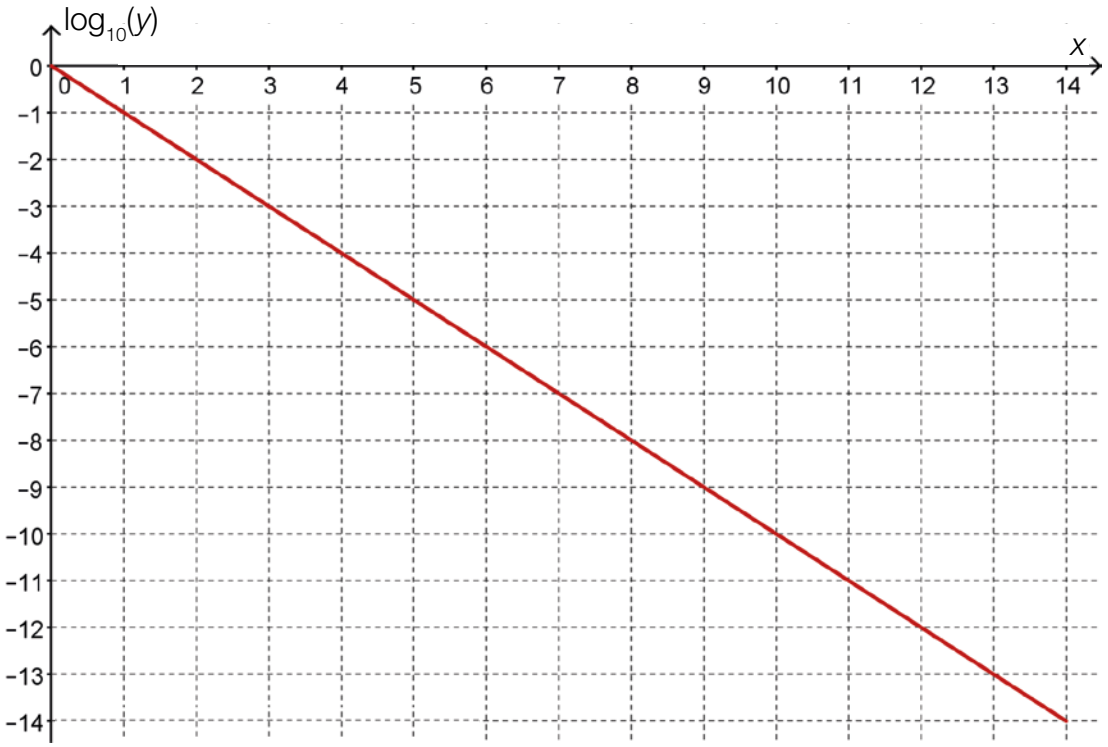
d) Der pH-Wert ist ein Indikator für die Verderblichkeit von Fisch. Bei manchen Fischarten kann man von normalverteilten pH-Werten ausgehen. Ist der pH-Wert höher als 7, gilt ein Fisch als verdorben. Bei frisch gefangenen Fischen einer bestimmten Fischart geht man von einem Erwartungswert $\mu = 6{,}5$ und einer Standardabweichung von $\sigma = 0{,}23$ aus.

– Berechnen Sie, bei wie vielen Fischen bei einem Fang von 808 Stück bereits zum Fangzeitpunkt ein zu hoher pH-Wert zu erwarten wäre.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $Y = -x$



b) Durch Integrieren der 1. Ableitung erhält man $f(t) = -0{,}0061 \cdot t^3 + 0{,}0915 \cdot t^2 + c$.
Aus der Grafik sieht man, dass $c = 4{,}5$ ist. $\Rightarrow$ $f(t) = -0{,}0061 \cdot t^3 + 0{,}0915 \cdot t^2 + 4{,}5$

Die Nullstellen von f' sind diejenigen Zeitpunkte, bei denen sich der pH-Wert nicht ändert (bzw. bei denen der pH-Wert minimal bzw. maximal ist).

c)

[...]	
Beide Funktionen müssen an der Verbindungsstelle die gleiche Steigung und den gleichen Funktionswert haben.	☒
[...]	
[...]	
[...]	

d) X … pH-Wert zum Fangzeitpunkt
$P(X > 7) = 0{,}0148\ldots$
$808 \cdot 0{,}0148\ldots = 12{,}00\ldots$
Bei etwa 12 Fischen wäre ein zu hoher pH-Wert zu erwarten.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 4 Analysis
c) 4 Analysis
d) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) C Interpretieren und Dokumentieren
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) C Interpretieren und Dokumentieren, A Modellieren und Transferieren
c) —
d) —

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel
d) leicht

Punkteanzahl:

a) 1
b) 3
c) 1
d) 2

Thema: Chemie

Quellen: http://www.wrigley-zahnpflege.at/zahnpflegekaugummi.php
http://aquaticcommons.org/4396/1/INFN_38_3_109-113.PDF

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

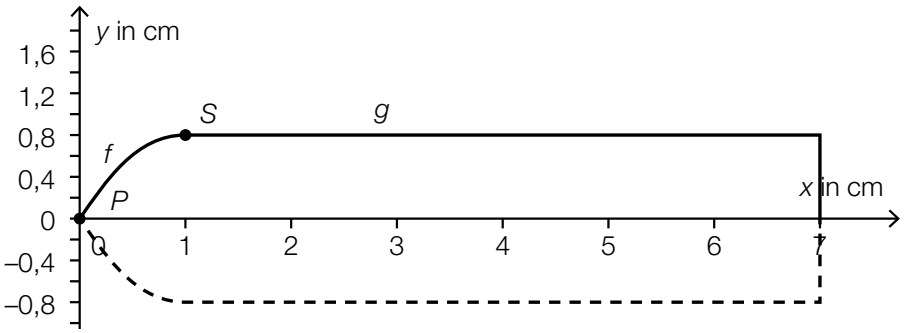
Blut

Aufgabennummer: B_372

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Das Blut erfüllt wichtige Funktionen in unserem Körper. Es transportiert zum Beispiel den Wirkstoff von Medikamenten durch den Körper.

a) Zur Verabreichung von Medikamenten werden spezielle Dosiervorrichtungen verwendet. Die Form des Flüssigkeitsbehälters einer solchen Vorrichtung entsteht durch Rotation der dargestellten Kurve um die x-Achse. Die Kurve setzt sich aus einem Parabel- und einem Geradenstück zusammen. S ist der Scheitel der Parabel.



– Stellen Sie für die dargestellten Funktionen f und g je eine Funktionsgleichung auf.
– Berechnen Sie das Volumen des Flüssigkeitsbehälters in Millilitern.

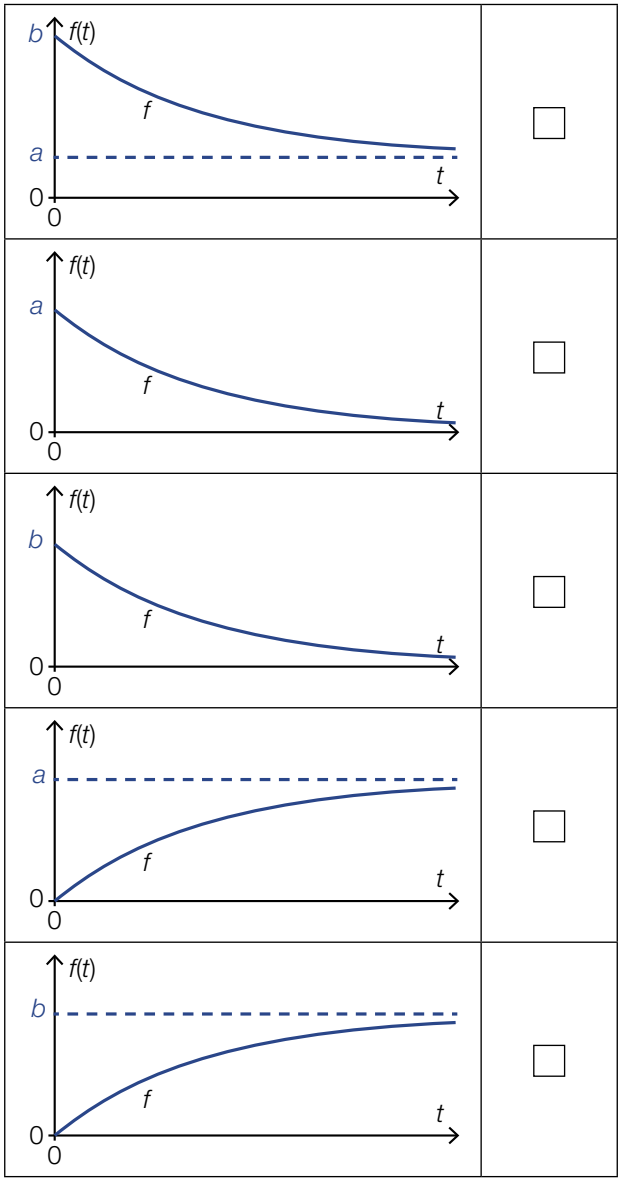
b) Bei der Verabreichung eines Medikaments lässt sich die Menge des Wirkstoffs im Blut näherungsweise durch die Funktion f beschreiben:

$f(t) = a - a \cdot e^{-b \cdot t}$

t … Zeit seit Beginn der Verabreichung des Medikaments in min
$f(t)$ … Wirkstoffmenge im Blut zur Zeit t in mg
$a > 0$, $b > 0$ … Konstanten

– Beschreiben Sie die Bedeutung des folgenden Ausdrucks im gegebenen Sachzusammenhang:
$\frac{1}{30} \cdot \int_0^{30} f(t)\,dt$

– Kreuzen Sie diejenige Abbildung an, in der der Graph der Funktion f richtig dargestellt ist. *[1 aus 5]*



c) Karl Landsteiner entwickelte das AB0-Blutgruppensystem. Er entdeckte auch die beiden Rhesusfaktoren Rh+ und Rh–.
37 % der österreichischen Bevölkerung haben die Blutgruppe A, Rh+.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass unter 60 zufällig ausgewählten Personen der österreichischen Bevölkerung höchstens 15 Personen die Blutgruppe A, Rh+ haben.
– Ermitteln Sie, wie viele zufällig ausgewählte Personen mindestens Blut spenden müssen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % mindestens eine Person mit der Blutgruppe A, Rh+ darunter ist.
– Interpretieren Sie, die Bedeutung des Ausdrucks $\sum_{k=2}^{6} \binom{60}{k} \cdot 0{,}37^k \cdot 0{,}63^{60-k}$ im gegebenen Sachzusammenhang.

d) Die Änderung der Wirkstoffmenge im Blut eines Patienten lässt sich durch die folgende Differenzialgleichung beschreiben:

$\frac{dc}{dt} = -k \cdot c + D$

t … Zeit ab Beginn der Verabreichung des Wirkstoffs
c … Konzentration des Wirkstoffs
D, k … Konstanten

– Zeigen Sie mit der Methode *Trennen der Variablen*, dass die Differenzialgleichung die Lösung $c(t) = \frac{D}{k} - C_1 \cdot e^{-k \cdot t}$ hat.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

I: $f(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad c = 0$
II: $f(1) = 0{,}8 \quad \Rightarrow \quad a + b + c = 0{,}8$
III: $f'(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot a + b = 0$

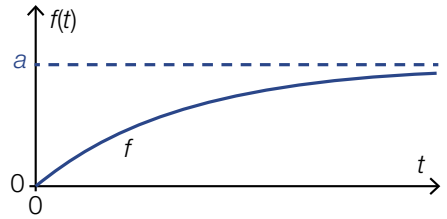
$a = -0{,}8$
$b = 1{,}6$
$c = 0$

$f(x) = -0{,}8 \cdot x^2 + 1{,}6 \cdot x$
$g(x) = 0{,}8$

$V = \pi \cdot \int_0^1 (f(x))^2 \, dx + 0{,}8^2 \cdot \pi \cdot 6$
$V = 13{,}136\ldots$

Das Volumen des Flüssigkeitsbehälters beträgt rund 13,14 ml.

b) Mit dem Ausdruck wird die durchschnittliche Wirkstoffmenge im Blut in der ersten halben Stunde nach Beginn der Verabreichung berechnet.

[…]	
[…]	
[…]	
	☒
[…]	

c) X ... Anzahl der Personen mit Blutgruppe A, Rh+
Binomialverteilung mit $n = 60$ und $p = 0{,}37$
$P(X \leq 15) = 0{,}0339$
Mit einer Wahrscheinlichkeit von rund 3,4 % haben höchstens 15 Personen die Blutgruppe A, Rh+.

$P(X \geq 1) \geq 0{,}95$
$0{,}05 \geq P(X = 0)$
$0{,}05 \geq 0{,}63^n$
$n \geq \frac{\ln(0{,}05)}{\ln(0{,}63)}$
$n \geq 6{,}4\ldots$
Es müssen mindestens 7 Personen Blut spenden.

Mit diesem Ausdruck wird die Wahrscheinlichkeit berechnet, dass unter 60 zufällig ausgewählten Personen der österreichischen Bevölkerung mindestens 2 und höchstens 6 Personen die Blutgruppe A, Rh+ haben.

d) $\frac{dc}{dt} = -k \cdot c + D$

$\frac{dc}{-k \cdot c + D} = dt$

$\int \frac{dc}{-k \cdot c + D} = \int dt$

$-\frac{1}{k} \cdot \ln|-k \cdot c + D| = t + C_3$

$\ln|-k \cdot c + D| = -k \cdot t + C_2$
$-k \cdot c + D = C_1 \cdot e^{-k \cdot t}$
$-k \cdot c = C_1 \cdot e^{-k \cdot t} - D$

$c(t) = \frac{D}{k} - C_1 \cdot e^{-k \cdot t}$

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 4 Analysis
c) 5 Stochastik
d) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) —
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) D Argumentieren und Kommunizieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) —
c) C Interpretieren und Dokumentieren
d) —

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) mittel
d) mittel

Punkteanzahl:

a) 3
b) 2
c) 3
d) 1

Thema: Sonstiges

Quellen: —

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Fahrzeugtests (1)

Aufgabennummer: B_045

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

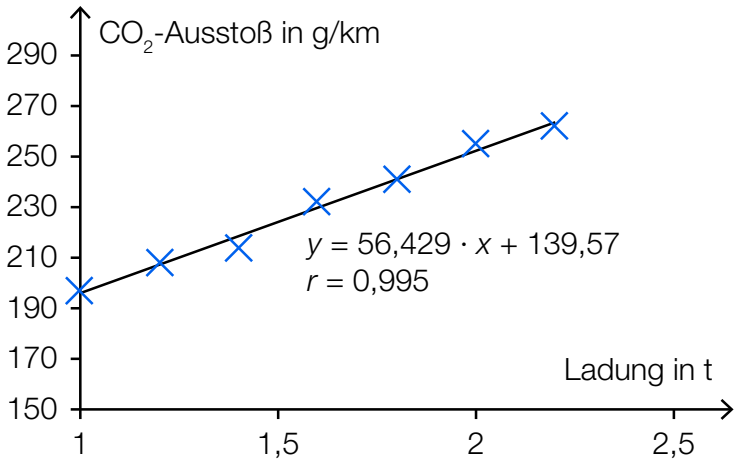
Die Firma *Cargo-Car* führt in der Entwicklungsphase eines neuen Transporters Tests durch.

a) In Testreihen wurde der Kraftstoffverbrauch – abhängig von der Ladung – erhoben. In der folgenden Tabelle ist für 8 Testfahrten die Reichweite pro Liter Kraftstoffverbrauch bei einer vorgegebenen Ladung in Tonnen angegeben:

Reichweite in km	12,46	12,10	11,81	11,32	10,94	10,81	10,79	10,23
Ladung in t	1	1,05	1,3	1,4	1,52	1,7	1,9	2,1

– Geben Sie an, welche Variable hier als unabhängig und welche als abhängig anzunehmen ist.
– Ermitteln Sie die lineare Ausgleichsfunktion und stellen Sie diese in einem Datendiagramm dar.
– Beschreiben Sie die Methode der kleinsten Quadrate zur Ermittlung einer Regressionsgeraden.

b) Bei der Auswertung einer Testreihe ergab sich folgende Regressionsgerade y:



Ein Mitarbeiter möchte die geschätzte CO_2-Emission bei einer Ladung von 1,5 Tonnen und bei einer Ladung von 2,5 Tonnen ermitteln.

– Berechnen Sie die gesuchten Werte.
– Erklären Sie, welche der Berechnungen eine Interpolation und welche eine Extrapolation darstellt.
– Interpretieren Sie den in der Grafik angegebenen Korrelationskoeffizienten r.

c) Tests zur Haltbarkeit neuer Bremsbeläge haben ergeben, dass deren Zuverlässigkeit R mithilfe einer Funktion R folgender Form beschrieben werden kann:

$R(t) = e^{-\left(\frac{t}{T}\right)^b}$

$R(t)$ ... Prozentsatz der Bremsbeläge, die nach der Benützungsdauer t noch intakt sind
t ... Benützungsdauer
T, b ... materialabhängige Parameter

Der Parameter T wird *charakteristische Lebensdauer* genannt.

– Weisen Sie nach, dass nach der charakteristischen Lebensdauer der Prozentsatz der intakten Bremsbeläge – unabhängig vom Wert des Parameters b – ca. 36,8 % beträgt.
– Ermitteln Sie die fehlerhafte Zeile in folgender Umformung der Formel $R(t) = e^{-\left(\frac{t}{T}\right)^b}$ nach der Benützungsdauer t.

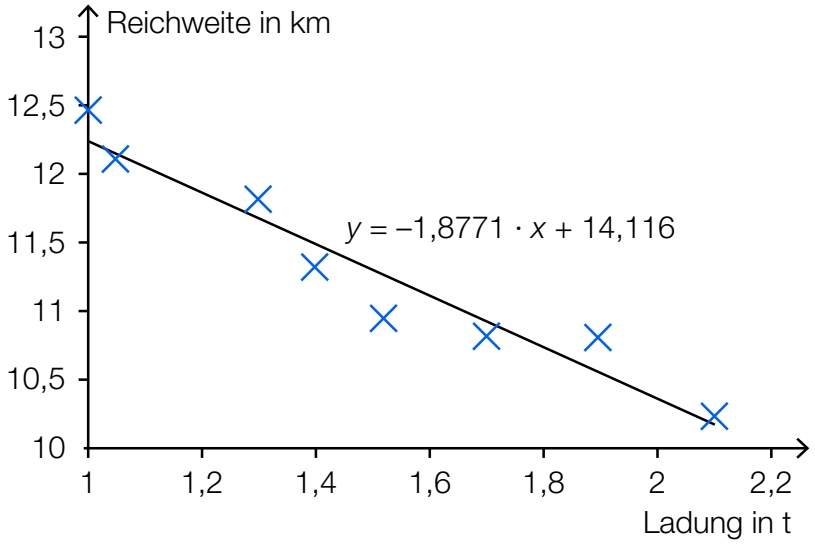
1. $R(t) = e^{-\left(\frac{t}{T}\right)^b}$
2. $\ln(R) = b \cdot \ln\left(e^{-\left(\frac{t}{T}\right)}\right)$
3. $\frac{\ln(R)}{b} = -\frac{t}{T}$
4. $t = -T \cdot \frac{\ln(R)}{b}$

– Formen Sie die fehlerhafte Zeile so um, dass diese mathematisch richtig ist.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Es wird die Abhängigkeit der Reichweite von einer vorgegebenen Ladung untersucht. Die Ladung ist daher die unabhängige Variable x, die Reichweite ist die abhängige Variable y.



Methode der kleinsten Quadrate:
Die Regressionsgerade wird so ermittelt, dass die Summe aller quadrierten Differenzen zwischen dem tatsächlichen y-Wert y_i und dem mithilfe der Regressionsgeraden ermittelten Wert $y(x_i)$ ein Minimum wird.
(Auch die Erklärung mithilfe einer Skizze ist als richtig zu werten.)

b) Die geschätzte Emission bei einer Ladung von 1,5 t beträgt 224,2... g/km ≈ 224 g/km.
Die geschätzte Emission bei einer Ladung von 2,5 t beträgt 280,6... g/km ≈ 281 g/km.

Die Berechnung der geschätzten Emission bei einer Ladung von 1,5 t ist eine *Interpolation.* Darunter versteht man die Berechnung eines zusätzlichen Werts im Bereich der vorhandenen Daten.
Unter *Extrapolation* versteht man die Prognose für einen Wert, der außerhalb des vorhandenen Datenbereichs liegt. Daher ist die Berechnung der geschätzten Emission bei einer Ladung von 2,5 t eine Extrapolation.

Der Korrelationskoeffizient $r = 0{,}995$ liegt sehr nahe bei 1. Das bedeutet, dass der Zusammenhang sehr gut durch eine lineare Funktion beschrieben werden kann.

c) $R(t) = e^{-\left(\frac{t}{T}\right)^b}$

$R(T) = e^{-\left(\frac{T}{T}\right)^b}$

$R(T) = e^{-1} = 0{,}3678... \approx 36{,}8\ \%$

$R(t) = e^{-\left(\frac{t}{T}\right)^b} \Rightarrow \ln(R) = b \cdot \ln\left(e^{-\left(\frac{t}{T}\right)}\right)$

Der Ausdruck $b \cdot \ln\left(e^{-\left(\frac{t}{T}\right)}\right)$ ist falsch (2. Zeile).
(Begründung: Die Potenz wurde falsch interpretiert bzw. das Logarithmusgesetz falsch angewendet.)

korrekte Umformung:

$$R(t) = e^{-\left(\frac{t}{T}\right)^b}$$

$$\ln(R) = \ln\left(e^{-\left(\frac{t}{T}\right)^b}\right)$$

$$\ln(R) = -\left(\frac{t}{T}\right)^b$$

$$-\ln(R) = \left(\frac{t}{T}\right)^b$$

$$\sqrt[b]{-\ln(R)} = \frac{t}{T}$$

$$t = T \cdot \sqrt[b]{-\ln(R)}$$

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 5 Stochastik
c) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren, C Interpretieren und Dokumentieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz, C Interpretieren und Dokumentieren
c) –

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 3
b) 3
c) 3

Thema: Messreihen

Quellen: –

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

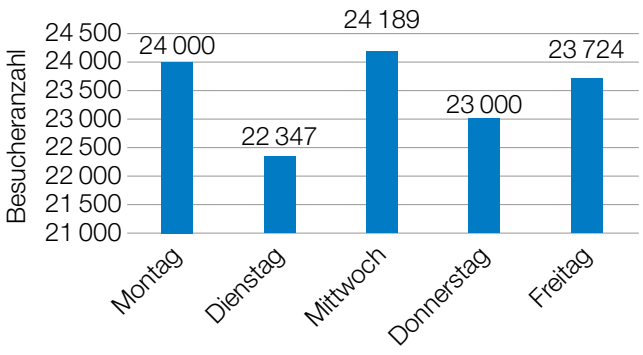
Museum

Aufgabennummer: B_255

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Ein Museum in einer Stadt führt verschiedene Recherchen durch.

a) Das nachstehende Säulendiagramm wird in einer Zeitung veröffentlicht. Es veranschaulicht, wie sich die Besucherzahlen des Vorjahres auf die einzelnen Wochentage verteilen. Die Zeitung schreibt: „Man kann aus dem Diagramm ablesen, dass die Besucheranzahl am Dienstag weniger als die Hälfte wie am Mittwoch beträgt."



– Argumentieren Sie anhand der Grafik, warum diese Aussage nicht stimmt.

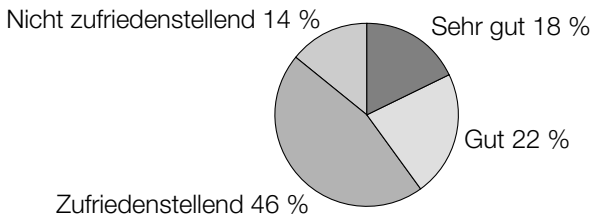
– Berechnen Sie die Einnahmen aus dem Vorjahr, wenn davon ausgegangen wird, dass 80 % der Besucher/innen den regulären Preis von € 3,50 und 20 % der Besucher/innen einen ermäßigten Preis von € 2 bezahlten.

Das Museum hatte 52 Wochen pro Jahr an 5 Tagen pro Woche geöffnet. Die durchschnittliche tägliche Besucherzahl im Museum soll berechnet werden.

– Kreuzen Sie die richtige Berechnung an. *[1 aus 5]*

$(24\,000 + 22\,347 + 24\,189 + 23\,000 + 23\,724) \cdot 5 \cdot 52$	☐
$\frac{24\,000 + 22\,347 + 24\,189 + 23\,000 + 23\,724}{52} \cdot 5$	☐
$\frac{24\,000}{5} + \frac{22\,347}{5} + \frac{24\,189}{5} + \frac{23\,000}{5} + \frac{23\,724}{5} \cdot 52$	☐
$\frac{24\,000 + 22\,347 + 24\,189 + 23\,000 + 23\,724}{5 \cdot 52}$	☐
$\frac{24\,000 \cdot 52}{5} + \frac{22\,347 \cdot 52}{5} + \frac{24\,189 \cdot 52}{5} + \frac{23\,000 \cdot 52}{5} + \frac{23\,724 \cdot 52}{5}$	☐

b) Um die Meinung der Besucher/innen über die Attraktivität der Ausstellungsstücke festzustellen, wird eine Umfrage mit einem Fragebogen durchgeführt.
Die Besucher/innen können die Attraktivität der Ausstellungsstücke mit den Kategorien „Sehr gut“, „Gut“, „Zufriedenstellend“ und „Nicht zufriedenstellend“ bewerten. Das folgende Kreisdiagramm gibt eine Zusammenfassung der Ergebnisse wieder.



– Berechnen Sie, wie viele Personen an der Umfrage teilgenommen haben, wenn 63 Personen die Kategorie „Nicht zufriedenstellend“ angekreuzt haben.
– Berechnen Sie, um wie viel Prozent die Anzahl derjenigen, die mit „Sehr gut“ stimmten, kleiner ist als die Anzahl derjenigen, die mit „Gut“ abgestimmt haben.

c) Bei einer Ausstellung eines berühmten französischen Künstlers werden die Kunstwerke $B1$ bis $B7$ nach den folgenden Kategorien aufgestellt:
„Ölgemälde“ $Ö = \{B1; B2; B4; B5; B7\}$
„Kunstwerke bis zum 30. Lebensjahr des Künstlers“ $K30 = \{B2; B4; B5; B6\}$
„Kunstwerke, die höher als 2 m sind“ $H2m = \{B2; B3; B4; B6\}$

– Erstellen Sie ein Venn-Diagramm, aus dem man die thematische Gliederung (Kategorien) aller Bilder ablesen kann.
– Ordnen Sie den beiden Verknüpfungsmengen jeweils die zutreffende Menge aus A bis D zu. *[2 zu 4]*

$Ö \cap K30 \cap H2m$	
$Ö \setminus (K30 \cup H2m)$	

A	$\{B1; B7\}$
B	$\{B2; B4\}$
C	$\{B4; B5\}$
D	$\{B6; B7\}$

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Die Säule bei „Dienstag“ ist zwar weniger als halb so hoch wie jene bei „Mittwoch“, da die vertikale Achse jedoch nicht bei 0 beginnt, kann daraus nicht gefolgert werden, dass die Besucheranzahl am Dienstag weniger als halb so hoch wie am Mittwoch war.

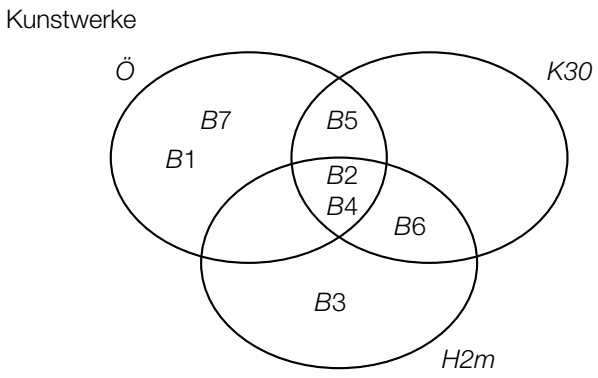
$24\,000 + 22\,347 + 24\,189 + 23\,000 + 23\,724 = 117\,260$ Besucher/innen im Jahr
$117\,260 \cdot 0{,}80 \cdot 3{,}50 + 117\,260 \cdot 0{,}20 \cdot 2 = 375\,232$
Die Einnahmen mit Eintrittskarten betrugen im Vorjahr € 375.232.

[...]	
[...]	
[...]	
$\frac{24\,000 + 22\,347 + 24\,189 + 23\,000 + 23\,724}{5 \cdot 52}$	☒
[...]	

b) $\frac{63}{0{,}14} = 450$
Es haben insgesamt 450 Personen an der Umfrage teilgenommen.

$\frac{0{,}22 - 0{,}18}{0{,}22} = 0{,}\overline{18} \approx 18\ \%$
Es sind um rund 18 % weniger Personen in der Kategorie „Sehr gut“ als in der Kategorie „Gut“.

c)



$Ö \cap K30 \cap H2m$	B
$Ö \setminus (K30 \cup H2m)$	A

A	{B1; B7}
B	{B2; B4}
C	{B4; B5}
D	{B6; B7}

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 5 Stochastik
c) 1 Zahlen und Maße

Nebeninhaltsdimension:

a) 1 Zahlen und Maße
b) 1 Zahlen und Maße
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) —
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 3
b) 2
c) 2

Thema: Sonstiges

Quellen: —

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Traktoren-Steuerung

Aufgabennummer: B_183

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein Großunternehmen hat eine spezielle GPS-unterstützte Steuerung für Traktoren entwickelt und verkauft diese direkt.

a) Für die Produktion von Ersatzteilen der Steuerung sind die Kostenfunktion K und die Erlösfunktion E bekannt:

$K(x) = 0{,}001 \cdot x^3 - 0{,}03 \cdot x^2 + x + 70\,000$

$E(x) = -5 \cdot x^2 + 3\,000 \cdot x$

x … Anzahl produzierter bzw. verkaufter Stück
$K(x)$ … Gesamtkosten bei x produzierten Stück in Euro
$E(x)$ … Erlös bei x verkauften Stück in Euro

– Berechnen Sie diejenige Anzahl von Ersatzteilen, bei der der maximale Gewinn erzielt wird.

– Erstellen Sie eine Gleichung der Preis-Absatz-Funktion p.

– Beschreiben Sie, wie man unter Verwendung der gegebenen Kosten- und Erlösfunktion den Cournot'schen Punkt ermitteln kann.

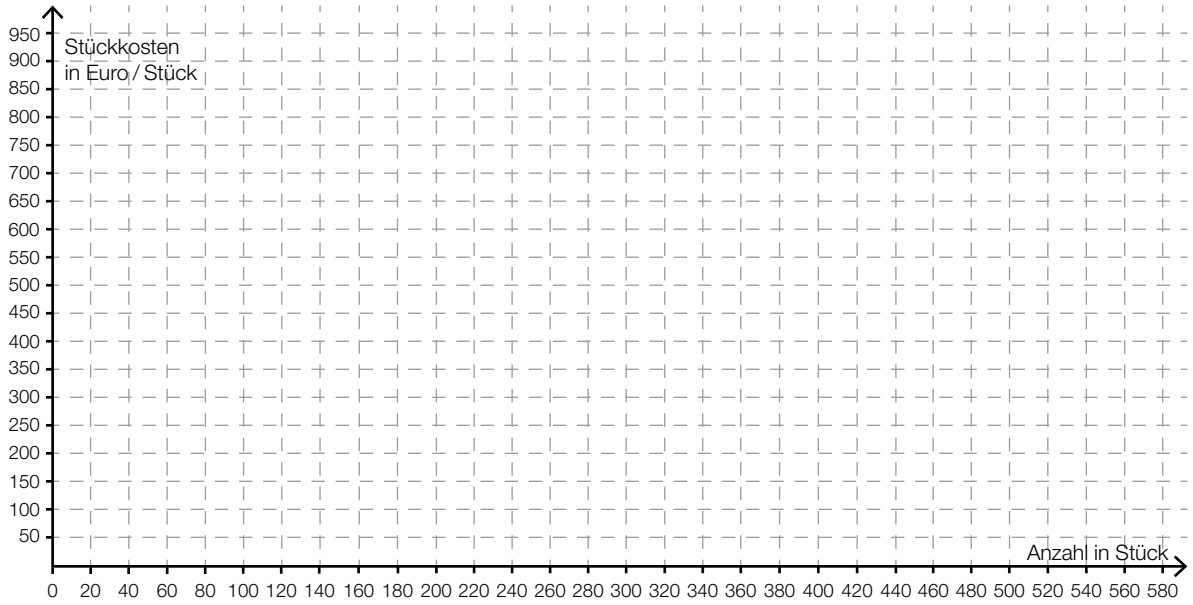
Der Cournot'sche Punkt befindet sich bei $(x_C | 1610)$.

– Interpretieren Sie die Koordinaten des Cournot'schen Punktes im gegebenen Sachzusammenhang.

b) Für die Produktion von Ersatzteilen der Steuerung werden die Stückkosten durch die folgende Funktion $\overline{K}$ beschrieben:

$$\overline{K}(x) = 0{,}001 \cdot x^2 - 0{,}03 \cdot x + 1 + \frac{70\,000}{x}$$

x … Anzahl produzierter Stück
$\overline{K}(x)$ … Stückkosten bei x produzierten Stück in Euro/Stück



– Zeichnen Sie den Graphen der Stückkostenfunktion in das obige Koordinatensystem ein.

– Markieren Sie in der obigen Abbildung das Betriebsoptimum.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $G(x) = -0{,}001 \cdot x^3 - 4{,}97 \cdot x^2 + 2\,999 \cdot x - 70\,000$
$G'(x) = -0{,}003 \cdot x^2 - 9{,}94 \cdot x + 2\,999$
$G'(x) = 0 \Rightarrow x = 278{,}3\ldots$
Das Gewinnmaximum liegt bei 278 Stück.

$p(x) = -5 \cdot x + 3\,000$

Ermittlung der Gewinnfunktion G als Differenz von Erlös- und Kostenfunktion:
$G(x) = E(x) - K(x)$

Berechnung der Maximumstelle x_C von G:
Lösen der Gleichung $G(x_C) = 0$ (wobei $G'(x_C) < 0$ gelten muss)

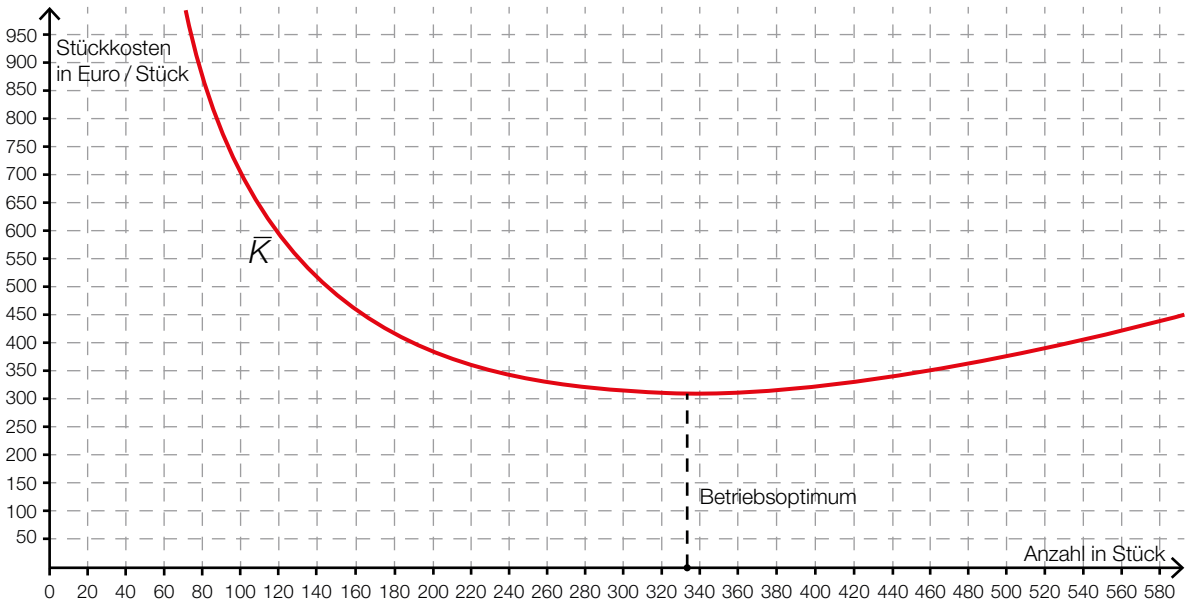
x_C ist die x-Koordinate des Cournot'schen Punktes.

Ermittlung der Preis-Absatz-Funktion p aus der Erlösfunktion: $p(x) = \frac{E(x)}{x}$

Der Funktionswert $p(x_C)$ ist die y-Koordinate des Cournot'schen Punktes.

Der maximale Gewinn wird bei Produktion und Verkauf von x_C Stück zum Preis von € 1.610 pro Stück erzielt.

b)



Toleranzbereich für das Einzeichnen des Betriebsoptimums: [310; 350]

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz, A Modellieren und Transferieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) leicht

Punkteanzahl:

a) 4
b) 2

Thema: Sonstiges

Quellen: –

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Maschinenring

Aufgabennummer: B_182

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Vier landwirtschaftliche Betriebe, die Weizen anbauen, haben sich zu einem Maschinenring zusammengeschlossen.

a) Man geht davon aus, dass der jetzige Mähdrescher noch genau 10 Jahre verwendet werden kann. Daher plant man, dann einen neuen Mähdrescher um einen voraussichtlichen Kaufpreis von € 150.000 zu erwerben.
Für die Anschaffung haben die Betriebe gemeinsam bereits € 30.000 an Rücklagen gebildet und wollen den Rest in Form von vorschüssigen Jahresraten ansparen.
Der Zinssatz wird mit 1,5 % p. a. angenommen.

– Veranschaulichen Sie das Finanzierungskonzept mithilfe einer Zeitlinie.
– Berechnen Sie die Höhe der Jahresraten.

Es wird überlegt, mit der Ratenzahlung erst in 5 Jahren zu beginnen.

– Argumentieren Sie, warum die neuen Raten für die restlichen 5 Jahre in diesem Fall mehr als doppelt so hoch sein müssen, als wenn sofort mit dem Ansparen begonnen wird.

b) Die nebenstehende Tabelle zeigt die erzielten Preise für Weizen in den Qualitätsstufen *A* und *B* für einen Zeitraum von 10 Jahren.

Der Zusammenhang der Preise zwischen den Weizenqualitäten *A* und *B* wird mithilfe der linearen Regression untersucht.

	Preis pro 1 000 kg	
Jahr	*A*	*B*
1	€ 98	€ 112
2	€ 108	€ 117
3	€ 88	€ 101
4	€ 82	€ 97
5	€ 105	€ 116
6	€ 189	€ 202
7	€ 135	€ 165
8	€ 91	€ 106
9	€ 184	€ 205
10	€ 157	€ 186

– Erstellen Sie eine Gleichung der Regressionsgeraden.
– Interpretieren Sie die Bedeutung eines Korrelationskoeffizienten von $r = 0{,}989$ im gegebenen Sachzusammenhang.
– Stellen Sie die Punkte und die Regressionsgerade in einem passenden Koordinatensystem grafisch dar.

c) Die Landwirte des Maschinenrings diskutieren über die Begriffe *Betriebsoptimum* und *Betriebsminimum*.

– Ordnen Sie den beiden Begriffen jeweils die korrekte Aussage aus A bis D zu. *[2 zu 4]*

Betriebsoptimum	
Betriebsminimum	

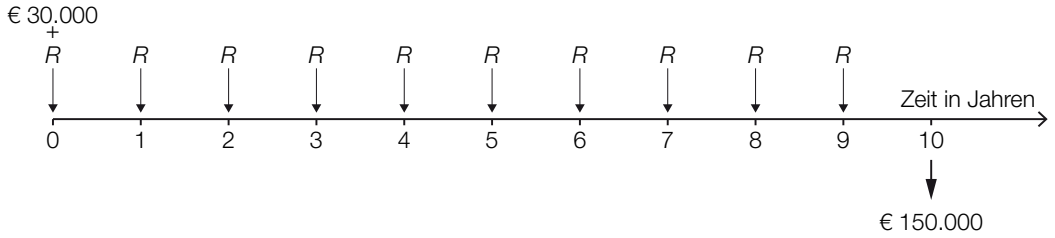
A	Hier spielen die Fixkosten keine Rolle.
B	Hier erzielt man den höchsten Erlös.
C	Hier sind die Durchschnittskosten am kleinsten.
D	Hier steigt der Gewinn am stärksten.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

½

Möglicher Lösungsweg

a) R … Höhe einer Jahresrate in €



$q = 1{,}015$

$30\,000 \cdot q^{10} + R \cdot \frac{q^{10} - 1}{q - 1} \cdot q = 150\,000 \;\Rightarrow\; R \approx$ € 10.603,06

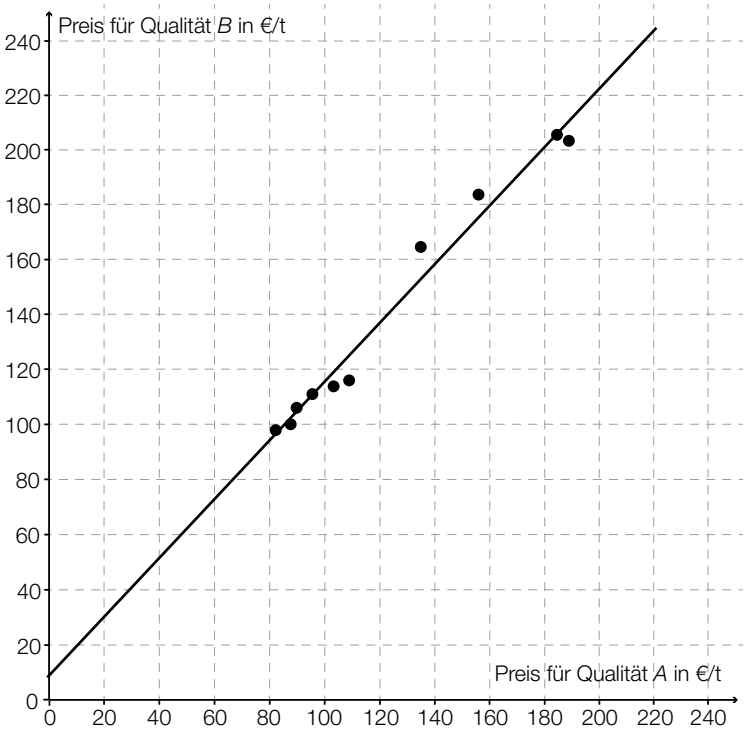
Die Höhe der Jahresraten beträgt € 10.603,06.

Wenn die Raten genau doppelt so hoch wären, wäre die Summe der bezahlten Raten zwar gleich hoch, der Endwert der 5-jährigen Rente aber niedriger, weil die Verzinsungen der ersten 5 Raten fehlten. Um den gleichen Wert zu erhalten, müssen die Raten daher mehr als doppelt so hoch sein.

b) $y = 1{,}08 \cdot x + 7{,}32$ *(Parameter gerundet)*

x … Preis für Qualität A in €/t
y … Preis für Qualität B in €/t

Der Korrelationskoeffizient liegt nahe bei 1 und lässt daher einen ziemlich starken positiven linearen Zusammenhang zwischen den Preisen für die Qualitätsstufen A und B vermuten.



c)

Betriebsoptimum	C
Betriebsminimum	A

A	Hier spielen die Fixkosten keine Rolle.
B	Hier erzielt man den höchsten Erlös.
C	Hier sind die Durchschnittskosten am kleinsten.
D	Hier steigt der Gewinn am stärksten.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 5 Stochastik
c) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren, B Operieren und Technologieeinsatz
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) —

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) leicht
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 3
b) 3
c) 1

Thema: Wirtschaft

Quellen: —

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

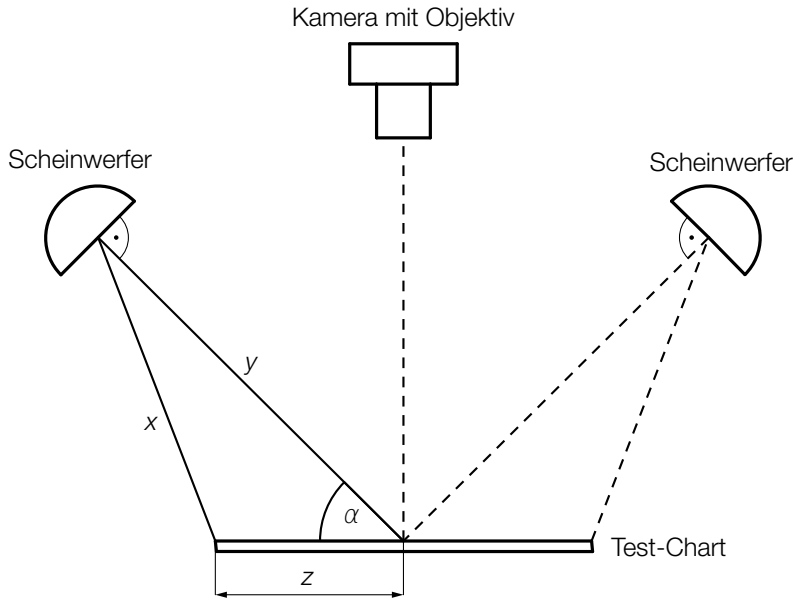
Qualitätstest bei Objektiven (2)*

Aufgabennummer: B_327

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Um das Objektiv einer Digitalkamera zu testen, fotografiert man eine genormte Tafel (Test-Chart) mit einem Test-Motiv und lässt das Foto von einer speziellen Software auswerten.

a) Eine Fotografin möchte ihr neues Objektiv testen. Dazu verwendet sie folgenden Aufbau:



1) Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung von x aus y, z und α.

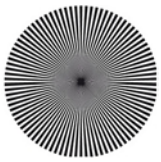
$x =$ _____

Bei einem bestimmten Test gilt:
$\alpha = 45°$
$x = 121$ cm
$z = 70$ cm

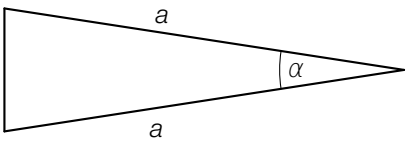
2) Berechnen Sie die Entfernung y.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Ein beliebtes Motiv für solche Test-Charts ist ein spezieller Stern:

ganzer Stern	Detailansicht
	

Ein Stern besteht aus einzelnen Abschnitten, die abwechselnd schwarz und weiß sind. Jeder dieser Abschnitte kann näherungsweise als Dreieck mit folgenden Abmessungen beschrieben werden:



1) Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung des Flächeninhalts A des obigen Dreiecks aus a und α.

$A =$ _____

Ein ganzer Stern besteht aus n weißen und n schwarzen Abschnitten.

2) Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung des Winkels α aus n.

$\alpha =$ _____

Möglicher Lösungsweg

a1) $x = \sqrt{y^2 + z^2 - 2 \cdot y \cdot z \cdot \cos(\alpha)}$

a2) γ ... Winkel gegenüber von z
β ... Winkel gegenüber von y

$$\frac{121}{\sin(45°)} = \frac{70}{\sin(\gamma)} \quad \Rightarrow \quad \gamma = 24{,}1...°$$
$$\beta = 180° - 45° - 24{,}1...° = 110{,}8...°$$

$$\frac{y}{\sin(110{,}8...°)} = \frac{121}{\sin(45°)} \quad \Rightarrow \quad y = 159{,}9...$$

Die Entfernung y beträgt rund 160 cm.

b1) $A = \frac{a^2 \cdot \sin(\alpha)}{2}$

b2) $\alpha = \frac{360°}{2 \cdot n}$

Lösungsschlüssel

a) 1 × A1: für das richtige Erstellen der Formel zur Berechnung von x
1 × A2: für den richtigen Ansatz zur Berechnung der Entfernung y
1 × B: für die richtige Berechnung der Entfernung y

b) 1 × A1: für das richtige Erstellen der Formel zur Berechnung des Flächeninhalts A
1 × A2: für das richtige Erstellen der Formel zur Berechnung des Winkels α

Minirampe

Aufgabennummer: A_091

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Ein Unternehmen, das Skate-Parks errichtet, plant eine neue Minirampe.

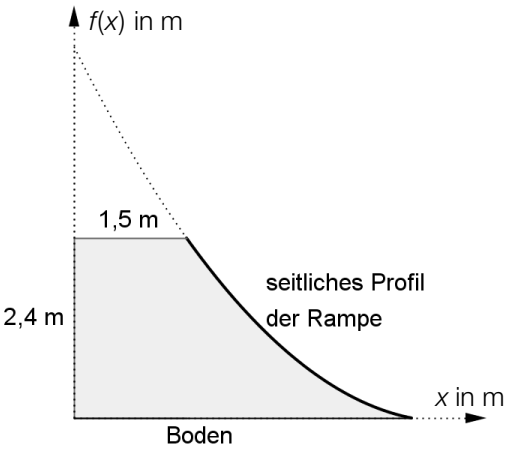


Abb. 1

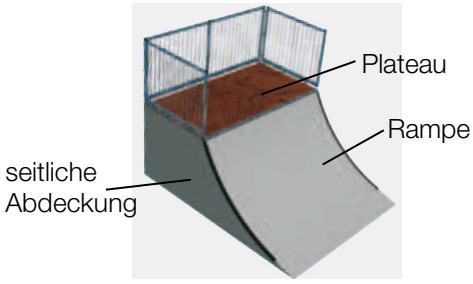


Abb. 2

Das seitliche Profil der Rampe kann durch eine Parabel 2. Ordnung modelliert werden:

$f(x) = 0{,}2 \cdot x^2 - 2 \cdot x + 4{,}95$ mit $1{,}5 \leq x \leq 4{,}5$

x … waagrechte Entfernung von der Rückwand in Metern (m)
$f(x)$ … Höhe der Rampe in Metern (m) an der Stelle x

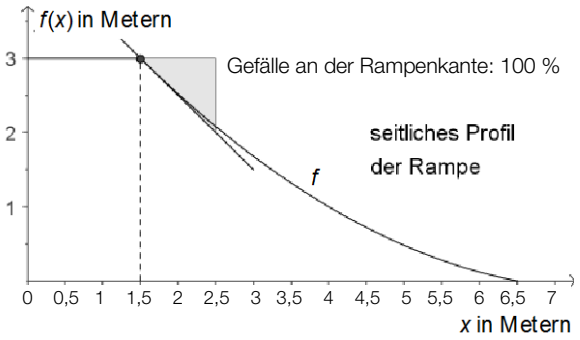
a) – Berechnen Sie den Inhalt der Querschnittsfläche einer seitlichen Abdeckung. Entnehmen Sie die dazu notwendigen Werte der Abbildung 1.

b) – Zeigen Sie, dass die gegebene Parabel 2. Ordnung beim Übergang zum Boden keine waagrechte Tangente aufweist.

c) – Dokumentieren Sie die Berechnung des Winkels zwischen Plateau und Rampe.

d) Auf Kundenwunsch wird eine höhere Rampe errichtet, deren seitliches Profil wieder durch eine quadratische Funktion f mit $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ beschrieben werden kann.

Höhe der Rampe: 3 m
Tiefe des Plateaus: 1,5 m
Gefälle an der Rampenkante: 100 %
Bodenlänge der Rampe: 6,5 m



– Stellen Sie mit den gegebenen Angaben ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten dieser quadratischen Funktion auf.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Schnittpunkt der Parabel mit der x-Achse: $N = (4{,}5|0)$

$A_1 = a \cdot b = 2{,}4 \cdot 1{,}5 = 3{,}6$
$A_2 = \int_{1{,}5}^{4{,}5} f(x)\mathrm{d}x = 2{,}7$
$A = A_1 + A_2 = 3{,}6 + 2{,}7 = 6{,}3$

Die Querschnittsfläche einer seitlichen Abdeckung beträgt rund 6,3 m².

b) Eine Parabel 2. Ordnung hat nur ein lokales Extremum.
Berechnung des Tiefpunkts: $T = (5|-0{,}05)$
Nur im Tiefpunkt ist die Tangente waagrecht.

weitere Varianten: grafische Lösung oder Steigung in der Nullstelle berechnen

c) 1. 1. Ableitung von f bilden
2. x-Stelle ($x = 1{,}5$) in 1. Ableitung einsetzen und k berechnen
3. Winkel mithilfe der Beziehung $\alpha = \arctan(k)$ berechnen
Ein negatives k ergibt einen Winkel im 2. Quadranten.

d) I: $f(1{,}5) = 3$
II: $f(6{,}5) = 0$
III: $f'(1{,}5) = -1$

bzw.

$$\begin{aligned} \text{I:}\quad & 2{,}25 \cdot a + 1{,}5 \cdot b + c = 3 \\ \text{II:}\quad & 42{,}25 \cdot a + 6{,}5 \cdot b + c = 0 \\ \text{III:}\quad & 3 \cdot a + b = -1 \end{aligned}$$

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 4 Analysis
c) 4 Analysis
d) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 2 Algebra und Geometrie
d) 2 Algebra und Geometrie

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) C Interpretieren und Dokumentieren
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) A Modellieren und Transferieren
d) —

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel
d) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2
c) 2
d) 1

Thema: Sport

Quelle: http://www.bfu.ch/PDFLib/1182_23464.pdf

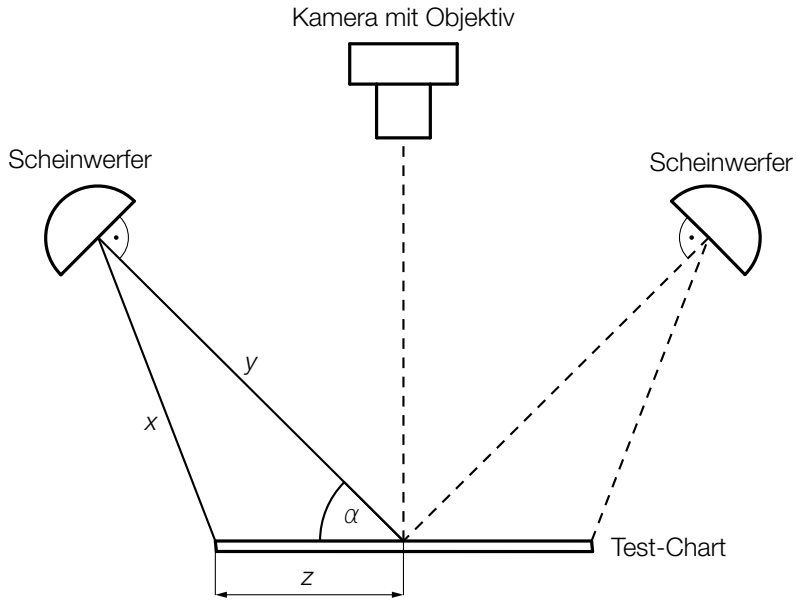
Qualitätstest bei Objektiven (1)*

Aufgabennummer: B_326

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Um das Objektiv einer Digitalkamera zu testen, fotografiert man eine genormte Tafel (Test-Chart) mit einem Test-Motiv und lässt das Foto von einer speziellen Software auswerten.

a) Eine Fotografin möchte ihr neues Objektiv testen. Dazu verwendet sie folgenden Aufbau:



1) Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung von x aus y, z und α.

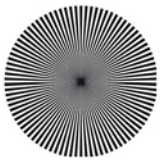
$x =$ _____

Bei einem bestimmten Test gilt:
$\alpha = 45°$
$x = 121$ cm
$z = 70$ cm

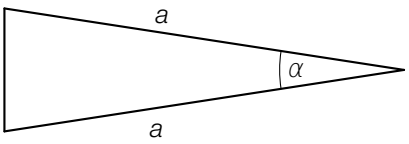
2) Berechnen Sie die Entfernung y.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Ein beliebtes Motiv für solche Test-Charts ist ein spezieller Stern:

ganzer Stern	Detailansicht
	

Ein Stern besteht aus einzelnen Abschnitten, die abwechselnd schwarz und weiß sind. Jeder dieser Abschnitte kann näherungsweise als Dreieck mit folgenden Abmessungen beschrieben werden:



1) Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung des Flächeninhalts A des obigen Dreiecks aus a und α.

$A =$ _____

Ein ganzer Stern besteht aus n weißen und n schwarzen Abschnitten.

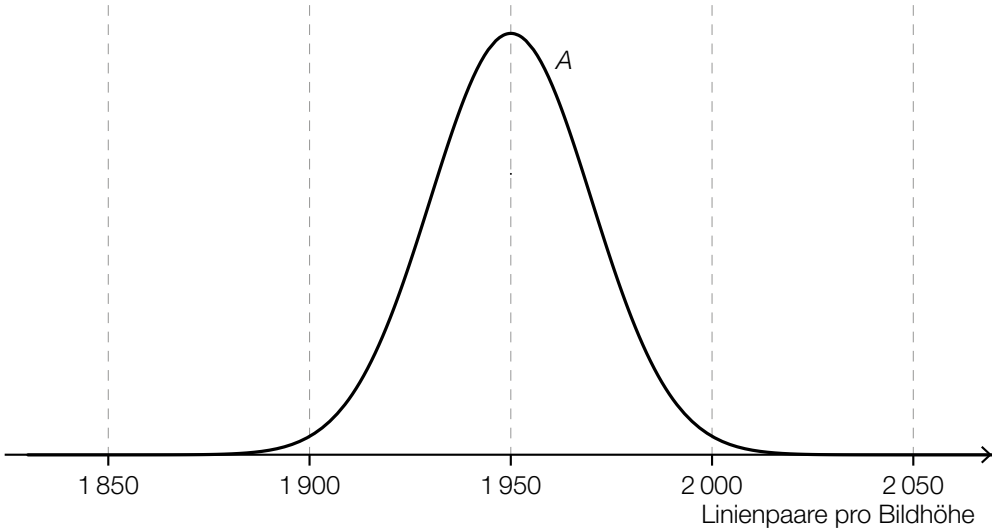
2) Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung des Winkels α aus n.

$\alpha =$ _____

c) Ein für Digitalkameras relevantes Qualitätsmerkmal ist die Anzahl der Linienpaare pro Bildhöhe (LP/BH).

Für einen bestimmten Objektiv-Typ ist diese Kenngröße annähernd normalverteilt. Die Objektive werden von 3 verschiedenen Herstellern – *A*, *B* und *C* – jeweils mit dem Erwartungswert μ = 1 950 LP/BH und der Standardabweichung σ_A, σ_B bzw. σ_C produziert.

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der zugehörigen Dichtefunktion für Hersteller *A* dargestellt.



1) Skizzieren Sie in der obigen Abbildung den Graphen der zugehörigen Dichtefunktion für Hersteller *B*, wenn für die Standardabweichungen gilt: $\sigma_A < \sigma_B$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein neu produziertes Objektiv des Herstellers *C* mindestens 1 900 LP/BH darstellen kann, beträgt 97,7 %.

2) Berechnen Sie die zugehörige Standardabweichung σ_C.

Möglicher Lösungsweg

a1) $x = \sqrt{y^2 + z^2 - 2 \cdot y \cdot z \cdot \cos(\alpha)}$

a2) γ ... Winkel gegenüber von z
β ... Winkel gegenüber von y

$\frac{121}{\sin(45°)} = \frac{70}{\sin(\gamma)} \quad \Rightarrow \quad \gamma = 24{,}1...°$
$\beta = 180° - 45° - 24{,}1...° = 110{,}8...°$

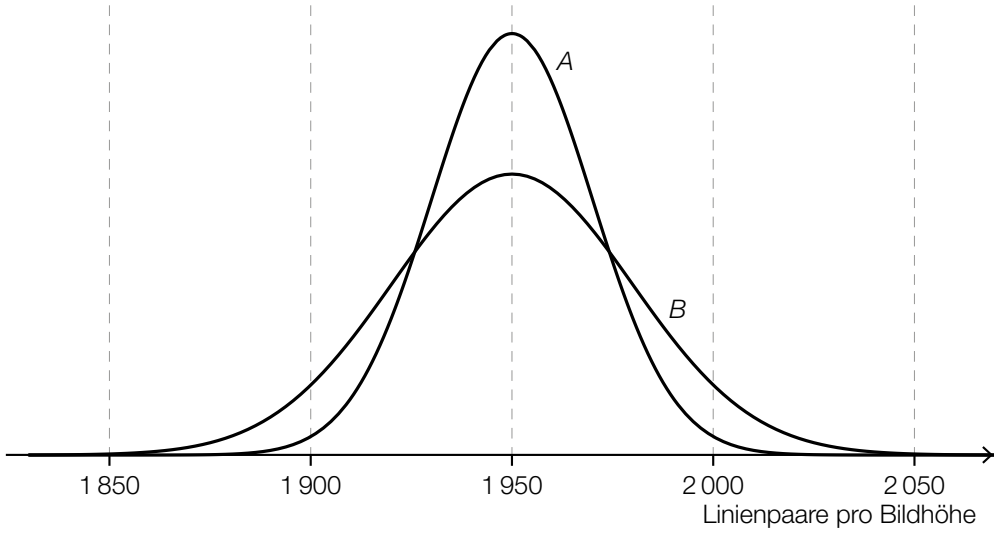
$\frac{y}{\sin(110{,}8...°)} = \frac{121}{\sin(45°)} \quad \Rightarrow \quad y = 159{,}9...$

Die Entfernung y beträgt rund 160 cm.

b1) $A = \frac{a^2 \cdot \sin(\alpha)}{2}$

b2) $\alpha = \frac{360°}{2 \cdot n}$

c1)



c2) X ... Anzahl der Linienpaare pro Bildhöhe
$P(X \geq 1\,900) = 0{,}977$

Berechnung von σ_C mittels Technologieeinsatz:
$\sigma_C = 25{,}0...$
Die Standardabweichung beträgt bei Objektiven des Herstellers C rund 25 LP/BH.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A1: für das richtige Erstellen der Formel zur Berechnung von x
1 × A2: für den richtigen Ansatz zur Berechnung der Entfernung y
1 × B: für die richtige Berechnung der Entfernung y

b) 1 × A1: für das richtige Erstellen der Formel zur Berechnung des Flächeninhalts A
1 × A2: für das richtige Erstellen der Formel zur Berechnung des Winkels α

c) 1 × A: für das richtige Skizzieren des Graphen der Dichtefunktion für Hersteller B (Maximumstelle ebenfalls bei 1 950 LP/BH, Glockenkurve niedriger und breiter als bei A)
1 × B: für die richtige Berechnung der Standardabweichung σ_C

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Erbschaft*

Aufgabennummer: B_264

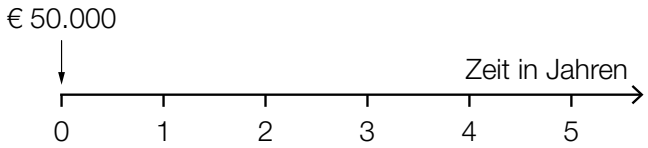
Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Armin erhält ein Erbe in Höhe von € 50.000, das in Form von 3 Beträgen in den nächsten 5 Jahren ausbezahlt wird.
Die Höhe der Auszahlungen Z kann mit der nachstehenden Gleichung berechnet werden:

$$50\,000 = \frac{20\,000}{1{,}03} + \frac{Z}{1{,}03^3} + \frac{Z}{1{,}03^5}$$

1) Lesen Sie den zugehörigen Jahreszinssatz ab.

2) Veranschaulichen Sie alle in der Gleichung vorkommenden Auszahlungen auf der nachstehenden Zeitachse.



3) Berechnen Sie die Höhe der Auszahlungen Z.

b) Jutta hat € 50.000 geerbt. Diesen Betrag legt sie mit einer Verzinsung von 3 % p. a. an.

In den nächsten 5 Jahren will sie nun jeweils am Ende jedes Monats einen gleich hohen Betrag abheben, sodass nach diesen 5 Jahren vom angelegten Geld ein Betrag in Höhe von € 20.000 vorhanden ist.

Jutta überlegt, dass sie monatlich rund $\frac{€\ 50.000 - €\ 20.000}{60} = €\ 500$ abheben kann.

1) Begründen Sie, warum die tatsächlichen Monatsraten größer als € 500 sind.

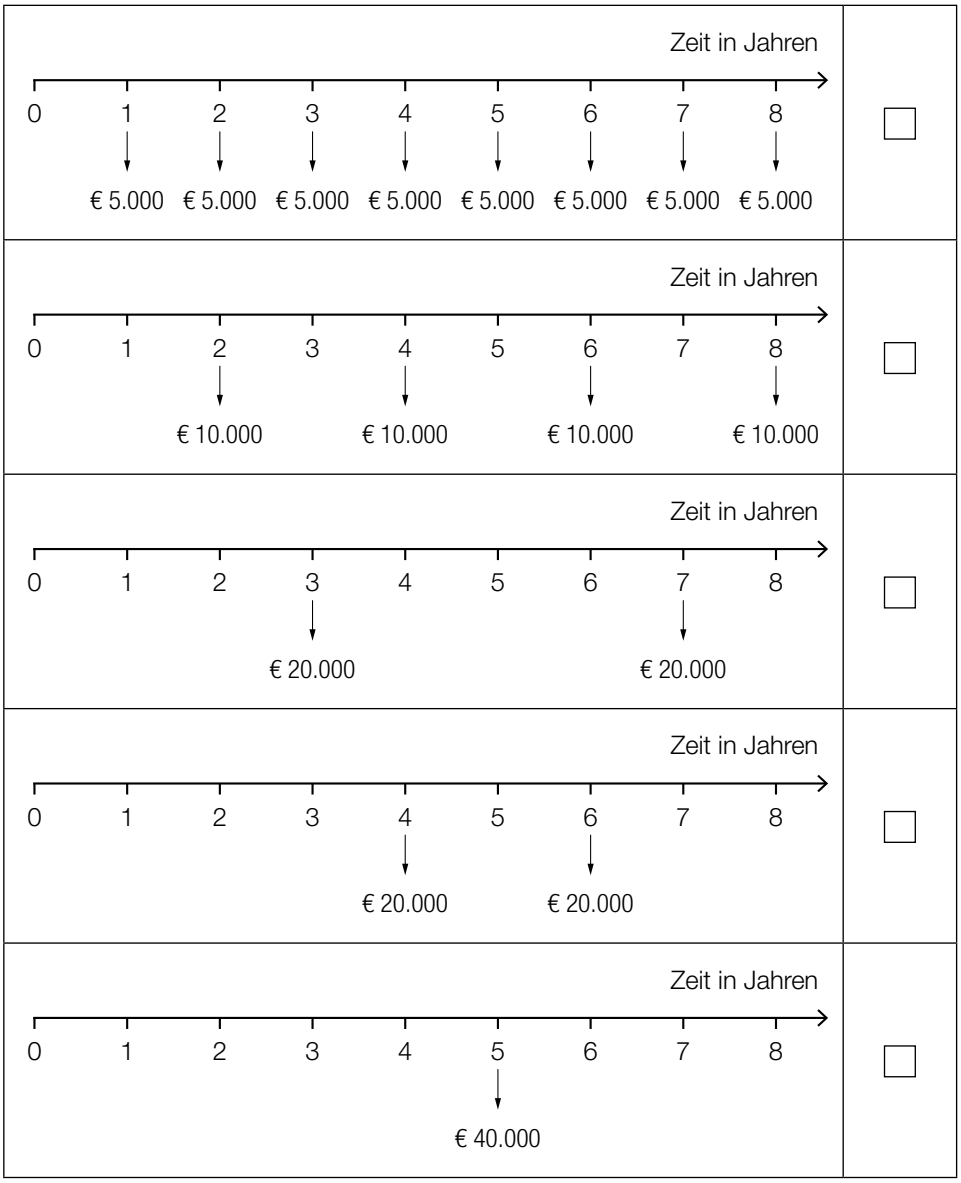
2) Berechnen Sie den zugehörigen äquivalenten Monatszinssatz.

3) Berechnen Sie die Höhe dieser tatsächlichen Monatsraten.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Auf den unten stehenden Zeitachsen sind Erbschaftsauszahlungen dargestellt.

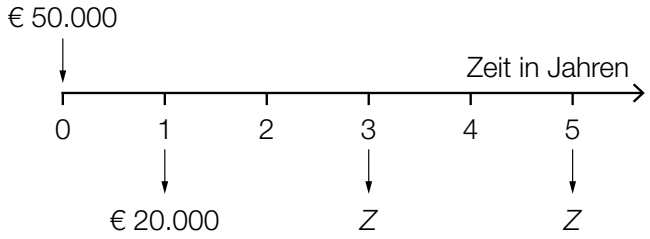
1) Kreuzen Sie diejenige Auszahlungsvariante an, die bei einem positiven Zinssatz den größten Barwert hat. *[1 aus 5]*



Möglicher Lösungsweg

a1) Zinssatz: 3 % p. a.

a2)



a3) $50\,000 = \frac{20\,000}{1{,}03} + \frac{Z}{1{,}03^3} + \frac{Z}{1{,}03^5}$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$Z = 17\,202{,}934...$

Die Höhe der Auszahlungen Z beträgt € 17.202,93.

b1) Da das Erbe angelegt und verzinst wird, kann Jutta einen höheren Betrag als monatlich € 500 abheben.

b2) $i_{12} = \sqrt[12]{1{,}03} - 1 = 0{,}002466...$

Der Monatszinssatz beträgt rund 0,247 %.

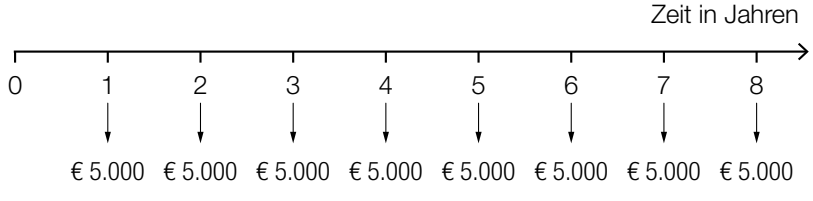
b3) $q_{12} = 1 + i_{12}$

$50\,000 \cdot 1{,}03^5 = R \cdot \frac{q_{12}^{60} - 1}{q_{12} - 1} + 20\,000$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$R = 587{,}846...$

Die Höhe der Monatsraten beträgt € 587,85.

c1)

	☒
[...]	
[...]	
[...]	
[...]	

Lösungsschlüssel

a) 1 × C: für das richtige Ablesen des Jahreszinssatzes
1 × A: für das richtige Veranschaulichen der Auszahlungen auf der Zeitachse
1 × B: für die richtige Berechnung der Höhe der Auszahlungen Z

b) 1 × D: für die richtige Begründung
1 × B1: für die richtige Berechnung des äquivalenten Monatszinssatzes
1 × B2: für die richtige Berechnung der Höhe der Monatsraten

c) 1 × C: für das richtige Ankreuzen

Marmelade*

Aufgabennummer: B_280

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Sarah und Daniel stellen im Rahmen eines Schulprojekts selbstgemachte Marmelade her und füllen sie in Gläser ab. Es werden *x* Gläser Erdbeermarmelade und *y* Gläser Mehrfruchtmarmelade abgefüllt.

a) Für ein Glas Erdbeermarmelade benötigen sie 160 g Erdbeeren.
Für ein Glas Mehrfruchtmarmelade benötigen sie 60 g Erdbeeren, 60 g Himbeeren und 40 g Heidelbeeren.
Sie haben insgesamt 15 kg Erdbeeren, 4 kg Himbeeren und 2 kg Heidelbeeren zur Verfügung.
Insgesamt wollen sie mindestens 70 Gläser Erdbeermarmelade produzieren.

1) Erstellen Sie ein Ungleichungssystem, das die obigen Mengenbeschränkungen für die Herstellung der beiden Marmeladesorten beschreibt.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Nach einer Besprechung der Projektgruppe ergeben sich die folgenden Mengenbeschränkungen für die Herstellung der beiden Marmeladesorten:

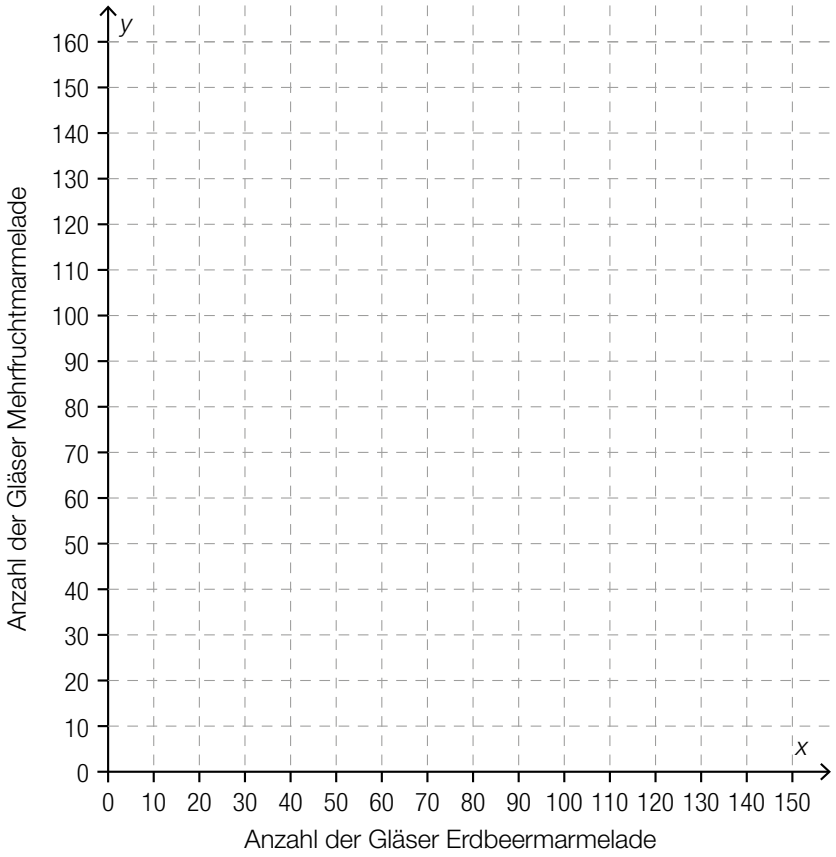
I: $150 \cdot x + 50 \cdot y \leq 18000$

II: $x + y \geq 100$

III: $y \geq 50$

IV: $y \leq 120$

V: $x \geq 0$

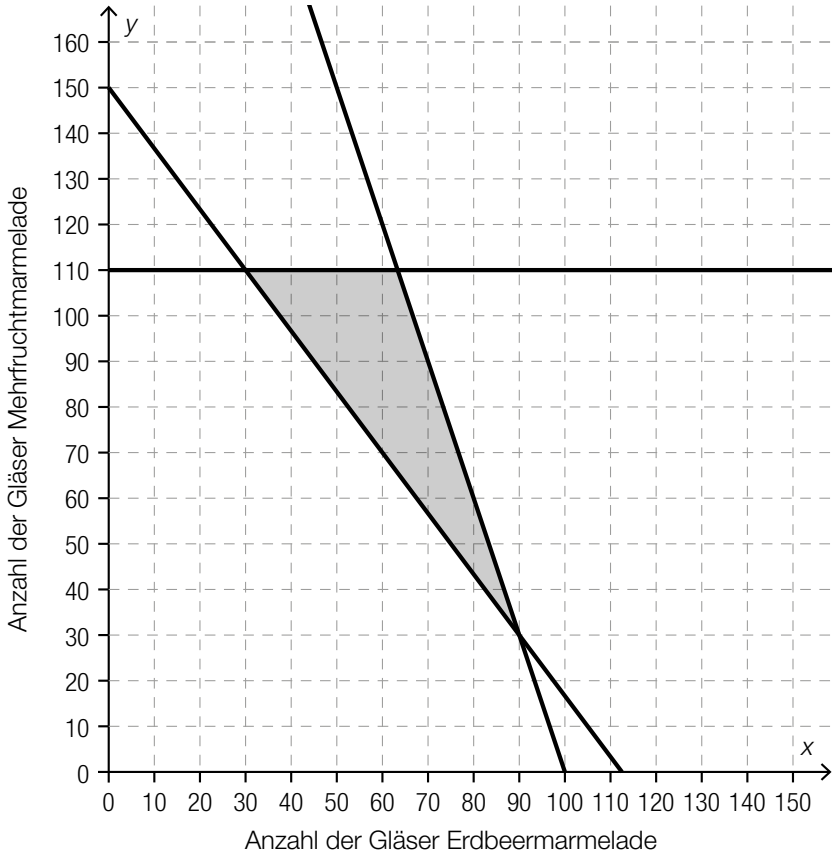


1) Zeichnen Sie im obigen Koordinatensystem die Begrenzungsgeraden der Ungleichungen I, II, III und IV ein.

2) Markieren Sie im obigen Koordinatensystem den Lösungsbereich des Ungleichungssystems.

3) Interpretieren Sie die Bedeutung der Ungleichungen III und IV im gegebenen Sachzusammenhang.

c) In der nachstehenden Grafik sind die Mengenbeschränkungen nach einer weiteren Überarbeitung des Projekts dargestellt.



Die Gleichung der Zielfunktion Z zur Ermittlung der Kosten in Euro bei der Herstellung lautet:

$Z(x, y) = 2{,}50 \cdot x + 3 \cdot y$

1) Zeichnen Sie in der obigen Grafik diejenige Gerade ein, für die der minimale Wert der Zielfunktion angenommen wird.

Nachdem Sarah ihrer Tante von ihrem Schulprojekt erzählt hat, stellt diese Himbeeren kostenlos zur Verfügung. Die Kosten pro Glas Mehrfruchtmarmelade sinken dadurch auf € 2,50 pro Glas.

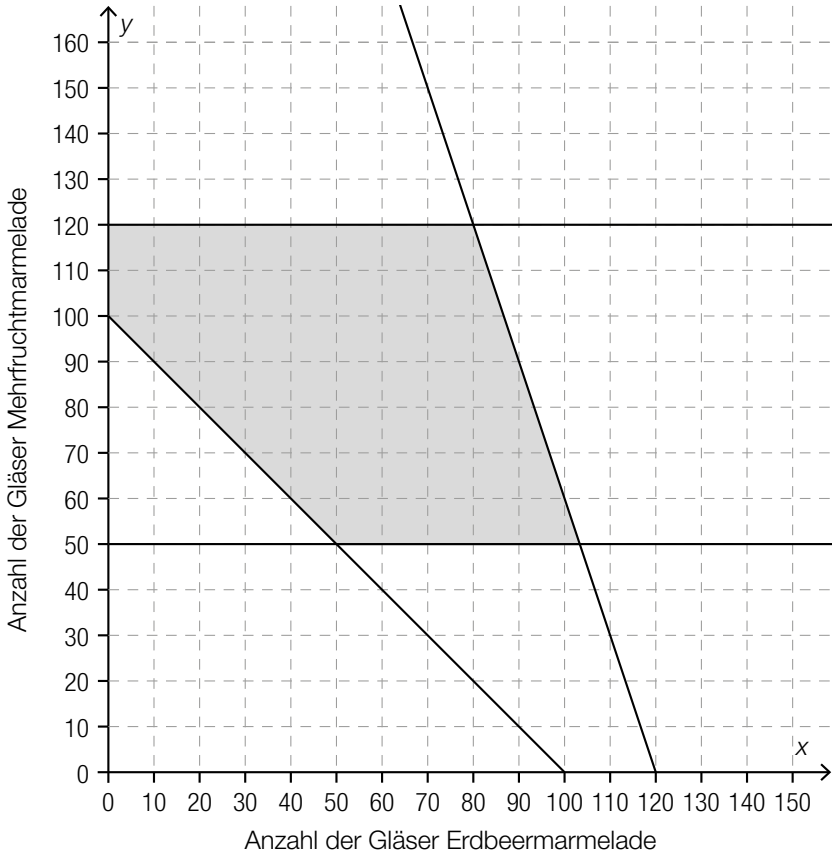
2) Erstellen Sie eine Gleichung der neuen Zielfunktion Z_1 zur Ermittlung der Kosten.

3) Überprüfen Sie nachweislich, ob Sarah und Daniel durch diese Kostensenkung auch die Produktionsmengen ändern müssen, wenn ihre Gesamtkosten minimal bleiben sollen.

Möglicher Lösungsweg

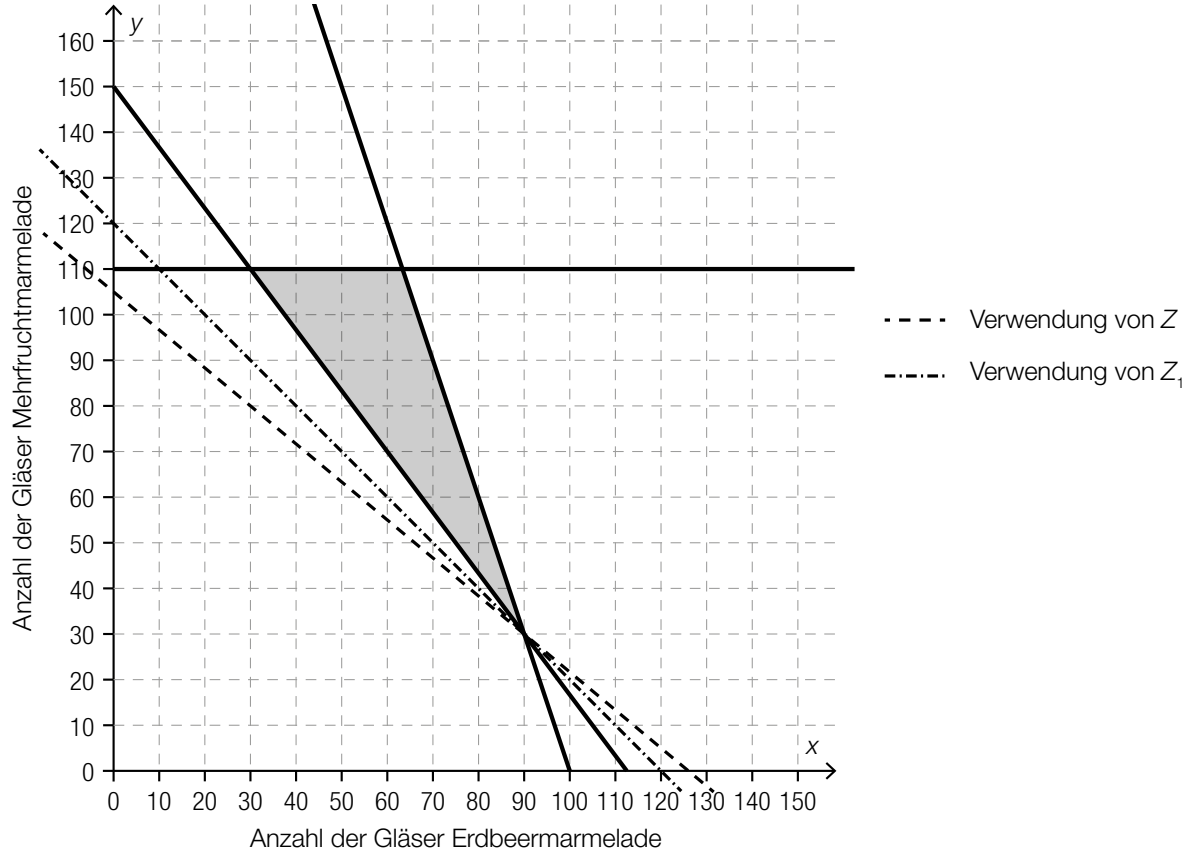
a1) I: $160 \cdot x + 60 \cdot y \leq 15\,000$
II: $60 \cdot y \leq 4\,000$
III: $40 \cdot y \leq 2\,000$
IV: $x \geq 70$

b1 und b2)



b3) Sie planen, mindestens 50 und höchstens 120 Gläser Mehrfruchtmarmelade zu produzieren.

c1)



c2) $Z_1(x, y) = 2{,}50 \cdot x + 2{,}50 \cdot y$

c3) Durch Einzeichnen derjenigen Geraden, für die der minimale Wert der Zielfunktion Z_1 angenommen wird, kann man feststellen, dass dieselben Produktionsmengen zu minimalen Kosten führen.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A1: für das richtige Erstellen der Ungleichungen (Einschränkung bezüglich der zur Verfügung stehenden Beeren)
1 × A2: für das richtige Erstellen der Ungleichung (Einschränkung „mindestens 70 Gläser Erdbeermarmelade“)
Die Angabe der Nichtnegativitätsbedingungen ist für die Punktevergabe nicht erforderlich.

b) 1 × B: für das richtige Einzeichnen der Begrenzungsgeraden
1 × C1: für das richtige Markieren des Lösungsbereichs
1 × C2: für die richtige Interpretation der Bedeutung der Ungleichungen III und IV im gegebenen Sachzusammenhang

c) 1 × B: für das richtige Einzeichnen der Geraden, für die der minimale Wert der Zielfunktion angenommen wird
1 × A: für das richtige Erstellen der Gleichung der neuen Zielfunktion Z_1
1 × D: für die richtige nachweisliche Überprüfung

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Mixer*

Aufgabennummer: B_282

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein Unternehmen stellt unterschiedliche Typen von Mixern her.

a) Bei einem Stückpreis von € 65 können 2 000 Stabmixer pro Jahr verkauft werden.
Bei einem Verkauf von 2 500 Stabmixern kann ein Erlös in Höhe von € 131.250 pro Jahr erzielt werden.

Der Erlös beim Verkauf der Stabmixer kann durch eine quadratische Funktion E beschrieben werden:

$E(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

x … Anzahl der verkauften Stabmixer
$E(x)$ … Erlös bei x verkauften Stabmixern in €

1) Begründen Sie, warum in der Gleichung der Erlösfunktion der Parameter c gleich null sein muss.
2) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten a und b der Erlösfunktion.
3) Berechnen Sie die Koeffizienten a und b.
4) Berechnen Sie die Sättigungsmenge.

b) Der Gewinn beim Verkauf der Handmixer kann durch die Funktion G beschrieben werden.

$G(x) = -0{,}1 \cdot x^3 - 1{,}9 \cdot x^2 + 200 \cdot x - 940$

x … Absatzmenge in ME
$G(x)$ … Gewinn bei der Absatzmenge x in GE

1) Berechnen Sie die Gewinngrenzen.
2) Ermitteln Sie den maximalen Gewinn.

Durch Veränderungen im Unternehmen können die Fixkosten um 200 GE gesenkt werden.

3) Erstellen Sie eine Gleichung der neuen Gewinnfunktion G_1.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Die Kosten bei der Produktion von Standmixern können durch die Funktion K beschrieben werden.

$K(x) = 0{,}04 \cdot x^3 - 2{,}4 \cdot x^2 + 63 \cdot x + 940$

x … Produktionsmenge in ME
$K(x)$ … Kosten bei der Produktionsmenge x in GE

1) Überprüfen Sie nachweislich, ob der Kostenverlauf bei einer Produktion von 25 ME progressiv oder degressiv ist.

2) Kreuzen Sie diejenige Gleichung an, deren Lösung das Betriebsoptimum ist. *[1 aus 5]*

$0 = 0{,}04 \cdot x^3 - 2{,}4 \cdot x^2 + 63 \cdot x + 940$	☐
$0 = 0{,}12 \cdot x^2 - 4{,}8 \cdot x + 63$	☐
$0 = 0{,}24 \cdot x - 4{,}8$	☐
$0 = 0{,}04 \cdot x^2 - 2{,}4 \cdot x + 63 + \frac{940}{x}$	☐
$0 = 0{,}08 \cdot x - 2{,}4 - \frac{940}{x^2}$	☐

Möglicher Lösungsweg

a1) Der Parameter c muss null sein, da bei einem Absatz von null Stück auch der Erlös null ist.

a2) Erlös beim Absatz von 2 000 Mixern: $2\,000 \cdot 65 = 130\,000$

$E(2\,000) = 130\,000$
$E(2\,500) = 131\,250$

oder:

$2\,000^2 \cdot a + 2\,000 \cdot b = 130\,000$
$2\,500^2 \cdot a + 2\,500 \cdot b = 131\,250$

a3) Lösung mittels Technologieeinsatz:
$a = -\frac{1}{40} = -0{,}025$
$b = 115$

a4) $E(x) = 0$

oder:

$-0{,}025 \cdot x^2 + 115 \cdot x = 0$

$x_1 = 0$
$x_2 = 4\,600$

Die Sättigungsmenge liegt bei 4 600 Stück.

b1) $G(x) = 0$

oder:

$-0{,}1 \cdot x^3 - 1{,}9 \cdot x^2 + 200 \cdot x - 940 = 0$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$x_1 = 5$ ME (untere Gewinngrenze)
$x_2 = 32{,}9\ldots$ ME ≈ 33 ME (obere Gewinngrenze)

b2) $G'(x) = 0$

oder:

$-0{,}3 \cdot x^2 - 3{,}8 \cdot x + 200 = 0$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
($x_1 = -32{,}9...$)
$x_2 = 20{,}2...$
$G(20{,}2...) = 1\,500{,}504...$
Der maximale Gewinn beträgt rund 1.500,50 GE

b3) $G_1(x) = G(x) + 200 = -0{,}1 \cdot x^3 - 1{,}9 \cdot x^2 + 200 \cdot x - 740$

c1) $K''(x) = 0{,}24 \cdot x - 4{,}8$

$K''(25) = 1{,}2 > 0$

Da die 2. Ableitung für 25 ME positiv ist, ist der Kostenverlauf dort progressiv.

c2)

[...]	
[...]	
[...]	
[...]	
$0 = 0{,}08 \cdot x - 2{,}4 - \frac{940}{x^2}$	☒

Lösungsschlüssel

a) 1 × D: für die richtige Begründung
1 × A: für das richtige Erstellen des Gleichungssystems
1 × B1: für die richtige Berechnung der Koeffizienten *a* und *b*
1 × B2: für die richtige Berechnung der Sättigungsmenge

b) 1 × B1: für die richtige Berechnung der Gewinngrenzen
1 × B2: für das richtige Ermitteln des maximalen Gewinns
1 × A: für das richtige Erstellen der Gleichung der neuen Gewinnfunktion G_1

c) 1 × D: für die richtige nachweisliche Überprüfung
1 × C: für das richtige Ankreuzen

Kaffeeautomat*

Aufgabennummer: B_285

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Der Elternverein einer Schule entschließt sich, einen Kaffeeautomaten für Schüler/innen und Lehrer/innen anzuschaffen.

a) Die Kosten für den Kaffeeautomaten betragen € 5.500.

Der Elternverein erhält folgendes Leasingangebot:

- Anzahlung: € 1.000 bei Vertragsabschluss
- 48 Monatsraten zu je € 100
- Die Ratenzahlungen beginnen einen Monat nach Vertragsabschluss.
- Der Restwert in Höhe von € 900 ist gleichzeitig mit der letzten Rate zu bezahlen.

1) Berechnen Sie den effektiven Jahreszinssatz für dieses Angebot.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Der Elternverein zahlt die Kosten für den Kaffeeautomaten in Höhe von € 5.500 sofort und darf dafür die Einnahmen behalten.

Der Kassier des Elternvereins legt seiner Berechnung folgende Annahmen zugrunde:

- Er rechnet mit 150 Bechern Kaffee pro Tag für 40 Schulwochen zu je 5 Tagen.
- Wareneinsatz pro Becher Kaffee: 30 Cent
- Verkaufspreis pro Becher Kaffee: 45 Cent
- Wartungskosten: € 1.400 pro Jahr
- Nach 4 Jahren soll der Kaffeeautomat um € 900 verkauft werden.

1) Tragen Sie die Einnahmen, Ausgaben und Rückflüsse in die nachstehende Tabelle ein.

Jahr	Einnahmen in Euro	Ausgaben in Euro	Rückflüsse in Euro
0			
1			
2			
3			
4			

Der Kassier nimmt einen kalkulatorischen Zinssatz von 1,8 % p. a. an.

2) Berechnen Sie den Kapitalwert.

c) An 80 von insgesamt 200 Schultagen hat Chiara Nachmittagsunterricht.

An Schultagen mit Nachmittagsunterricht trinkt sie mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % Kaffee, an Schultagen ohne Nachmittagsunterricht beträgt diese Wahrscheinlichkeit 20 %.

1) Erstellen Sie für diesen Sachverhalt ein mit den jeweiligen Wahrscheinlichkeiten beschriftetes Baumdiagramm.
2) Beschreiben Sie ein mögliches Ereignis E im gegebenen Sachzusammenhang, dessen Wahrscheinlichkeit folgendermaßen berechnet wird:
   $P(E) = \frac{120}{200} \cdot 0{,}8 = 0{,}48$
3) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Chiara heute Nachmittagsunterricht hat unter der Voraussetzung, dass sie heute Kaffee getrunken hat.

Möglicher Lösungsweg

a1) $5\,500 = 1\,000 + 100 \cdot \frac{q_{12}^{48} - 1}{q_{12} - 1} \cdot \frac{1}{q_{12}^{48}} + \frac{900}{q_{12}^{48}}$

Berechnung mittels Technologieeinsatz: $q_{12} = 1{,}0087...$

$i = q_{12}^{12} - 1 = 0{,}1099... \approx 11{,}0\ \%$

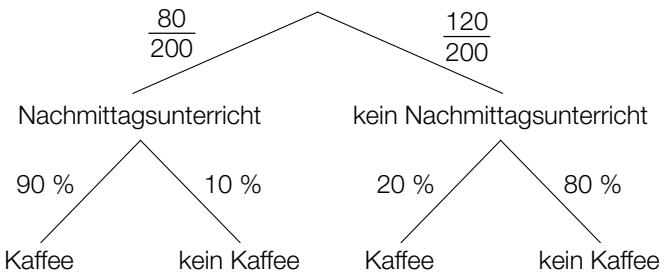
b1)

Jahr	Einnahmen in Euro	Ausgaben in Euro	Rückflüsse in Euro
0		5 500	–5 500
1	13 500	10 400	3 100
2	13 500	10 400	3 100
3	13 500	10 400	3 100
4	14 400	10 400	4 000

b2) $C_0 = 3\,100 \cdot 1{,}018^{-1} + 3\,100 \cdot 1{,}018^{-2} + 3\,100 \cdot 1{,}018^{-3} + 4\,000 \cdot 1{,}018^{-4} - 5\,500$
$= 7\,199{,}487...$

Der Kapitalwert beträgt € 7.199,49.

c1)



c2) Chiara hat keinen Nachmittagsunterricht und trinkt keinen Kaffee.

c3) $P(\text{„Nachmittagsunterricht“}|\text{„Kaffee“}) = \frac{\frac{80}{200} \cdot 0{,}9}{\frac{80}{200} \cdot 0{,}9 + \frac{120}{200} \cdot 0{,}2} = 0{,}75$

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für den richtigen Ansatz
1 × B: für die richtige Berechnung des effektiven Jahreszinssatzes

b) 1 × A: für das richtige Eintragen der Einnahmen, Ausgaben und Rückflüsse in der Tabelle
1 × B: für die richtige Berechnung des Kapitalwerts

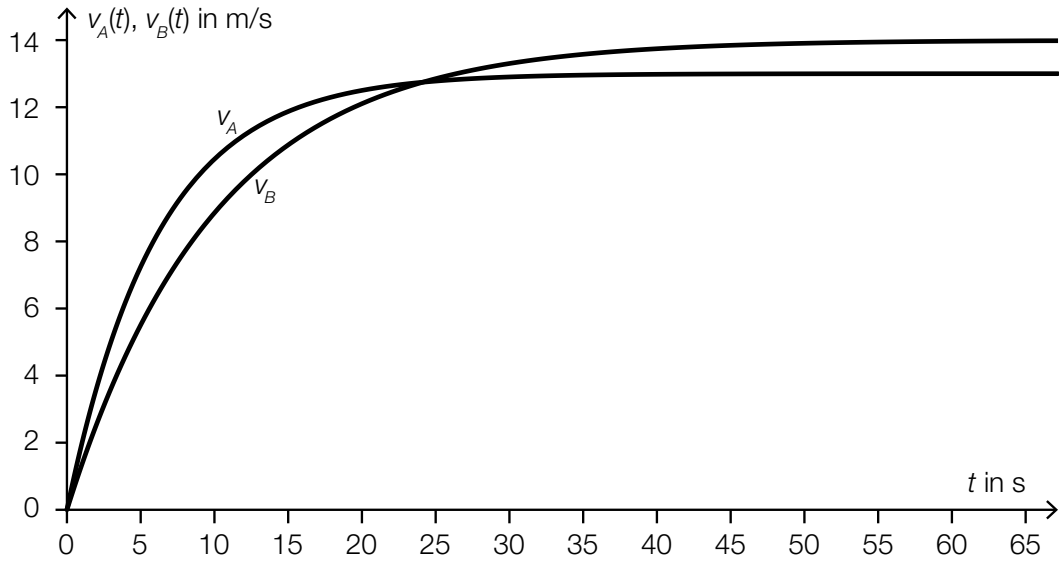
c) 1 x A: für das richtige Erstellen des Baumdiagramms
1 x C: für die richtige Beschreibung des Ereignisses *E* im gegebenen Sachzusammenhang
1 x B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit

Motorbootrennen (1)*

Aufgabennummer: B_359

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

In der nachstehenden Abbildung ist das Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm zweier Motorboote *A* und *B* während einer Wettfahrt modellhaft dargestellt.



a) Für die Funktion v_B gilt:

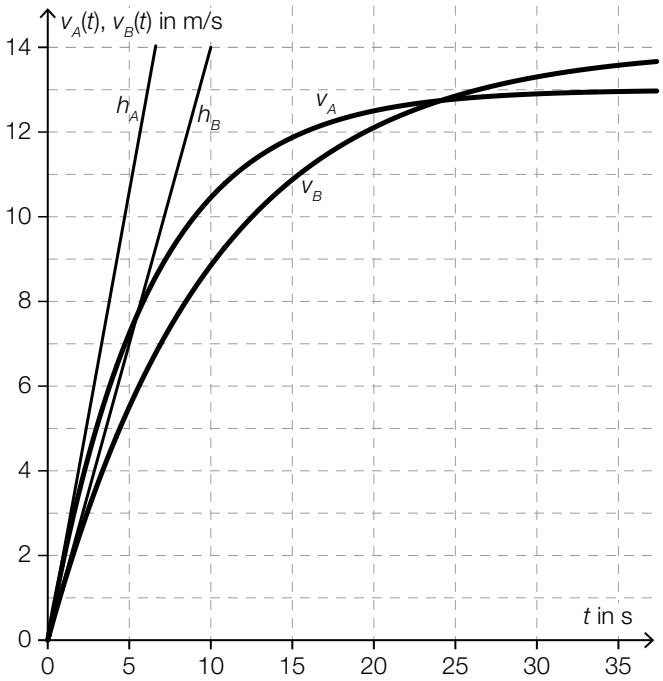
$v_B(t) = 14 \cdot (1 - e^{-0,1 \cdot t})$ mit $t \geq 0$

t ... Zeit in s
$v_B(t)$ ... Geschwindigkeit zur Zeit t in m/s

1) Ermitteln Sie, um wie viel Prozent die Beschleunigung des Bootes pro Sekunde abnimmt.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Die nachstehende Abbildung zeigt die Tangenten h_A und h_B an die Graphen der Geschwindigkeit-Zeit-Funktionen zur Zeit $t = 0$.

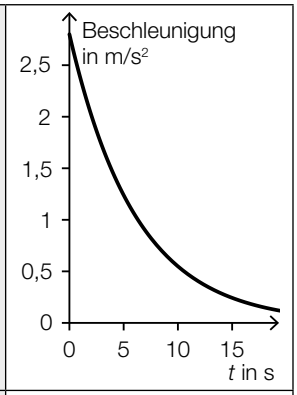


1) Interpretieren Sie die Steigung der Tangente h_A im gegebenen Sachzusammenhang.

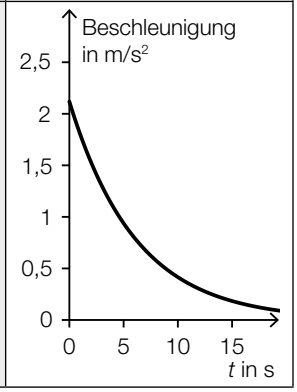
2) Ordnen Sie den beiden Ableitungsfunktionen $\frac{dv_A}{dt}$ und $\frac{dv_B}{dt}$ jeweils die entsprechende Grafik aus A bis D zu. *[2 zu 4]*

$\frac{dv_A}{dt}$	
$\frac{dv_B}{dt}$	

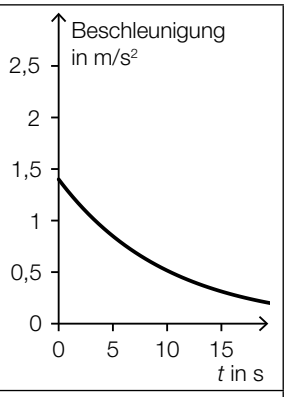
A



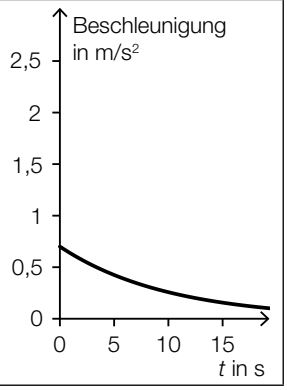
B



C



D



c) Eine Funktionsgleichung der in der obigen Abbildung dargestellten Funktion v_B für das Motorboot *B* lautet:

$v_B(t) = 14 \cdot (1 - e^{-0,1 \cdot t})$ mit $t \geq 0$

t ... Zeit in s
$v_B(t)$ ... Geschwindigkeit zur Zeit *t* in m/s

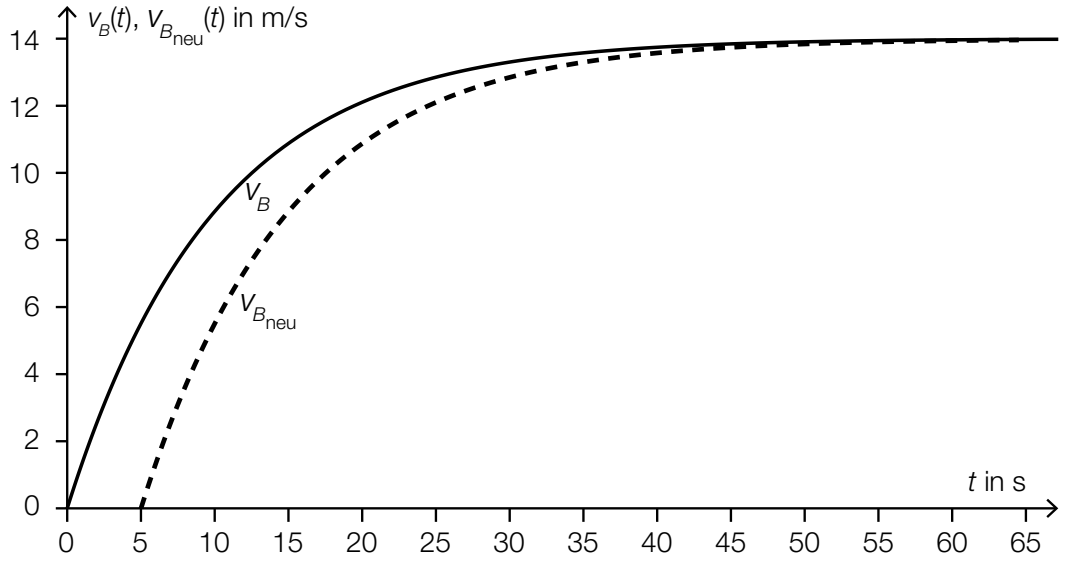
1) Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung desjenigen Weges *s*, den das Motorboot *B* in den ersten *n* Sekunden zurücklegt.

s = _____

Nach einer Fahrt von 700 m überholt das Motorboot *B* das Motorboot *A*.

2) Berechnen Sie den Zeitpunkt dieses Überholens.

In der nachstehenden Abbildung beschreibt der Graph der Funktion $v_{B_{neu}}$ den Fall, dass das Motorboot *B* um 5 Sekunden später startet (bei sonst unverändertem Geschwindigkeitsverlauf).



3) Erstellen Sie ausgehend von der Funktion v_B eine Gleichung der Funktion $v_{B_{neu}}$.

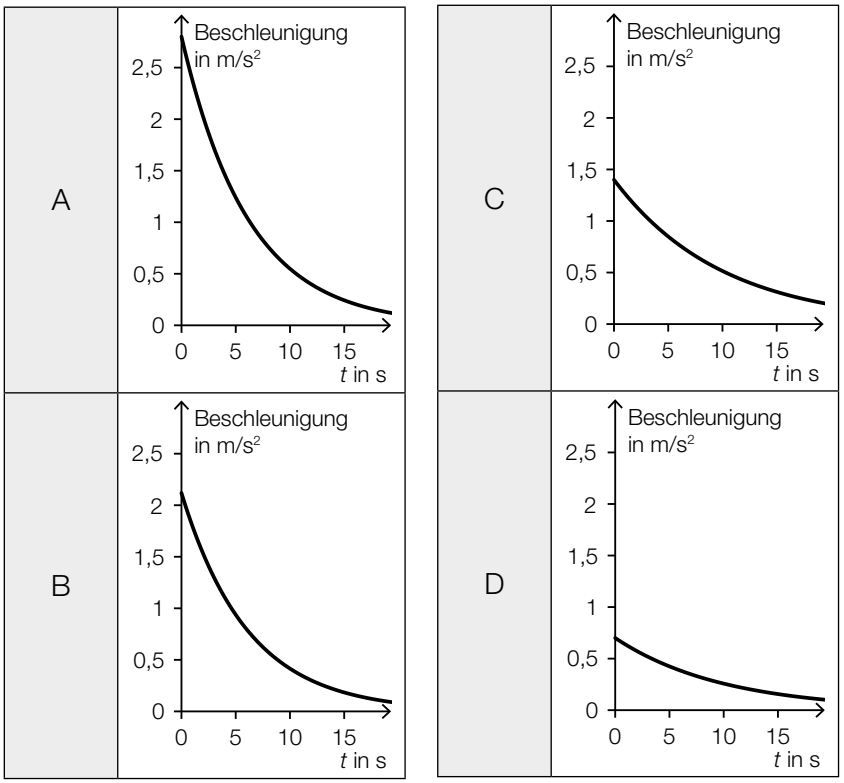
Möglicher Lösungsweg

a1) $v_B'(t) = 1{,}4 \cdot e^{-0{,}1 \cdot t} = 1{,}4 \cdot 0{,}9048...^t$
Pro Sekunde nimmt die Beschleunigung in Bezug auf den jeweils vorigen Wert um rund 9,5 % ab.

b1) Die Steigung der Tangente h_A gibt die Beschleunigung des Motorboots *A* zum Zeitpunkt $t = 0$ an.

b2)

$\frac{dv_A}{dt}$	B
$\frac{dv_B}{dt}$	C



c1) $s = \int_0^n v_B(t)\,dt$

c2) $700 = \int_0^n v_B(t)\,dt$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$n = 59{,}9...$
Das Motorboot *B* überholt das Motorboot *A* nach rund 60 Sekunden.

c3) $v_{B_{neu}}(t) = 14 \cdot (1 - e^{-0{,}1 \cdot (t-5)})$

oder:

$v_{B_{neu}}(t) = v_B(t - 5)$

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für das richtige Ermitteln des Prozentsatzes

b) 1 × C1: für die richtige Interpretation der Steigung der Tangente h_A im gegebenen Sachzusammenhang
1 × C2: für die richtige Zuordnung

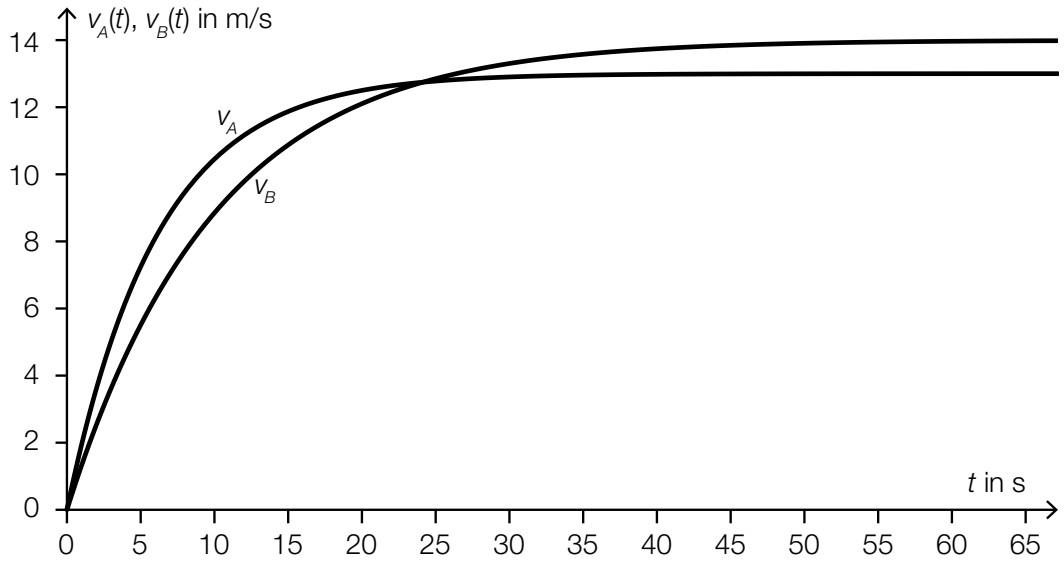
c) 1 × A1: für das richtige Erstellen der Formel zur Berechnung des zurückgelegten Weges
1 × B: für die richtige Berechnung des Zeitpunkts des Überholens
1 × A2: für das richtige Erstellen der Gleichung der Funktion $v_{B_{neu}}$

Motorbootrennen (2)*

Aufgabennummer: B_360

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

In der nachstehenden Abbildung ist das Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm zweier Motorboote *A* und *B* während einer Wettfahrt modellhaft dargestellt.



a) Für die Funktion v_B gilt:

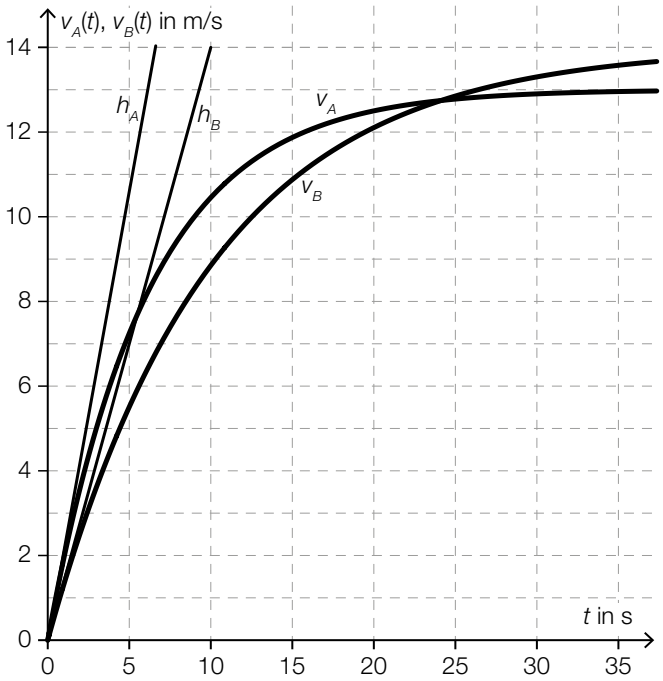
$v_B(t) = 14 \cdot (1 - e^{-0,1 \cdot t})$ mit $t \geq 0$

t ... Zeit in s
$v_B(t)$ ... Geschwindigkeit zur Zeit t in m/s

1) Ermitteln Sie, um wie viel Prozent die Beschleunigung des Bootes pro Sekunde abnimmt.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Die nachstehende Abbildung zeigt die Tangenten h_A und h_B an die Graphen der Geschwindigkeit-Zeit-Funktionen zur Zeit $t = 0$.

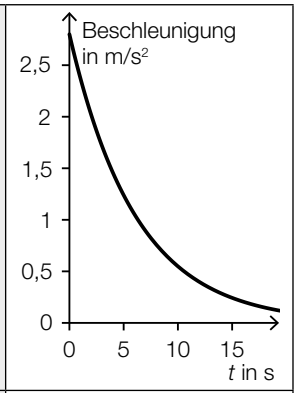


1) Interpretieren Sie die Steigung der Tangente h_A im gegebenen Sachzusammenhang.

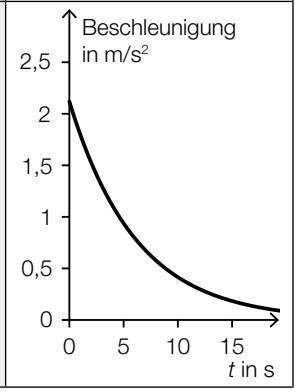
2) Ordnen Sie den beiden Ableitungsfunktionen $\frac{dv_A}{dt}$ und $\frac{dv_B}{dt}$ jeweils die entsprechende Grafik aus A bis D zu. *[2 zu 4]*

$\frac{dv_A}{dt}$	
$\frac{dv_B}{dt}$	

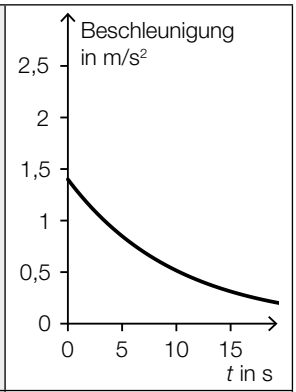
A



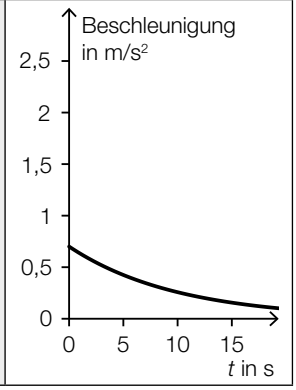
B



C



D



c) Eine Funktionsgleichung der in der obigen Abbildung dargestellten Funktion v_B für das Motorboot *B* lautet:

$v_B(t) = 14 \cdot (1 - e^{-0,1 \cdot t})$ mit $t \geq 0$

t ... Zeit in s
$v_B(t)$ ... Geschwindigkeit zur Zeit *t* in m/s

1) Berechnen Sie die mittlere Geschwindigkeit des Motorboots *B* während der ersten 30 Sekunden.

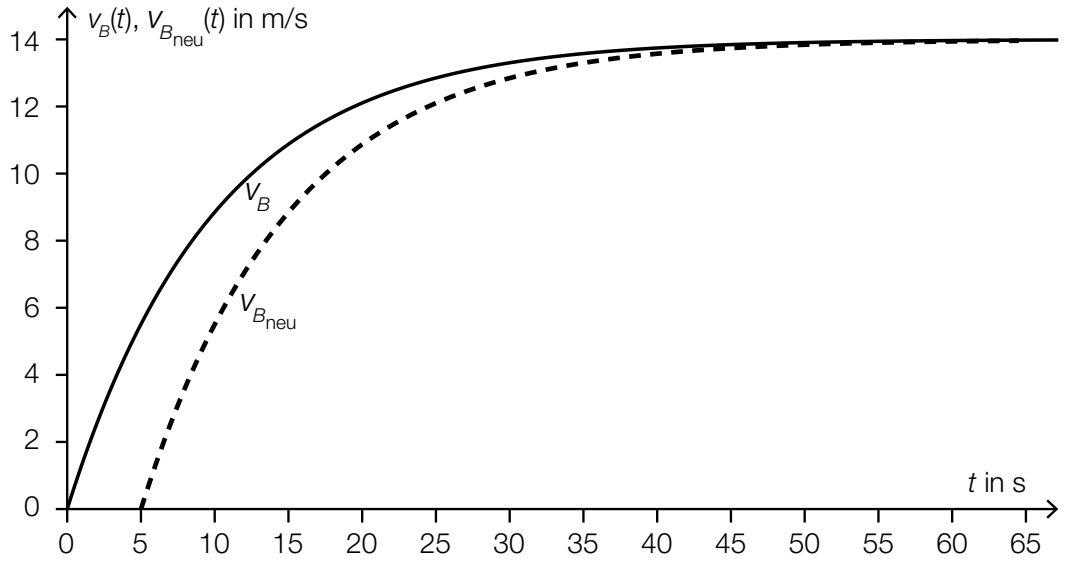
2) Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung desjenigen Weges *s*, den das Motorboot *B* in den ersten *n* Sekunden zurücklegt.

$s =$ _____

Nach einer Fahrt von 700 m überholt das Motorboot *B* das Motorboot *A*.

3) Berechnen Sie den Zeitpunkt dieses Überholens.

In der nachstehenden Abbildung beschreibt der Graph der Funktion $v_{B_{neu}}$ den Fall, dass das Motorboot *B* um 5 Sekunden später startet (bei sonst unverändertem Geschwindigkeitsverlauf).



4) Erstellen Sie ausgehend von der Funktion v_B eine Gleichung der Funktion $v_{B_{neu}}$.

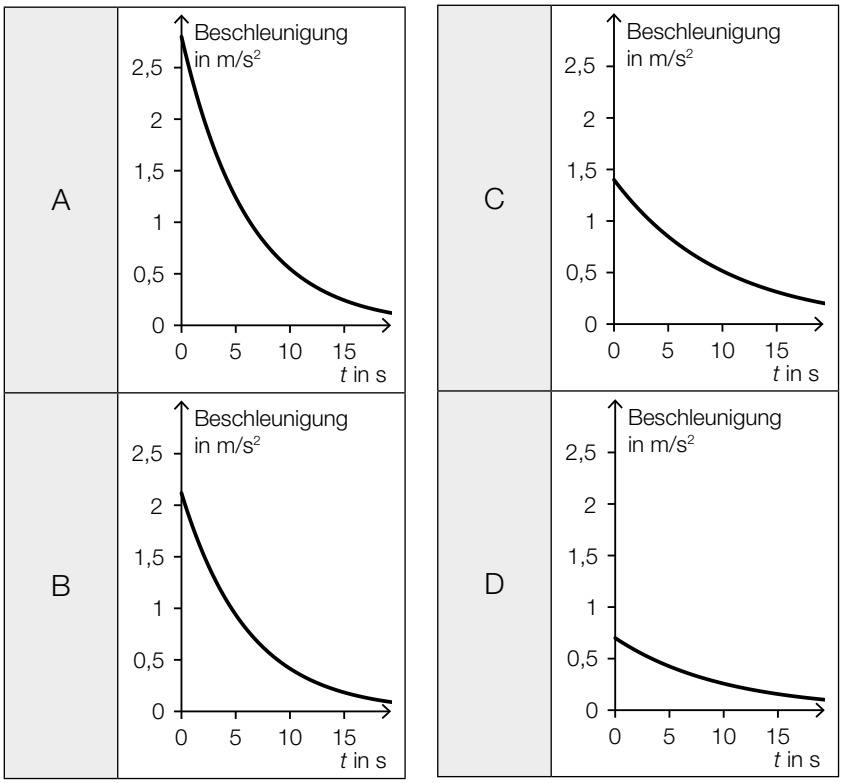
Möglicher Lösungsweg

a1) $v_B'(t) = 1{,}4 \cdot e^{-0{,}1 \cdot t} = 1{,}4 \cdot 0{,}9048...^t$
Pro Sekunde nimmt die Beschleunigung in Bezug auf den jeweils vorigen Wert um rund 9,5 % ab.

b1) Die Steigung der Tangente h_A gibt die Beschleunigung des Motorboots *A* zum Zeitpunkt $t = 0$ an.

b2)

$\frac{dv_A}{dt}$	B
$\frac{dv_B}{dt}$	C



c1) $\frac{1}{30} \cdot \int_0^{30} v_B(t)\,dt = 9{,}56...$
Die mittlere Geschwindigkeit während der ersten 30 Sekunden beträgt rund 9,6 m/s.

c2) $s = \int_0^n v_B(t)\,dt$

c3) $700 = \int_0^n v_B(t)\,dt$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$n = 59{,}9...$
Das Motorboot *B* überholt das Motorboot *A* nach rund 60 Sekunden.

c4) $v_{B_{neu}}(t) = 14 \cdot (1 - e^{-0{,}1 \cdot (t-5)})$

oder:

$v_{B_{neu}}(t) = v_B(t - 5)$

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für das richtige Ermitteln des Prozentsatzes

b) 1 × C1: für die richtige Interpretation der Steigung der Tangente h_A im gegebenen Sachzusammenhang
1 × C2: für die richtige Zuordnung

c) 1 × B1: für die richtige Berechnung der mittleren Geschwindigkeit
1 × A1: für das richtige Erstellen der Formel zur Berechnung des zurückgelegten Weges
1 × B2: für die richtige Berechnung des Zeitpunkts des Überholens
1 × A2: für das richtige Erstellen der Gleichung der Funktion $v_{B_{neu}}$

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Gebäudetechnik*

Aufgabennummer: B_260

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Im Bereich der Gebäudetechnik spielen Temperatur, Schalldämmung und CO_2-Gehalt der Luft eine wichtige Rolle.

a) Die mittlere Tagestemperatur in Bregenz soll für einen bestimmten Zeitraum durch eine Polynomfunktion 3. Grades T angenähert werden:

$T(t) = a \cdot t^3 + b \cdot t^2 + c \cdot t + d$

t … Zeit in Tagen
$T(t)$ … mittlere Tagestemperatur zur Zeit t in °C

Es wurden folgende Daten ermittelt:
Zu Beginn der Beobachtung ($t = 0$) lag die mittlere Tagestemperatur bei –5 °C.
Zur Zeit $t = 98$ Tage betrug sie +8 °C; zu dieser Zeit lag auch der Wendepunkt des Temperaturverlaufs vor.
Zur Zeit $t = 210$ Tage erreichte die mittlere Tagestemperatur +20 °C.

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Ermittlung der Koeffizienten dieser Polynomfunktion.

b) Um das Gesamtschalldämmmaß R_{Ges} einer Wand aus Ziegelmauer und Fenster in Dezibel (dB) zu berechnen, wird in der Gebäudetechnik die nachstehende Formel verwendet.

$$R_{Ges} = -10 \cdot \lg\left(f_F \cdot 10^{-\frac{R_F}{10}} + f_Z \cdot 10^{-\frac{R_Z}{10}}\right)$$

f_F … relativer Flächenanteil des Fensters an der gesamten Wandfläche
f_Z … relativer Flächenanteil der Ziegelmauer an der gesamten Wandfläche
R_F, R_Z … Schalldämmmaß des Fensters bzw. der Ziegelmauer in dB
R_{Ges} … Gesamtschalldämmmaß der Wand in dB

Ein Bauunternehmen plant, aus einer 50 m² großen Wand eine Fensterfläche herauszubrechen. Dabei hat das Fenster ein Schalldämmmaß von $R_F = 43$ dB, die Ziegelmauer ein Schalldämmmaß von $R_Z = 65$ dB.

Es wird ein Gesamtschalldämmmaß R_{Ges} von mindestens 55 dB für diese Wand gefordert.

1) Erstellen Sie eine Gleichung zur Berechnung des relativen Flächenanteils f_F, den die Fensterfläche in dieser Wand maximal erreichen darf.

2) Berechnen Sie diese Fensterfläche in m².

* ehemalige Klausuraufgabe

c) In einem Schlafzimmer mit einem Luftvolumen von 45 m^3 wird zum Zeitpunkt $t = 0$ eine Lüftungsanlage eingeschaltet. Zu diesem Zeitpunkt beträgt der CO_2-Gehalt der Luft im Zimmer 0,2 Vol.-%, d. h., das CO_2-Volumen beträgt 0,2 % des gesamten Luftvolumens.

Die nachstehende Differenzialgleichung beschreibt das CO_2-Volumen V (in m^3) im Schlafzimmer in Abhängigkeit von der Zeit t (in min) ab dem Einschalten der Lüftung:

$$\frac{dV}{dt} = 0{,}006 - \frac{V}{3}$$

1) Berechnen Sie die allgemeine Lösung dieser Differenzialgleichung.

2) Ermitteln Sie, nach welcher Zeit der ursprüngliche CO_2-Gehalt halbiert ist.

Möglicher Lösungsweg

a1) $T(t) = a \cdot t^3 + b \cdot t^2 + c \cdot t + d$
$T''(t) = 6 \cdot a \cdot t + 2 \cdot b$

$T(0) = -5$
$T(98) = 8$
$T(210) = 20$
$T''(98) = 0$

oder:

$a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = -5$
$a \cdot 98^3 + b \cdot 98^2 + c \cdot 98 + d = 8$
$a \cdot 210^3 + b \cdot 210^2 + c \cdot 210 + d = 20$
$6 \cdot a \cdot 98 + 2 \cdot b = 0$

b1) $55 = -10 \cdot \lg\left(f_F \cdot 10^{-\frac{43}{10}} + (1 - f_F) \cdot 10^{-\frac{65}{10}}\right)$

b2) Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$f_F = 0{,}0571...$

maximale Fensterfläche: $0{,}0571... \cdot 50 = 2{,}857...$

Die maximale Fensterfläche, die das geforderte minimale Gesamtschalldämmmaß erfüllt, beträgt rund 2,86 m^2.

c1) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$V(t) = C \cdot e^{-\frac{t}{3}} + 0{,}018$

t … Zeit in min
$V(t)$ … CO_2-Volumen zur Zeit t in m^3

oder:

allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differenzialgleichung $\frac{dV}{dt} + \frac{V}{3} = 0$:
$V_h(t) = C \cdot e^{-\frac{t}{3}}$

Lösungsansatz zur Ermittlung der partikulären Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung
$\frac{dV}{dt} + \frac{V}{3} = 0{,}006$:
$V_p(t) = a$
$0 + \frac{a}{3} = 0{,}006 \quad \Rightarrow \quad a = 0{,}018$
$V(t) = V_h(t) + V_p(t) = C \cdot e^{-\frac{t}{3}} + 0{,}018$

Auch eine Berechnung der allgemeinen Lösung der Differenzialgleichung mit einem anderen Ansatz (z. B. mit der Methode Trennen der Variablen*) ist als richtig zu werten.*

c2) $V(0) = 0{,}002 \cdot 45 = 0{,}09$
$0{,}09 = C \cdot e^{-\frac{0}{3}} + 0{,}018 \quad \Rightarrow \quad C = 0{,}072$
$\frac{1}{2} \cdot V(0) = 0{,}045 = 0{,}072 \cdot e^{-\frac{t}{3}} + 0{,}018$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$t = 2{,}94\ldots$
Nach etwa 2,9 min ist der ursprüngliche CO_2-Gehalt halbiert.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A1: für das richtige Erstellen der Gleichungen mithilfe der gegebenen Temperaturen
1 × A2: für das richtige Erstellen der Gleichung mithilfe der 2. Ableitung

b) 1 × A: für das richtige Erstellen der Gleichung zur Berechnung des relativen Flächenanteils f_F
1 × B: für die richtige Berechnung der maximalen Fensterfläche in m^2

c) 1 × B1: für die richtige Berechnung der allgemeinen Lösung der Differenzialgleichung
1 × B2: für das richtige Ermitteln derjenigen Zeit, nach der der ursprüngliche CO_2-Gehalt halbiert ist

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Energieverbrauch*

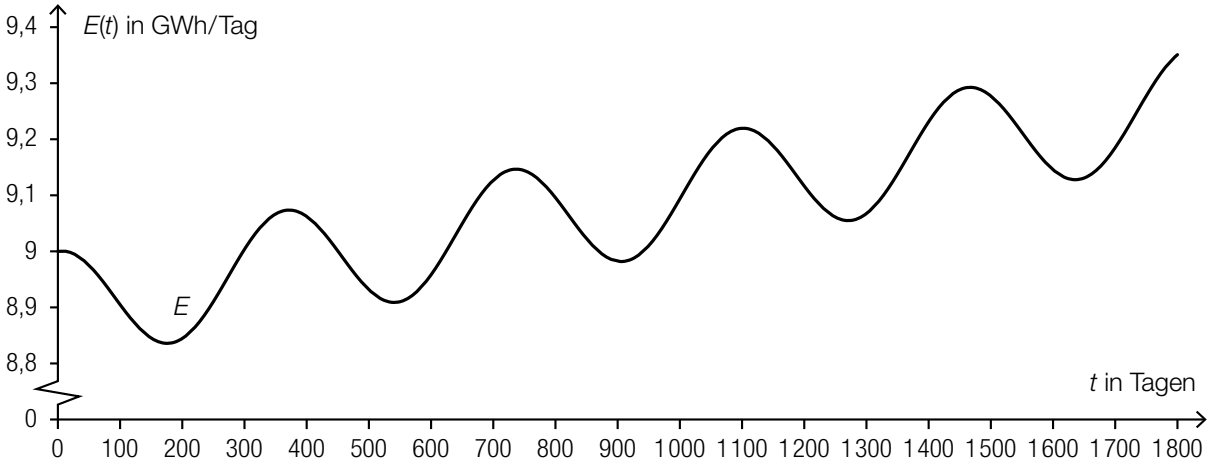
Aufgabennummer: B_214

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Der Energieverbrauch einer Großstadt unterliegt Schwankungen. Mit der Funktion E wird der voraussichtliche Energieverbrauch pro Tag für die nächsten 5 Jahre modelliert:

$$E(t) = 8{,}9 + 0{,}0002 \cdot t + 0{,}1 \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{365} + \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{mit} \quad t \geq 0$$

t ... Zeit in Tagen
$E(t)$ ... Energieverbrauch zur Zeit t in Gigawattstunden pro Tag (GWh/Tag)



a) 1) Lesen Sie aus dem oben dargestellten Graphen ab, nach wie vielen Tagen der Energieverbrauch ständig über 9,1 GWh pro Tag liegen wird.

2) Berechnen Sie die Minimumstelle der Funktion E im Zeitintervall [400; 700].

b) 1) Veranschaulichen Sie in der obigen Grafik diejenige trapezförmige Fläche, deren Flächeninhalt mittels $\frac{E(1\,400) + E(1\,500)}{2} \cdot 100$ berechnet wird.

c) 1) Schreiben Sie die reelle Funktion f mit $f(t) = \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{365} + \frac{\pi}{2}\right)$ mithilfe der Winkelfunktion Cosinus an.

$f(t) = \cos($ _____ $)$

* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

a1) Nach etwa 1 330 Tagen wird der Energieverbrauch ständig über 9,1 GWh pro Tag liegen.
Toleranzbereich: [1 300; 1 350]

a2) $E'(t) = 0$ mit $400 \le t \le 700$

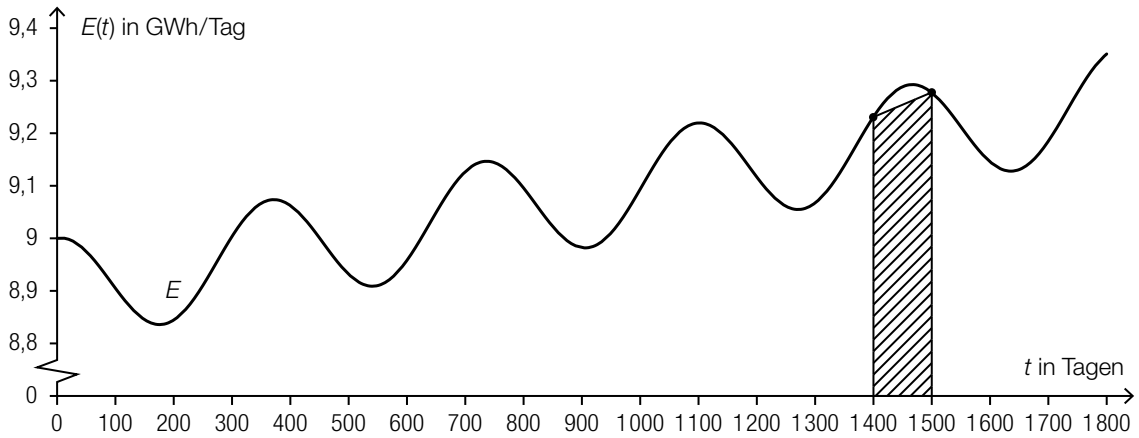
oder:

$0{,}0002 + \frac{\pi}{1\,825} \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{365} + \frac{\pi}{2}\right) = 0$ mit $400 \le t \le 700$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$t = 540{,}7...$

Dass es sich bei der berechneten Stelle um eine Minimumstelle handelt, ist aus der Grafik ersichtlich.

b1)



c1) $f(t) = \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{365}\right)$

Auch $\cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{365} + 2 \cdot k \cdot \pi\right)$ *mit einem beliebigen* $k \in \mathbb{Z}$ *ist als richtig zu werten.*

Lösungsschlüssel

a) 1 × C: für das richtige Ablesen im Toleranzbereich [1 300; 1 350]
1 × B: für die richtige Berechnung der Minimumstelle (Ein Nachweis, dass es sich bei der berechneten Stelle um eine Minimumstelle handelt, ist nicht erforderlich.)

b) 1 × A: für das richtige Veranschaulichen der trapezförmigen Fläche

c) 1 × A: für das richtige Anschreiben der Funktion *f* mithilfe der Winkelfunktion Cosinus

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Papierflieger*

Aufgabennummer: B_020

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Für die Flugeigenschaften eines Papierfliegers ist unter anderem der Strömungskoeffizient c mitbestimmend.

$$c = \frac{F_W}{\frac{1}{2} \cdot \varrho \cdot v^2 \cdot A}$$

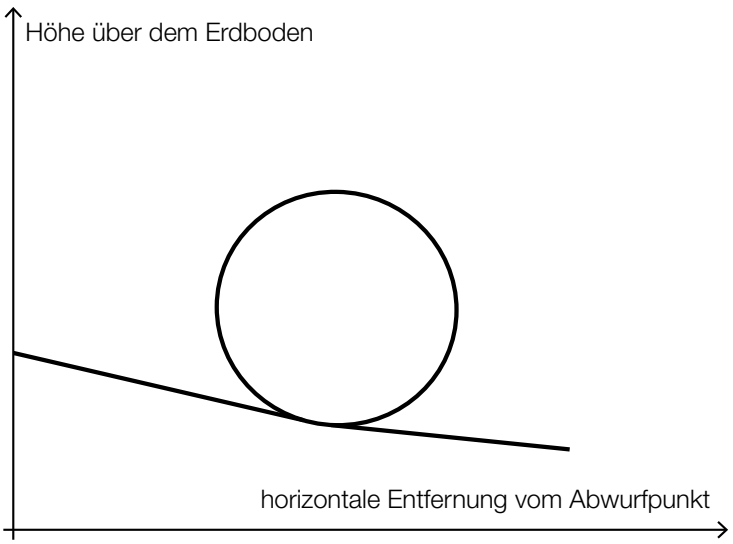
c ... Strömungskoeffizient
F_W ... Strömungswiderstand
A ... Flächeninhalt der angeströmten Fläche
v ... Strömungsgeschwindigkeit
ϱ ... Dichte der Luft

1) Formen Sie die obige Formel nach F_W um.

$F_W =$ _____

2) Beschreiben Sie, wie sich F_W verändert, wenn v verdoppelt wird und alle anderen Größen unverändert bleiben.

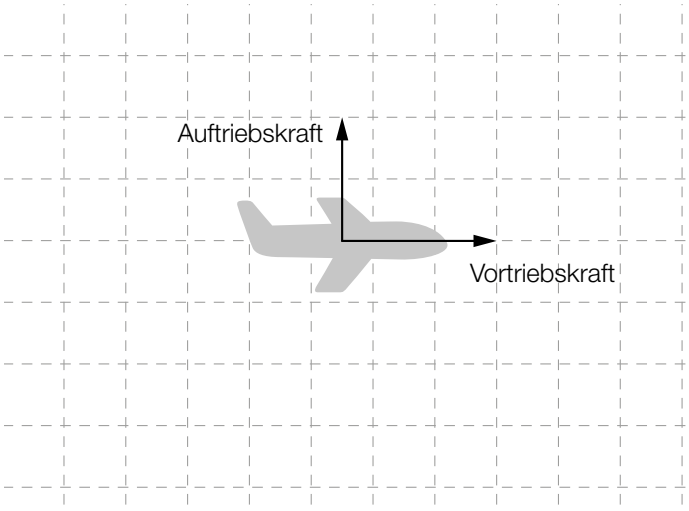
b) Im nachstehenden Diagramm ist modellhaft die Flugbahn eines Papierfliegers dargestellt, wenn dieser einen sogenannten Looping fliegt.



1) Begründen Sie, warum die dargestellte Flugbahn nicht als Funktionsgraph aufgefasst werden kann.

* ehemalige Klausuraufgabe

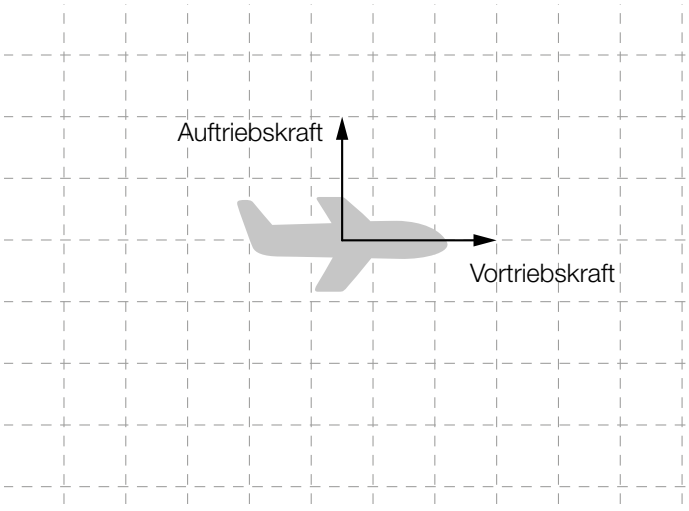
c) Bei einem angetriebenen Flugzeug wirken unter anderem die Auftriebskraft und die Vortriebskraft ein. In der nachstehenden Abbildung sind die zugehörigen Kraftvektoren als Pfeile dargestellt.



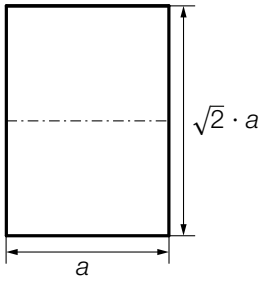
1) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung die aus Auftriebskraft und Vortriebskraft resultierende Kraft als Pfeil ein.

Bei einem angetriebenen Flugzeug gilt während einer Flugphase:
Der Strömungswiderstand ist der Gegenvektor zur Vortriebskraft.
Die Schwerkraft ist der Gegenvektor zur Auftriebskraft.

2) Zeichnen Sie in der nachstehenden Abbildung den Vektor für die Schwerkraft und den Vektor für den Strömungswiderstand als Pfeile ein.



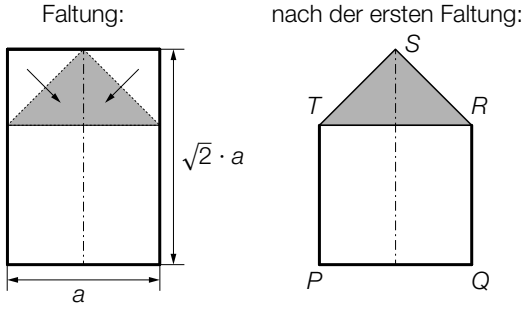
d) Zum Falten von Papierfliegern wird sehr oft Papier in einem DIN-Format verwendet. Für diese Formate gilt, dass die Seitenlängen im Verhältnis $1 : \sqrt{2}$ stehen (siehe nachstehende Abbildung).



Ein solches Papier wird entlang der Blattmitte (siehe strichpunktiert eingezeichnete Linie) gefaltet.

1) Zeigen Sie, dass die Seitenlängen des dabei entstandenen Rechtecks wieder im Verhältnis $1 : \sqrt{2}$ stehen.

In der nachstehenden Abbildung ist der erste Faltschritt für einen Papierflieger aus einem Papier in einem DIN-Format dargestellt. (Die eingezeichnete strichpunktierte Linie verläuft entlang der Mitte.)



2) Begründen Sie, warum das in der obigen Abbildung grau markierte Dreieck *RST* rechtwinkelig ist.

Der Papierflieger soll nach der ersten Faltung bemalt werden.

3) Erstellen Sie mithilfe von *a* eine Formel zur Berechnung des Flächeninhalts *A* des Fünfecks *PQRST*.

$A =$ _____

Bei Papier im DIN-A4-Format ist die kürzere Seite 210 mm lang.

4) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Fünfecks *PQRST* für ein Papier im DIN-A4-Format in cm^2.

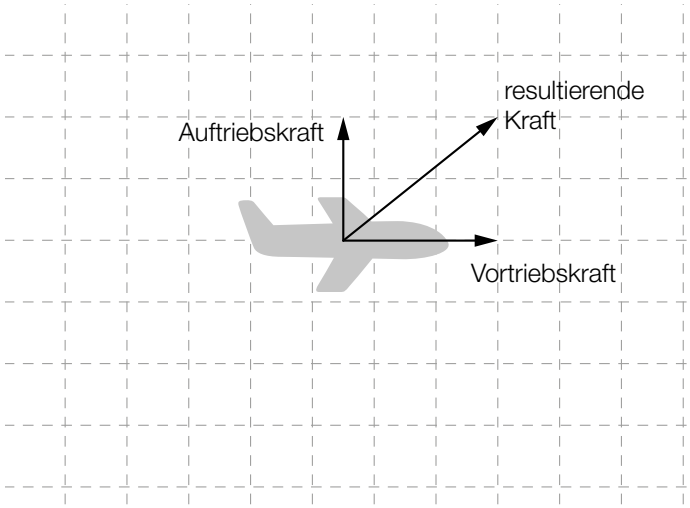
Möglicher Lösungsweg

a1) $F_W = \frac{1}{2} \cdot c \cdot \varrho \cdot v^2 \cdot A$

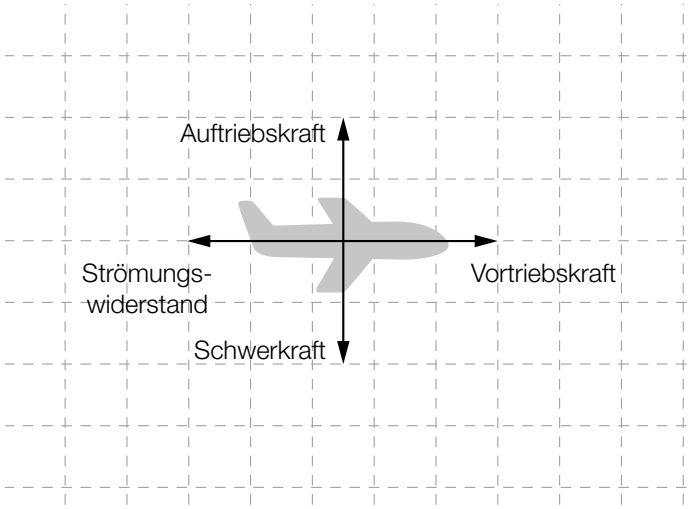
a2) Wird v verdoppelt, so wird F_W vervierfacht.

b1) Dies ist keine Funktion, weil man nicht jeder horizontalen Entfernung vom Abwurfpunkt genau eine Höhe über dem Erdboden zuordnen kann.

c1)



c2)



Sind die Vektoren als Pfeile ausgehend von anderen Anfangspunkten eingezeichnet, so ist dies ebenfalls als richtig zu werten.

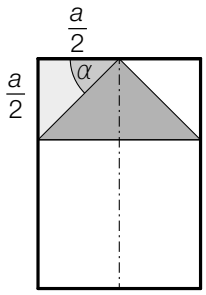
d1) Wird das Papier so wie eingezeichnet gefaltet, so ergibt sich für die Seitenlängen des entstehenden Rechtecks:

längere Seite: a

kürzere Seite: $\frac{\sqrt{2} \cdot a}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$

Die beiden Seitenlängen stehen also im Verhältnis $\frac{a}{\sqrt{2}} : a = 1 : \sqrt{2}$.

d2)



Da das kleine linke Dreieck (siehe obige Skizze) gleichschenkelig und rechtwinkelig ist, gilt für den eingezeichneten Winkel $\alpha = 45°$. Dasselbe gilt auch im kongruenten Dreieck rechts, und somit gilt für den Winkel an der Spitze des markierten Dreiecks:
$180° - 2 \cdot \alpha = 90°$.

d3) $A = (a \cdot \sqrt{2} \cdot a) - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \sqrt{2} \cdot a^2 - \frac{a^2}{4}$

d4) $A = \sqrt{2} \cdot 21^2 - \frac{21^2}{4} = 513{,}41...$

Der Flächeninhalt der zu bemalenden Fläche beträgt rund 513 cm^2.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für das richtige Umformen der Formel
1 × C: für die richtige Beschreibung

b) 1 × D: für die richtige Begründung

c) 1 × A1: für das richtige Einzeichnen der resultierenden Kraft als Pfeil
1 × A2: für das richtige Einzeichnen der beiden Gegenvektoren als Pfeile

d) 1 × D1: für den richtigen Nachweis
1 × D2: für die richtige Begründung
1 × A: für das richtige Erstellen der Formel zur Berechnung des Flächeninhalts A
1 × B: für die richtige Berechnung des Flächeninhalts in cm^2

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Schokoriegel*

Aufgabennummer: B_107

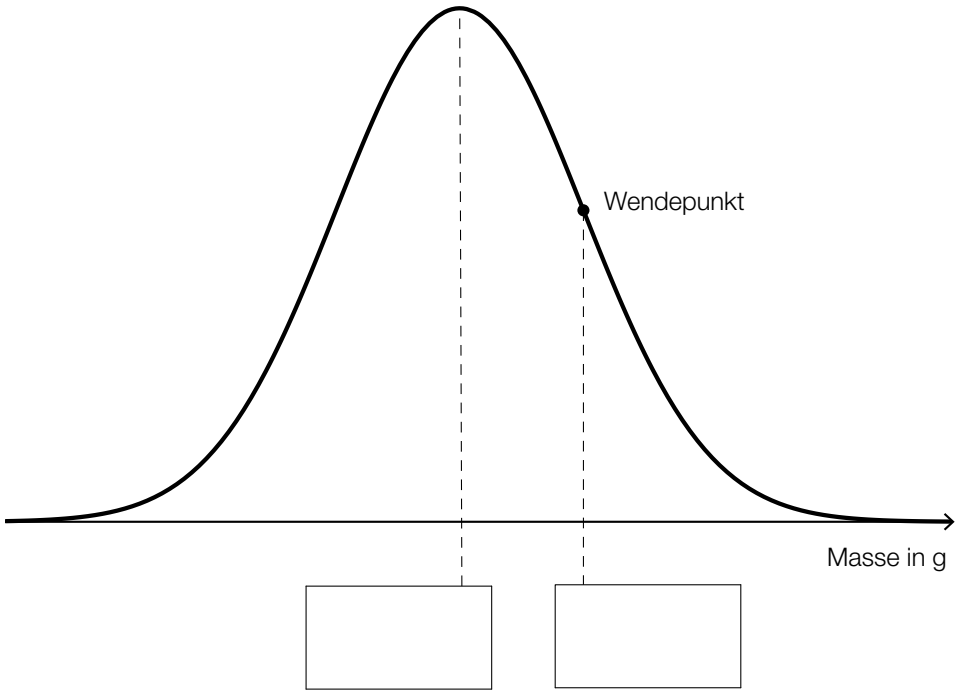
Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Schokoriegel wurden bisher in Packungen zu 5 Stück zu einem Preis von € 1,79 pro Packung verkauft. Nun werden sie in Packungen zu 6 Stück zu einem Preis von € 2,49 pro Packung verkauft.

1) Berechnen Sie, um wie viel Prozent ein einzelner Schokoriegel in der neuen Packung teurer ist als ein einzelner Schokoriegel in der alten Packung.

b) Die Masse von bestimmten Schokoriegeln ist annähernd normalverteilt mit einem Erwartungswert von 48 g und einer Standardabweichung von 1,3 g.

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der zugehörigen Dichtefunktion dargestellt.



1) Tragen Sie in der obigen Abbildung die fehlenden Zahlen in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.

2) Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Masse eines zufällig ausgewählten Schokoriegels weniger als 45 g beträgt.

3) Berechnen Sie, welche Masse ein zufällig ausgewählter Schokoriegel mindestens hat, wenn er zu den schwersten 20 % der Schokoriegel zählt.

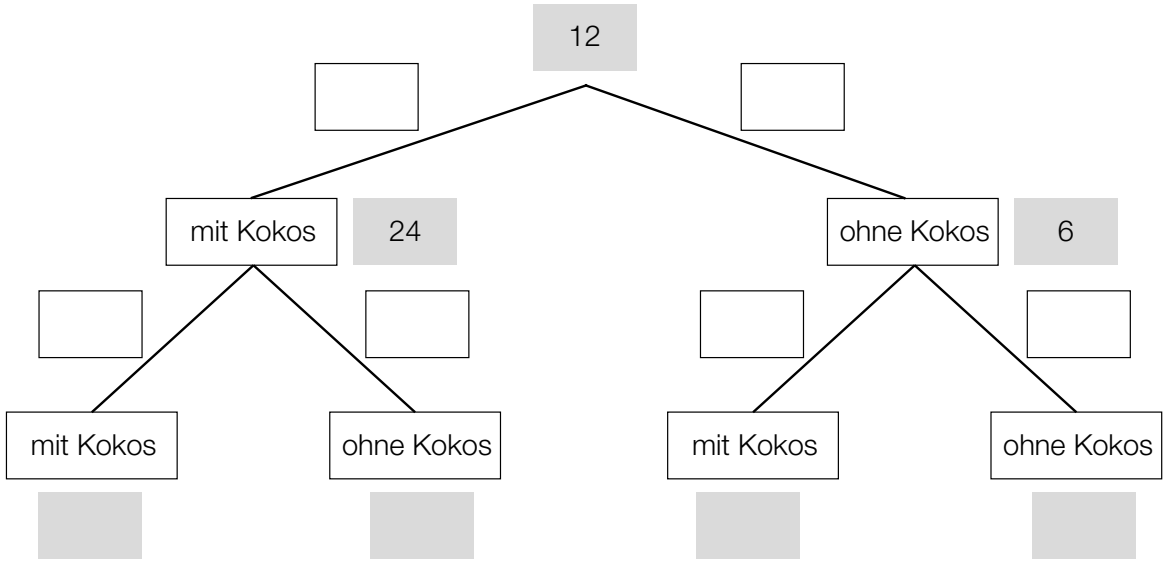
* ehemalige Klausuraufgabe

c) In einer Schale sind zwei verschiedene Sorten Schokoriegel: 5 Riegel mit Kokos, 10 Riegel ohne Kokos.

Man bietet Ihnen folgendes Spiel an:

Sie erhalten 12 Spielmünzen. Sie müssen ohne Hinsehen 2-mal hintereinander einen Schokoriegel aus der Schale ziehen und behalten. Jedes Mal, wenn Sie einen Schokoriegel mit Kokos ziehen, wird die Anzahl Ihrer Spielmünzen verdoppelt, andernfalls wird sie halbiert.

1) Tragen Sie im nachstehenden Baumdiagramm die Wahrscheinlichkeiten in die weißen Kästchen ein.
2) Tragen Sie im nachstehenden Baumdiagramm die Anzahl Ihrer Spielmünzen am Ende des Spiels in die grauen Kästchen ein.



Im Folgenden betrachtet man die Zufallsvariable X:

X … Anzahl Ihrer Spielmünzen am Ende des Spiels

3) Tragen Sie in der nachstehenden Tabelle alle auftretenden Werte für X und die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten ein.

Anzahl Ihrer Spielmünzen am Ende des Spiels			
Wahrscheinlichkeit			

4) Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsvariablen X.

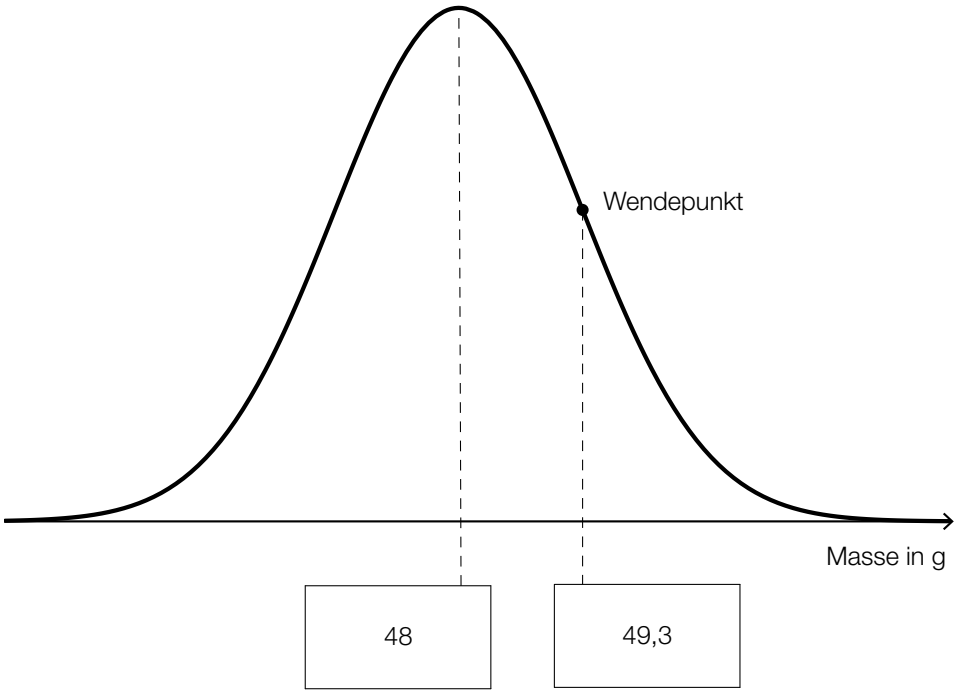
Möglicher Lösungsweg

a1) Preis pro Schokoriegel:

alte Packung: 1,79 : 5 = 0,358
neue Packung: 2,49 : 6 = 0,415

0,415 : 0,358 = 1,159...
Die Preiserhöhung beträgt rund 16 %.

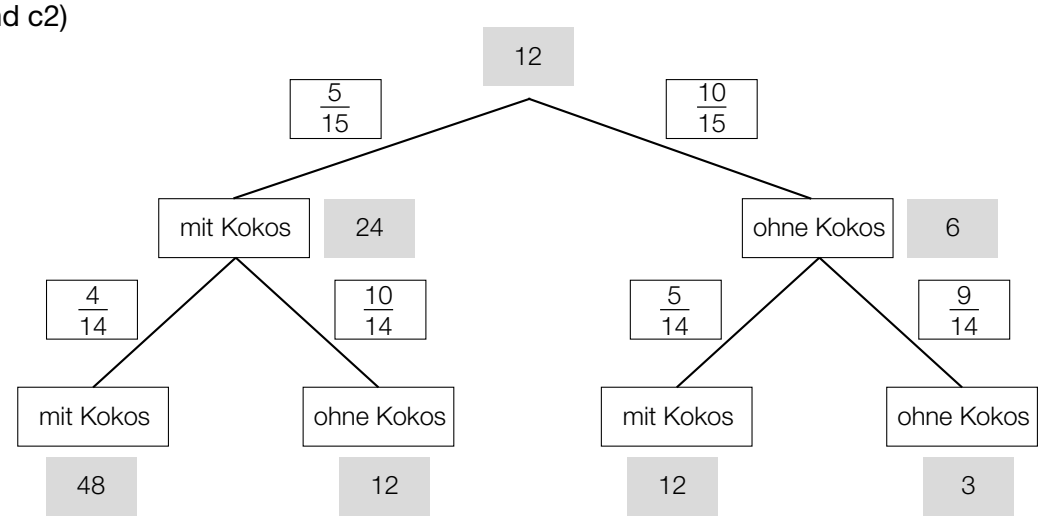
b1)



b2) X ... Masse in g
Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$P(X < 45) = 0{,}01050\ldots$
Die Wahrscheinlichkeit beträgt rund 1,05 %.

b3) $P(X \leq a) = 0{,}80$
Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$a = 49{,}09\ldots$
Die Masse beträgt rund 49,1 g.

c1 und c2)



c3)

Anzahl Ihrer Spielmünzen am Ende des Spiels	48	12	3
Wahrscheinlichkeit	$\frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} = \frac{2}{21}$	$2 \cdot \frac{5}{15} \cdot \frac{10}{14} = \frac{10}{21}$	$\frac{10}{15} \cdot \frac{9}{14} = \frac{3}{7}$

c4) $E(X) = 48 \cdot \frac{2}{21} + 12 \cdot \frac{10}{21} + 3 \cdot \frac{3}{7} = \frac{81}{7} = 11{,}57...$

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für die richtige Berechnung des Prozentsatzes

b) 1 × A: für das richtige Eintragen der beiden fehlenden Zahlen
1 × B1: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit
1 × B2: für die richtige Berechnung der Mindestmasse

c) 1 × A1: für das richtige Eintragen der Wahrscheinlichkeiten
1 × A2: für das richtige Eintragen der Anzahl der Spielmünzen am Ende des Spiels
1 × A3: für das richtige Eintragen der Werte für X und der zugehörigen Wahrscheinlichkeiten
1 × B: für die richtige Berechnung des Erwartungswerts

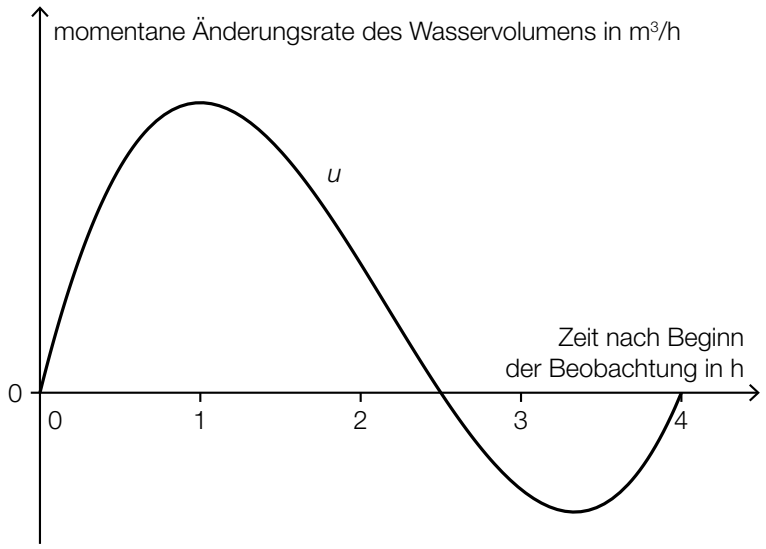
Stausee*

Aufgabennummer: A_271

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Das Wasservolumen in einem Stausee ändert sich aufgrund von verschiedenen Einflüssen, wie z. B. Niederschlägen, Zuflüssen und Wasserentnahmen.

Zu Beginn einer Beobachtung beträgt das Wasservolumen im Stausee $1{,}5 \cdot 10^8$ m³. Die momentane Änderungsrate des Wasservolumens kann im Zeitintervall [0; 4] näherungsweise durch eine Funktion u beschrieben werden, deren Graph in der nachstehenden Abbildung dargestellt ist.



1) Interpretieren Sie unter Angabe der entsprechenden Einheit, was mit dem folgenden Ausdruck im gegebenen Sachzusammenhang berechnet wird:
$1{,}5 \cdot 10^8 + \int_0^4 u(t)\,dt$

2) Argumentieren Sie mithilfe des Funktionsgraphen, dass das Wasservolumen im Stausee im Zeitintervall [1; 2] zunimmt.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Der zeitliche Verlauf des Wasserstands eines Stausees kann für einen bestimmten Zeitraum näherungsweise durch die Funktion h beschrieben werden:

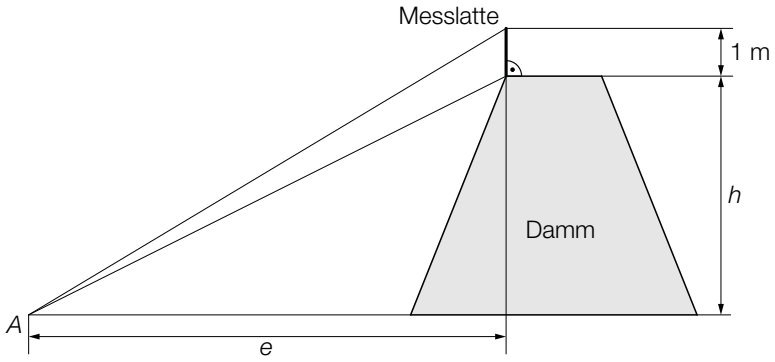
$h(t) = -6 \cdot 10^{-6} \cdot t^3 + 0{,}001 \cdot t^2 + 0{,}005 \cdot t + 5 \quad \text{mit} \quad 0 \le t \le 150$

t ... Zeit in h
$h(t)$ ... Wasserstand zur Zeit t in m

Ein ufernaher Parkplatz wird gesperrt, solange der Wasserstand 9 m oder höher ist.

1) Berechnen Sie die Dauer der Sperre.

c) Für den Hochwasserschutz wurde an einem Ufer ein Damm aufgeschüttet. Die Höhe des Damms wird mithilfe einer 1 m langen Messlatte ermittelt. Dazu werden von einem Punkt A aus die Enden der Messlatte anvisiert und die Höhenwinkel $\alpha = 40{,}0°$ und $\beta = 33{,}7°$ gemessen (siehe nachstehende nicht maßstabgetreue Skizze).



1) Beschriften Sie in der obigen Skizze die Winkel α und β.

Für die Berechnung der Dammhöhe h werden folgende Formeln verwendet:

$$\tan(\alpha) = \frac{h + 1}{e}$$
$$\tan(\beta) = \frac{h}{e}$$

2) Berechnen Sie die Dammhöhe h.

Möglicher Lösungsweg

a1) Mit dem Ausdruck wird das Wasservolumen in Kubikmetern im Stausee 4 Stunden nach Beginn der Beobachtung berechnet.

a2) Die Funktionswerte von u sind im Zeitintervall [1; 2] positiv, daher nimmt das Wasservolumen zu.

b1) $h(t) = 9$

oder:

$-6 \cdot 10^{-6} \cdot t^3 + 0{,}001 \cdot t^2 + 0{,}005 \cdot t + 5 = 9$

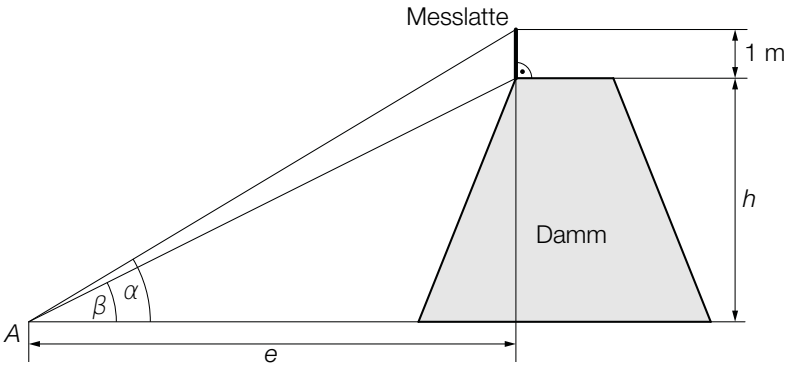
Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$t_1 = 85{,}7...$, $t_2 = 137{,}4...$, ($t_3 = -56{,}5...$)

$t_2 - t_1 = 51{,}6...$

Der Parkplatz ist für etwa 52 Stunden gesperrt.

c1)



c2) $\tan(40°) = \frac{h + 1}{e} \quad \Rightarrow \quad h = e \cdot \tan(40°) - 1$

$\tan(33{,}7°) = \frac{h}{e} \quad \Rightarrow \quad h = e \cdot \tan(33{,}7°)$

$e \cdot \tan(33{,}7°) = e \cdot \tan(40°) - 1 \quad \Rightarrow \quad e = 5{,}80...$

$h = e \cdot \tan(33{,}7°) = 3{,}87...$

Die Dammhöhe beträgt rund 3,9 m.

Lösungsschlüssel

a) 1 × C: für die richtige Interpretation im gegebenen Sachzusammenhang unter Angabe der Einheit
1 × D: für die richtige Argumentation mithilfe des Funktionsgraphen

b) 1 × A: für den richtigen Ansatz
1 × B: für die richtige Berechnung der Zeitdauer

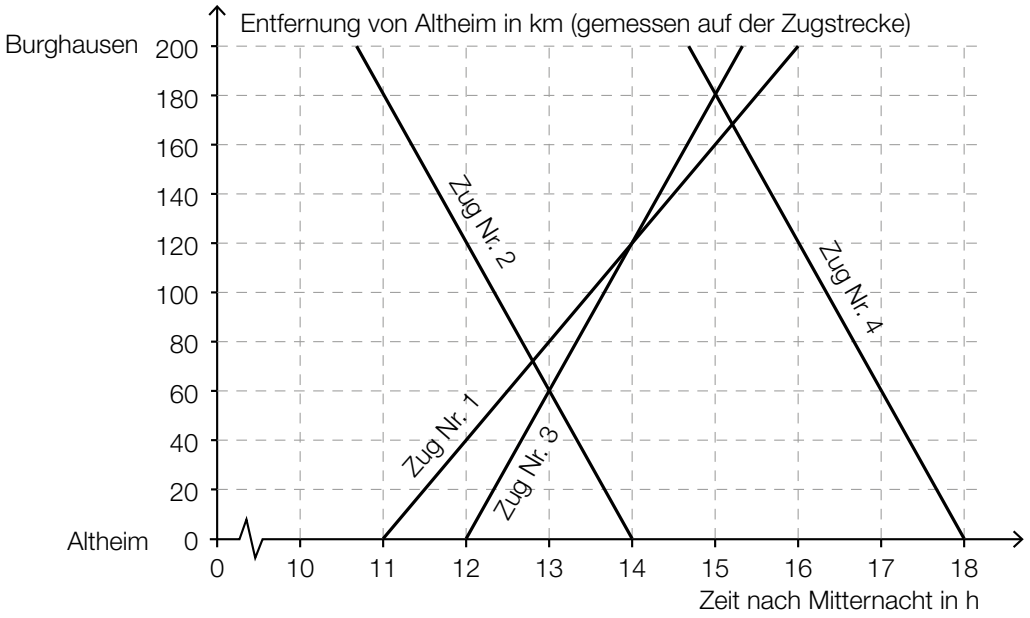
c) 1 x C: für das richtige Beschriften der beiden Winkel
1 x B: für die richtige Berechnung der Dammhöhe h

Eisenbahn*

Aufgabennummer: A_270

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

In der nachstehenden Abbildung ist ein sogenannter Bildfahrplan für Züge zwischen Altheim und Burghausen dargestellt. Die Züge fahren dabei – vereinfacht betrachtet – mit konstanter Geschwindigkeit.



a) Zug Nr. 3 fährt um 12:00 Uhr in Altheim ab.
Zug Nr. 4 fährt um 14:40 Uhr in Burghausen ab.
Auf der Fahrt zu ihren Zielbahnhöfen begegnen die beiden Züge einander.

1) Lesen Sie aus dem obigen Bildfahrplan ab, wann und wie weit von Burghausen entfernt die beiden Züge einander begegnen.

b) 1) Argumentieren Sie, dass die Züge Nr. 2 und Nr. 4 mit der gleichen Geschwindigkeit fahren.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Die Fahrt eines Zuges Nr. 5 soll im Bildfahrplan durch einen Ausschnitt des Graphen der Funktion s beschrieben werden.

$s(t) = -80 \cdot t + 1\,160$

t ... Zeit nach Mitternacht in h
$s(t)$ ... Entfernung von Altheim zur Zeit t in km

1) Bestimmen Sie die Uhrzeit, zu der Zug Nr. 5 in Burghausen abfährt.

2) Zeichnen Sie im obigen Bildfahrplan den Funktionsgraphen für s zwischen Altheim und Burghausen ein.

d) Eine Eisenbahnstrecke hat eine Länge von 200 km. Nach einer Sanierung der Gleise können die Züge mit einer um 10 km/h höheren Geschwindigkeit fahren. Die Fahrzeit wird dadurch um eine halbe Stunde vermindert.
Zur Verdeutlichung sind die Angaben in der nachstehenden Tabelle dargestellt.
t ist dabei die Fahrzeit vor der Sanierung in Stunden.

	Streckenlänge in km	Geschwindigkeit in km/h	Fahrzeit in h
nach der Sanierung	200	$\left(\frac{200}{t} + 10\right)$	$\left(t - \frac{1}{2}\right)$

1) Berechnen Sie t.

Möglicher Lösungsweg

a1) Die beiden Züge begegnen einander um 15:00 Uhr, 20 km von Burghausen entfernt.

b1) Die beiden Züge benötigen für die Strecke Burghausen – Altheim gleich lang, sie fahren also mit der gleichen Geschwindigkeit.

oder:

Die zugehörigen Geraden im Bildfahrplan haben die gleiche Steigung.

c1) $s(t) = 200$

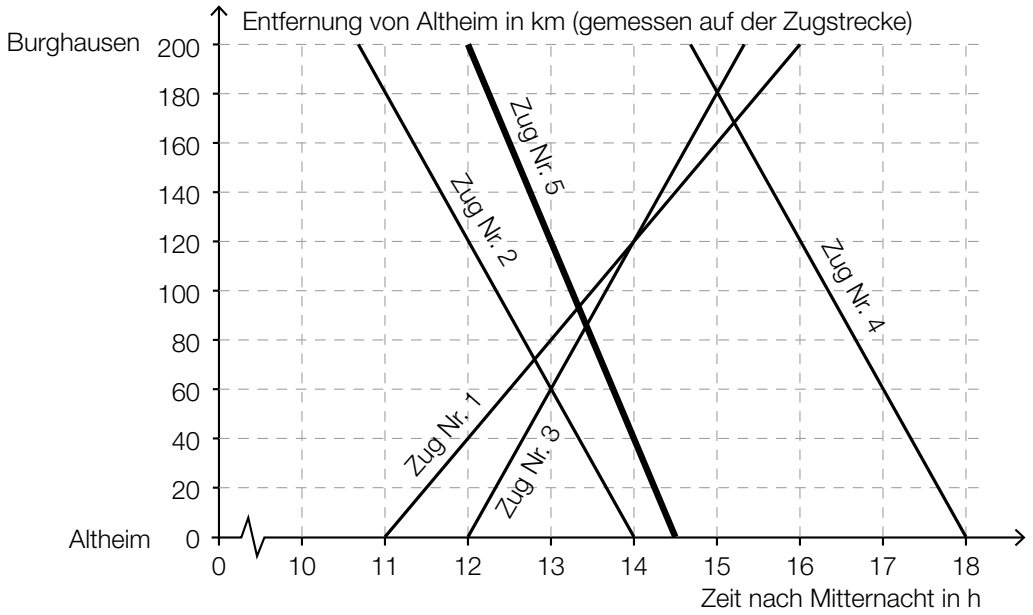
oder:

$-80 \cdot t + 1\,160 = 200$

$t = \frac{200 - 1\,160}{-80} = 12$

Zug Nr. 5 fährt um 12 Uhr in Burghausen ab.

c2)



d1) $200 = \left(\frac{200}{t} + 10\right) \cdot \left(t - \frac{1}{2}\right)$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$t_1 = 3{,}422...$
$(t_2 = -2{,}922...)$
Die Fahrzeit vor der Sanierung betrug etwa 3,42 h.

Lösungsschlüssel

a) 1 × C: für das richtige Ablesen der Uhrzeit und der Entfernung von Burghausen

b) 1 × D: für die richtige Argumentation

c) 1 × B: für das richtige Bestimmen der Abfahrtszeit von Zug Nr. 5
1 × A: für das richtige Einzeichnen des Funktionsgraphen im Bildfahrplan

d) 1 × B: für die richtige Berechnung von t

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Impfen und Auffrischen*

Aufgabennummer: A_269

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Mithilfe der Konzentration von Antikörpern im Blut wird bestimmt, ob nach einer Impfung ausreichender Impfschutz besteht. Diese Konzentration wird oft als Antikörperwert bezeichnet und in „Internationalen Einheiten pro Liter“ (IE/L) angegeben.

a) Bei Anna wurde unmittelbar nach einer Impfung ein Antikörperwert von 110 IE/L gemessen. Der Antikörperwert sinkt kontinuierlich und nimmt bei Anna pro Jahr um 20 % in Bezug auf das jeweils vorhergehende Jahr ab.

Der Antikörperwert in Annas Blut (in IE/L) soll in Abhängigkeit von der Zeit t (in Jahren) durch eine Funktion A beschrieben werden.

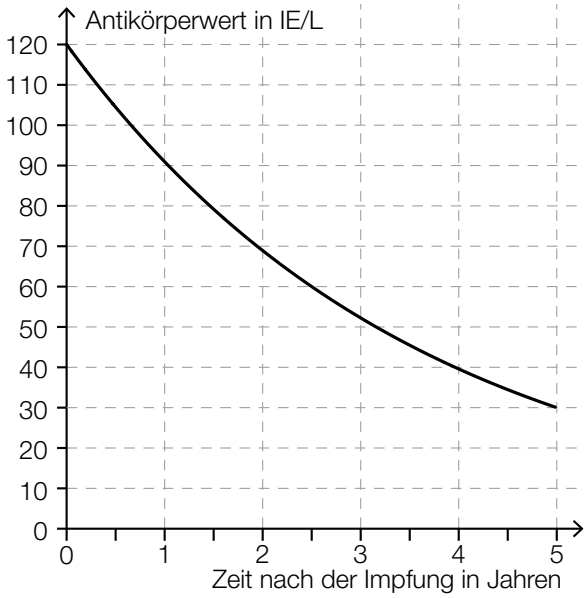
1) Erstellen Sie eine Gleichung der Funktion A. Wählen Sie $t = 0$ für den Zeitpunkt der Messung.

Ab einem Antikörperwert von 10 IE/L ist der Impfschutz nicht mehr gegeben.

2) Berechnen Sie, nach welcher Zeit der Impfschutz bei Anna nicht mehr gegeben ist.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Die nachstehende Abbildung zeigt näherungsweise den zeitlichen Verlauf des Antikörperwerts von Bernhard nach einer Impfung.



1) Lesen Sie die Halbwertszeit $T_{1/2}$ ab.

$T_{1/2}$ = _____ Jahre

Bei Sandra beträgt der Antikörperwert unmittelbar nach der Impfung 80 IE/L. Ihr Antikörperwert sinkt exponentiell mit derselben Halbwertszeit wie jener von Bernhard.

2) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den zeitlichen Verlauf von Sandras Antikörperwert im Zeitintervall [0; 5] ein.

Möglicher Lösungsweg

a1) $A(t) = 110 \cdot 0{,}8^t$

t ... Zeit in Jahren
$A(t)$ ... Antikörperwert zur Zeit t in IE/L

a2) $A(t) = 10$

oder:

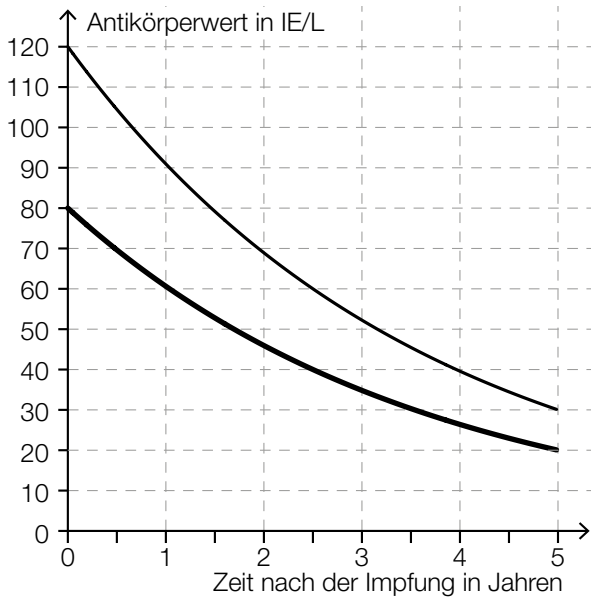
$110 \cdot 0{,}8^t = 10$

Berechnung mittels Technologieeinsatz: $t = 10{,}745...$

Bei Anna ist der Impfschutz nach etwa 10,75 Jahren nicht mehr gegeben.

b1) $T_{1/2} = 2{,}5$ Jahre
Toleranzbereich: [2,3; 2,7]

b2)



Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Erstellen der Funktionsgleichung
1 × B: für die richtige Berechnung derjenigen Zeit, nach der der Impfschutz nicht mehr gegeben ist

b) 1 × C: für das richtige Ablesen der Halbwertszeit im Toleranzbereich [2,3; 2,7]
1 × A: für das richtige Einzeichnen des zeitlichen Verlaufs von Sandras Antikörperwert im Zeitintervall [0; 5] (Dabei müssen die Funktionswerte zu den Zeitpunkten $t = 0$, $t = 2{,}5$ und $t = 5$ richtig eingezeichnet sein.)

Kugelstoßen (1)

Aufgabennummer: A_060

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Beim Kugelstoßen kann die Flugbahn der Kugel näherungsweise durch eine Funktion 2. Grades beschrieben werden.
Den österreichischen Rekord beim Kugelstoßen hält Klaus Bodenmüller (Linz, 13. Juni 1987).
Die folgende Funktionsgleichung beschreibt näherungsweise die Flugbahn der Kugel bei seinem Rekord:

$$h(x) = -0{,}08769 \cdot x^2 + 1{,}7269 \cdot x + 2$$

$h(x)$ … Höhe in Metern (m) an der Stelle x
x … horizontale Entfernung von der Abwurfstelle in Metern (m), $x \geq 0$

a) – Berechnen Sie die Wurfweite, die den österreichischen Rekord darstellt, auf 2 Nachkommastellen genau.

b) – Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung des Steigungswinkels α an einer beliebigen Stelle x beim Aufsteigen.

$\alpha =$ _____

c) – Entscheiden Sie, ob die nachstehend angegebene Beziehung gilt, und begründen Sie Ihre Antwort.

Abstoßwinkel = – Aufprallwinkel

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Wurfweite:

$h(x) = 0 \Rightarrow -0{,}08769 \cdot x^2 + 1{,}7269 \cdot x + 2 = 0$
Nullstelle: $x = 20{,}790\ldots$
Die Wurfweite beträgt daher rund 20,79 m.

b) $h'(x) = -0{,}17538 \cdot x + 1{,}7269$ ist der Anstieg k der Kurve an der Stelle x.
$\tan(\alpha) = k$
$\alpha = \arctan(-0{,}17538 \cdot x + 1{,}7269)$

c) Der Graph einer quadratischen Funktion ist symmetrisch bezüglich einer Senkrechten durch den Hochpunkt. Da nicht aus der Höhe $h = 0$ m abgeschossen wird, liegen der Abstoßpunkt und der Aufprallpunkt nicht gleich weit entfernt von der Symmetrieachse. Die Winkelzahlenwerte sind daher verschieden.

Eine Erklärung durch die Berechnung der Winkel im Abschuss- und Aufprallpunkt wäre auch möglich.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 4 Analysis
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) 4 Analysis

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) A Modellieren und Transferieren
c) D Argumentieren und Kommunizieren

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) —
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2
c) 2

Thema: Sport

Quelle: http://de.wikipedia.org/wiki/Kugelstoßen

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Kugelstoßen (2)*

Aufgabennummer: A_268

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Kugelstoßen ist eine Disziplin bei den Olympischen Sommerspielen.
Eine Metallkugel muss so weit wie möglich aus einem Kreis in einen vorgegebenen Aufschlagbereich gestoßen werden.

a) Im Jahr 1948 wurde bei den Männern ein neuer Weltrekord mit der Weite 17,68 m aufgestellt.

Eine Faustregel besagt, dass sich seit 1948 der Weltrekord bei den Männern alle 2,5 Jahre um 34 cm verbessert hat. Die Weltrekordweite (in Metern) soll gemäß dieser Faustregel in Abhängigkeit von der Zeit t (in Jahren) durch eine lineare Funktion f beschrieben werden.

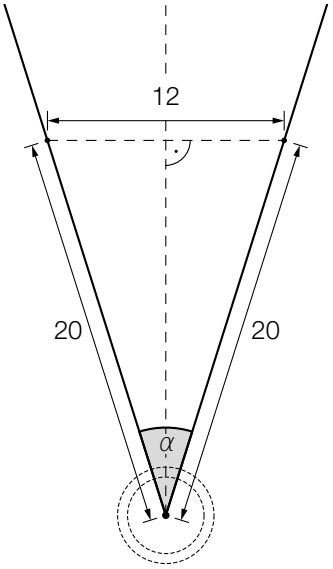
1) Erstellen Sie eine Gleichung der Funktion f. Wählen Sie $t = 0$ für das Jahr 1948.

Im Jahr 1988 betrug der Weltrekord bei den Männern 23,06 m.

2) Ermitteln Sie für das Jahr 1988 die Abweichung des Funktionswerts von f von dieser Weltrekordweite.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Der Aufschlagbereich ist in der nachstehenden Abbildung in der Ansicht von oben dargestellt (alle Angaben in Metern).



1) Berechnen Sie den in der obigen Abbildung markierten Winkel α.

2) Markieren Sie in der obigen Abbildung diejenige Strecke, deren Länge durch den folgenden Ausdruck berechnet werden kann: $\frac{6}{\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$

c) Die Bahnkurve einer gestoßenen Kugel lässt sich näherungsweise durch den Graphen der quadratischen Funktion h beschreiben:

$h(x) = -0{,}05 \cdot x^2 + 0{,}75 \cdot x + 2$ mit $x \geq 0$

x ... horizontale Entfernung der Kugel von der Abstoßstelle in m
$h(x)$ ... Höhe der Kugel über dem Boden bei der horizontalen Entfernung x in m

1) Geben Sie an, in welcher Höhe die Kugel abgestoßen wird.

2) Ermitteln Sie, in welcher horizontalen Entfernung von der Abstoßstelle die Kugel auf dem Boden aufschlägt.

d) Für die bei den Männern verwendeten Kugeln gelten folgende Vorgaben:

- Die Masse beträgt 7 257 g.
- Der Durchmesser der Kugel liegt zwischen 11 cm und 13 cm.

Eine Messing-Eisen-Legierung hat eine Dichte von 8,2 g/cm³.
Die Masse m ist das Produkt aus Volumen V und Dichte ϱ, also $m = V \cdot \varrho$.

1) Überprüfen Sie nachweislich, ob man aus dieser Messing-Eisen-Legierung eine Kugel herstellen kann, die diese Vorgaben erfüllt.

Möglicher Lösungsweg

a1) Steigung k der linearen Funktion f: $k = \frac{0{,}34}{2{,}5} = 0{,}136$

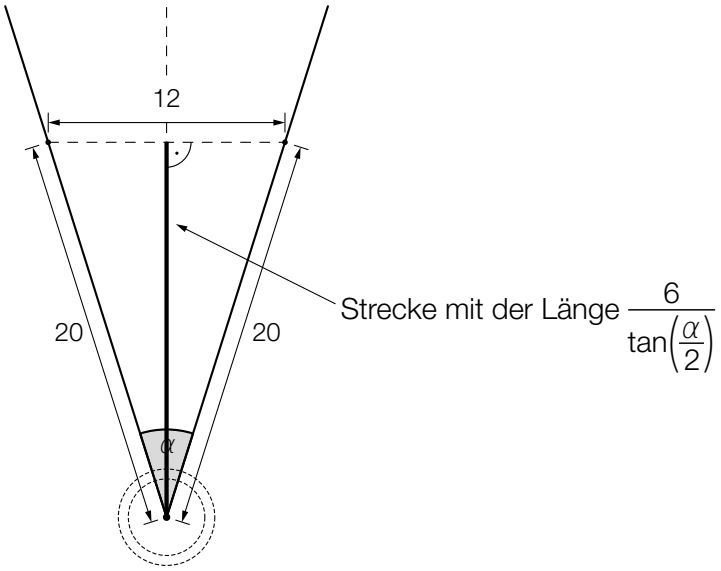
$f(t) = 0{,}136 \cdot t + 17{,}68$

t ... Zeit in Jahren
$f(t)$ ... Weltrekordweite zur Zeit t in m

a2) $f(40) = 23{,}12$
Abweichung: $23{,}12 - 23{,}06 = 0{,}06$
Die Abweichung beträgt 0,06 m.

b1) $\alpha = 2 \cdot \arcsin\left(\frac{6}{20}\right) = 34{,}915...° \approx 34{,}92°$

b2)



c1) Die Kugel wird in einer Höhe von 2 m abgestoßen.

c2) $h(x) = 0$

oder:

$-0{,}05 \cdot x^2 + 0{,}75 \cdot x + 2 = 0$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$x_1 = 17{,}310...$
$(x_2 = -2{,}310...)$
Die Kugel schlägt in einer horizontalen Entfernung von rund 17,31 m auf dem Boden auf.

d1) $7\,257 = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi \cdot 8{,}2$

$r = \sqrt[3]{\frac{7\,257 \cdot 3}{8{,}2 \cdot 4 \cdot \pi}} = 5{,}95...$

$d = 2 \cdot r = 11{,}91...$

Der Durchmesser einer derartigen Kugel beträgt rund 11,9 cm und liegt im angegebenen Bereich.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Erstellen der Funktionsgleichung
1 × B: für das richtige Ermitteln der Abweichung

b) 1 × B: für die richtige Berechnung des Winkels α
1 × C: für das richtige Markieren der Strecke

c) 1 × C: für das richtige Angeben der Abstoßhöhe
1 × B: für das richtige Ermitteln der Stoßweite

d) 1 × D: für die richtige nachweisliche Überprüfung

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Pauschalreisen*

Aufgabennummer: A_267

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein Reisebüro vermittelt Plätze für Pauschalreisen nach Kroatien.

a) Es wird angenommen, dass die vermittelten Plätze unabhängig voneinander mit einer Wahrscheinlichkeit von 5 % nicht in Anspruch genommen werden. Alle 100 zur Verfügung stehenden Plätze werden vermittelt.

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens 4 der vermittelten Plätze nicht in Anspruch genommen werden.

2) Beschreiben Sie ein mögliches Ereignis E im gegebenen Sachzusammenhang, dessen Wahrscheinlichkeit folgendermaßen berechnet werden kann:
$\binom{100}{5} \cdot 0{,}05^5 \cdot 0{,}95^{95}$

b) Es wird angenommen, dass die vermittelten Plätze unabhängig voneinander mit einer Wahrscheinlichkeit von 5 % nicht in Anspruch genommen werden. Es werden 102 Plätze vermittelt, obwohl nur 100 Plätze zur Verfügung stehen.

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der Plätze unter diesen Voraussetzungen nicht ausreicht.

c) Pro Reisetermin stehen jeweils 100 Plätze zur Verfügung.
Für jeden gebuchten Platz erzielt das Reisebüro einen Gewinn von a Euro.
Für jeden nicht gebuchten Platz macht das Reisebüro einen Verlust von 120 Euro.
Den Gesamtgewinn erhält man, indem man vom Gewinn für alle gebuchten Plätze den Verlust für alle nicht gebuchten Plätze abzieht.

Bei einem bestimmten Reisetermin werden nur x Plätze gebucht. Der Gesamtgewinn für diesen Termin beträgt G Euro.

1) Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung von x aus a und G.

$x =$ _____

* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

a1) X ... Anzahl der nicht in Anspruch genommenen Plätze

Binomialverteilung mit $n = 100$ und $p = 0{,}05$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$P(X \leq 4) = 0{,}4359...$
Die Wahrscheinlichkeit beträgt rund 43,6 %.

a2) Es werden 5 der 100 vermittelten Plätze nicht in Anspruch genommen.

b1) X ... Anzahl der nicht in Anspruch genommenen Plätze

Binomialverteilung mit $n = 102$ und $p = 0{,}05$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$P(X \leq 1) = 0{,}0340...$
Die Wahrscheinlichkeit beträgt rund 3,4 %.

c1) $G = x \cdot a - (100 - x) \cdot 120 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{G + 12\,000}{a + 120}$

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit
1 × C: für die richtige Beschreibung des Ereignisses im gegebenen Sachzusammenhang

b) 1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit

c) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel zur Berechnung von x

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Reisekosten

Aufgabennummer: B_193

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Die Tarife bei Fahrten mit dem Zug hängen normalerweise von der zurückgelegten Fahrtstrecke ab. Die in dieser Aufgabe verwendeten Bezeichnungen sind:

x … Fahrtstrecke in Kilometern (km)
$T(x)$ … Tarif in Euro (€) für die Fahrtstrecke x

a) In der nachstehenden Tabelle sind die 2012 gültigen Tarife für eine Fahrt mit der ÖBB (2. Klasse ohne Vorteilsticket) ausgehend vom Bahnhof Wien West zum angegebenen Endbahnhof angeführt.

Bahnhof	Fahrtstrecke x in km	Tarif in €
St. Pölten	60	11,00
Linz	190	31,20
Salzburg	317	47,50
Innsbruck	572	58,30
Landeck	647	58,70
Bregenz	770	64,30

– Bestimmen Sie mittels Regressionsrechnung eine Polynomfunktion 3. Grades, die die Abhängigkeit des Tarifs von der zu fahrenden Fahrtstrecke beschreibt.
– Stellen Sie die Funktion gemeinsam mit den angegebenen Werten in einem Diagramm dar und achten Sie dabei auf eine sinnvolle Skalierung der Achsen.

b) Im Kurzstreckenbereich kann die Abhängigkeit des Tarifs von der zurückgelegten Fahrtstrecke mithilfe folgender Funktion beschrieben werden:

$T(x) = 0{,}19x$

– Interpretieren Sie die Bedeutung der Zahl 0,19 im gegebenen Sachzusammenhang.

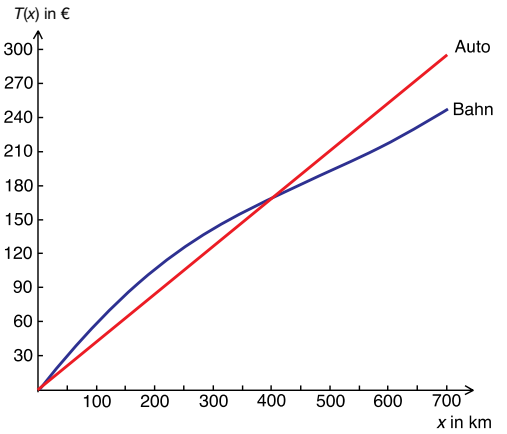
c) Die folgende Funktion T gibt den Tarif in Abhängigkeit von der Fahrtstrecke x entlang einer anderen Bahnstrecke an:

$T(x) = 2 \cdot 10^{-7}x^3 - 3 \cdot 10^{-4}x^2 + 0{,}2305x - 0{,}8711$

x … Fahrtstrecke in km
$T(x)$ … Tarif in € für die Fahrtstrecke x

– Ermitteln Sie mithilfe der Differenzialrechnung diejenige Fahrtstrecke, für die der Preiszuwachs am geringsten ist.
– Berechnen Sie den Preiszuwachs für diese Fahrtstrecke.

d) Eine Firma schickt 3 Angestellte auf Dienstreise. Als Kostenersatz müssen den Angestellten entweder € 0,42 pro gefahrenem Kilometer für ein gemeinsames Auto oder jeweils der Bahntarif 2. Klasse ohne Vorteilsticket rückerstattet werden. In der nebenstehenen Grafik sind die Bahnkosten für 3 Personen und das für den PKW zu erstattende Kilometergeld dargestellt.

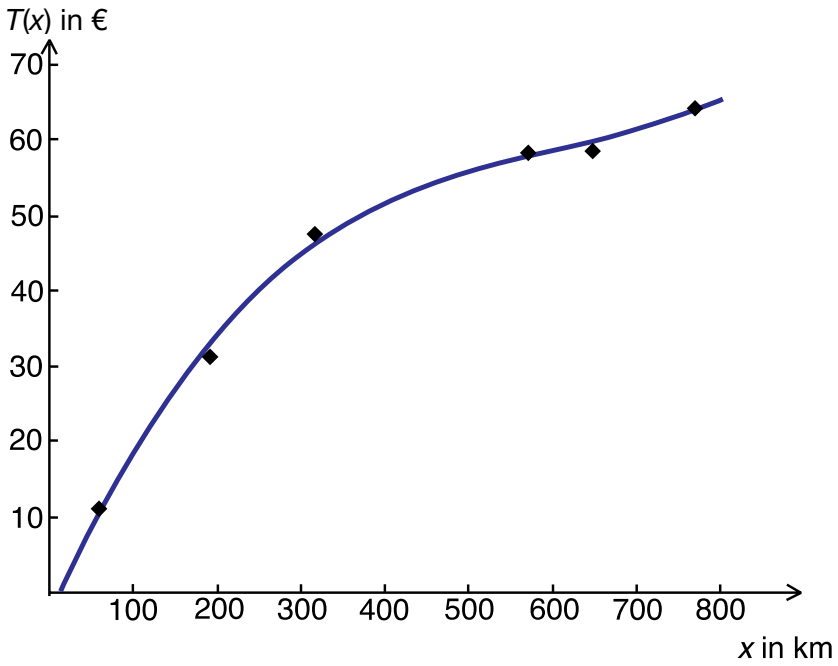


– Geben Sie an, wann die Firma Kilometergeld und wann sie Bahnkostenersatz leisten sollte, um ihre Kosten gering zu halten.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $T(x) = 2 \cdot 10^{-7}x^3 - 0{,}0004x^2 + 0{,}2557x - 3{,}5482$



b) $T(x) = 0{,}19x$
0,19 ist die Steigung der linearen Tariffunktion. Sie gibt den Tarif pro gefahrenem Kilometer an. Ein Kilometer kostet also € 0,19.

c) Die Preissteigerung pro Kilometer entspricht der Steigung der Tangente an die Tariffunktion, die man mit der 1. Ableitung berechnen kann. Zur Berechnung der geringsten Preissteigerung muss die 2. Ableitung berechnet und gleich null gesetzt werden. Es wird also die x-Koordinate des Wendepunkts der Tariffunktion berechnet.
$T(x) = 2 \cdot 10^{-7}x^3 - 3 \cdot 10^{-4}x^2 + 0{,}2305x - 0{,}8711$
$T'(x) = 6 \cdot 10^{-7}x^2 - 6 \cdot 10^{-4}x + 0{,}2305$
$T''(x) = 1{,}2 \cdot 10^{-6}x - 6 \cdot 10^{-4}$
$1{,}2 \cdot 10^{-6}x - 6 \cdot 10^{-4} = 0$
$1{,}2 \cdot 10^{-6}x = 6 \cdot 10^{-4}$
$x = 500$ km
Preiszuwachs an der Stelle $x = 500$:
$T'(500) = 6 \cdot 10^{-7} \cdot 500^2 - 6 \cdot 10^{-4} \cdot 500 + 0{,}2305 = 0{,}0805$
Der Preiszuwachs an dieser Stelle beträgt ungefähr € 0,08 pro km.

d) Die Grafik zeigt, dass bis zu einer Strecke von ca. 400 km der Bahntarif höher liegt als das Kilometergeld. Die Firma hat bei Strecken bis zu 400 km geringere Kosten, wenn die 3 Angestellten gemeinsam mit dem Auto fahren. Für Strecken, die länger als 400 km sind, ist für die Firma der Bahnkostenersatz günstiger.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 4 Analysis
d) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) —
c) 1 Zahlen und Maße
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) —
c) —
d) —

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) leicht
c) schwer
d) leicht

Punkteanzahl:

a) 3
b) 1
c) 3
d) 1

Thema: Verkehr

Quelle: http://www.oebb.at (Tarife und km-Angaben)

Hühnerfarm

Aufgabennummer: B_184

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

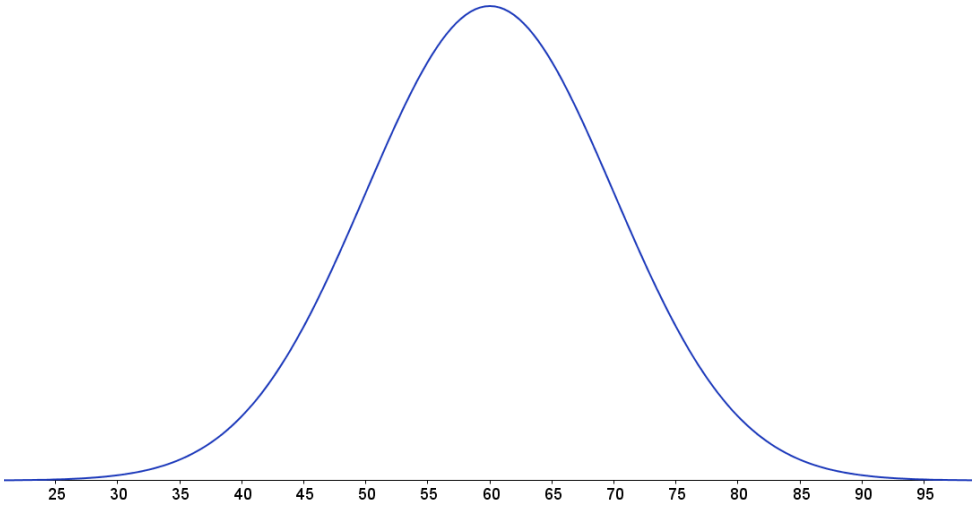
Auf einer Hühnerfarm werden Eier produziert.

a) In einer Stichprobe von $n = 12$ Eiern wurden folgende Massen in Gramm (g) gemessen:

62,4	68,1	54,3	65,4	71,8	52,6	55,7	62,8	67,1	66,2	61,0	70,1

– Berechnen Sie das arithmetische Mittel und die Standardabweichung dieser Stichprobe.

b) Die Masse von Hühnereiern kann als normalverteilt betrachtet werden.
Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen der entsprechenden Dichtefunktion.



– Lesen Sie den Erwartungswert aus der Abbildung ab.

– Erklären Sie anhand der Abbildung, warum die Angabe einer Standardabweichung von 5 g nicht korrekt sein kann.

c) Die Eier werden nach Gewichtskategorien in mittlere und große Eier eingeteilt.
Sechser- und Viererpackungen von Eiern werden zum Verkauf angeboten.
Die Sechserpackung kostet € 2,50 und beinhaltet je 3 große und 3 mittlere Eier.
Die Viererpackung kostet € 1,70 und beinhaltet je 1 großes Ei und 3 mittlere Eier.

Mindestens 60 große und 80 mittlere Eier sollen für eine Großküche eingekauft werden.
Für den Einkauf stehen maximal € 65 zur Verfügung.

– Stellen Sie dasjenige Ungleichungssystem auf, das beschreibt, welche Anzahl an Viererpackungen *y* bei welcher Anzahl von Sechserpackungen *x* die Großküche kaufen kann.
– Stellen Sie den Lösungsbereich des Ungleichungssystems grafisch dar.
– Beurteilen Sie anhand des Lösungsbereichs, ob die Großküche 12 Sechserpackungen und 25 Viererpackungen kaufen kann.

d) Die Hühnerfarm soll durch den Ankauf eines der Nachbargrundstücke vergrößert werden. Es liegen zwei Angebote vor:

- Angebot 1 umfasst das Grundstück mit 2 000 m².
  Der Kaufpreis soll in 12 nachschüssigen Jahresraten zu je € 1.050 getilgt werden.
- Angebot 2 umfasst das Grundstück mit 2 200 m².
  Der Kaufpreis soll in 24 nachschüssigen Jahresraten zu je € 510 getilgt werden.

Für beide Angebote ist ein Zinssatz von 2,5 % p. a. vereinbart. Es soll das Grundstück mit dem niedrigeren Quadratmeterpreis gekauft werden.

– Dokumentieren Sie in Worten, wie man das günstigere Angebot ermitteln kann.
– Berechnen Sie den Kaufpreis pro Quadratmeter für das Angebot 2.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

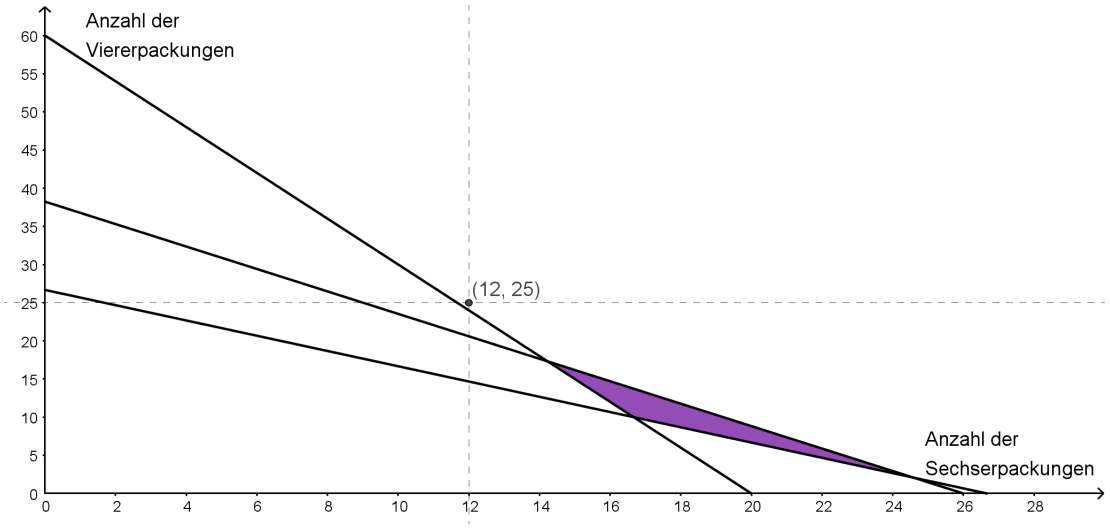
Möglicher Lösungsweg

a) Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$\overline{x} = 63{,}125$ g
$s \approx 6{,}24$ g (n–1-Gewichtung, weil es die erwartungstreue Schätzung ist.
Eine n-Gewichtung ist aber ebenfalls zu akzeptieren.)

b) Der Erwartungswert liegt bei 60 g.
Die Standardabweichung muss größer als 5 g sein, weil die Wendepunkte der Kurve weiter vom Erwartungswert entfernt liegen.

c) x ... Anzahl der Sechserpackungen
y ... Anzahl der Viererpackungen

$2{,}5x + 1{,}7y \leq 65$ $\quad 3x + y \geq 60$ $\quad 3x + 3y \geq 80$ $\quad x \geq 0$ $\quad y \geq 0$



Der Punkt (12|25) liegt nicht im Lösungsbereich. Daher ist es nicht möglich, 12 Sechserpackungen und 25 Viererpackungen zu kaufen.

d) Man berechnet jeweils den Barwert der Angebote und dividiert diesen durch die entsprechende Fläche in Quadratmetern.

Barwert von Angebot 2: $B = \frac{510}{1{,}025^{24}} \cdot \frac{1{,}025^{24} - 1}{0{,}025} = 9\,121{,}342... \approx 9\,121{,}34$

Kaufpreis pro Quadratmeter in Euro: $\frac{B}{2\,200} = 4{,}146... \approx 4{,}15$

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 5 Stochastik
c) 2 Algebra und Geometrie
d) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) A Modellieren und Transferieren
d) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) D Argumentieren und Kommunizieren, B Operieren und Technologieeinsatz
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) leicht
d) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2
c) 3
d) 2

Thema: Sonstiges

Quellen: —

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Kreditkonditionen

Aufgabennummer: B_122

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Frau Mitter benötigt einen Kredit. Etwaige Nebengebühren und Steuern werden im Folgenden nicht berücksichtigt.

a) Ihre Hausbank bietet ihr einen Kredit in Höhe von € 100.000 zu folgenden Konditionen an: Rückzahlung durch vorschüssige Monatsraten bei einem Zinssatz von 4,2 % p. a. und einer Laufzeit von 10 Jahren.

– Ermitteln Sie die Höhe der Monatsraten.

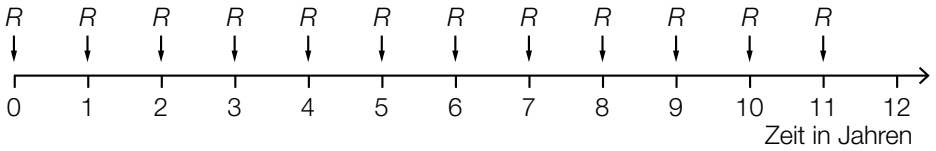
b) Frau Mitter hat die Möglichkeit, einen Teil aus eigenen Ersparnissen zu finanzieren und einen Kredit in Höhe von € 80.000 bei einem Zinssatz von 4,2 % p. a. aufzunehmen. Die Bank erwartet monatlich vorschüssige Rückzahlungen in Höhe von je € 550. Die Rückzahlung beginnt 3 Jahre nach Kreditaufnahme.

– Berechnen Sie, wie viele Jahre und Monate nach Kreditaufnahme die Schuld beglichen ist, wenn die Restzahlung 1 Monat nach der letzten Vollrate fällig ist.

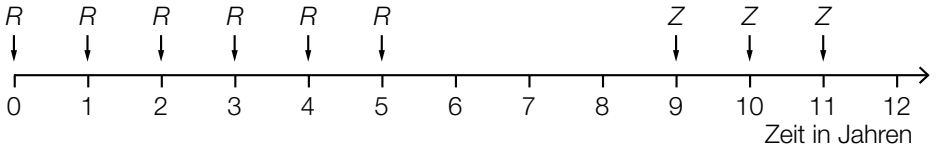
– Stellen Sie diese Situation mit den entsprechenden Rückzahlungsbeträgen grafisch in einer Zeitlinie dar.

c) Die nachstehenden Grafiken zeigen in Zeitlinien 2 weitere Rückzahlungsvarianten eines Kredits mit jährlichen Raten R bzw. Z mit dem Jahreszinssatz i.

1. Variante:



2. Variante:



– Beschreiben Sie die beiden Zahlungsweisen in Worten.

– Argumentieren Sie, dass die angegebene Gleichung den Wert von Z richtig beschreibt.

$Z = R \cdot (1 + q^3)$, wobei $q = 1 + i$ bedeutet

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

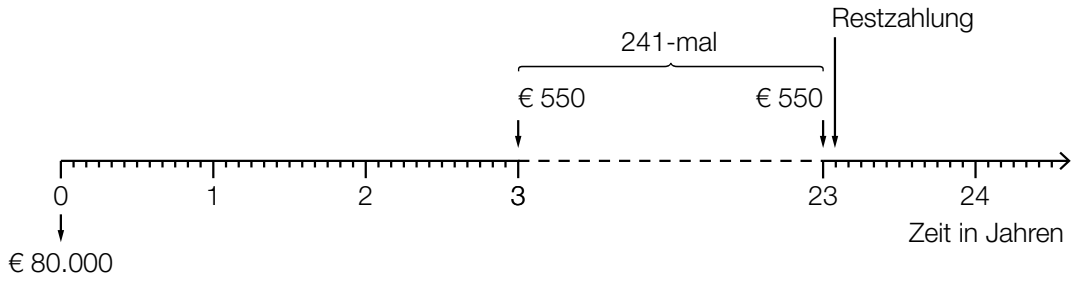
a) $q_{12} = \sqrt[12]{1{,}042}$

$100\,000 = R \cdot \frac{q_{12}^{120} - 1}{q_{12} - 1} \cdot \frac{1}{q_{12}^{119}} \quad \Rightarrow \quad R = 1\,014{,}739...$

Die Höhe der Rate beträgt € 1.014,74.

b) $80\,000 \cdot 1{,}042^3 = 550 \cdot \frac{q_{12}^{n} - 1}{q_{12} - 1} \cdot \frac{1}{q_{12}^{n-1}}$

Lösung mittels Technologieeinsatz:
$n = 241{,}61...$
Frau Mitter muss 241 vorschüssige Monatsraten zahlen.
Die Restzahlung erfolgt daher 241 Monate (= 20 Jahre und 1 Monat) nach Beginn der Rückzahlung.
Das bedeutet, 23 Jahre und 1 Monat nach Kreditaufnahme ist die Schuld beglichen.



c) Das erste Angebot zeigt 12 jährliche vorschüssige Rückzahlungsraten R.

Das zweite Angebot zeigt die Rückzahlung mit 6 jährlichen vorschüssigen Raten R, der Endwert dieser 6 Raten wird 6 Jahre weiterverzinst, 3 Jahre sind ohne Rückzahlung und anschließend folgen 3 jährliche vorschüssige Raten Z, die die Rückzahlung abschließen.

Es wird 3-mal Z statt 6-mal R eingezahlt. Jedes Z steht demnach für 2 Zahlungen von R mit jeweils 3 Jahren zwischen den Einzahlungen. Wegen der jährlichen Verzinsung, die noch jeweils dazukommt, muss für jedes einzelne Z gelten:

$Z = R + R \cdot q^3 \quad \Rightarrow \quad$ daher ist $Z = R \cdot (1 + q^3)$

Man kommt auch mit anderen Überlegungen zu diesem Ergebnis (z. B.: der Endwert von 6 R-Raten entspricht jenem der letzten 3 Z-Raten).

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) A Modellieren und Transferieren
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) D Argumentieren und Kommunizieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) schwer

Punkteanzahl:

a) 2
b) 4
c) 3

Thema: Wirtschaft

Quellen: –

Schifahren

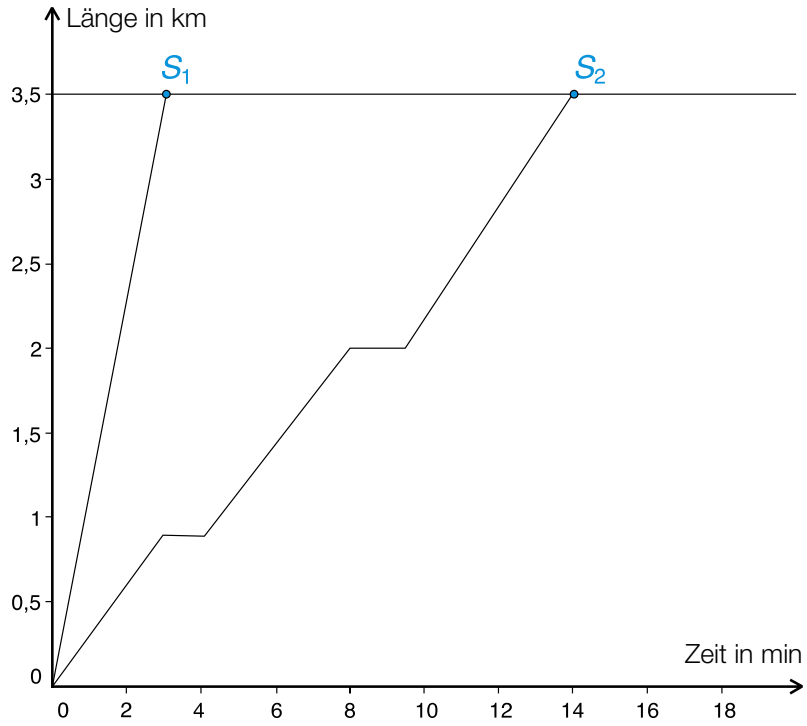
Aufgabennummer: A_018

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Von der Bergstation der Kohlmais-Gipfelbahn in Saalbach-Hinterglemm führen mehrere Abfahrten zur Talstation.

a) Die Funktionsgraphen zeigen Weg-Zeit-Diagramme von 2 Schifahrern – S_1 und S_2 – bei der Abfahrt von der Bergstation auf der gleichen Strecke.

– Interpretieren Sie die Graphen in Bezug auf die Fahrzeit und die Durchschnittsgeschwindigkeit der beiden Schifahrer.



b) Es führen 2 unterschiedlich schwere Strecken zur Talstation. Die leichtere Strecke ist 4,5 km lang, die schwerere 3,5 km. Richard fährt im Schnitt 60 km/h und damit doppelt so schnell wie Bert. Richard wettet, dass er 2-mal die schwere Abfahrt fahren kann, während Bert 1-mal die leichte beendet. Für die Bergfahrt werden 8 Minuten benötigt.
Die beiden starten zugleich an der Bergstation und wollen sich bei der Talstation wieder treffen.

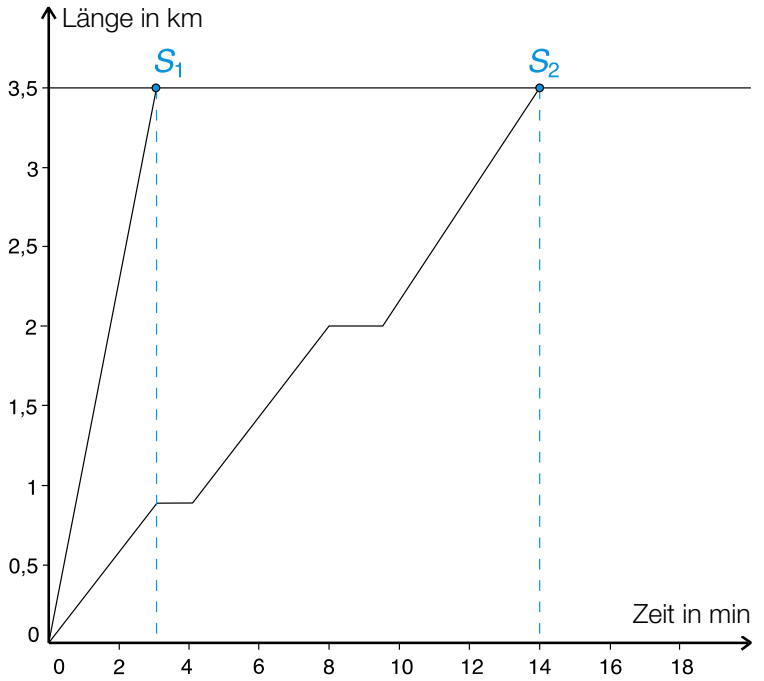
– Berechnen Sie, ob Richard die Wette gewinnen kann.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Der Graph S_1 hat eine größere Steigung als S_2, das bedeutet: Der 1. Schifahrer S_1 fährt mit einer größeren Durchschnittsgeschwindigkeit als S_2 und ist nach rund 3 Minuten am Ziel. Er macht keine Pause.

Der Graph S_2 steigt etwas weniger und hat 2 „Plateaus“, das bedeutet: Der 2. Schifahrer S_2 fährt mit einer geringeren Durchschnittsgeschwindigkeit und legt 2 Pausen ein. Er braucht insgesamt für die gleiche Strecke rund 14 Minuten.



b) Richard … 60 km/h = 1 km/min, er braucht für seine Strecke 3,5 min.
Für 2 Abfahrten plus 1 Bergfahrt benötigt er 15 Minuten.
Bert …..... 30 km/h = 0,5 km/min, er braucht für seine Strecke 9 Minuten.
Bert muss 6 Minuten auf Richard warten. Richard verliert die Wette.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 1 Zahlen und Maße

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) 3 Funktionale Zusammenhänge

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) D Argumentieren und Kommunizieren

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) leicht

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2

Thema: Sport

Quelle: http://www.lift-world.info/de/lifts/2338/datas.htm

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Würfel (2)*

Aufgabennummer: B_115

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Das im Folgenden beschriebene Spiel wird mit herkömmlichen fairen Spielwürfeln gespielt, bei denen die Augenzahlen 1 bis 6 jeweils mit gleicher Wahrscheinlichkeit als Würfelergebnis auftreten.

Es werden 2 Spielwürfel gleichzeitig geworfen und es wird deren Augensumme bestimmt. Nun sollen die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten ermittelt werden.

– Tragen Sie die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten in die nachstehende Tabelle ein.

Augensumme	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Wahrscheinlichkeit											

Es wird Ihnen nun folgendes Spiel vorgeschlagen:

Sie gewinnen, wenn die Augensumme 5, 6, 7 oder 8 beträgt.

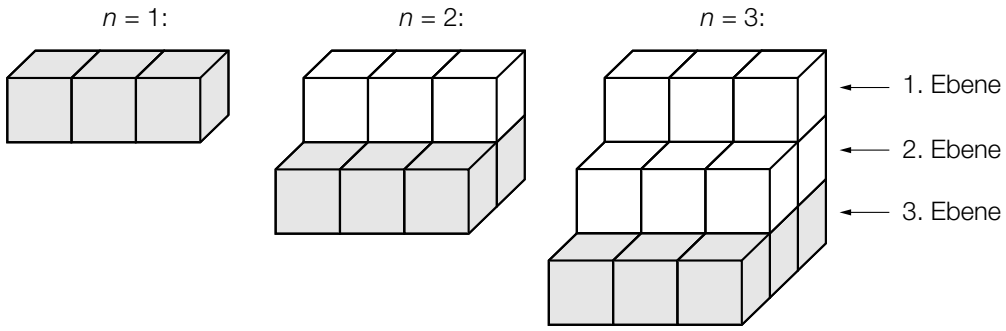
oder

Sie gewinnen mit allen übrigen Augensummen.

– Ermitteln Sie, welche der beiden Möglichkeiten die höhere Gewinnwahrscheinlichkeit hat.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Mit Würfeln wird eine Treppe gebaut:



Das obige Bauschema soll auf diese Art fortgesetzt werden.

– Erstellen Sie ein rekursives Bildungsgesetz, mit dem man die Anzahl der Würfel in der n-ten Ebene berechnen kann.
– Bestimmen Sie, wie viele Würfel in der 7. Ebene liegen.

Die Anzahl s_n der Würfel, die für eine solche Treppe aus n Ebenen insgesamt benötigt wird, kann mithilfe der folgenden Formel bestimmt werden:

$s_n = 1{,}5 \cdot (n^2 + n)$

– Berechnen Sie, aus wie vielen Ebenen eine solche Treppe besteht, wenn man insgesamt 360 Würfel verbaut.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a)

Augensumme	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Wahrscheinlichkeit	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

$P(\text{„Augensumme ist 5, 6, 7 oder 8“}) = \frac{4 + 5 + 6 + 5}{36} = \frac{20}{36}$

$P(\text{„übrige Augensummen“}) = 1 - \frac{20}{36} = \frac{16}{36}$

Die Wahrscheinlichkeit, eine Augensumme 5, 6, 7 oder 8 zu erhalten, ist größer.

b) $a_1 = 3$ und $a_{n+1} = a_n + 3$

$a_7 = 21$

$360 = 1{,}5 \cdot (n^2 + n)$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$n_1 = 15$, ($n_2 = -16$)
Die Treppe besteht aus 15 Ebenen, wenn man insgesamt 360 Würfel verbaut.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Vervollständigen der Tabelle mit den Wahrscheinlichkeiten
1 × B: für das richtige Ermitteln, welche der beiden Möglichkeiten die höhere Gewinnwahrscheinlichkeit hat

b) 1 × A: für das richtige Erstellen des rekursiven Bildungsgesetzes
1 × B1: für das richtige Bestimmen der Anzahl der Würfel in der 7. Ebene
1 × B2: für die richtige Berechnung der Anzahl der Ebenen

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Höhe der Wolkenuntergrenze*

Aufgabennummer: B_110

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Die Höhe der Wolkenuntergrenze kann auf verschiedene Arten näherungsweise bestimmt werden.

a) Die Höhe der Wolkenuntergrenze wurde früher mithilfe eines Nachtwolkenscheinwerfers bestimmt. Folgende Anweisung musste man dabei befolgen:

„Platzieren Sie auf einer horizontalen Ebene den Scheinwerfer in einem Punkt P so, dass sein Lichtstrahl senkrecht nach oben gerichtet ist.
Dort erzeugt er auf der Wolkenuntergrenze in der Höhe h einen punktförmigen Lichtfleck L.
Begeben Sie sich in einen anderen Punkt Q dieser Ebene und messen Sie die Streckenlänge $\overline{PQ}$.
Messen Sie den Höhenwinkel α, unter dem der Lichtfleck L nun von Punkt Q aus gesehen wird.“

– Veranschaulichen Sie den beschriebenen Sachverhalt mithilfe einer Skizze. Beschriften Sie P, Q, L, h und α in dieser Skizze.
– Erstellen Sie eine Formel, mit deren Hilfe man die Höhe der Wolkenuntergrenze h mit den gemessenen Größen bestimmen kann.

$h =$ _____

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Ein *Ceilometer* ist ein Messgerät, mit dem man aufgrund einer Lichtlaufzeitmessung die Höhe der Wolkenuntergrenze bestimmen kann. Dabei gilt:

$h = \frac{c \cdot t}{2}$

h … Höhe der Wolkenuntergrenze in m

t … Lichtlaufzeit in s

$c \approx 300\,000\,000$ m/s ... Lichtgeschwindigkeit

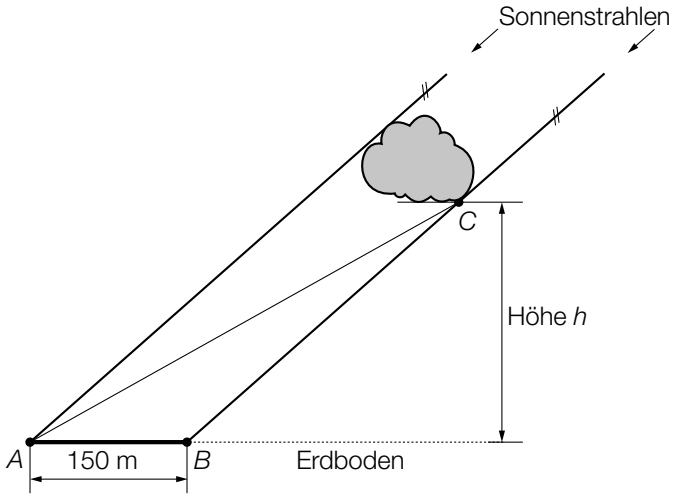
Das Gerät misst eine Lichtlaufzeit von 10 µs.

– Kreuzen Sie denjenigen Ausdruck an, mit dem die Höhe der Wolkenuntergrenze h in Metern korrekt ermittelt wird. *[1 aus 5]*

$\frac{300 \cdot 10^{-6} \cdot 10 \cdot 10^{-6}}{2}$	☐
$\frac{300 \cdot 10^{6} \cdot 10 \cdot 10^{-9}}{2}$	☐
$\frac{3 \cdot 10^{-8} \cdot 10^{5}}{2}$	☐
$\frac{3 \cdot 10^{8} \cdot 10 \cdot 10^{9}}{2}$	☐
$\frac{3 \cdot 10^{8} \cdot 10^{-5}}{2}$	☐

c) Eine Wolke wirft einen 150 m langen Schatten auf den Erdboden. Von A aus sieht man die Wolke unter dem Sehwinkel $\alpha = 4°$. Der Einfallswinkel der parallelen Sonnenstrahlen gegenüber der Horizontalen beträgt $\beta = 30°$.

Die folgende Abbildung stellt diese Situation vereinfacht und nicht maßstabgetreu dar:

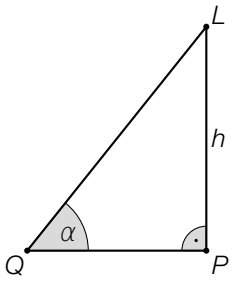


– Tragen Sie die gegebenen Winkel α und β in die obige Abbildung ein.
– Berechnen Sie die Entfernung $\overline{BC}$.
– Berechnen Sie die Höhe h.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)

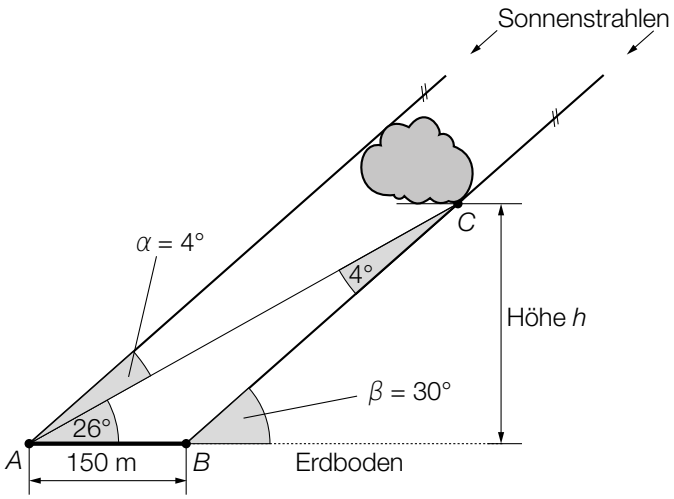


$h = \overline{PQ} \cdot \tan(\alpha)$

b)

$\frac{3 \cdot 10^{8} \cdot 10^{-5}}{2}$	☒

c)



$$\frac{\overline{BC}}{\sin(26°)} = \frac{150}{\sin(4°)}$$

$$\overline{BC} = \frac{150}{\sin(4°)} \cdot \sin(26°) = 942{,}6...$$

Die Entfernung $\overline{BC}$ beträgt rund 943 m.

$$\sin(\beta) = \frac{h}{\overline{BC}}$$

$$h = \overline{BC} \cdot \sin(\beta) = 471{,}3...$$

Die Höhe h beträgt rund 471 m.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A1: für das richtige Veranschaulichen in der Skizze
1 × A2: für das richtige Erstellen der Formel

b) 1 × C: für das richtige Ankreuzen

c) 1 × C: für das richtige Eintragen der beiden gegebenen Winkel
1 × B1: für die richtige Berechnung der Entfernung $\overline{BC}$
1 × B2: für die richtige Berechnung der Höhe h

Hotelerweiterung*

Aufgabennummer: B_106

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein Hotel plant die Errichtung zusätzlicher Zimmer.

a) Das Hotel plant mit einer Investitionssumme von € 1.650.000 die Errichtung 15 zusätzlicher Zimmer.

Für jedes dieser neuen Zimmer wird im 1. Jahr mit einem Erlös in Höhe von € 87 pro Nächtigung kalkuliert. Gleichzeitig rechnet der Betrieb damit, dass 13 % des Erlöses für Warenverbrauch, 31 % für Personalaufwand und 28 % für Betriebskosten aufgewendet werden.

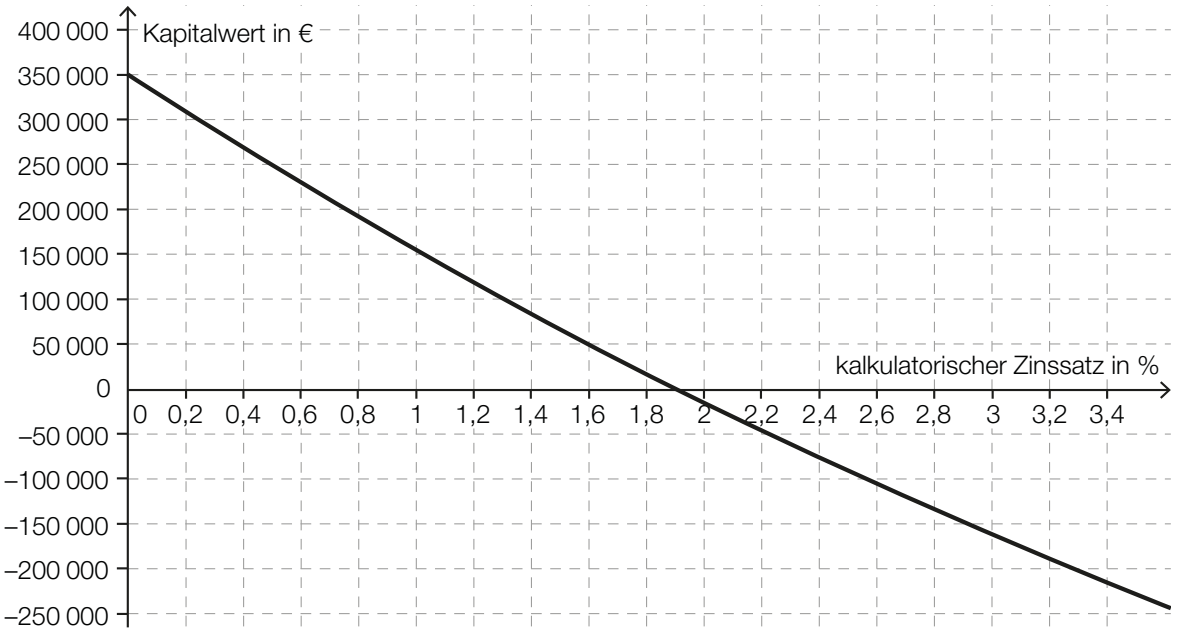
Im 1. Jahr rechnet man damit, dass diese zusätzlichen Zimmer für jeweils 165 Nächtigungen gebucht werden.

– Tragen Sie die prognostizierten Einnahmen und Ausgaben für diese zusätzlichen Zimmer in die nachstehende Tabelle ein.

Jahr	Einnahmen in Euro	Ausgaben in Euro
0		
1		

* ehemalige Klausuraufgabe

b) In der nachstehenden Abbildung ist der Kapitalwert einer Investition in Höhe von € 1.650.000 in Abhängigkeit vom kalkulatorischen Zinssatz dargestellt. Es werden gleich hohe jährliche Rückflüsse und eine Nutzungsdauer von 20 Jahren angenommen.



– Lesen Sie aus dem Funktionsgraphen ab, bis zu welchem kalkulatorischen Zinssatz die Investition vorteilhaft ist.
– Bestimmen Sie die Höhe der jährlichen Rückflüsse.

c) Bei einer bestimmten Kalkulation geht man bei einer Investitionssumme in Höhe von € 1.650.000 davon aus, dass 20 Jahre lang gleich hohe jährliche Rückflüsse in Höhe von jeweils € 78.000 zu erwarten sind. Die Rückflüsse können zu einem Wiederveranlagungszinssatz von 1,5 % p. a. angelegt werden.

– Berechnen Sie den Endwert der wiederveranlagten Rückflüsse.
– Überprüfen Sie nachweislich mithilfe des modifizierten internen Zinssatzes, ob diese Investition vorteilhaft ist.
– Argumentieren Sie, dass der modifizierte interne Zinssatz bei einem höheren Wiederveranlagungszinssatz höher wäre.

d) Um die Investition durchführen zu können, ist ein Bankkredit in Höhe von € 800.000 notwendig. Für die Rückzahlung werden eine Laufzeit von 15 Jahren und nachschüssige Semesterraten in Höhe von jeweils € 38.100 vereinbart.

– Berechnen Sie den effektiven Jahreszinssatz für dieses Finanzierungsmodell.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a)

Jahr	Einnahmen in Euro	Ausgaben in Euro
0	0	1 650 000
1	15 · 165 · 87 = 215 325	0,72 · 215 325 = 155 034

b) Bis zu einem kalkulatorischen Zinssatz von rund 1,9 % ist die Investition vorteilhaft.
Toleranzbereich: [1,85 %; 1,95 %]

$350\,000 = -1\,650\,000 + R \cdot 20 \quad \Rightarrow \quad R = 100\,000$
Die Höhe der jährlichen Rückflüsse beträgt € 100.000.

Auch eine Lösung mithilfe des internen Zinssatzes oder eines anderen kalkulatorischen Zinssatzes ist als richtig zu werten.

c) $E_{nach} = 78\,000 \cdot \frac{1{,}015^{20} - 1}{0{,}015} = 1\,803\,646{,}034...$
Der Endwert der wiederveranlagten Rückflüsse beträgt € 1.803.646,03.

$1\,650\,000 \cdot (1 + i_{mod})^{20} = 1\,803\,646{,}034...$
$i_{mod} = \sqrt[20]{\frac{1\,803\,646{,}034...}{1\,650\,000}} - 1 = 0{,}00446... \approx 0{,}45\ \%$
Da der modifizierte interne Zinssatz geringer als der Wiederveranlagungszinssatz ist, ist die Investition nicht vorteilhaft.

Bei einem höheren Wiederveranlagungszinssatz wäre der Endwert der Rückflüsse größer und somit auch der modifizierte interne Zinssatz.

d) $800\,000 = 38\,100 \cdot \frac{q_2^{30} - 1}{q_2 - 1} \cdot \frac{1}{q_2^{30}}$

Berechnung mittels Technologieeinsatz: $q_2 = 1{,}02476...$
$i = q_2^2 - 1 = 0{,}05013...$

Für dieses Finanzierungsmodell beträgt der zugrunde liegende effektive Jahreszinssatz rund 5,01 %.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Eintragen der Einnahmen und Ausgaben in der Tabelle

b) 1 × C: für das richtige Ablesen im Toleranzbereich [1,85 %; 1,95 %]
1 × B: für das richtige Bestimmen der Höhe der jährlichen Rückflüsse

c) 1 × B: für die richtige Berechnung des Endwerts
1 × D1: für den richtigen Nachweis mithilfe des modifizierten internen Zinssatzes
1 × D2: für die richtige Argumentation

d) 1 × B: für die richtige Berechnung des effektiven Jahreszinssatzes

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Baugrundstücke*

Aufgabennummer: B_090

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Die Preise von Baugrundstücken sind in den letzten Jahren erheblich gestiegen.

a) Herr Pfeifer hat ein Grundstück um € 228.000 gekauft. Nach der Umwidmung in ein Baugrundstück kann er es 4 Jahre später um € 753.000 verkaufen.

– Ermitteln Sie den mittleren jährlichen Zinssatz des eingesetzten Kapitals ohne Berücksichtigung von Spesen, Gebühren und Steuern.

b) Frau Maier möchte ein Baugrundstück verkaufen. Sie bekommt zwei Angebote.

Herr Altmann bietet € 150.000 sofort bei Vertragsabschluss und € 50.000 nach 2 Jahren.
Frau Bogner bietet € 202.000 ein Jahr nach Vertragsabschluss.

Frau Maier vergleicht die beiden Angebote.

– Weisen Sie für einen Zinssatz von 3 % p. a. nach, dass sich die beiden Angebote zum Zeitpunkt des Vertragsabschlusses um rund € 1.013 unterscheiden.

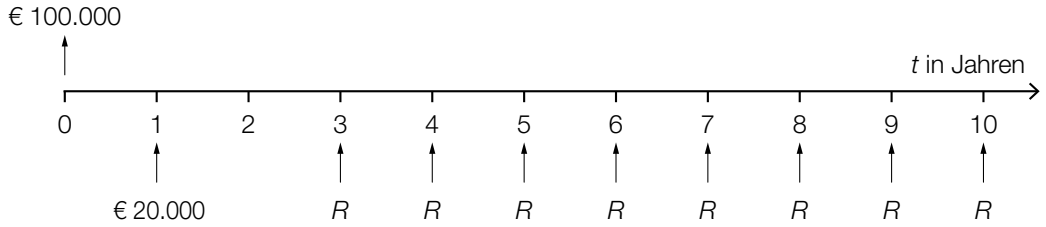
Für die beiden Angebote wird folgende Gleichung aufgestellt:
$150\,000 \cdot x^2 + 50\,000 = 202\,000 \cdot x$
Eine Lösung dieser Gleichung ist $x \approx 1{,}0198$.

– Interpretieren Sie die Bedeutung von x im gegebenen Sachzusammenhang.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Herr Müller nimmt für den Kauf eines Baugrundstücks einen Kredit in Höhe von € 100.000 auf. Der vereinbarte Zinssatz beträgt 3 % p. a.

Der Kredit soll durch die auf der nachstehenden Zeitachse dargestellten Zahlungen vollständig getilgt werden.



Die Zahlungen *R* können als nachschüssige Rente aufgefasst werden.

– Markieren Sie auf der Zeitachse den Bezugszeitpunkt für den Barwert dieser nachschüssigen Rente.
– Berechnen Sie die Höhe der Zahlungen *R*.

d) Frau Marth nimmt für den Kauf eines Baugrundstücks einen Kredit in Höhe von € 120.000 mit jährlich nachschüssigen Kreditrückzahlungen auf. Der vereinbarte Zinssatz beträgt 2,5 % p. a.

Für die ersten zwei Jahre vereinbart Frau Marth Sonderbedingungen, die im nachstehenden Tilgungsplan dargestellt sind.

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0				€ 120.000,00
1			€ 0,00	€ 123.000,00
2		€ 0,00		€ 123.000,00

– Ermitteln Sie die Beträge für die beiden grau markierten Zellen im obigen Tilgungsplan.

Ab dem Jahr 3 werden jährliche Annuitäten in Höhe von € 10.000 bezahlt.

– Berechnen Sie, wie viele volle Annuitäten in Höhe von € 10.000 bezahlt werden müssen.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $228\,000 \cdot (1 + i)^4 = 753\,000$

$i = \sqrt[4]{\frac{753\,000}{228\,000}} - 1 = 0{,}3480...$

Der mittlere jährliche Zinssatz beträgt rund 34,8 %.

b) Barwertvergleich:

Angebot 1: $150\,000 + \frac{50\,000}{1{,}03^2} = 197\,129{,}795...$

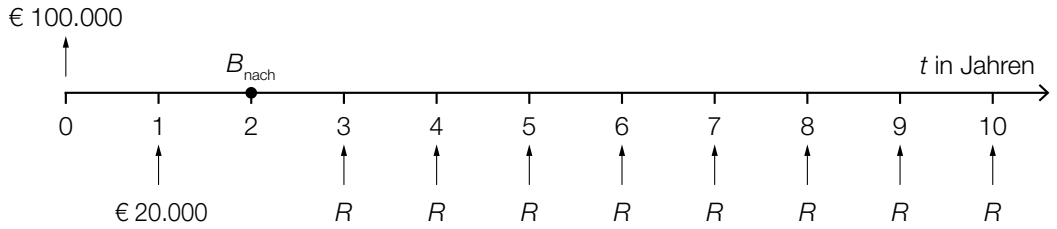
Angebot 2: $\frac{202\,000}{1{,}03} = 196\,116{,}504...$

$197\,129{,}795... - 196\,116{,}504... = 1\,013{,}290...$

Die beiden Angebote unterscheiden sich zum Zeitpunkt des Vertragsabschlusses also um rund € 1.013.

Bei einem Zinssatz von 1,98 % p. a. sind die beiden Angebote äquivalent.

c)



Bewertung aller Zahlungen auf den Bezugszeitpunkt $t = 2$ (Barwert der nachschüssigen Rente): $100\,000 \cdot 1{,}03^2 - 20\,000 \cdot 1{,}03 = 85\,490$

$85\,490 = R \cdot \frac{1{,}03^8 - 1}{0{,}03} \cdot \frac{1}{1{,}03^8} \quad \Rightarrow \quad R = 12\,178{,}596...$

Die Höhe der Zahlungen R beträgt € 12.178,60.

d)

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0				€ 120.000,00
1		€ –3.000,00	€ 0,00	€ 123.000,00
2		€ 0,00	€ 3.075,00	€ 123.000,00

$123\,000 = 10\,000 \cdot \frac{1{,}025^n - 1}{0{,}025} \cdot \frac{1}{1{,}025^n}$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$n = 14{,}88...$

Die volle Annuität in Höhe von € 10.000 muss 14-mal bezahlt werden.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für das richtige Ermitteln des mittleren jährlichen Zinssatzes

b) 1 × D: für den richtigen Nachweis
1 × C: für die richtige Interpretation im gegebenen Sachzusammenhang

c) 1 × C: für das richtige Markieren des Bezugszeitpunkts
1 × B: für die richtige Berechnung der Höhe von R

d) 1 × B1: für das richtige Ermitteln des Tilgungsanteils im Jahr 1 und der Annuität im Jahr 2
1 × B2: für die richtige Berechnung der Anzahl der vollen Annuitäten

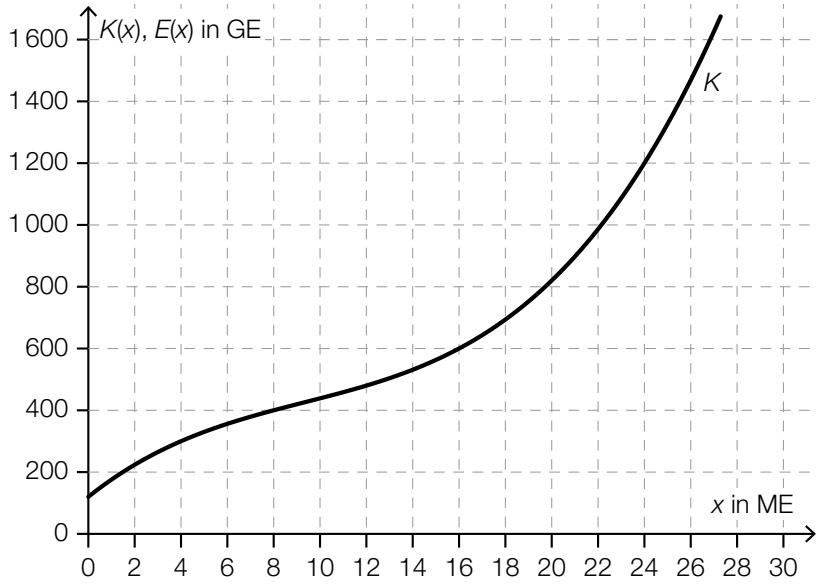
Rohrproduktion*

Aufgabennummer: B_089

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Ein Unternehmen stellt Kunststoffrohre her, die zu einem fixen Preis verkauft werden.

Im nachstehenden Diagramm ist der Graph der Kostenfunktion K für die Herstellung der Kunststoffrohre dargestellt.



Der Break-even-Point liegt bei einer Produktion von 8 ME. Die Kosten betragen dabei 400 GE.

– Zeichnen Sie den Graphen der Erlösfunktion E im obigen Diagramm ein.
– Ermitteln Sie den zugehörigen Marktpreis.
– Ergänzen Sie in der nachstehenden Wertetabelle die fehlenden Werte für die zugehörige Gewinnfunktion G.

x in ME	0	8	16
$G(x)$ in GE		0	

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Die Grenzkostenfunktion K' für die Herstellung von Kunststoffrohren ist gegeben durch:

$K'(x) = \frac{15}{32} \cdot x^2 - \frac{35}{4} \cdot x + 60$

x … produzierte Menge in ME
$K'(x)$ … Grenzkosten bei der produzierten Menge x in GE/ME

– Erstellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Kostenfunktion K mit $K(16) = 600$.
– Berechnen Sie die Kostenkehre.

c) Ein anderes Unternehmen stellt Keramikrohre her.

Von der quadratischen Erlösfunktion E ist für den Absatz von 10 ME bekannt:

$E(10) = 15$
$E'(10) = -1{,}5$
$E''(10) = -0{,}6$

– Kreuzen Sie die zutreffende Aussage über den Erlös bei einem Absatz von 11 ME an.
[1 aus 5]

$E(11) = 13{,}2$	☐
$E(11) = 13{,}5$	☐
$E(11) = 14{,}1$	☐
$E(11) = 16{,}2$	☐
$E(11) = 16{,}5$	☐

d) Die Erlösfunktion E für Betonrohre ist gegeben durch:

$E(x) = -3{,}2 \cdot x \cdot (x - 25)$

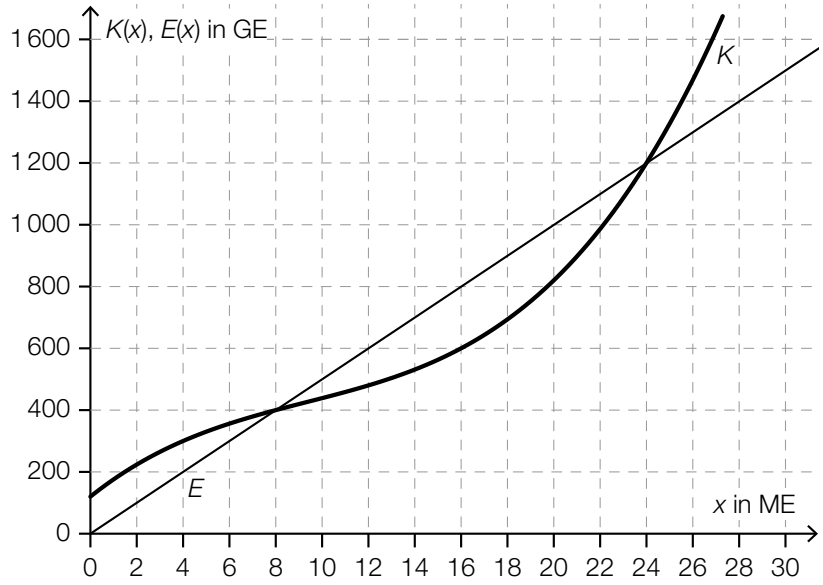
x … Absatzmenge in ME
$E(x)$ … Erlös bei der Absatzmenge x in GE

– Erstellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Preisfunktion der Nachfrage.
– Ermitteln Sie den Höchstpreis.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



Marktpreis: 50 GE/ME

x in ME	0	8	16
$G(x)$ in GE	**–120**	0	**200**

Toleranzbereiche:
$G(0)$: [–180; –100]
$G(16)$: [150; 250]

b) $K(x) = \int \left(\frac{15}{32} \cdot x^2 - \frac{35}{4} \cdot x + 60\right) dx = \frac{5}{32} \cdot x^3 - \frac{35}{8} \cdot x^2 + 60 \cdot x + F$

$K(16) = 600 \Rightarrow 600 = \frac{5}{32} \cdot 16^3 - \frac{35}{8} \cdot 16^2 + 60 \cdot 16 + F \Rightarrow F = 120$

$K(x) = \frac{5}{32} \cdot x^3 - \frac{35}{8} \cdot x^2 + 60 \cdot x + 120$

$K''(x) = \frac{15}{16} \cdot x - \frac{35}{4}$

$K''(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{28}{3}$

Die Kostenkehre liegt bei rund 9,33 ME.

c)

$E(11) = 13{,}2$	☒

d) $p_N(x) = -3{,}2 \cdot x + 80$

x ... Absatzmenge in ME
$p_N(x)$ ... Preis bei der Absatzmenge x in GE/ME

Höchstpreis: 80 GE/ME

Lösungsschlüssel

a) 1 × A1: für das richtige Einzeichnen des Graphen der Erlösfunktion
1 × C: für das richtige Ermitteln des Marktpreises
1 × A2: für das richtige Ergänzen der fehlenden Werte in der Tabelle in den angegebenen Toleranzbereichen [–180; –100] bzw. [150; 250]

b) 1 × A: für das richtige Erstellen der Gleichung der Kostenfunktion
1 × B: für die richtige Berechnung der Kostenkehre

c) 1 × A: für das richtige Ankreuzen

d) 1 × A: für das richtige Erstellen der Gleichung der Preisfunktion der Nachfrage
1 × C: für das richtige Ermitteln des Höchstpreises

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Bewegung eines Bootes*

Aufgabennummer: B_074

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Die Bewegung eines Bootes wird durch folgende Differenzialgleichung beschrieben:

$$m \cdot \frac{dv}{dt} = -k \cdot v$$

m … Masse des Bootes
$v > 0$ … Geschwindigkeit des Bootes
$k > 0$ … Konstante
t … Zeit

– Argumentieren Sie mathematisch anhand der Differenzialgleichung, dass die Geschwindigkeit mit zunehmender Zeit t abnimmt.
– Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung.

b) Ein Boot wird von einem Motorboot geschleppt. Zur Zeit $t = 0$ s wird das Schleppseil gelöst.
Die nachstehende Tabelle gibt die Geschwindigkeit des Bootes zu 4 verschiedenen Zeiten an.

Zeit in s	3	9	15	21
Geschwindigkeit in m/s	6,5	2,5	1,1	0,5

– Ermitteln Sie mithilfe der Daten aus der obigen Tabelle eine Gleichung der exponentiellen Ausgleichsfunktion, die den zeitlichen Verlauf der Geschwindigkeit des Bootes beschreibt.
– Ermitteln Sie mit dieser Ausgleichsfunktion einen Schätzwert für die Geschwindigkeit des Bootes zur Zeit $t = 5$ s.

c) Für einen bestimmten Zeitraum kann der zeitliche Verlauf der Geschwindigkeit eines anderen Motorboots durch die Funktion v_{MB} näherungsweise beschrieben werden:

$$v_{MB}(t) = a + b \cdot (e^{-0,1 \cdot t} - e^{-t})$$

t ... Zeit
$v_{MB}(t)$ ... Geschwindigkeit des Motorboots zur Zeit t
a, b ... positive Konstante

– Argumentieren Sie mathematisch, dass die Gerade mit der Gleichung $v = a$ eine Asymptote dieser Funktion ist.

* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

a) $\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m} \cdot v$

Da v, m und k größer als null sind, bedeutet das Minuszeichen, dass die Geschwindigkeit abnimmt.

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$v(t) = C \cdot e^{-\frac{k}{m} \cdot t}$

oder:

$\int \frac{v'}{v} dt = \int -\frac{k}{m} dt$

$\ln|v(t)| = -\frac{k}{m} \cdot t + C_1$

$v(t) = C \cdot e^{-\frac{k}{m} \cdot t}$

b) Ermitteln der Gleichung der Ausgleichsfunktion mittels Technologieeinsatz:

$v(t) = 9{,}49 \cdot 0{,}8677^t$ *(Parameter gerundet)*

oder:

$v(t) = 9{,}49 \cdot e^{-0{,}1419 \cdot t}$ *(Parameter gerundet)*

t ... Zeit in s

$v(t)$ ... Geschwindigkeit zur Zeit t in s

Abhängig von der verwendeten Technologie kann man geringfügig abweichende Parameter bei der Ermittlung der Ausgleichsfunktion erhalten.

Ermittlung mittels Technologieeinsatz:

$v(5) = 4{,}66...$

Die Geschwindigkeit des Bootes zur Zeit $t = 5$ s beträgt rund 4,7 m/s.

c) Für t gegen unendlich gehen $e^{-0{,}1 \cdot t}$ und e^{-t} gegen null und damit geht auch $b \cdot (e^{-0{,}1 \cdot t} - e^{-t})$ gegen null. Somit ist die Gerade mit der Gleichung $v = a$ eine Asymptote von v_{MB}.

Lösungsschlüssel

a) 1 × D: für die richtige Argumentation
1 × B: für die richtige Berechnung der allgemeinen Lösung

b) 1 × B1: für das richtige Ermitteln der Gleichung der exponentiellen Ausgleichsfunktion
1 × B2: für das richtige Ermitteln der Geschwindigkeit

c) 1 × D: für die richtige mathematische Argumentation

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

*Wings for Life World Run**

Aufgabennummer: B_022

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Beim *Wings for Life World Run* starten alle Läufer/innen gleichzeitig. Eine halbe Stunde später verlässt ein Verfolgerauto („Catcher-Car“) den Start und fährt den Läuferinnen und Läufern nach. Die Teilnehmer/innen laufen jeweils so lange, bis sie vom Catcher-Car eingeholt werden.

Der vom Catcher-Car innerhalb der ersten 2,5 Stunden ab dem Start der Läufer/innen zurückgelegte Weg kann näherungsweise durch die folgende stückweise definierte Funktion s beschrieben werden:

$$s(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \le 0{,}5 \\ \square & \text{für } 0{,}5 < t \le 1{,}5 \\ 16 \cdot t - 9 & \text{für } 1{,}5 < t \le 2{,}5 \end{cases}$$

t ... Zeit ab dem Start der Läufer/innen in h
$s(t)$ ... der vom Catcher-Car zur Zeit t zurückgelegte Weg in km

Im Zeitintervall]0,5; 1,5] fährt das Catcher-Car mit konstanter Geschwindigkeit.

– Ergänzen Sie die Weg-Zeit-Funktion für das Zeitintervall]0,5; 1,5] in der gegebenen Funktionsdefinition.

Die Geschwindigkeit eines bestimmten Läufers kann näherungsweise durch folgende Funktion v beschrieben werden:

$v(t) = -0{,}73 \cdot t^2 + 2{,}43 \cdot t + 10$

t ... Zeit ab dem Start des Läufers in h
$v(t)$ ... Geschwindigkeit des Läufers zur Zeit t in km/h

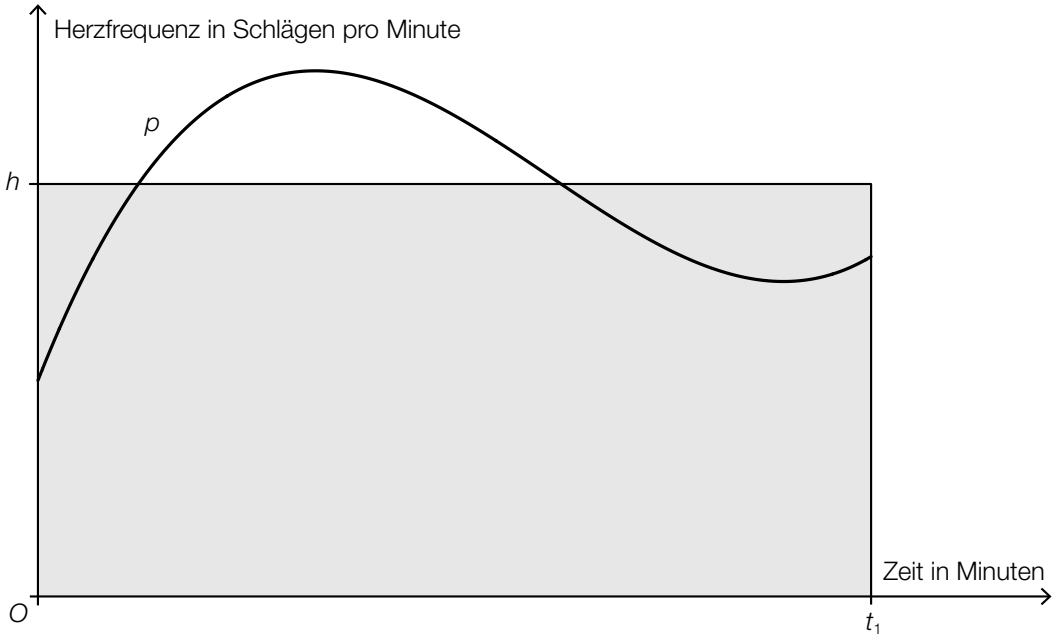
Der Läufer wird im Zeitintervall]1,5; 2,5] eingeholt.

– Berechnen Sie denjenigen Zeitpunkt, zu dem dieser Läufer vom Catcher-Car eingeholt wird.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Der zeitliche Verlauf der Herzfrequenz einer Läuferin kann näherungsweise durch eine Funktion p beschrieben werden.

Der Graph von p ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt. Der Flächeninhalt des grau markierten Rechtecks entspricht dem Inhalt der Fläche unter dem Funktionsgraphen von p im Intervall $[0; t_1]$.



– Interpretieren Sie die Bedeutung von h im gegebenen Sachzusammenhang.
– Erstellen Sie mithilfe der obigen Abbildung eine Formel zur Berechnung von h, wenn die Funktion p bekannt ist.

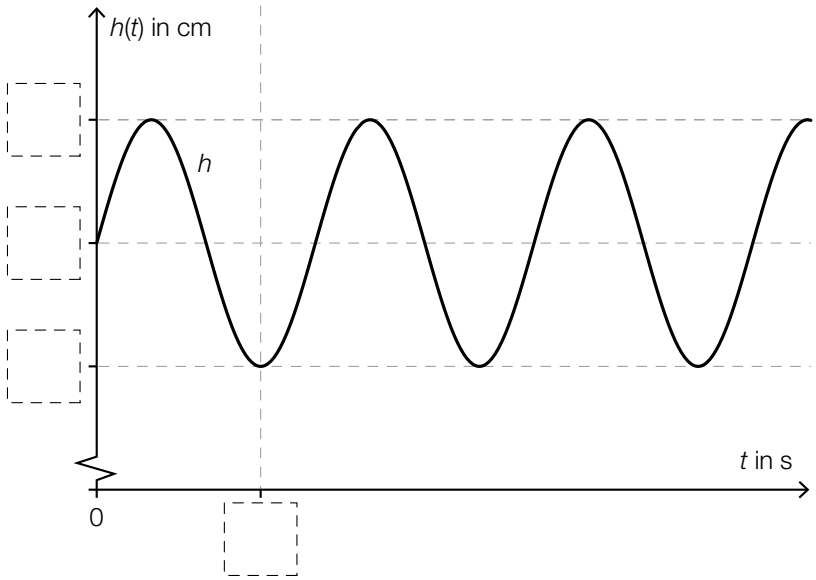
$h =$ _____

c) Beim Laufen bewegt sich der Schwerpunkt des menschlichen Körpers in regelmäßigen Zeitabständen auf und ab.

Modellhaft kann der zeitliche Verlauf der Höhe des Schwerpunkts durch die Funktion h beschrieben werden (siehe nachstehende Abbildung).

$h(t) = 5 \cdot \sin(6 \cdot \pi \cdot t) + 110$

t ... Zeit in s
$h(t)$ ... Höhe des Schwerpunkts über dem Boden zur Zeit t in cm



– Tragen Sie die fehlenden Zahlen in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $s(0{,}5) = 0$
$s(1{,}5) = 15$

$s(t) = 15 \cdot (t - 0{,}5)$ für $0{,}5 < t \leq 1{,}5$

$\int_0^T v(t)\,dt = 16 \cdot T - 9$

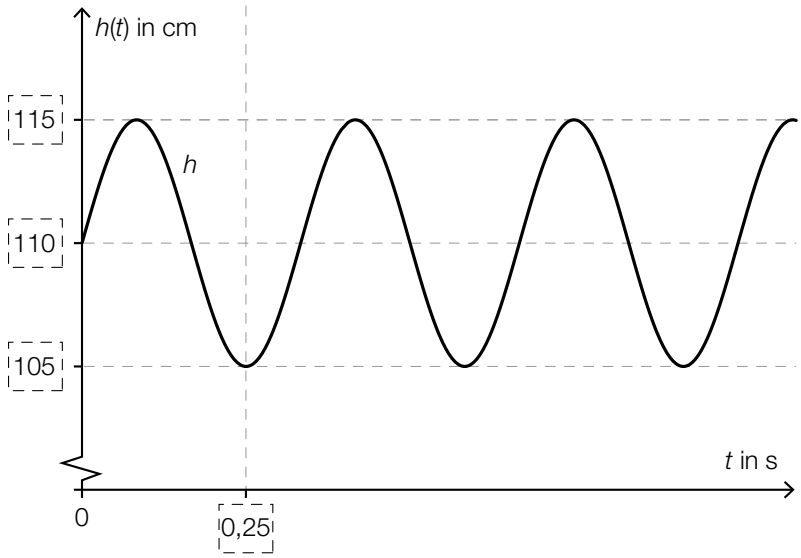
Berechnung mittels Technologieeinsatz: $T = 1{,}97...$

Der Läufer wird nach etwa 2 Stunden eingeholt.

b) Die Seitenlänge h des Rechtecks stellt die mittlere Herzfrequenz im Zeitintervall $[0; t_1]$ dar.

$$h = \frac{1}{t_1} \cdot \int_0^{t_1} p(t)\,dt$$

c)



Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Ergänzen der Weg-Zeit-Funktion im Zeitintervall]0,5; 1,5]
1 × B: für die richtige Berechnung des Zeitpunkts, zu dem der Läufer eingeholt wird

b) 1 × C: für die richtige Interpretation im gegebenen Sachzusammenhang
1 × A: für das richtige Erstellen der Formel

c) 1 × C: für das richtige Eintragen der fehlenden Zahlen

Smartphones (2)*

Aufgabennummer: B_079

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Der Akku eines Smartphones entlädt sich aufgrund von Hintergrundanwendungen auch dann, wenn das Gerät nicht aktiv benützt wird.

Für ein bestimmtes Smartphone wird die zeitliche Entwicklung des Akku-Ladestands in Prozent beobachtet. Zur Zeit $t = 0$ ist der Akku vollständig aufgeladen.

Zeit t in Stunden	Akku-Ladestand in Prozent
0	100
3	94
6	81
10	71
18	43

Die zeitliche Entwicklung des Akku-Ladestands in Prozent soll beschrieben werden.

– Ermitteln Sie eine Gleichung der zugehörigen linearen Regressionsfunktion.

Bei einem Akku-Ladestand von 15 % sollte das Smartphone wieder ans Stromnetz angeschlossen werden.

– Berechnen Sie, wie viele Stunden nach dem vollständigen Aufladen dies gemäß diesem linearen Regressionsmodell der Fall ist.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Die zeitliche Entwicklung des Akku-Ladestands beim Aufladen lässt sich näherungsweise durch die Funktion A beschreiben:

$A(t) = 100 - 85 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$

t … Zeit nach Beginn des Aufladens in h
$A(t)$ … Akku-Ladestand zur Zeit t in Prozent
λ … positiver Parameter

– Argumentieren Sie mathematisch, dass sich die Funktionswerte von A mit wachsendem t dem Wert 100 annähern.

2 Stunden nach Beginn des Aufladens beträgt der Akku-Ladestand 80 %.

– Berechnen Sie λ.
– Berechnen Sie, zu welcher Zeit nach Beginn des Aufladens der Akku-Ladestand 90 % beträgt.

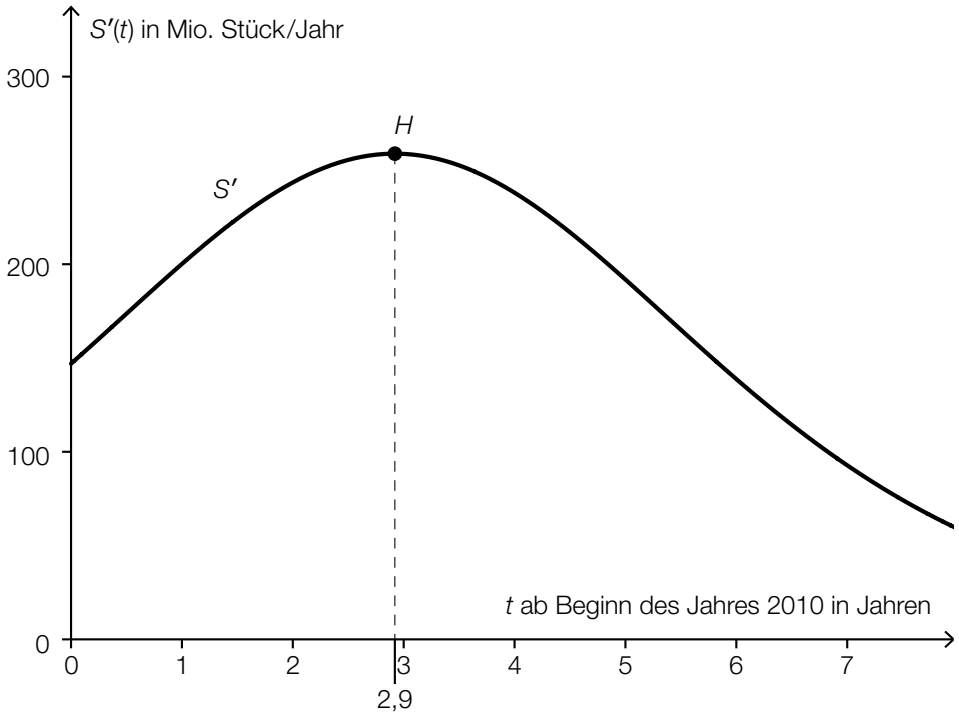
c) Die Entwicklung der weltweiten Verkaufszahlen von Smartphones kann modellhaft durch die Funktion S beschrieben werden:

$$S(t) = \frac{1918}{1 + 4{,}84 \cdot e^{-0{,}54 \cdot t}}$$

t ... Zeit in Jahren ($t = 0$ entspricht dem Beginn des Jahres 2010)
$S(t)$ ... Anzahl der bis zur Zeit t insgesamt verkauften Smartphones in Millionen Stück

– Ermitteln Sie mithilfe dieses Modells die Anzahl der bis zum Beginn des Jahres 2020 insgesamt verkauften Smartphones.

Im nachstehenden Diagramm ist der Graph der Ableitungsfunktion S' dargestellt. Auf dem Graphen von S' ist der Hochpunkt H markiert.



– Beschreiben Sie die mathematische Bedeutung der Stelle $t = 2{,}9$ in Bezug auf die Funktion S.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Ermittlung mittels Technologieeinsatz:

$L(t) = -3{,}210 \cdot t + 101{,}554$ *(Koeffizienten gerundet)*

t ... Zeit in h
$L(t)$ ... Akku-Ladestand zur Zeit t in %

$15 = -3{,}210 \cdot t + 101{,}554$
$t = 26{,}9...$

Nach etwa 27 Stunden sollte das Smartphone wieder ans Stromnetz angeschlossen werden.

b) Mit beliebig groß werdendem t geht $e^{-\lambda \cdot t}$ gegen null, und damit geht $100 - 85 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$ gegen 100.

$80 = 100 - 85 \cdot e^{-\lambda \cdot 2}$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$\lambda = 0{,}72345...$

$90 = 100 - 85 \cdot e^{-0{,}72345... \cdot t}$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$t = 2{,}9...$

Nach etwa 3 Stunden ist ein Ladestand von 90 % erreicht.

c) $S(10) = \frac{1\,918}{1 + 4{,}84 \cdot e^{-0{,}54 \cdot 10}} = 1\,876{,}9...$

Gemäß diesem Modell werden bis zum Beginn des Jahres 2020 rund 1 877 Millionen Smartphones verkauft.

$t = 2{,}9$ ist die Wendestelle der Funktion S.

oder:

$t = 2{,}9$ ist die Stelle maximalen Wachstums von S.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B1: für das richtige Ermitteln der Gleichung der Regressionsfunktion
1 × B2: für die richtige Berechnung des Zeitpunkts

b) 1 × D: für die richtige mathematische Argumentation
1 × B1: für die richtige Berechnung von λ
1 × B2: für die richtige Berechnung des Zeitpunkts

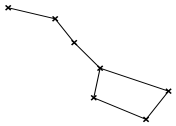
c) 1 × B: für das richtige Ermitteln des Funktionswerts
1 × C: für die richtige Beschreibung der Bedeutung der Stelle $t = 2{,}9$ in Bezug auf die Funktion S

Sternbild *Großer Wagen* (2)*

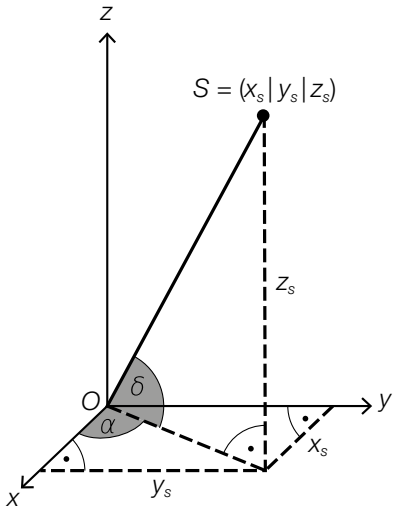
Aufgabennummer: B_032

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Die Entfernungen zwischen Sternen können in Lichtjahren angegeben werden.
Die nebenstehende Abbildung zeigt eine schematische Darstellung des Sternbilds *Großer Wagen*.



a) Astronomen verwenden verschiedene Koordinatensysteme. In einem Koordinatensystem mit der Erde im Koordinatenursprung O kann die Position eines Sterns S mithilfe der Winkel α und δ sowie der Entfernung $\overline{OS}$ von der Erde angegeben werden (siehe nachstehende Abbildung).



– Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung der Koordinate z_S aus dem Winkel δ und der Entfernung $\overline{OS}$.

$z_S =$ _____

– Ordnen Sie den Koordinaten x_S und y_S jeweils den zutreffenden Ausdruck aus A bis D zu. *[2 zu 4]*

$x_S =$	
$y_S =$	

A	$\overline{OS} \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(\delta)$
B	$\overline{OS} \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\delta)$
C	$\overline{OS} \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\delta)$
D	$\overline{OS} \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\delta)$

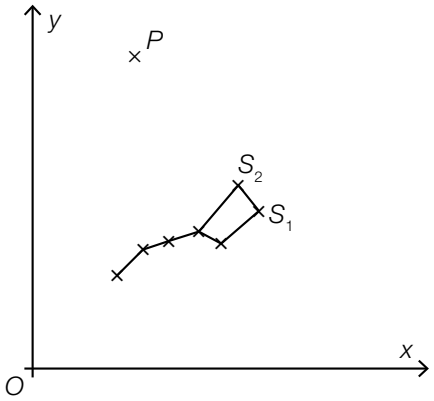
* ehemalige Klausuraufgabe

b) Alkaid und Dubhe sind zwei Sterne des Sternbilds *Großer Wagen*. Ihre Positionen können mittels ihrer Koordinaten in Lichtjahren in Bezug auf ein bestimmtes kartesisches Koordinatensystem angegeben werden. Dabei befindet sich die Erde im Koordinatenursprung O.

Alkaid: $A = (-60\,|\,-31\,|\,79)$
Dubhe: $D = (-57\,|\,14\,|\,109)$

– Berechnen Sie den Winkel zwischen den Vektoren $\overrightarrow{OA}$ und $\overrightarrow{OD}$.
– Ermitteln Sie die Entfernung der beiden Sterne voneinander.

c) In der nachstehenden Abbildung sind der *Große Wagen* und der Polarstern P in einem Koordinatensystem dargestellt.



Die Position des Polarsterns P kann nach folgender Faustregel bestimmt werden:
Der Polarstern P liegt auf der Geraden, die durch die Punkte S_1 und S_2 verläuft. Der Abstand zwischen S_2 und P ist das 5-Fache der Länge der Strecke S_1S_2.

– Übertragen Sie die Faustregel mithilfe der Vektorrechnung in einen mathematischen Ausdruck zur Berechnung von P.

Es gilt: $S_1 = (5{,}5\,|\,3{,}8)$ und $S_2 = (5{,}0\,|\,4{,}4)$

– Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes P.

d) In der Astronomie wird als Maß für die Entfernung r eines Sterns von der Erde der sogenannte *Entfernungsmodul* $5 \cdot \lg\left(\frac{r}{10}\right)$ verwendet.

– Kreuzen Sie denjenigen Ausdruck an, der nicht dem Entfernungsmodul entspricht.
[1 aus 5]

$-5 \cdot \lg\left(\frac{10}{r}\right)$	☐
$-5 + \lg(r^5)$	☐
$\lg\left(\left(\frac{r}{10}\right)^5\right)$	☐
$5 \cdot \lg(r) - \lg(10)$	☐
$5 \cdot (\lg(r) - 1)$	☐

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $z_S = \overline{OS} \cdot \sin(\delta)$

$x_S =$	D
$y_S =$	C

A	$\overline{OS} \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(\delta)$
B	$\overline{OS} \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\delta)$
C	$\overline{OS} \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\delta)$
D	$\overline{OS} \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\delta)$

b) $\cos(\varphi) = \dfrac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD}}{\left|\overrightarrow{OA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{OD}\right|} = \dfrac{11\,597}{\sqrt{10\,802} \cdot \sqrt{15\,326}} = 0{,}901... \Rightarrow \varphi = 25{,}66...°$

Der Winkel beträgt rund 25,7°.

$\sqrt{(-60-(-57))^2 + (-31-14)^2 + (79-109)^2} = 54{,}16...$

Die Entfernung der beiden Sterne beträgt rund 54,2 Lichtjahre.

c) $S_2 + 5 \cdot \overrightarrow{S_1S_2}$ *oder* $\overrightarrow{OS_2} + 5 \cdot \overrightarrow{S_1S_2}$

$\begin{pmatrix} 5{,}0 \\ 4{,}4 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 0{,}6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 7{,}4 \end{pmatrix}$

$P = (2{,}5\,|\,7{,}4)$

d)

$5 \cdot \lg(r) - \lg(10)$	☒

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel
1 × C: für die richtige Zuordnung

b) 1 × B1: für die richtige Berechnung des Winkels
1 × B2: für das richtige Ermitteln der Entfernung

c) 1 × A: für das richtige Übertragen der Faustregel in einen mathematischen Ausdruck
1 × B: für die richtige Berechnung der Koordinaten des Punktes *P*

d) 1 × C: für das richtige Ankreuzen

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Durchmesser einer Stahlwelle*

Aufgabennummer: B_019

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein Unternehmen stellt auf computergesteuerten Drehmaschinen Stahlwellen für Elektromotoren in Massenproduktion her.

a) Bei Maschine *A* sind die Durchmesser der hergestellten Stahlwellen annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 10{,}00$ mm. In der nachstehenden Abbildung 1 ist der Graph der zugehörigen Dichtefunktion dargestellt.

Abbildung 1:

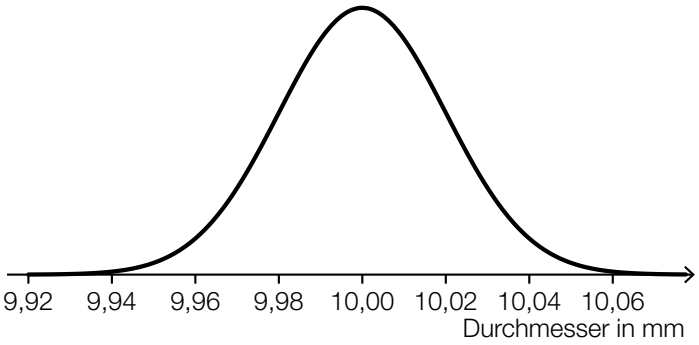
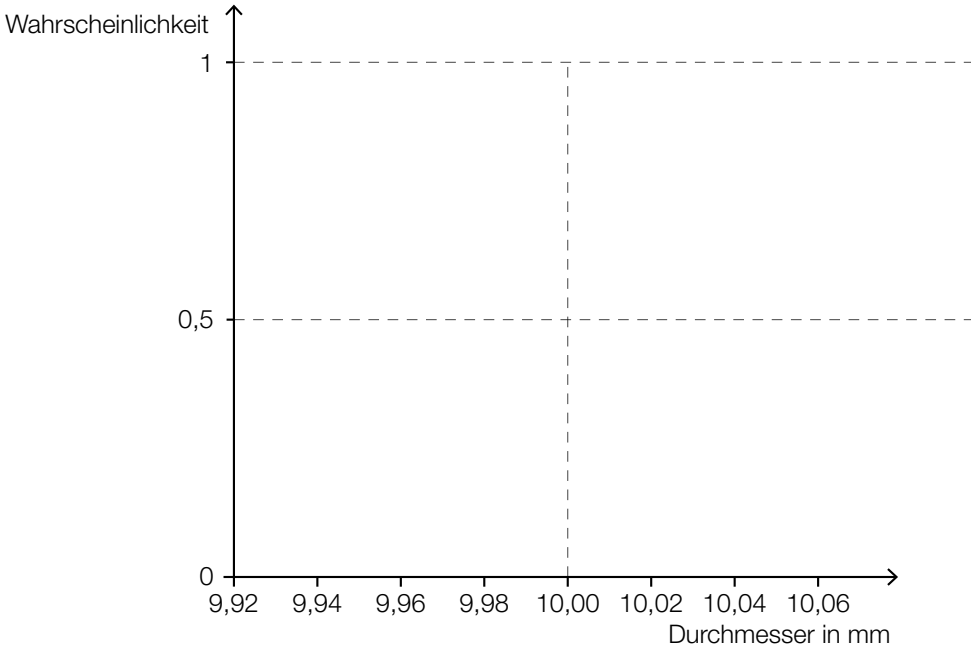


Abbildung 2:



– Skizzieren Sie in der obigen Abbildung 2 den Graphen der zugehörigen Verteilungsfunktion.
– Veranschaulichen Sie mithilfe der Verteilungsfunktion in Abbildung 2 die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Stahlwelle einen Durchmesser von mindestens 10,02 mm hat.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Bei Maschine *B* sind die Durchmesser der hergestellten Stahlwellen annähernd normalverteilt mit der Standardabweichung $\sigma = 0{,}02$ mm. Ein Durchmesser von 9,97 mm wird von 0,1 % der Stahlwellen unterschritten.

– Ermitteln Sie den zugehörigen Erwartungswert μ.

c) Bei Maschine *C* sind die Durchmesser der hergestellten Stahlwellen annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 10{,}00$ mm und der Standardabweichung $\sigma = 0{,}03$ mm.

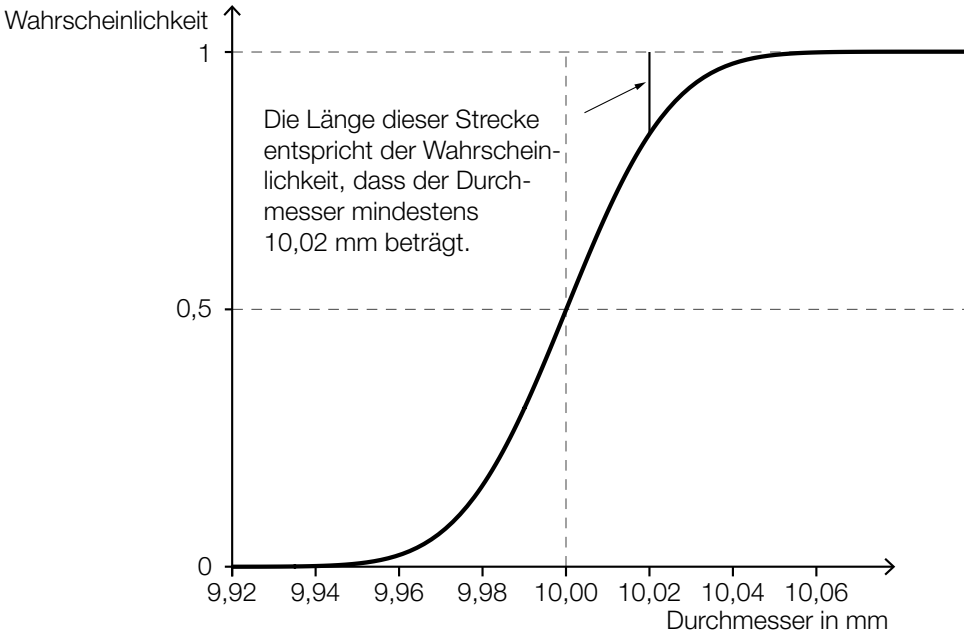
Im Rahmen der Qualitätssicherung werden Stichproben vom Umfang *n* untersucht.

– Berechnen Sie für $n = 30$ den zum Erwartungswert symmetrischen Zufallsstreubereich, in dem erwartungsgemäß 99 % aller Stichprobenmittelwerte liegen.
– Geben Sie an, um welchen Faktor sich der Stichprobenumfang ändern muss, damit sich die Breite des 99-%-Zufallsstreubereichs halbiert.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



b) X ... Durchmesser in mm
$P(X \leq 9{,}97) = 0{,}001$
Berechnung von μ mittels Technologieeinsatz:
$\mu = 10{,}031...$ mm $\approx 10{,}03$ mm

c) $\mu = 10{,}00$ mm und $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0{,}03}{\sqrt{30}}$ mm
Berechnung mittels Technologieeinsatz:

[9,985...; 10,014...]

Eine Halbierung der Breite erfordert, dass der Stichprobenumfang mit dem Faktor 4 multipliziert wird.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A1: für das richtige Skizzieren des Graphen der Verteilungsfunktion in Abbildung 2 (charakteristischer Funktionsverlauf und Funktionswert an der Stelle μ richtig eingezeichnet)
1 × A2: für die richtige Veranschaulichung der Wahrscheinlichkeit in Abbildung 2

b) 1 × B: für das richtige Ermitteln des Erwartungswerts μ

c) 1 × B: für die richtige Berechnung des Zufallsstreubereichs
1 × C: für die richtige Angabe des Faktors

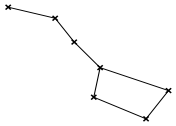
Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Sternbild *Großer Wagen* (1)*

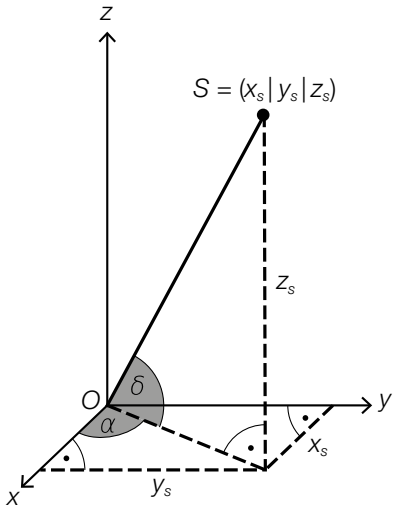
Aufgabennummer: B_014

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Die nebenstehende Abbildung zeigt eine schematische Darstellung des Sternbilds *Großer Wagen*.



a) Astronomen verwenden verschiedene Koordinatensysteme. In einem Koordinatensystem mit der Erde im Koordinatenursprung O kann die Position eines Sterns S mithilfe der Winkel α und δ sowie der Entfernung $\overline{OS}$ von der Erde angegeben werden (siehe nachstehende Abbildung).



– Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung der Koordinate z_S aus dem Winkel δ und der Entfernung $\overline{OS}$.

$z_S =$ _____

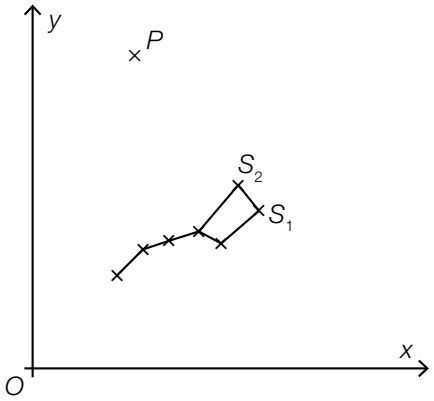
– Ordnen Sie den Koordinaten x_S und y_S jeweils den zutreffenden Ausdruck aus A bis D zu. *[2 zu 4]*

$x_S =$	
$y_S =$	

A	$\overline{OS} \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(\delta)$
B	$\overline{OS} \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\delta)$
C	$\overline{OS} \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\delta)$
D	$\overline{OS} \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\delta)$

* ehemalige Klausuraufgabe

b) In der nachstehenden Abbildung sind der *Große Wagen* und der Polarstern *P* in einem Koordinatensystem dargestellt.



Die Position des Polarsterns *P* kann nach folgender Faustregel bestimmt werden:
Der Polarstern *P* liegt auf der Geraden, die durch die Punkte S_1 und S_2 verläuft. Der Abstand zwischen S_2 und *P* ist das 5-Fache der Länge der Strecke S_1S_2.

– Übertragen Sie die Faustregel mithilfe der Vektorrechnung in einen mathematischen Ausdruck zur Berechnung von *P*.

Es gilt: $S_1 = (5{,}5\,|\,3{,}8)$ und $S_2 = (5{,}0\,|\,4{,}4)$

– Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes *P*.

c) In der Astronomie wird als Maß für die Entfernung *r* eines Sterns von der Erde der sogenannte *Entfernungsmodul* $5 \cdot \lg\left(\frac{r}{10}\right)$ verwendet.

– Kreuzen Sie denjenigen Ausdruck an, der <u>nicht</u> dem Entfernungsmodul entspricht.
[1 aus 5]

$-5 \cdot \lg\left(\frac{10}{r}\right)$	☐
$-5 + \lg(r^5)$	☐
$\lg\left(\left(\frac{r}{10}\right)^5\right)$	☐
$5 \cdot \lg(r) - \lg(10)$	☐
$5 \cdot (\lg(r) - 1)$	☐

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $z_S = \overline{OS} \cdot \sin(\delta)$

$x_S =$	D
$y_S =$	C

A	$\overline{OS} \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(\delta)$
B	$\overline{OS} \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\delta)$
C	$\overline{OS} \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\delta)$
D	$\overline{OS} \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\delta)$

b) $S_2 + 5 \cdot \overrightarrow{S_1S_2}$ *oder* $\overrightarrow{OS_2} + 5 \cdot \overrightarrow{S_1S_2}$

$\begin{pmatrix} 5{,}0 \\ 4{,}4 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 0{,}6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 7{,}4 \end{pmatrix}$

$P = (2{,}5\,|\,7{,}4)$

c)

$5 \cdot \lg(r) - \lg(10)$	☒

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel
1 × C: für die richtige Zuordnung

b) 1 × A: für das richtige Übertragen der Faustregel in einen mathematischen Ausdruck
1 × B: für die richtige Berechnung der Koordinaten des Punktes *P*

c) 1 × C: für das richtige Ankreuzen

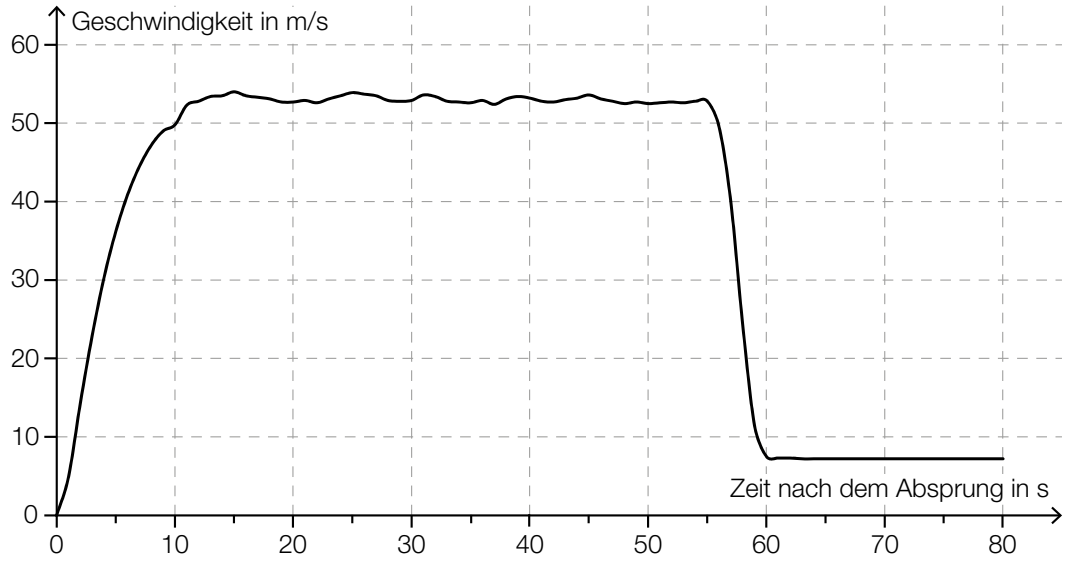
Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Fallschirmsprung*

Aufgabennummer: A_261

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Bei einem Fallschirmsprung wurde der zeitliche Verlauf der Geschwindigkeit eines Fallschirmspringers aufgezeichnet. Im nachstehenden Diagramm wird diese Geschwindigkeit für die ersten 80 Sekunden nach dem Absprung veranschaulicht.



a) In den ersten Sekunden nach dem Absprung gilt für den Fallschirmspringer annähernd das Fallgesetz:

$$s(t) = \frac{g}{2} \cdot t^2$$

t ... Zeit nach dem Absprung in s
$s(t)$ ... Fallstrecke zur Zeit t in m
g ... Erdbeschleunigung, $g = 9{,}81$ m/s^2

– Berechnen Sie mithilfe des Fallgesetzes die Geschwindigkeit des Fallschirmspringers 1,5 Sekunden nach dem Absprung.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) 55 Sekunden nach dem Absprung zieht der Fallschirmspringer die Reißleine, der Fallschirm öffnet sich.

– Schätzen Sie den Flächeninhalt zwischen der Geschwindigkeitskurve und der Zeitachse im Intervall [0 s; 55 s] ab.
– Interpretieren Sie die Bedeutung dieses Flächeninhalts im gegebenen Sachzusammenhang unter Angabe der entsprechenden Einheit.

c) Der Höhenmesser des Fallschirmspringers zeigt 60 Sekunden nach dem Absprung eine Meereshöhe von 1 300 Metern an. Ab dieser Meereshöhe sinkt der Fallschirmspringer jeweils 100 Meter in 14 Sekunden.
Dabei soll die Meereshöhe des Fallschirmspringers (in Metern) in Abhängigkeit von der Zeit t (in Sekunden) durch eine Funktion h beschrieben werden.

– Erstellen Sie eine Gleichung der Funktion h. Wählen Sie $t = 0$ für den Zeitpunkt 60 Sekunden nach dem Absprung.

Der Fallschirmspringer landet auf einem Feld, das auf einer Meereshöhe von 350 Metern liegt.

– Berechnen Sie, wie lange der gesamte Fallschirmsprung (vom Absprung bis zur Landung) dauert.

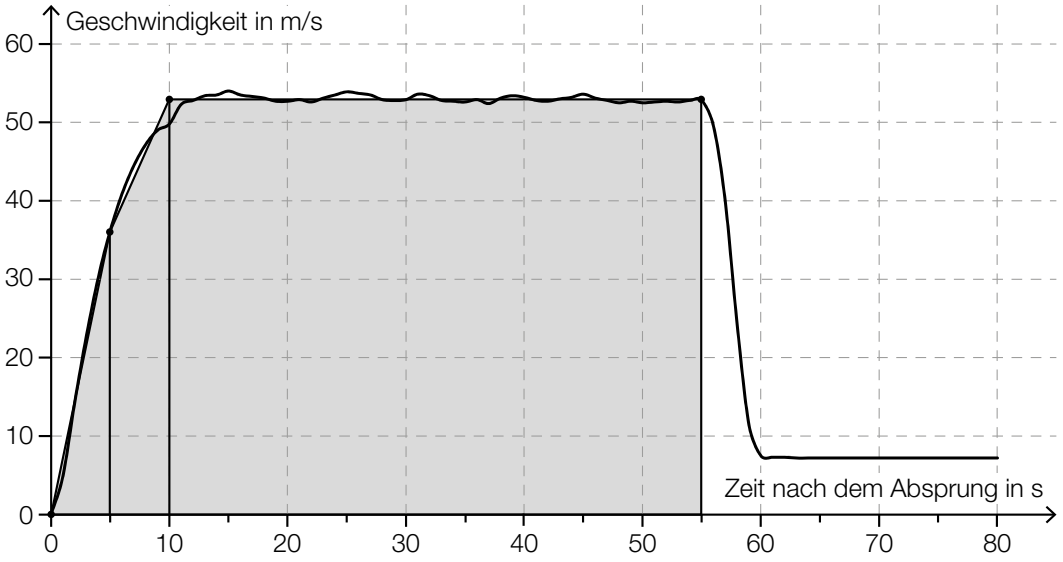
Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $s'(t) = v(t) = g \cdot t$
$v(1{,}5) = 9{,}81 \cdot 1{,}5 = 14{,}715$

Gemäß dem Fallgesetz beträgt die Geschwindigkeit 1,5 Sekunden nach dem Absprung rund 14,72 m/s.

b) Näherungsweises Ermitteln des Flächeninhalts durch Dreiecke und Vierecke:



$A \approx \frac{36 \cdot 5}{2} + \frac{(53 + 36) \cdot 5}{2} + 53 \cdot 45 = 2\,697{,}5$
Toleranzbereich: [2 400; 2 900]

Der Flächeninhalt entspricht der Fallstrecke in den ersten 55 Sekunden in Metern.

c) $h(t) = 1\,300 - \frac{100}{14} \cdot t$

t ... Zeit in s
$h(t)$ ... Meereshöhe des Fallschirmspringers zur Zeit t in m

$350 = 1\,300 - \frac{100}{14} \cdot t \quad \Rightarrow \quad t = 133$
$133 + 60 = 193$

Der Fallschirmsprung dauert vom Absprung bis zur Landung insgesamt 193 Sekunden.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für die richtige Berechnung der Geschwindigkeit mithilfe des Fallgesetzes

b) 1 × B: für das richtige Abschätzen des Flächeninhalts im Toleranzbereich [2 400; 2 900]
1 × C: für die richtige Interpretation im gegebenen Sachzusammenhang unter Angabe der Einheit

c) 1 × A: für das richtige Erstellen der Funktionsgleichung
1 × B: für die richtige Berechnung der insgesamten Dauer des Fallschirmsprungs

Altenpflege*

Aufgabennummer: A_262

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

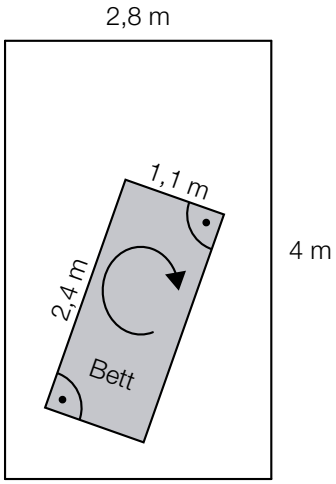
a) Katharina und Georg arbeiten als Pflegekräfte in einem Heim. Sie bekommen das gleiche monatliche Grundgehalt. Im Februar lag in diesem Heim ein besonderer Arbeitsbedarf vor. Georg leistete 14 Überstunden, Katharina leistete 46 Überstunden. Ihr jeweiliges Gesamtentgelt setzt sich aus dem Grundgehalt und der Abgeltung für die geleisteten Überstunden zusammen. Jede Überstunde wird dabei gleich abgegolten.

Das Gesamtentgelt von Georg betrug im Februar € 2.617, jenes von Katharina betrug € 3.433.

– Ermitteln Sie das Grundgehalt und die Abgeltung für eine Überstunde.

b) Der Aufzug eines Pflegeheims hat eine rechteckige Grundfläche mit einer Länge von 4 m und einer Breite von 2,8 m. Ein Pflegebett fährt auf beweglichen Rollen und hat die Außenmaße 2,4 m × 1,1 m (siehe nachstehende nicht maßstabgetreue Abbildung).

Aufzug-Innenraum von oben gesehen



– Überprüfen Sie nachweislich, ob der Aufzug breit genug ist, damit das Bett – wie oben skizziert – um 180° gedreht werden kann.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Die nachstehende Tabelle zeigt die Anzahl der Hausbesuche pro Jahr durch mobile Dienste im Rahmen der Altenpflege in Oberösterreich sowie deren prozentuellen Anstieg jeweils im Vergleich zur Anzahl 2 Jahre davor.

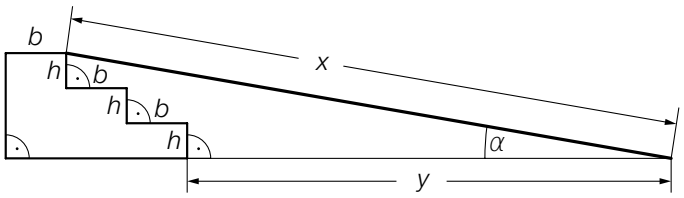
Jahr	Anzahl der Hausbesuche pro Jahr	prozentueller Anstieg (gerundet)
1994	498 086	
1996	589 168	18,3 %
1998	802 146	36,1 %
2000	1 017 793	26,9 %
2002	1 176 665	15,6 %
2004	1 360 543	15,6 %

Der prozentuelle Anstieg der Anzahl der Hausbesuche pro Jahr betrug sowohl von 2000 auf 2002 als auch von 2002 auf 2004 jeweils rund 15,6 %.

– Erklären Sie in Worten, warum sich die absolute Änderung der Anzahl der Hausbesuche pro Jahr von 2000 auf 2002 von jener von 2002 auf 2004 unterscheidet, obwohl die prozentuellen Anstiege in den jeweiligen Zeitintervallen gleich sind.

– Interpretieren Sie das Ergebnis der Berechnung $\frac{1\,360\,543 - 498\,086}{2004 - 1994} \approx 86\,246$ im gegebenen Sachzusammenhang.

d) Eine Rampe der Länge x überwindet 3 Stufen. Jede Stufe hat die Höhe h und die Breite b.



– Kreuzen Sie die auf den dargestellten Sachverhalt zutreffende Formel an. *[1 aus 5]*

$x = \frac{2 \cdot b}{\cos(\alpha)}$	☐
$x = \frac{3 \cdot h \cdot \sin(\alpha)}{2 \cdot b}$	☐
$x = (2 \cdot b + y) \cdot \tan(\alpha)$	☐
$x = \frac{2 \cdot b + y}{\cos(\alpha)}$	☐
$x = \frac{3 \cdot h + \sin(\alpha)}{2 \cdot b}$	☐

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) x ... Grundgehalt in €
y ... Abgeltung für eine Überstunde in €

$x + 14 \cdot y = 2617$
$x + 46 \cdot y = 3433$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$x = 2260$, $y = 25{,}50$

Das Grundgehalt beträgt € 2.260, die Abgeltung für eine Überstunde € 25,50.

b) Länge der Diagonalen des Bettes d:
$d = \sqrt{1{,}1^2 + 2{,}4^2} = 2{,}640...$

Die Länge der Diagonalen beträgt rund 2,64 m. Da die Diagonale kürzer als die Liftbreite ist, kann das Bett im Lift um 180° gedreht werden.

c) Die absolute Änderung der Anzahl der Hausbesuche pro Jahr unterscheidet sich, da verschiedene Grundwerte für die Berechnung der prozentuellen Anstiege herangezogen werden.

Die Anzahl der Hausbesuche pro Jahr ist im Zeitintervall von 1994 bis 2004 durchschnittlich um rund 86246 pro Jahr gestiegen.

d)

[...]	
[...]	
[...]	
$x = \frac{2 \cdot b + y}{\cos(\alpha)}$	☒
[...]	

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für das richtige Ermitteln des Grundgehalts und der Abgeltung für eine Überstunde

b) 1 × D: für den richtigen Nachweis

c) 1 × D: für die richtige Erklärung (Ein Nachweis, dass die absoluten Änderungen nicht gleich sind, ist für die Punktevergabe nicht ausreichend.)
1 × C: für die richtige Interpretation des Ergebnisses der Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang

d) 1 × A: für das richtige Ankreuzen

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Die Genussformel*

Aufgabennummer: A_263

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Der Physiker Werner Gruber erklärt in seinem Buch *Die Genussformel* (Salzburg: Ecowin, 2008) die kleinen chemischen und physikalischen Tricks der großen Köchinnen und Köche. Dabei werden auch mathematische Zusammenhänge betrachtet.

a) In der *Genussformel* betrachtet Gruber den Genuss beim Essen als messbare Größe mit Werten von 0 (kein Genuss) bis 1 (maximaler Genuss). Für die Abhängigkeit des Genusses von der Anzahl der Geschmacksrichtungen auf einem Teller gibt Gruber folgende Funktion G an:

$$G(n) = e^{-\frac{(n-3)^2}{0{,}2746}}$$

n ... Anzahl der unterschiedlichen Geschmacksrichtungen auf dem Teller
$G(n)$ ... Genuss bei n unterschiedlichen Geschmacksrichtungen auf dem Teller

– Ermitteln Sie diejenige Anzahl an unterschiedlichen Geschmacksrichtungen, bei der man laut Gruber den maximalen Genuss hat.

b) Für die optimale Bratdauer einer Gans gibt Gruber folgende Werte an:

Masse der Gans in Kilogramm	Bratdauer in Minuten
2,0	104
3,0	136
3,8	159

– Zeigen Sie mithilfe des Differenzenquotienten, dass zwischen Masse und Bratdauer kein exakter linearer Zusammenhang vorliegt.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Ein Ei einer bestimmten Größe wird gekocht. Der zeitliche Verlauf der Innentemperatur wird mithilfe der Funktion T modelliert:

$T(t) = 100 - 192 \cdot e^{-\frac{25 \cdot t}{81}}$ mit $t \geq 3$

t ... Kochzeit in min
$T(t)$ ... Innentemperatur zur Zeit t in °C

– Berechnen Sie, nach welcher Kochzeit eine Innentemperatur von 84 °C erreicht wird.

Die Potenz $e^{-\frac{25 \cdot t}{81}}$ wird in Wurzelschreibweise und mit positiver Hochzahl dargestellt.

– Kreuzen Sie die zutreffende Darstellung an. *[1 aus 5]*

$\frac{1}{\sqrt[81]{e^{25 \cdot t}}}$	☐
$\sqrt[81]{e^{25 \cdot t}}$	☐
$-\sqrt[81]{e^{25 \cdot t}}$	☐
$-\sqrt[25]{e^{81 \cdot t}}$	☐
$\frac{1}{\sqrt[25]{e^{81 \cdot t}}}$	☐

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $G(n) = 1$:

$e^{-\frac{(n-3)^2}{0{,}2746}} = 1 \quad \Rightarrow \quad n = 3$

b) Für die jeweiligen Differenzenquotienten gilt:

$\frac{136 - 104}{3{,}0 - 2{,}0} = 32$ bzw. $\frac{159 - 136}{3{,}8 - 3{,}0} = 28{,}75$ bzw. $\frac{159 - 104}{3{,}8 - 2{,}0} = 30{,}55...$

Es liegt kein linearer Zusammenhang vor, weil die Differenzenquotienten nicht gleich sind.

Für die Punktevergabe ist es nicht erforderlich, alle 3 angegebenen Differenzenquotienten zu ermitteln.

c) $84 = 100 - 192 \cdot e^{-\frac{25 \cdot t}{81}}$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$t = 8{,}0...$

Nach etwa 8 Minuten hat das Ei eine Innentemperatur von 84 °C.

$\frac{1}{\sqrt[81]{e^{25 \cdot t}}}$	☒
[...]	
[...]	
[...]	
[...]	

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Ermitteln der Anzahl an unterschiedlichen Geschmacksrichtungen für maximalen Genuss

b) 1 × D: für den richtigen Nachweis mithilfe des Differenzenquotienten

c) 1 × B: für die richtige Berechnung der Kochzeit
1 × C: für das richtige Ankreuzen

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Pizzalieferdienst*

Aufgabennummer: A_264

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Eine Pizzeria liefert Pizzen auf Bestellung aus. Die Kunden sollen möglichst schnell beliefert werden, damit die Pizzen bei der Zustellung noch heiß sind.

a) Für 100 Pizzen wurden die Zustellzeiten erhoben und in 6 Klassen eingeteilt:

Klasse	Zustellzeit in Minuten	Klassenmitte	absolute Häufigkeit
1	[0; 10[	5	4
2	[10; 20[	15	48
3	[20; 30[	25	27
4	[30; 40[	35	11
5	[40; 50[	45	5
6	[50; 60[	55	5

– Geben Sie an, in welcher Klasse der Median der Zustellzeiten liegt.

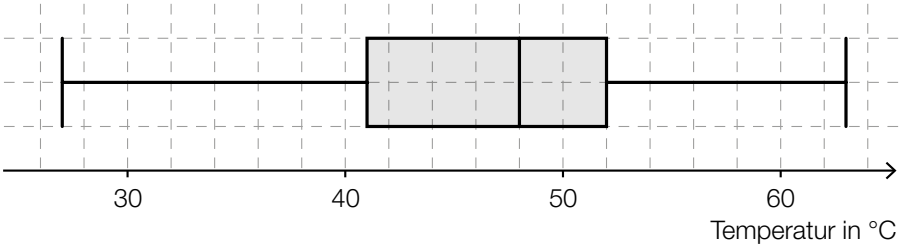
Mithilfe der Klassenmitten können das arithmetische Mittel $\bar{x}$ und die Standardabweichung s der Zustellzeiten näherungsweise berechnet werden.
Es gilt: $\bar{x} = 23$ min

– Kreuzen Sie denjenigen Ausdruck an, mit dem die zugehörige Standardabweichung s der Zustellzeiten berechnet werden kann.

$\sqrt{\frac{(5-23)+(15-23)+(25-23)+(35-23)+(45-23)+(55-23)}{6}}$	☐
$\sqrt{\frac{(5-23)^2+(15-23)^2+(25-23)^2+(35-23)^2+(45-23)^2+(55-23)^2}{6}}$	☐
$\sqrt{\frac{(5-23)^2\cdot 4+(15-23)^2\cdot 48+(25-23)^2\cdot 27+(35-23)^2\cdot 11+(45-23)^2\cdot 5+(55-23)^2\cdot 5}{6}}$	☐
$\sqrt{\frac{(5-23)^2\cdot 4+(15-23)^2\cdot 48+(25-23)^2\cdot 27+(35-23)^2\cdot 11+(45-23)^2\cdot 5+(55-23)^2\cdot 5}{100}}$	☐
$\sqrt{\frac{(4-23)^2\cdot 5+(48-23)^2\cdot 15+(27-23)^2\cdot 25+(11-23)^2\cdot 35+(5-23)^2\cdot 45+(5-23)^2\cdot 55}{100}}$	☐

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Bei einer statistischen Erhebung wurde die Temperatur der gelieferten Pizzen untersucht. Die erhobenen Daten sind im folgenden Boxplot dargestellt:

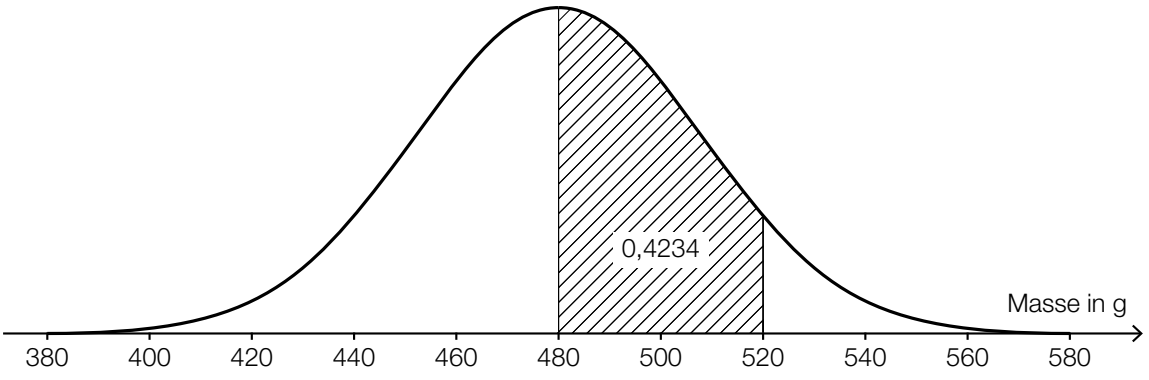


Es wird auf Basis dieses Boxplots behauptet: „Mindestens 80 % der gelieferten Pizzen haben eine Temperatur von über 45 °C."

– Argumentieren Sie anhand des obigen Boxplots, dass diese Behauptung falsch ist.

c) Die Masse der Pizzen ist annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 480$ g.

In der nachstehenden Darstellung der Dichtefunktion ist diejenige Fläche markiert, die der Wahrscheinlichkeit entspricht, dass die Masse einer zufällig ausgewählten Pizza zwischen 480 g und 520 g liegt.



– Ermitteln Sie mithilfe der obigen Abbildung die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Pizza eine Masse von mindestens 520 g hat.
– Skizzieren Sie in der obigen Abbildung den Graphen der Dichtefunktion einer Normalverteilung mit einem Erwartungswert von 520 g und einer kleineren Standardabweichung als jener der gegebenen Dichtefunktion.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

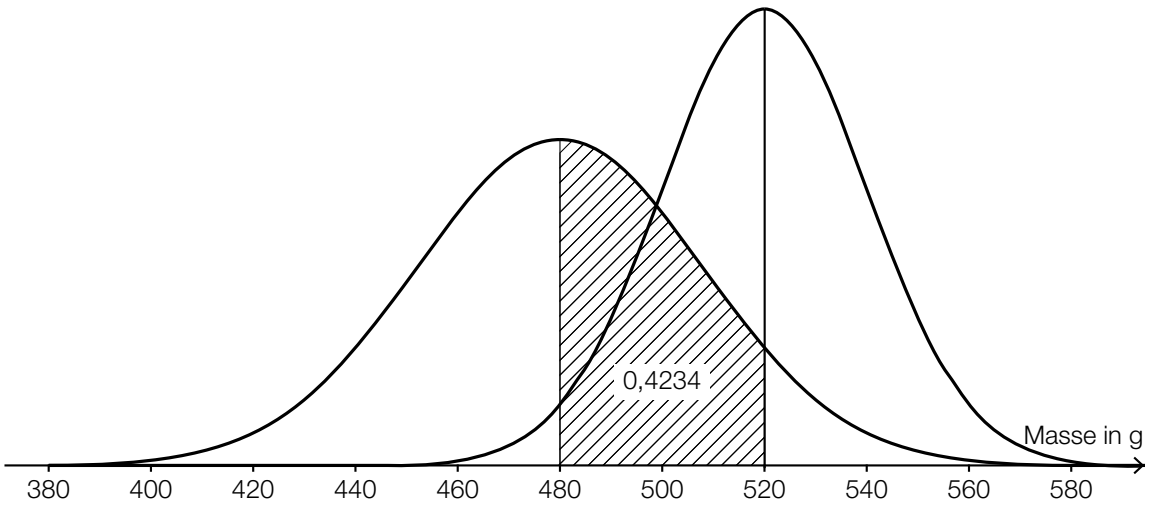
Möglicher Lösungsweg

a) Der Median liegt in der Klasse 2.

$\sqrt{\frac{(5-23)^2 \cdot 4 + (15-23)^2 \cdot 48 + (25-23)^2 \cdot 27 + (35-23)^2 \cdot 11 + (45-23)^2 \cdot 5 + (55-23)^2 \cdot 5}{100}}$	☒

b) Es gilt, dass mindestens 25 % der Werte kleiner oder gleich $q_1 = 41$ °C sind. Daher können nicht mindestens 80 % der gelieferten Pizzen eine Temperatur von über 45 °C haben.

c) Wegen der Symmetrie der Glockenkurve gilt:
$P(X \geq 520) = 0{,}5 - 0{,}4234 = 0{,}0766$
X ... Masse in g



Lösungsschlüssel

a) 1 × C1: für die richtige Angabe derjenigen Klasse, in der der Median liegt
1 × C2: für das richtige Ankreuzen

b) 1 × D: für die richtige Argumentation

c) 1 × B: für das richtige Ermitteln der Wahrscheinlichkeit
1 × A: für das richtige Skizzieren des Graphen der Dichtefunktion (Maximumstelle bei 520 g, Glockenkurve höher und schmäler als in der gegebenen Darstellung)

Wahlmöglichkeiten beim Fliegen*

Aufgabennummer: A_265

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

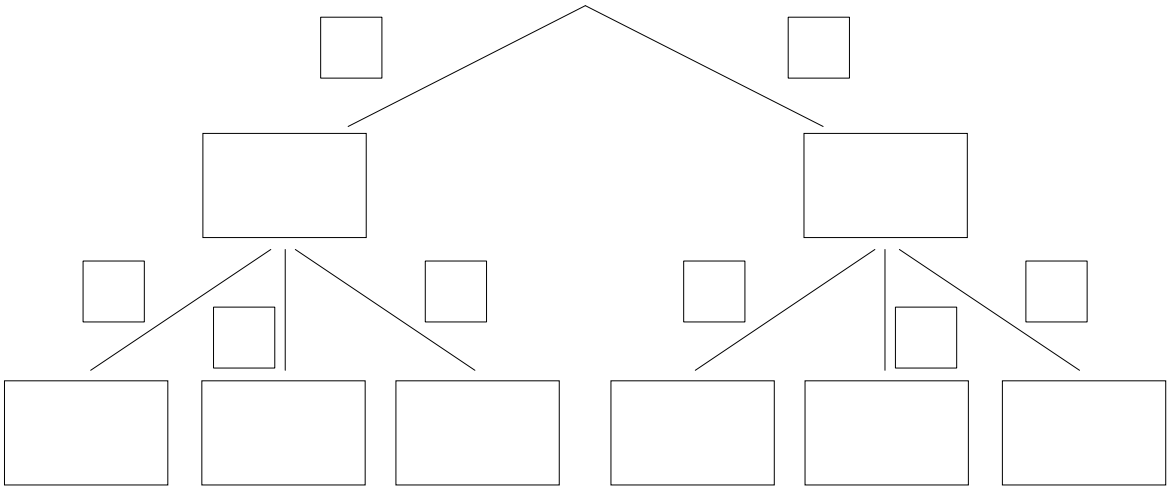
a) Beim Buchen eines Fluges kann man zwischen der Economy Class (E) und der Business Class (B) wählen. In jeder der beiden Klassen muss man entweder einen Fensterplatz (F), einen Platz am Gang (G) oder einen Platz in der Mitte (M) wählen.

Erfahrungsgemäß wählen 90 % der Fluggäste die Economy Class, die übrigen 10 % wählen die Business Class.

Von den Fluggästen der Business Class wünschen sich 80 % einen Fensterplatz und 10 % einen Platz in der Mitte.

Von den Fluggästen der Economy Class wünschen sich 75 % einen Fensterplatz und 15 % einen Platz am Gang.

– Vervollständigen Sie das nachstehende Baumdiagramm so, dass es den beschriebenen Sachverhalt wiedergibt.



– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sich ein zufällig ausgewählter Fluggast einen Fensterplatz wünscht.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Auf einem Flug mit Verpflegung steht auch ein vegetarisches Gericht zur Auswahl. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fluggast das vegetarische Gericht wählt, beträgt p. Die Wahl jedes Fluggastes wird unabhängig von jener der anderen Fluggäste getroffen.

Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens einer der insgesamt n Fluggäste das vegetarische Gericht wählt, beträgt 99 %.

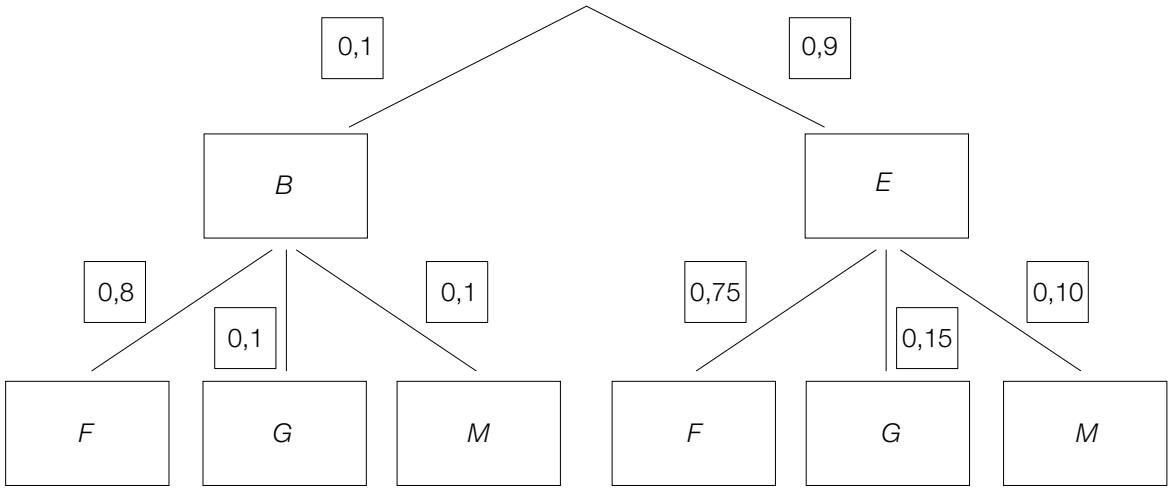
– Kreuzen Sie die für diesen Zusammenhang zutreffende Gleichung an. *[1 aus 5]*

$1 - (1 - p)^n = 0{,}99$	☐
$(1 - p)^n = 0{,}99$	☐
$1 - (1 - p)^n = 0{,}01$	☐
$1 - p^n = 0{,}01$	☐
$1 - p^n = 0{,}99$	☐

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



P(„Fensterplatz“) = 0,1 · 0,8 + 0,9 · 0,75 = 0,755

b)

$1 - (1 - p)^n = 0{,}99$	☒

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Vervollständigen des Baumdiagramms
1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit

b) 1 × C: für das richtige Ankreuzen

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Flussläufe und Pegelstände*

Aufgabennummer: A_266

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Während eines Hochwassers wurde über den Zeitraum von einer Woche der Pegelstand eines Flusses ermittelt. Den Messergebnissen zufolge kann der zeitliche Verlauf des Pegelstands näherungsweise durch die Funktion p beschrieben werden:

$p(t) = -3{,}5 \cdot 10^{-6} \cdot t^3 + 6{,}3 \cdot 10^{-4} \cdot t^2 - 0{,}011 \cdot t + 7{,}661$ mit $0 \leq t \leq 168$

t ... Zeit in h
$p(t)$ ... Pegelstand zur Zeit t in m

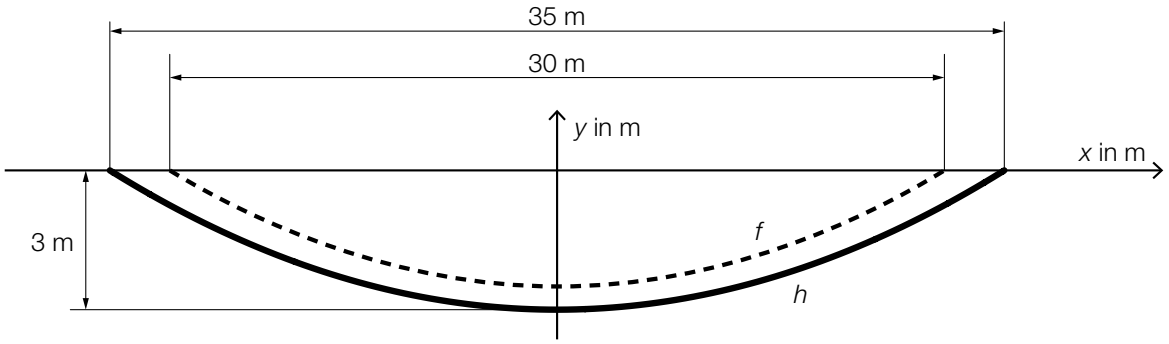
– Berechnen Sie die Abweichung des höchsten Pegelstands während des Hochwassers vom „üblichen“ Pegelstand von 2,5 m.

Zur Zeit t_1 gilt: $p''(t_1) = 0$

– Interpretieren Sie die Bedeutung von t_1 im gegebenen Sachzusammenhang.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Auf einem annähernd geradlinig verlaufenden Abschnitt eines Flusses soll das Flussbett verbreitert und vertieft werden. In der nachstehenden Abbildung ist das Flussbett im Querschnitt dargestellt.



f ... Profillinie des ursprünglichen Flussbetts
h ... Profillinie des neuen Flussbetts

f und *h* sind Polynomfunktionen 2. Grades mit zur *y*-Achse symmetrischen Graphen.

Ein Teilstück des Flussbetts mit der Länge *L* (in m) wird ausgebaggert.

– Interpretieren Sie unter Angabe der entsprechenden Einheit, was mit dem folgenden Ausdruck im gegebenen Sachzusammenhang berechnet wird:
$2 \cdot \left| \int_0^{17,5} h(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{15} f(x)\,\mathrm{d}x \right| \cdot L$
– Erstellen Sie mithilfe der obigen Abbildung eine Gleichung der Funktion *h*.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Berechnung des Hochpunkts H von p im gegebenen Intervall mittels Technologieeinsatz:
$p'(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad H = (110{,}52... \mid 9{,}41...)$
Abweichung: $9{,}41... - 2{,}5 = 6{,}91...$
Die Abweichung betrug rund 6,9 m.

Zur Zeit t_1 ist der Pegelstand am stärksten gestiegen.

b) Mit dem Ausdruck wird das Volumen des dabei anfallenden Aushubs in m^3 berechnet.

$h(x) = a \cdot x^2 + b$
$h(0) = -3$
$h(17{,}5) = 0$

oder:

$-3 = a \cdot 0^2 + b$
$0 = a \cdot 17{,}5^2 + b$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$h(x) = \frac{12}{1\,225} \cdot x^2 - 3$

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für die richtige Berechnung der Abweichung des höchsten Pegelstands vom „üblichen“ Pegelstand
1 × C: für die richtige Interpretation im gegebenen Sachzusammenhang

b) 1 × C: für die richtige Interpretation im gegebenen Sachzusammenhang unter Angabe der Einheit
1 × A: für das richtige Erstellen der Funktionsgleichung

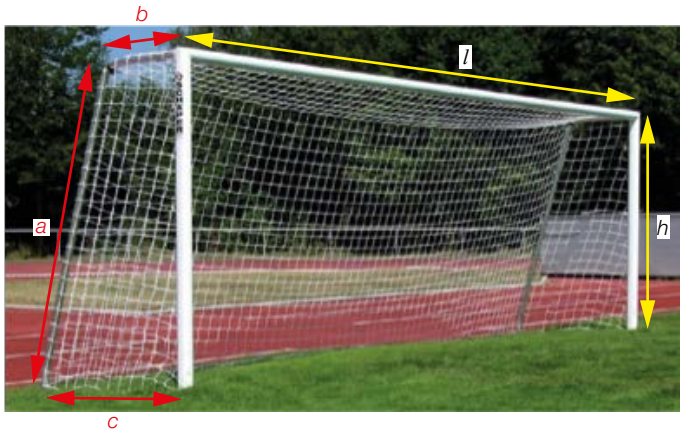
Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Fußballtor

Aufgabennummer: A_183

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Ein Fußballtor hat folgende Abmessungen:



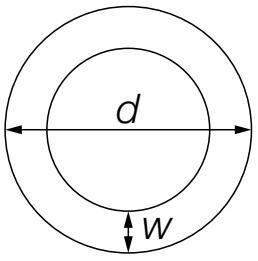
innerer Torrahmen:
$h = 2{,}44$ m
$l = 7{,}32$ m

Stützstangen:
$a = 2{,}62$ m
$b = 1{,}0$ m (verläuft parallel zum Boden)

$c = 1{,}95$ m

a) – Berechnen Sie, welchen Winkel die hintere Stützstange der Länge a mit dem Boden – also der Strecke mit der Länge c – einschließt.

b) Die zylindrischen Stützstangen des Fußballtors mit der Länge a sind innen hohl. Sie haben einen Außendurchmesser d und eine Wandstärke w. Die Stangen werden aus Aluminium mit einer Dichte von $\rho = 2{,}7$ kg/dm³ gefertigt.



– Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung des Volumens V einer Stützstange der Länge a.

$V =$ _____

– Berechnen Sie die Masse einer Stützstange der Länge $a = 2{,}62$ m mit $d = 60$ mm und $w = 1{,}5$ mm.

c) Für ein Fußballtor mit den gegebenen Abmessungen soll ein neues Netz gekauft werden. Wegen des Verlustes beim Zuschneiden wird um 10 % mehr Netzfläche gekauft, als eigentlich benötigt wird.

– Berechnen Sie, wie viele Quadratmeter Netz gekauft werden müssen. Gehen Sie davon aus, dass die Rückfläche und die obere Fläche des Tores rechteckig sind.

d) Ein bestimmter Tormann hält einen Elfmeter mit einer Wahrscheinlichkeit von 20 %. In einem Fußballmatch werden 3 Elfmeter auf sein Tor geschossen. (Die Schüsse erfolgen unabhängig voneinander und die Wahrscheinlichkeit bleibt konstant.)

– Veranschaulichen Sie die Situation in einem Baumdiagramm.
– Interpretieren Sie die Wahrscheinlichkeit P, die mit der nachstehenden Formel berechnet wird, im gegebenen Sachzusammenhang.

$P = 1 - 0{,}8^3$

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $\alpha = \arccos\left(\frac{c-b}{a}\right)$

$\alpha = \arccos\left(\frac{0{,}95}{2{,}62}\right) = 68{,}7403\ldots°$

$\alpha \approx 68{,}7°$

b) Volumen einer Stange der Länge a:

$$V = \frac{d^2 \cdot \pi}{4} \cdot a - \frac{(d - 2 \cdot w)^2 \cdot \pi}{4} \cdot a = \pi \cdot (d \cdot w - w^2) \cdot a$$

Masse der Stützstange:
$m = V \cdot \rho = \pi \cdot (0{,}6 \cdot 0{,}015 - 0{,}015^2) \cdot 26{,}2 \cdot 2{,}7$ (Längen in dm, Dichte in kg/dm^3)
$m = 1{,}9501\ldots$ kg $\approx 1{,}95$ kg

c) Eine Seitenfläche ist ein Trapez:

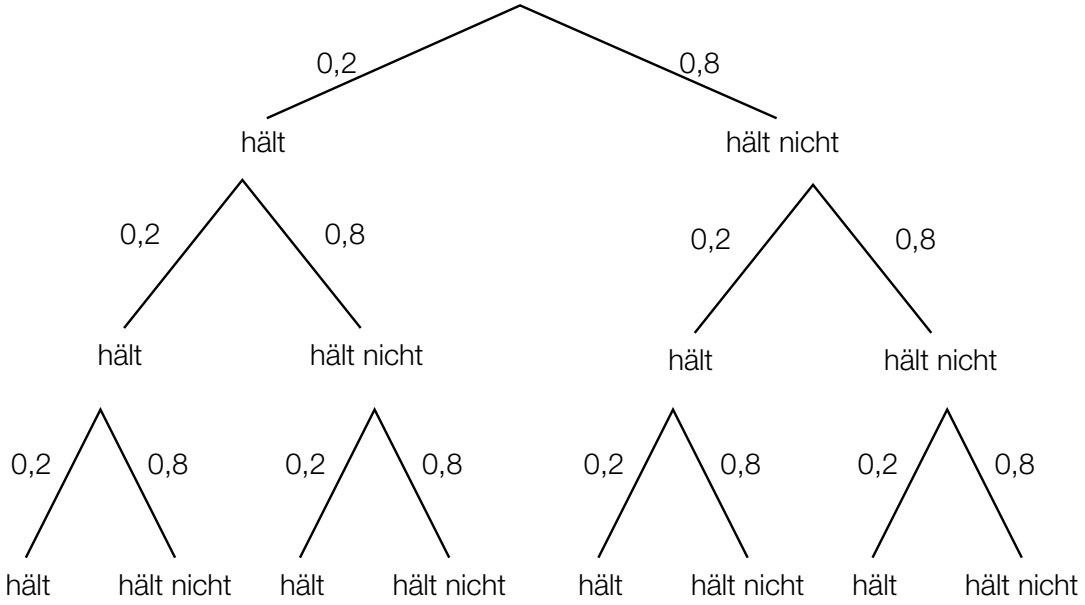
$$A = \frac{(c + b) \cdot h}{2} = \frac{(1{,}95 + 1{,}0) \cdot 2{,}44}{2} = 3{,}599 \text{ m}^2$$

Die Rückfläche und die obere Fläche ergeben zusammen ein Rechteck:
$A = (a + b) \cdot l = (2{,}62 + 1{,}0) \cdot 7{,}32 = 26{,}4984$ m^2

Gesamtfläche + 10 %:
$A = 1{,}1 \cdot (2 \cdot 3{,}599 + 26{,}4984) = 37{,}06604$ m^2

Es müssen rund 37,1 m^2 Netz gekauft werden.

d)



Die Formel gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass der Tormann von 3 Elfmetern mindestens einen Elfmeter hält.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 2 Algebra und Geometrie
d) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) 1 Zahlen und Maße
c) 1 Zahlen und Maße
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) A Modellieren und Transferieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) —
d) A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) leicht
d) mittel

Punkteanzahl:

a) 1
b) 2
c) 1
d) 2

Thema: Sport

Quellen: http://www.sporthof.eu/cms/front_content.php?idart=106
http://home.arcor.de/fussball-sport/regeln/regel01.html

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Schülerzahlen

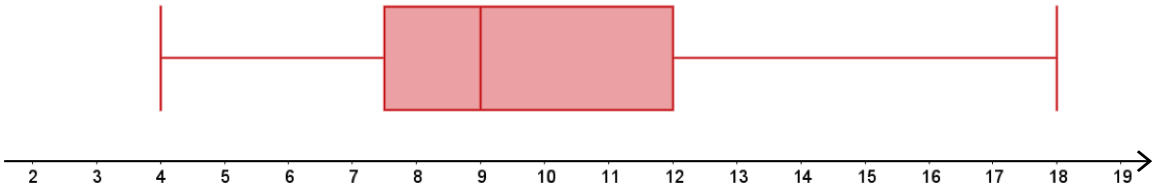
Aufgabennummer: A_215

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) An einer höheren Schule sind n Schülerinnen und Schüler angemeldet. Die Wahrscheinlichkeit, dass sich eine Schülerin oder ein Schüler am ersten Schultag wieder abmeldet, liegt erfahrungsgemäß bei 5 %.

– Interpretieren Sie folgenden mathematischen Ausdruck im Sachzusammenhang:
$n \cdot 0{,}05$
– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sich von 53 angemeldeten Schülerinnen und Schülern keine/keiner am ersten Schultag wieder abmeldet.

b) In einer Schule kann die Anzahl der Mädchen in den einzelnen Klassen durch den nachstehenden Boxplot dargestellt werden.



Anzahl der Mädchen pro Klasse

– Lesen Sie aus dem Boxplot die Spannweite sowie den Median ab.

Ein Mädchen wechselt während des Schuljahres von einer Klasse zur anderen.
Kreuzen Sie die zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]*

Der Median könnte sich ändern.	☐
Der Median wird sich ändern, das arithmetische Mittel wird gleich bleiben.	☐
Das arithmetische Mittel könnte sich ändern.	☐
Das arithmetische Mittel wird sich ändern, der Median wird gleich bleiben.	☐
Sowohl der Median als auch das arithmetische Mittel werden sich ändern.	☐

c) Die Entwicklung der Anzahl der Schüler/innen aller BHS in Oberösterreich in den Jahren 2000 bis 2013 lässt sich näherungsweise mithilfe der Funktion N beschreiben.

$N(t) = -35{,}5 \cdot t^2 + 635 \cdot t + 22\,072$

t ... Zeit in Jahren seit dem Jahr 2000 ($t = 0$ für das Jahr 2000)
$N(t)$ ... Anzahl der Schüler/innen zur Zeit t

– Berechnen Sie den mittleren Anstieg der Anzahl der Schüler/innen im Zeitraum von 2000 bis 2008.

Ab dem Jahr 2009 ist die Anzahl der Schüler/innen rückläufig. Experten gehen davon aus, dass der tiefste Wert (Minimum) im Jahr 2018 erreicht ist.

Es soll eine Polynomfunktion 3. Grades S erstellt werden, die den gleichen Anfangswert und den gleichen Extremwert wie die Funktion N hat und die Prognose für das Jahr 2018 berücksichtigt.

$S(t) = a \cdot t^3 + b \cdot t^2 + c \cdot t + d$

$S(t)$ … Anzahl der Schüler/innen zur Zeit t

– Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten a, b, c und d.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $n \cdot 0{,}05$ beschreibt bei n angemeldeten Schülerinnen und Schülern die zu erwartende Anzahl derer, die sich am ersten Schultag wieder abmelden.

X … Anzahl derjenigen Schüler/innen, die sich am ersten Schultag abmelden

Bionomialverteilung mit $n = 53$ und $p = 0{,}05$:

$P(X = 0) = 0{,}0659... \approx 6{,}6\ \%$

b) Der Median ist 9. Die Spannweite beträgt 14.

Der Median könnte sich ändern.	☒
[...]	
[...]	
[...]	
[...]	

c) $\frac{N(8) - N(0)}{8 - 0} = \frac{24\,880 - 22\,072}{8} = 351$

Der mittlere Anstieg der Anzahl der Schüler/innen im Zeitraum von 2000 bis 2008 beträgt 351 Schüler/innen pro Jahr.

Berechnung des Hochpunkts $(t_{max} | N_{max})$ von N mittels Technologieeinsatz:

$t_{max} = \frac{635}{71}$, $N_{max} \approx 24\,912$

Gleichungssystem:

I: $S(0) = 22\,072$ bzw. $d = 22\,072$

II: $S(t_{max}) = N_{max}$ bzw. $a \cdot \left(\frac{635}{71}\right)^3 + b \cdot \left(\frac{635}{71}\right)^2 + c \cdot \left(\frac{635}{71}\right) + d = 24\,912$

III: $S'(t_{max}) = 0$ bzw. $a \cdot 3 \cdot \left(\frac{635}{71}\right)^2 + b \cdot 2 \cdot \left(\frac{635}{71}\right) + c = 0$

IV: $S'(18) = 0$ bzw. $a \cdot 3 \cdot 18^2 + b \cdot 2 \cdot 18 + c = 0$

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 5 Stochastik
c) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) 2 Algebra und Geometrie

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Kommunizieren
b) C Interpretieren und Kommunizieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) —
c) A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) schwer

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2
c) 3

Thema: Sonstiges

Quellen: —

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

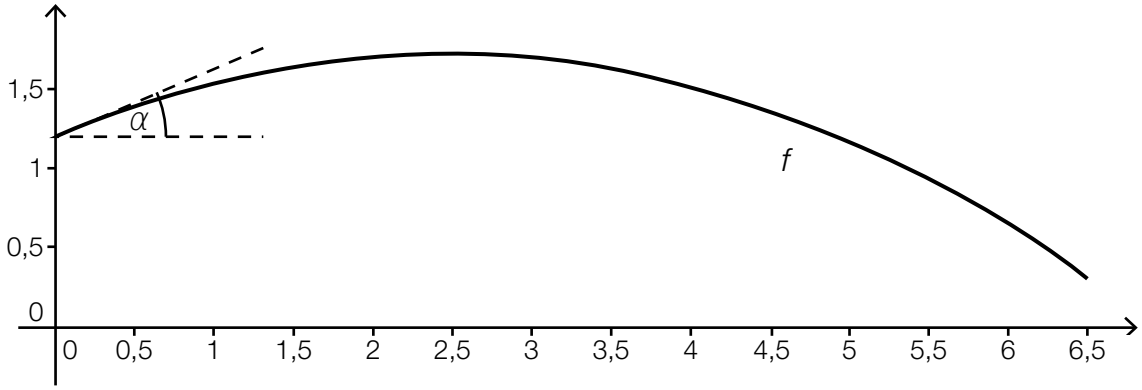
Weitsprung (2)

Aufgabennummer: A_213

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Sprungkurven beim Weitsprung lassen sich näherungsweise durch quadratische Funktionen beschreiben.

a) Der Körperschwerpunkt eines Weitspringers befindet sich beim Absprung in einer Höhe von 1,2 m. Der Absprungwinkel α beträgt 23°. Die Sprungweite beträgt 6,5 m. An der Stelle der Landung befindet sich der Körperschwerpunkt 30 cm über dem Boden.
In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der zugehörigen Funktion f dargestellt.



$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

x … horizontale Entfernung des Körperschwerpunkts von der Absprungstelle in m
$f(x)$ … Höhe des Körperschwerpunkts in der Entfernung x in m

– Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung des Koeffizienten a, b und c.

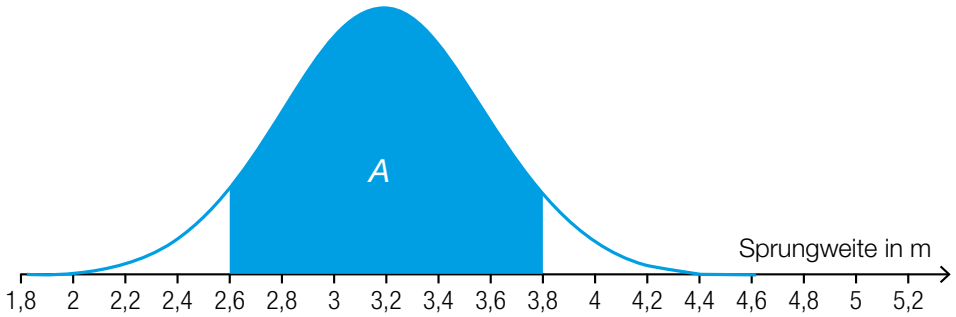
b) Zur Modellierung von Sprungparabeln können verschiedene quadratische Funktionen verwendet werden.

– Ordnen Sie den Funktionsgleichungen jeweils die zugehörige Bedingung aus A bis D zu.
[2 zu 4]

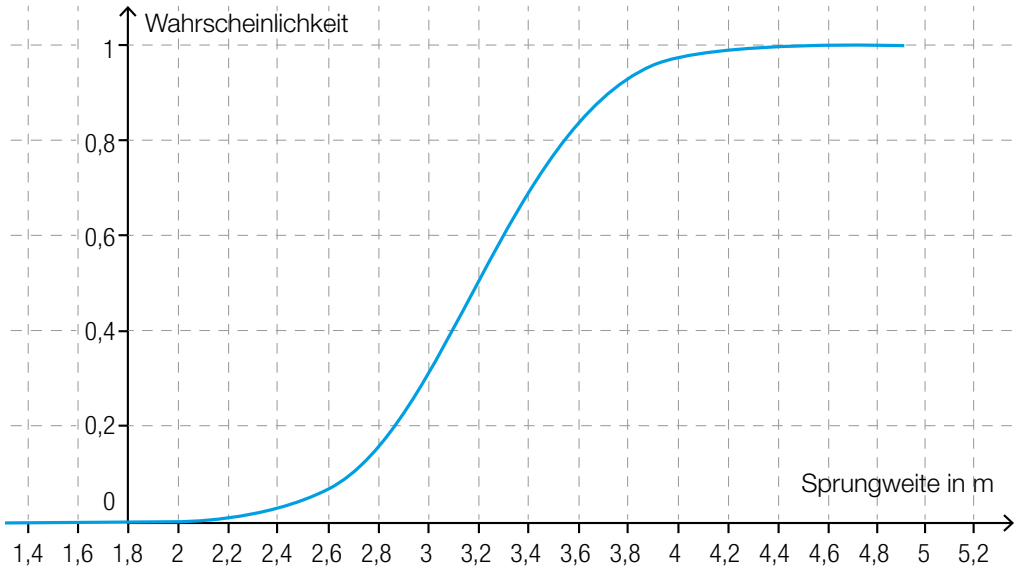
$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x$ $(a < 0, b > 0)$	
$f(x) = a \cdot x^2 + c$ $(a < 0, c > 0)$	

A	Der Graph der Funktion f geht durch den Ursprung des Koordinatensystems.
B	Der Graph der Funktion f ist symmetrisch zur Ordinatenachse.
C	Der Graph der Funktion ist nach oben offen.
D	Der Graph der Funktion hat keine Nullstelle.

c) Die Sprungweite in der Altersgruppe der 15-jährigen Burschen kann als annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 3{,}2$ m und der Standardabweichung $\sigma = 0{,}4$ m angenommen werden.
Die nachstehende Grafik stellt den Graphen der zugehörigen Dichtefunktion dar.



– Beschreiben Sie die Bedeutung des Inhalts der markierten Fläche *A* im gegebenen Sachzusammenhang.
– Markieren Sie den Wert des Inhalts der Fläche *A* im unten dargestellten Graphen der zugehörigen Verteilungsfunktion.



Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

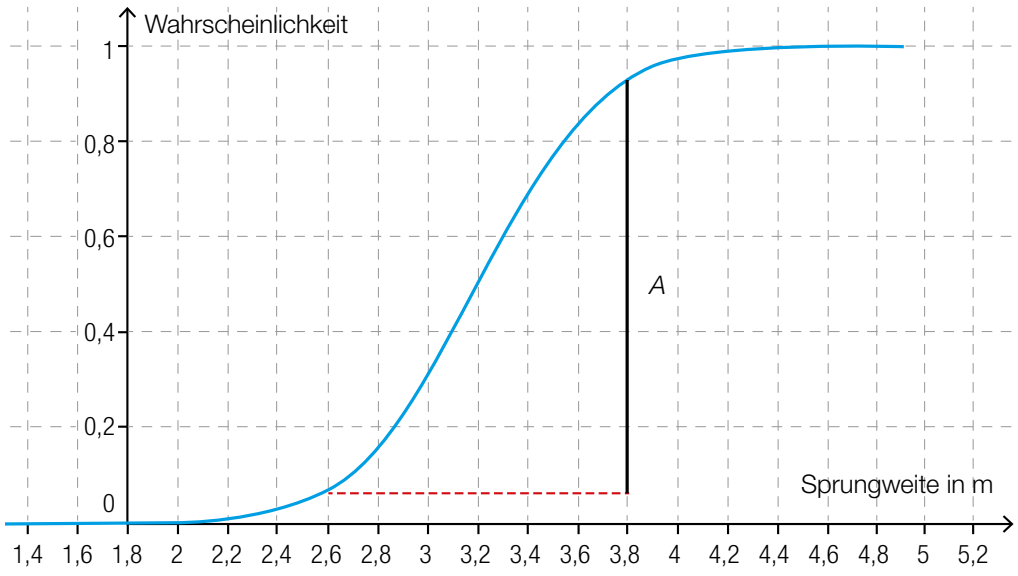
a) I: $f(0) = 1{,}2$ bzw. $c = 1{,}2$
II: $f'(0) = \tan(23°)$ bzw. $b = \tan(23°)$
III: $f(6{,}5) = 0{,}3$ bzw. $42{,}25 \cdot a + 6{,}5 \cdot b + c = 0{,}3$

b)

$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x$ $(a < 0, b > 0)$	A
$f(x) = a \cdot x^2 + c$ $(a < 0, c > 0)$	B

A	Der Graph der Funktion f geht durch den Ursprung des Koordinatensystems.
B	Der Graph der Funktion f ist symmetrisch zur Ordinatenachse.
C	Der Graph der Funktion ist nach oben offen.
D	Der Graph der Funktion hat keine Nullstelle.

c) Der Flächeninhalt entspricht der Wahrscheinlichkeit, dass die Sprungweite eines zufällig ausgewählten Burschen zwischen 2,6 m und 3,8 m liegt.



Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) —
c) A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) schwer

Punkteanzahl:

a) 2
b) 1
c) 2

Thema: Sport

Quellen: —

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Freier Fall eines Apfels

Aufgabennummer: A_181

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Ein Apfel fällt vom Baum auf den Boden. Die senkrechte Entfernung des frei fallenden Apfels vom Boden in Abhängigkeit von der Zeit t wird durch die Funktion h beschrieben:

$h(t) = u - 5 \cdot t^2$ mit $u \in \mathbb{R} > 0$

t … Fallzeit in s
$h(t)$ … Abstand des Apfels zur Zeit t zum Boden in m

a) – Zeigen Sie, dass die Konstante u der Fallhöhe entspricht.
– Erstellen Sie eine Formel für die Berechnung der Fallzeit t_F des Apfels, wenn u bekannt ist.

$t_F =$ _____

b) Ein Apfel fällt aus einer Höhe von 15 m.

– Berechnen Sie den Betrag der mittleren Geschwindigkeit des Apfels für den Zeitraum $0{,}5 \text{ s} \leq t \leq 1{,}5 \text{ s}$.
– Beschreiben Sie, wie man vorgeht, um für einen bestimmten Zeitpunkt t_0 die Momentangeschwindigkeit zu erhalten.

c) – Berechnen Sie den Betrag der Beschleunigung des Apfels.

d) Der Luftwiderstand F_W, den der Apfel während seines Falls erfährt, lässt sich durch folgende Formel berechnen:

$F_W = k \cdot v^2$

F_W … Luftwiderstand
k … Konstante
v … Geschwindigkeit des Apfels

– Kreuzen Sie die zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]*

Der Luftwiderstand F_W ist proportional zur Geschwindigkeit v.	☐
Wird der Luftwiderstand F_W verdoppelt, vervierfacht sich die Geschwindigkeit v.	☐
Der Luftwiderstand F_W ist proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit v.	☐
Haben Luftwiderstand F_W und Geschwindigkeit v den gleichen Zahlenwert, so gilt $k = 1$.	☐
Nimmt die Geschwindigkeit v um den Wert 1 zu, dann nimmt der Luftwiderstand um den Wert k zu.	☐

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich der Apfel am höchsten Punkt ($\triangleq$ Fallhöhe).
$h(0) = u - 5 \cdot 0^2 = u$

Ist der Apfel am Boden angelangt, gilt $h(t) = 0$.
$0 = u - 5 \cdot t_F^2$
$t_F = \sqrt{\frac{u}{5}}$

b) $\left|\frac{h(1{,}5) - h(0{,}5)}{1{,}5 - 0{,}5}\right| = \left|\frac{3{,}75 - 13{,}75}{1}\right| = 10$

Im Zeitintervall [0,5; 1,5] fällt der Apfel mit einer mittleren Geschwindigkeit von 10 m/s.

Um die Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt t_0 zu bestimmen, muss die 1. Ableitung $h'(t)$ berechnet und dann für t der Wert von t_0 eingesetzt werden.

c) Zur Berechnung der Beschleunigung muss $h(t)$ zweimal abgeleitet werden.
$h'(t) = -10 \cdot t$
$|a(t)| = |h''(t)| = 10$
Die Beschleunigung beträgt 10 m/s^2.

d)

[…]	
[…]	
Der Luftwiderstand F_W ist proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit v.	☒
[…]	
[…]	

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 4 Analysis
c) 4 Analysis
d) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) —
c) —
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) —
d) —

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) leicht
c) leicht
d) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2
c) 1
d) 1

Thema: Sonstiges

Quellen: —

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Blut und Blutdruck

Aufgabennummer: A_223

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Der Blutkreislauf ist ein wichtiges Versorgungssystem des menschlichen Körpers.

a) Ein wichtiger Bestandteil des Blutes sind die roten Blutkörperchen. 1 cm^3 Blut enthält rund 5 Milliarden rote Blutkörperchen.

– Ermitteln Sie, wie viele rote Blutkörperchen sich in 6 L Blut befinden. Geben Sie das Ergebnis in Gleitkommadarstellung in der Form $a \cdot 10^k$ mit $1 \leq a < 10$ an.

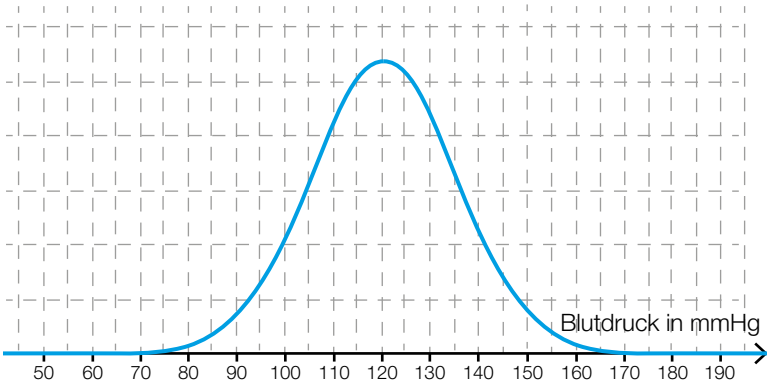
Der Durchmesser eines roten Blutkörperchens beträgt 7,5 µm.
Nehmen Sie an, man würde alle Blutkörperchen, die in 6 L Blut enthalten sind, aneinanderreihen.

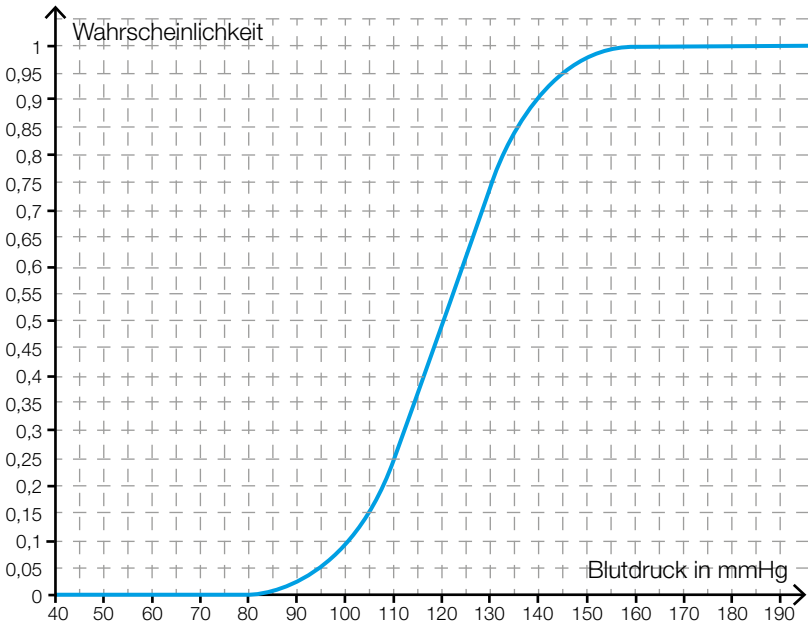
– Berechnen Sie, welche Länge in Metern die Kette der aneinandergereihten Blutkörperchen hätte.

b) Der Blutdruck wird in Millimeter Quecksilbersäule (mmHg) angegeben. Der Blutdruck von gesunden Menschen ist annähernd normalverteilt. Ein Blutdruck zwischen 110 mmHg und 130 mmHg wird als normal empfunden.

Die unten stehenden beiden Abbildungen zeigen die Graphen der Dichtefunktion und der Verteilungsfunktion für diese Normalverteilung.

– Kennzeichnen Sie in der Abbildung der Dichtefunktion den Erwartungswert μ sowie die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter gesunder Mensch einen Blutdruck zwischen 110 mmHg und 130 mmHg hat.
– Ermitteln Sie mithilfe der Verteilungsfunktion die Wahrscheinlichkeit, dass der Blutdruck eines zufällig ausgewählten gesunden Menschen zwischen 110 mmHg und 130 mmHg beträgt.





c) Die Konzentration eines blutdrucksenkenden Wirkstoffs im Blut eines Patienten kann für die ersten 10 Stunden nach Einnahme des Medikaments näherungsweise durch die Funktion *f* beschrieben werden:

$f(t) = 8 \cdot t \cdot e^{-0,75 \cdot t}$

t … Zeit in Stunden nach der Einnahme
f(*t*) … Konzentration des Wirkstoffs im Blut zur Zeit *t* in Milligramm pro Liter (mg/L)

– Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate der Konzentration im Zeitintervall [2; 4] nach der Einnahme.

d) Untersuchungen haben ergeben, dass ein bestimmtes Medikament mit einer Wahrscheinlichkeit von 52 % den Blutdruck senkt.
80 zufällig ausgewählte Personen erhalten das Medikament.

– Beschreiben Sie die Bedeutung des folgenden Ausdrucks im gegebenen Sachzusammenhang:

$$\sum_{i=0}^{8} \binom{80}{i} \cdot 0,48^{i} \cdot 0,52^{80-i}$$

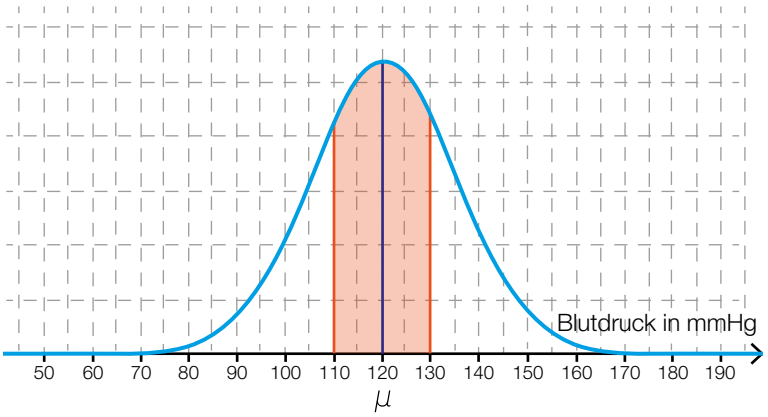
Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

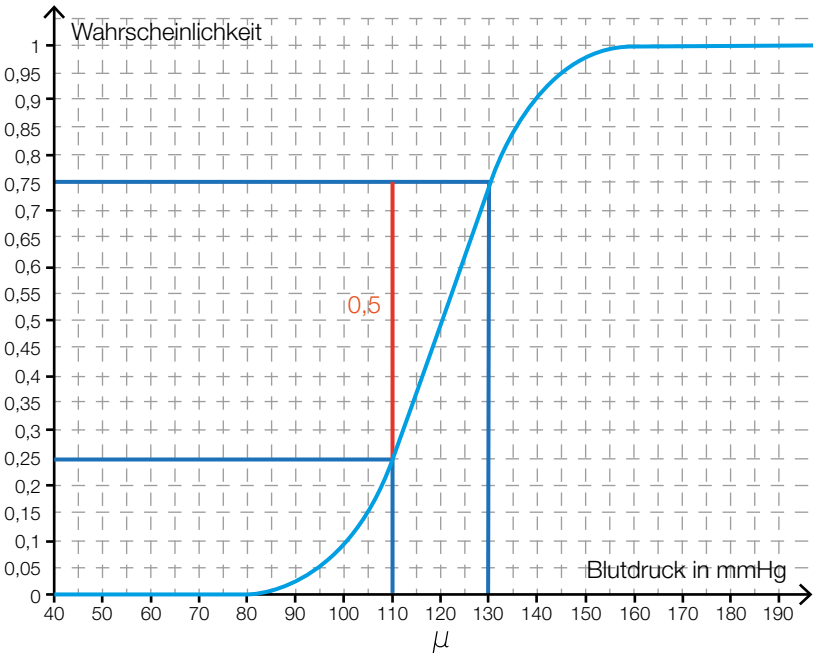
Möglicher Lösungsweg

a) $1\ cm^3 = 1\ ml$
$6\ L = 6 \cdot 10^3\ ml$
$6 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 10^9 = 3 \cdot 10^{13}$ Blutkörperchen

$7{,}5 \cdot 10^{-6} \cdot 3 \cdot 10^{13} = 2{,}25 \cdot 10^8$
Die Kette wäre $2{,}25 \cdot 10^8$ m lang.

b)





X … Blutdruck in mmHg
$P(110 \leq X \leq 130) = P(X \leq 130) - P(X \leq 110) = 0{,}75 - 0{,}25 = 0{,}5 = 50\ \%$

c) $\frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = -0{,}988...$

Die Konzentration des Wirkstoffs nimmt im Zeitintervall [2; 4] im Mittel um rund 0,99 mg/L pro Stunde ab.

d) Mit dem Ausdruck wird die Wahrscheinlichkeit berechnet, dass das Medikament bei höchstens 8 der 80 Personen den Blutdruck nicht senkt.
(oder: Mit dem Ausdruck wird die Wahrscheinlichkeit berechnet, dass das Medikament bei mindestens 72 der 80 Personen den Blutdruck senkt.)

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 1 Zahlen und Maße
b) 5 Stochastik
c) 4 Analysis
d) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) —
d) —

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) leicht
d) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2
c) 1
d) 1

Thema: Medizin

Quellen: —

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Medikamentenabbau (2)

Aufgabennummer: A_231

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Bei Seereisen treten immer wieder Fälle von Seekrankheit bei den Passagieren auf. Verschiedene Medikamente stehen zu deren Behandlung zur Verfügung.

a) Der Medikamentenabbau im Blut erfolgt nach dem exponentiellen Zerfallsgesetz:

$N(t) = N_0 \cdot e^{-0{,}231 \cdot t}$

t … Zeit in Stunden (h)
$N(t)$ … Wirkstoffmenge im Blut zur Zeit t in mg
N_0 … Ausgangsmenge des Wirkstoffs im Blut in mg

– Beschreiben Sie, was mit der Gleichung $0{,}5 = e^{-0{,}231 \cdot t}$ im gegebenen Sachzusammenhang ermittelt werden kann.

Ein Passagier nimmt um 18:00 Uhr und um 22:00 Uhr je eine Tablette mit 50 mg Wirkstoffmenge zu sich.

– Ermitteln Sie, wie viel Milligramm Wirkstoffmenge der Passagier am nächsten Tag um 4:00 Uhr noch im Körper hat.

b) Ein neuartiges Medikament steht in zwei Formen *A* und *B* zur Verfügung. Der Abbau des Wirkstoffs wurde für beide Formen in regelmäßigen Zeitabständen gemessen.

Die beiden Wertetabellen zeigen die Wirkstoffmenge $W(t)$ in Abhängigkeit von der Zeit t:

Versuchsreihe für *A*	
t in Stunden	$W(t)$ in mg/L
0	30,0
1	27,0
2	24,3
3	21,87

Versuchsreihe für *B*	
t in Stunden	$W(t)$ in mg/L
0	30,00
1	29,25
2	28,50
3	27,75

– Begründen Sie anhand der obigen Tabellen, warum die Versuchsreihe für *A* durch ein exponentielles und die Versuchsreihe für *B* hingegen durch ein lineares Modell beschrieben werden kann.
– Erstellen Sie eine Funktionsgleichung für den zeitlichen Abbau der Wirkstoffmenge des Medikaments in der Form *B*.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Mithilfe dieser Gleichung wird ermittelt, nach welcher Zeit von der ursprünglichen Wirkstoffmenge nur noch die Hälfte vorhanden ist (Halbwertszeit).

Mit $N_0 = 50$ und $t = 0$ für 18:00 Uhr gilt:
Wirkstoffmenge vor Einnahme der 2. Tablette = $N(4) = 50 \cdot e^{-0{,}231 \cdot 4} = 19{,}846\ldots$

Mit $N_0 = 19{,}846\ldots + 50 = 69{,}846\ldots$ und $t = 0$ für 22:00 Uhr gilt:
Wirkstoffmenge um 4:00 Uhr = $N(6) = 69{,}846\ldots \cdot e^{-0{,}231 \cdot 6} = 17{,}466\ldots$

Um 4:00 Uhr hat der Passagier noch rund 17,47 mg des Wirkstoffs im Blut.

b) Bei der Versuchsreihe für *A* handelt es sich um eine exponentielle Abnahme, da die Wirkstoffmenge in jeder Stunde um denselben prozentuellen Wert (nämlich um 10 %) abnimmt. Die Versuchsreihe für *B* kann durch ein lineares Modell beschrieben werden, da die Wirkstoffmenge in jeder Stunde um denselben konstanten Wert (nämlich um 0,75 mg/L) abnimmt.

$W(t) = 30 - 0{,}75 \cdot t$

t … Zeit in Stunden (h)
$W(t)$ … Wirkstoffmenge zur Zeit t in mg/L

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) D Argumentieren und Kommunizieren

Nebenhandlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2

Thema: Sonstiges

Quellen: –

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

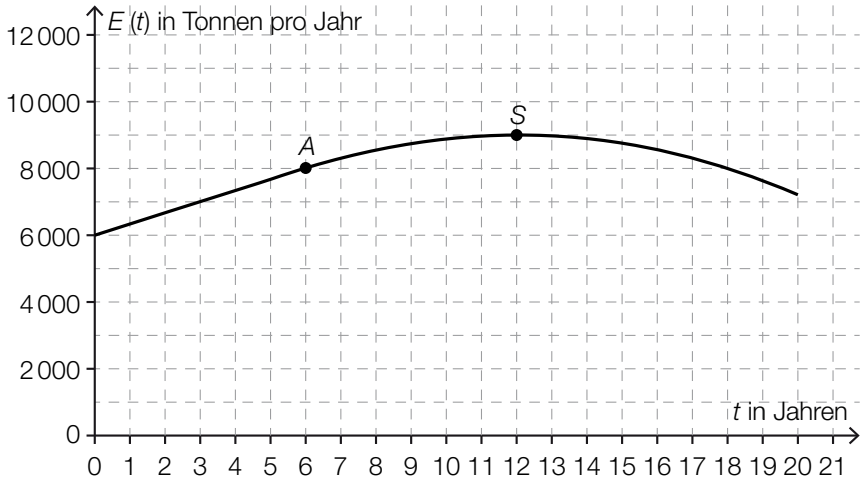
Feinstaubemissionen

Aufgabennummer: A_180

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Für den Zeitraum von 1990 bis 2010 wurden die Feinstaubemissionen in verschiedenen Bereichen aufgezeichnet.

a) Die Aufzeichnungen der durch den Straßenverkehr hervorgerufenen Feinstaubemissionen lassen sich annähernd durch die Funktion E modellieren, deren Graph in der nachstehenden Abbildung dargestellt ist.



t … Zeit in Jahren nach Jahresbeginn 1990 mit $0 \leq t \leq 20$
$E(t)$ … Emission zur Zeit t in Tonnen pro Jahr

Die Funktion E verläuft in den ersten 6 Jahren linear und ab dem Zeitpunkt $t = 6$ quadratisch:

$$E(t) = \begin{cases} \square & \text{für } 0 \leq t < 6 \\ a \cdot t^2 + b \cdot t + c & \text{für } 6 \leq t \leq 20 \end{cases}$$

– Ergänzen Sie den fehlenden Ausdruck in der obigen Funktionsgleichung.
– Erstellen Sie mithilfe der Informationen, die Sie den in der obigen Abbildung eingezeichneten Punkten A und S (= Scheitelpunkt der Parabel) entnehmen können, ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten a, b und c.
– Berechnen Sie die Koeffizienten a, b und c.

b) Die Feinstaubemissionswerte der Industrie lassen sich annähernd durch die Funktion E mit $E(t) = 2{,}5 \cdot t^2 - 50 \cdot t + 12\,500$ beschreiben.

t … Zeit in Jahren nach Jahresbeginn 1990 mit $0 \leq t \leq 20$
$E(t)$ … Emission zur Zeit t in Tonnen pro Jahr

F ist derjenige Flächeninhalt, der vom Graphen der Funktion E und der horizontalen Achse im Intervall [0; 20] eingeschlossen wird.

– Berechnen Sie den Flächeninhalt F.
– Interpretieren Sie die Bedeutung des Flächeninhalts F im gegebenen Sachzusammenhang.

c) Aufzeichnungen über die Feinstaubemissionswerte der Landwirtschaft ergaben folgende Wertetabelle:

Jahr	1990	1995	2010
Emission in Tonnen pro Jahr	6 000	5 950	5 800

– Zeigen Sie, dass die drei Wertepaare Koordinaten von Punkten beschreiben, die auf einer Geraden liegen.
– Berechnen Sie bei gleichbleibender Entwicklung den voraussichtlichen Emissionswert im Jahr 2020.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $E(t) = \begin{cases} \boxed{6\,000 + 333{,}\overline{3} \cdot t} & \text{für } 0 \le t < 6 \\ a \cdot t^2 + b \cdot t + c & \text{für } 6 \le t \le 20 \end{cases}$

Für $6 \le t \le 20$ gilt: $E(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c$

$E'(t) = 2 \cdot a \cdot t + b$

$E(6) = 8\,000 \quad \Rightarrow \quad 36 \cdot a + 6 \cdot b + c = 8\,000$

$E(12) = 9\,000 \quad \Rightarrow \quad 144 \cdot a + 12 \cdot b + c = 9\,000$

$E'(12) = 0 \quad \Rightarrow \quad 24 \cdot a + b = 0$

Lösung des Gleichungssystems mittels Technologieeinsatz:

$a = -\frac{250}{9}$, $b = \frac{2\,000}{3}$, $c = 5\,000$

b) $F = \int_0^{20} (2{,}5 \cdot t^2 - 50 \cdot t + 12\,500)\,\mathrm{d}t = 246\,666{,}6\ldots \approx 246\,667$

Im Zeitintervall [0; 20] sind insgesamt rund 246 667 Tonnen Feinstaub angefallen.

c) Steigung der Geraden durch die Punkte (1990|6 000) und (1995|5 950):

$\frac{5\,950 - 6\,000}{1995 - 1990} = -10$

Steigung der Geraden durch die Punkte (1995|5 950) und (2010|5 800):

$\frac{5\,800 - 5\,950}{2010 - 1995} = -10$

Die Steigungen stimmen überein, daher liegen die 3 Punkte auf einer Geraden.

voraussichtlicher Emissionswert im Jahr 2020: $5\,800 - 10 \cdot 10 = 5\,700$ Tonnen

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 4 Analysis
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) D Argumentieren und Kommunizieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) leicht
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 3
b) 2
c) 2

Thema: Umwelt

Quelle: IW-Ausbildung März 2014 Modul 2

Weitsprung (1)*

Aufgabennummer: A_111

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Bei einem Weitsprungwettbewerb einer Schulklasse werden die Sprungweiten (in Metern) von 12 Mädchen aufgezeichnet:

4,40	4,15	3,73	3,72	3,63	3,52	3,29	3,00	2,28	2,50	4,30	4,80

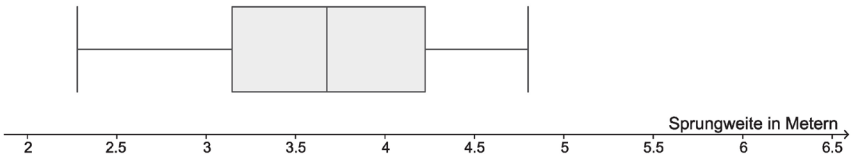
a) – Berechnen Sie den arithmetischen Mittelwert und die Standardabweichung der Sprungweiten.

b) Die Sprungweiten werden in die Noten im Gegenstand *Bewegung und Sport* eingearbeitet. Es gilt die folgende Notenskala:

Sehr gut	ab 4 m
Gut	3,5 m – 3,99 m
Befriedigend	3,0 m – 3,49 m
Genügend	2,5 m – 2,99 m
Nicht genügend	unter 2,5 m

– Erstellen Sie ein Säulen- oder Balkendiagramm, in welchem die Häufigkeiten der jeweiligen Noten dargestellt werden.

c) In der untenstehenden Abbildung ist der Boxplot der Sprungweiten dargestellt.



– Lesen Sie aus dem Boxplot den Median und das 1. Quartil ab.
– Erklären Sie deren Bedeutung.

d) In dieser Schulklasse beträgt die Standardabweichung der Sprungweiten bei den Mädchen an einem anderen Wettbewerbstag 0,70 Meter und bei den Burschen 0,49 Meter.

– Erklären Sie, was die beiden Werte im Vergleich über die Leistungen der beiden Gruppen aussagen.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

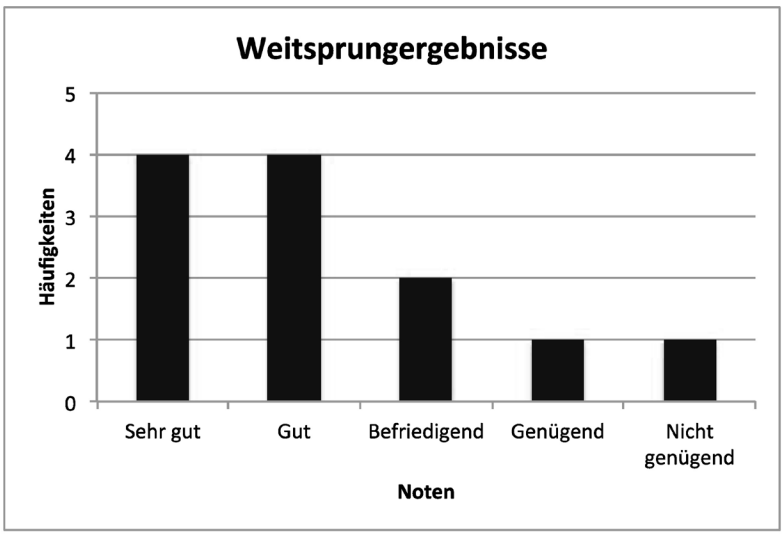
* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

a) Lösung mithilfe von Technologie:
arithmetischer Mittelwert: 3,61 Meter
Standardabweichung: 0,73 Meter

Gemäß Kompetenzkatalog Teil A, Kommentar 5.2 gilt auch die Berechnung der empirischen Standardabweichung (hier: s = 0,76 m) als richtige Lösung.

b)



c) Median: 3,7 m *Toleranzbereich: [3,6; 3,8]*
1. Quartil: 3,15 m *Toleranzbereich: [3,1; 3,3]*

Median: 50 % aller Werte liegen rechts bzw. links vom Median.
1. Quartil: 25 % aller Werte liegen links vom 1. Quartil.

d) Die Streuung der Sprungweiten innerhalb der Gruppe der Mädchen ist größer als die Streuung innerhalb der Gruppe der Burschen.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B für die richtige Berechnung des arithmetischen Mittelwertes und der Standardabweichung
b) 1 × A für die richtige Erstellung des Säulen- oder Balkendiagramms
c) 1 × C für das richtige Ablesen von Median und 1. Quartil
1 × D für die richtige Erklärung zur Bedeutung von Median und 1. Quartil
d) 1 × D für die richtige Erklärung zum Vergleich der Standardabweichungen

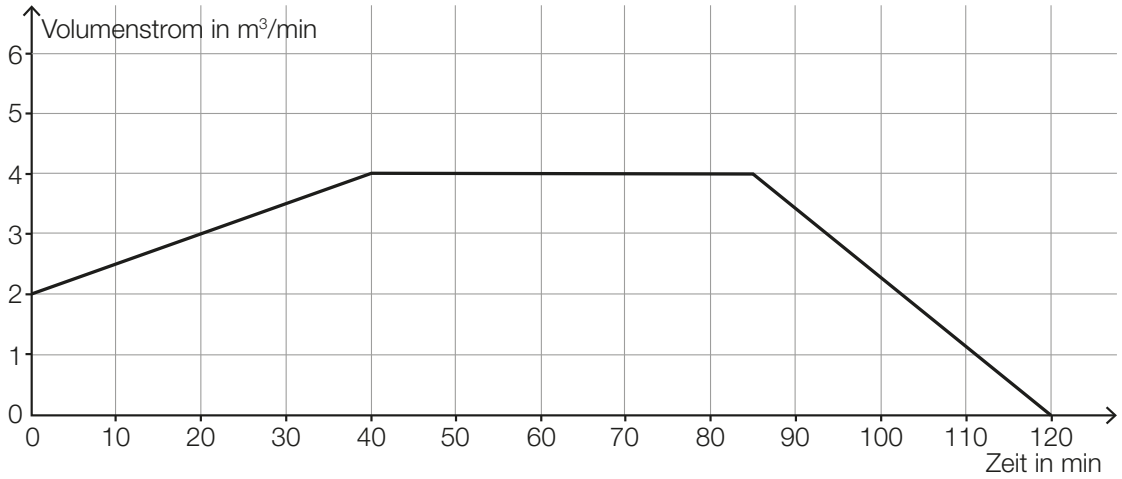
Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Volumenstrom (2)

Aufgabennummer: A_197

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

In einer Industrieanlage wird zur Kühlung Wasser benötigt. Der Volumenstrom beschreibt, wie viel Kubikmeter Kühlwasser pro Minute in die Anlage fließen. Der gesamte Kühlvorgang dauert 120 min und kann mehrmals am Tag stattfinden. Im unten dargestellten Graphen ist die Abhängigkeit des Volumenstroms von der Zeit dargestellt.



a) – Kennzeichnen Sie in der obigen Abbildung die insgesamt zugeflossene Wassermenge nach 40 min.
– Berechnen Sie, wie viel Wasser für den gesamten Kühlvorgang verwendet wird.

b) – Beschreiben Sie, was mit dem Ausdruck $\frac{0-2}{120-0}$ im gegebenen Sachzusammenhang berechnet wird.

c) Ein neues Ventil wird installiert. Der Volumenstrom V_1 wird mit der nachstehenden Funktion beschrieben.

$V_1(t) = \frac{13}{200} \cdot t + 2$ mit $0 \leq t \leq 40$

t … Zeit in min

$V_1(t)$ … Volumenstrom zum Zeitpunkt t in m^3/min

– Berechnen Sie die relative Änderung vom Volumenstrom V zum Volumenstrom V_1 bei 20 min.

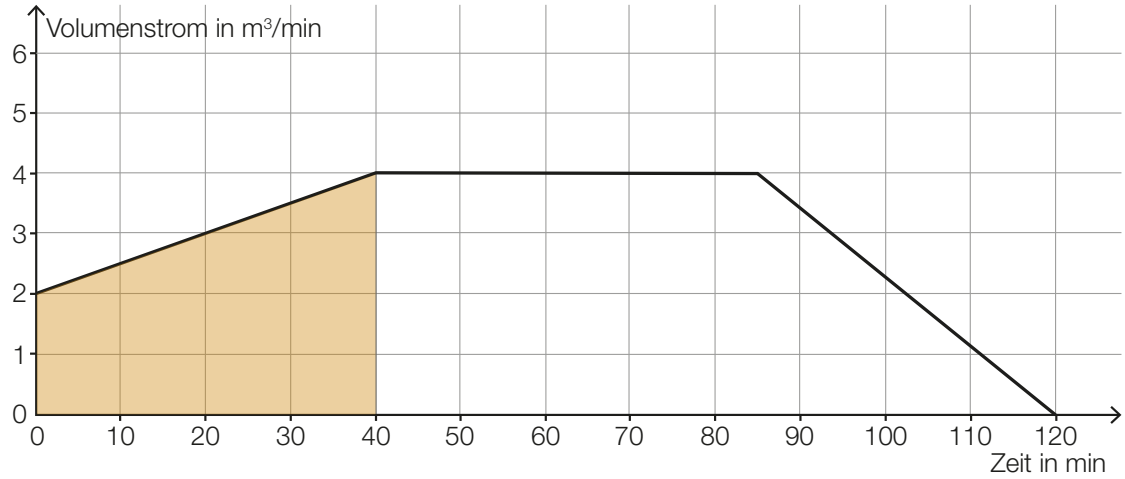
d) Der Volumenstrom wird durch ein Ventil gesteuert. Erfahrungsgemäß öffnet sich das Ventil mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,1 % nicht vollständig.

– Berechnen Sie, wie oft das Ventil mindestens geöffnet werden muss, damit es sich mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % mindestens 1-mal nicht vollständig geöffnet hat.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



Zur Berechnung des Wasservolumens wird der Flächeninhalt in Teilstücke aufgeteilt.

$A = \frac{2+4}{2} \cdot 40 + 4 \cdot 45 + \frac{4 \cdot 35}{2} = 370$ (Ablesegenauigkeit bei 85 min: ±2 min)

Während des Kühlvorgangs werden 370 m³ Wasser benötigt.

b) Der Ausdruck beschreibt die mittlere Änderungsrate des Volumenstroms während des Kühlvorgangs.

c) $V_1(20) = 3{,}3$

Ablesen aus dem Graphen ergibt $V(20) = 3$.

$\frac{V_1(20) - V(20)}{V(20)} = \frac{3{,}3 - 3}{3} = 0{,}1$

Die relative Änderung vom alten zum neuen Volumenstrom beträgt 10 %.

d) X … Anzahl der fehlerhaften Öffnungen des Ventils

$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$

$1 - 0{,}999^n \geq 0{,}9$

$n \geq 2\,301{,}4...$ somit $n \geq 2\,302$ (Aufrunden aufgrund von „mindestens 90 %“)

Das Ventil muss sich mindestens 2 302-mal öffnen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % mindestens 1-mal ein Fehler auftritt.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 4 Analysis
c) 4 Analysis
d) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) —
c) —
d) —

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel
d) schwer

Punkteanzahl:

a) 2
b) 1
c) 1
d) 1

Thema: Sonstiges

Quellen: —

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

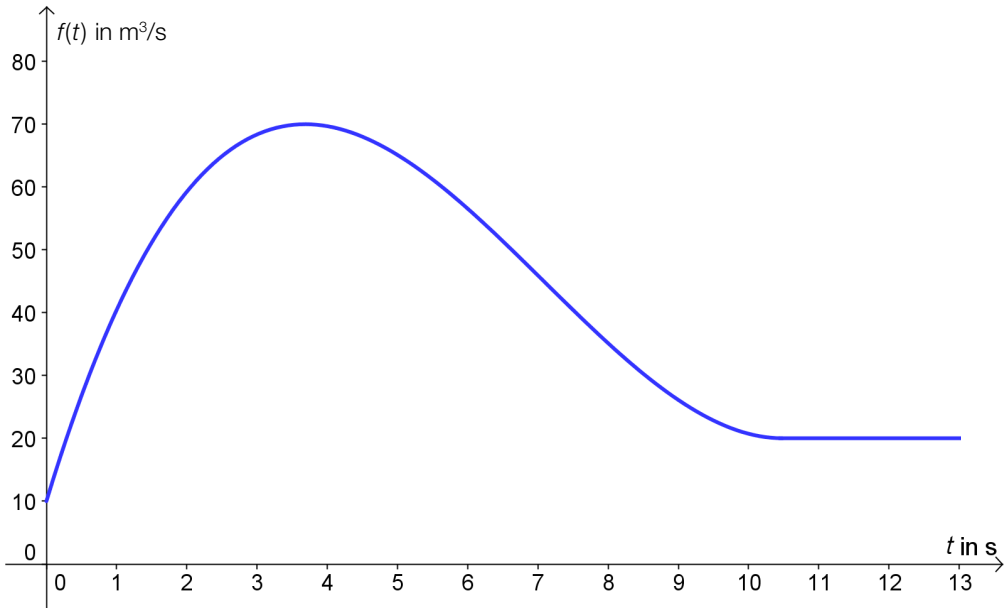
Volumenstrom (1)

Aufgabennummer: A_049

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Wasser an einer Staustufe wird über Kanäle in einen Fluss abgelassen.
Das Wasservolumen, das pro Zeiteinheit an einer Messstelle in einem Kanal vorbeifließt, bezeichnet man als Volumenstrom.
Dieser geht nach dem Öffnen des Tores nach einem Schwall allmählich in einen konstanten Volumenstrom über.

a) Der nachstehende Graph stellt die Entwicklung des Volumenstroms f im 1. Kanal in den ersten 13 Sekunden nach Öffnen des Tores dar.



– Geben Sie an, wann der Volumenstrom am stärksten ist.
– Bestimmen Sie die momentane Änderungsrate zum Zeitpunkt $t = 1$ s und zum Zeitpunkt $t = 6{,}5$ s.

b) Der Verlauf des Volumenstroms im 2. Kanal folgt annähernd folgender Funktion:

$f(t) = 0{,}32t^3 - 6{,}76t^2 + 36{,}85t + 10$ im Zeitintervall $0 \text{ s} \le t \le 10{,}4$ s,
$f(t) = 22{,}03$; für $t > 10{,}4$ s

t … Zeit in Sekunden (s)
$f(t)$ … Volumenstrom in m³/s nach t Sekunden

– Berechnen Sie das gesamte Wasservolumen V, das in den ersten 13 Sekunden durch den 2. Kanal geflossen ist. Es gilt der Zusammenhang $V = \int_a^b f(t)\,dt$.
Runden Sie das Ergebnis auf 2 Nachkommastellen.

c) Der Volumenstrom im 3. Kanal beträgt zu Beginn 12 m³/s. Der höchste Wert wird nach 4 Sekunden erreicht und beträgt 80 m³/s. Nach 11 Sekunden geht am Minimum der Funktion der Schwall in einen konstanten Strom über.

– Erstellen Sie das Gleichungssystem, mit dessen Hilfe man eine Polynomfunktion 3. Grades

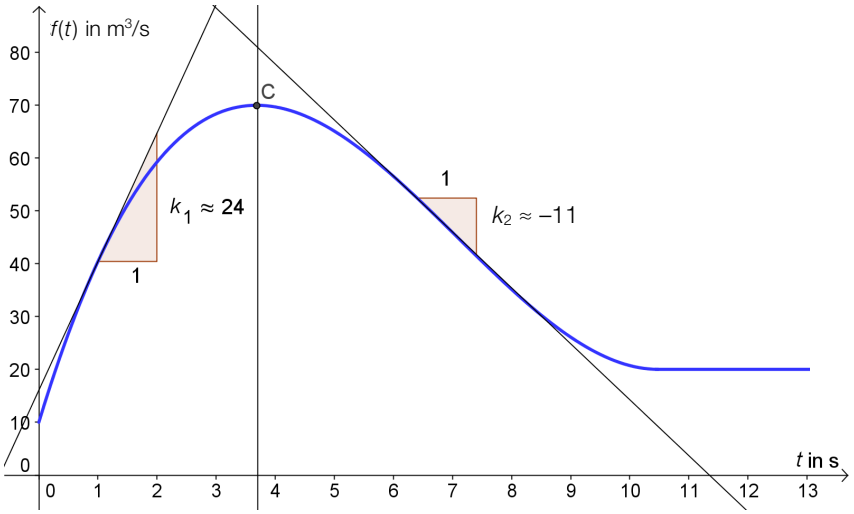
$$g(t) = a \cdot t^3 + b \cdot t^2 + c \cdot t + d$$

berechnen kann, die den Verlauf des Volumenstroms in den ersten 11 Sekunden beschreibt.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



Der Volumenstrom f im Kanal erreicht nach ungefähr 3,7 s den höchsten Wert von ca. 70 m³/s.
Einzeichnen der Tangenten bei $t = 1$ und bei $t = 6{,}5$
Der Anstieg der Kurve (= momentane Änderungsrate) beträgt bei 1 s ca. 24 m³/s²,
bei 6,5 s ca. –11 m³/s².
(Das bedeutet, dass der Schwall rasch ansteigt, aber langsamer abnimmt.)

Alle Beschreibungen, die die wichtigsten hier erfassten Daten enthalten, sind zulässig.
Die Ablesungen können bei dieser Aufgabe wegen des Einzeichnens der Tangenten bei Bearbeitung per Hand ungenau ausfallen. Das ist zu tolerieren.

b) $V(13) = \int_0^{10,4} (0{,}32t^3 - 6{,}76t^2 + 36{,}85t + 10)\,dt + 22{,}03 \cdot (13 - 10{,}4)$

$V(13) = 498{,}041\ldots + 57{,}278 \approx 555{,}32$

In 13 Sekunden fließen insgesamt rund 555,32 m³ Wasser durch den Kanal.

c) $t = 0$; $g(0) = 12 \rightarrow d = 12$
$t = 4$; $g(4) = 80 \rightarrow 64a + 16b + 4c + d = 80$
$t = 4$; $g'(4) = 0 \rightarrow 48a + 8b + c = 0$ … Maximum $\qquad (g'(t) = 3a \cdot t^2 + 2b \cdot t + c)$
$t = 11$; $g'(11) = 0 \rightarrow 363a + 22b + c = 0$ … Minimum

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 4 Analysis
c) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 2 Algebra und Geometrie

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) –
b) A Modellieren und Transferieren
c) –

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) schwer
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2
c) 2

Thema: Technik

Quellen: –

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Brückenbögen

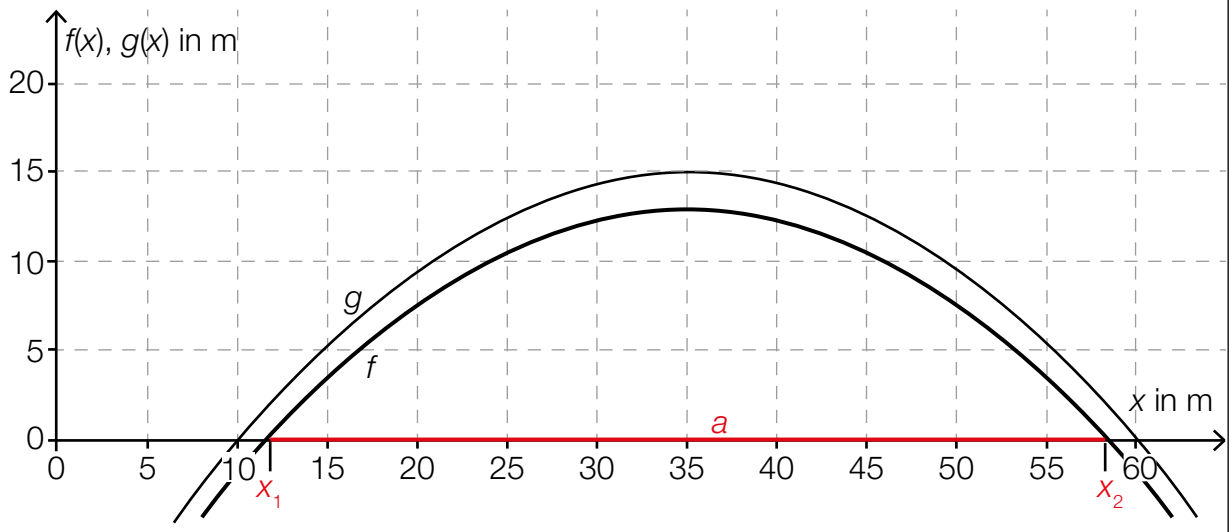
Aufgabennummer: A_216

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Der innere Teil eines Brückenbogens kann durch die Funktion f beschrieben werden. Der äußere Teil des Brückenbogens kann durch die Funktion g beschrieben werden.

$$f(x) = -\frac{3}{125} \cdot x^2 + \frac{42}{25} \cdot x - \frac{82}{5}$$

x, $f(x)$, $g(x)$ … Koordinaten in m



a) – Berechnen Sie die Spannweite a (siehe obige Grafik) des inneren Teils des Brückenbogens.
– Berechnen Sie den höchsten Punkt des inneren Teils des Brückenbogens.

b) – Dokumentieren Sie, wie man mithilfe der Differenzialrechnung den Steigungswinkel des inneren Teils des Brückenbogens an einer beliebigen Stelle x_0 ermitteln kann.

c) Der äußere Teil des Brückenbogens verläuft so, dass der senkrechte Abstand zum inneren Brückenbogen in jedem Punkt 2 m beträgt.

– Stellen Sie eine Gleichung der Funktion g auf, die den äußeren Teil des Brückenbogens beschreibt.

Der Flächeninhalt zwischen den beiden Teilen des Brückenbogens und der x-Achse soll berechnet werden.

– Kreuzen Sie diejenige Formel an, die zur Berechnung dieses Flächeninhalts verwendet werden kann. *[1 aus 5]*

$\int_{10}^{60} (g(x) - f(x))\,dx$	☐
$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx - \int_{10}^{60} g(x)\,dx$	☐
$\int_{10}^{60} g(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$	☐
$\int_{x_1}^{x_2} (g(x) - f(x))\,dx$	☐
$\int_{10}^{60} g(x)\,dx - \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$	☐

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Berechnen der Nullstellen:

$$-\frac{3}{125} \cdot x^2 + \frac{42}{25} \cdot x - \frac{82}{5} = 0$$

$x_1 = 11{,}726...$; $x_2 = 58{,}273...$
$a = x_2 - x_1 = 46{,}547... \approx 46{,}55$ m

Der höchste Punkt ist der Scheitelpunkt des Graphen von f. Da die Parabel symmetrisch bezüglich S ist, liegt die x-Koordinate des Scheitels genau zwischen den beiden Nullstellen.
$x_S = 35$; $f(x_S) = 13$
$S = (35 \mid 13)$

b) Die 1. Ableitung der Funktion f wird ermittelt.
x_0 wird in die 1. Ableitung eingesetzt und man erhält die Steigung k an der Stelle x_0.
Der Steigungswinkel ist der Arcustangens der Steigung k.

c) $g(x) = -\frac{3}{125} \cdot x^2 + \frac{42}{25} \cdot x - \frac{72}{5}$

[...]	
[...]	
[...]	
[...]	
$\int_{10}^{60} g(x)\,dx - \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$	☒

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 4 Analysis
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) —
c) 4 Analysis

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) —
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) leicht
c) leicht

Punkteanzahl:

a) 2
b) 1
c) 2

Thema: Sonstiges

Quellen: —

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Orangen

Aufgabennummer: A_220

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Ein Orangenbauer teilt die Früchte einer Ernte nach ihrem Durchmesser ein.
Orangen mit einem Durchmesser von weniger als 6 cm und einem Durchmesser ab 10 cm bleiben unberücksichtigt.

Durchmesser d in cm	Anzahl der Orangen
$6 \leq d < 7$	120
$7 \leq d < 8$	289
$8 \leq d < 9$	378
$9 \leq d < 10$	185

– Erstellen Sie ein Säulendiagramm, das die Anzahl der Orangen pro Klasse darstellt.
– Berechnen Sie das arithmetische Mittel der Durchmesser aller Orangen.
(Verwenden Sie dazu die Klassenmitten.)

b) Frisch gepresster Orangensaft hat gewöhnlich einen Vitamin-C-Gehalt von 50 Milligramm pro Deziliter (mg/dl).
1 L frisch gepresster Orangensaft wird mit 500 ml Wasser verdünnt.

– Berechnen Sie die Vitamin-C-Menge in Milligramm, die in 0,3 L des verdünnten Orangensafts enthalten ist.

c) Der Abbau von Vitamin C im menschlichen Körper kann annähernd durch die Funktion N beschrieben werden:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-k \cdot t}$$

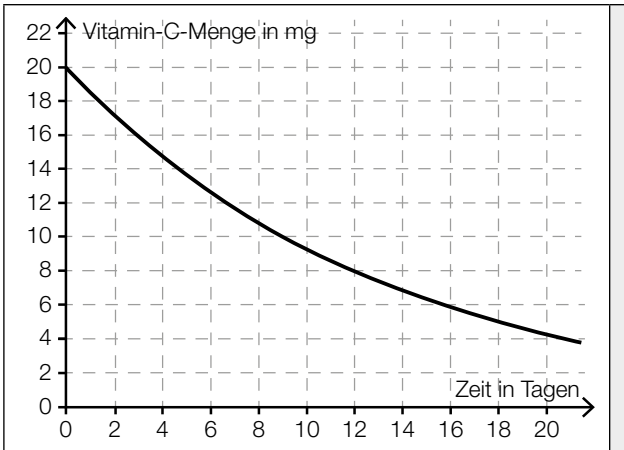
t … Zeit in Tagen nach der Aufnahme
$N(t)$ … Vitamin-C-Menge im Körper zur Zeit t in mg
$k > 0$ … Konstante
N_0 … Vitamin-C-Menge im Körper zur Zeit $t = 0$ in mg

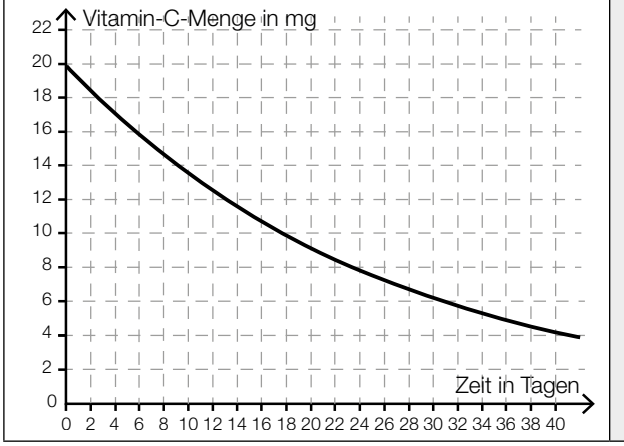
Im Körper einer bestimmten Person wird in den ersten 6 Tagen nach der Aufnahme etwa ein Achtel der aufgenommenen Vitamin-C-Menge abgebaut.

– Ermitteln Sie den Parameter k.

Die Halbwertszeit von Vitamin C im menschlichen Körper variiert sehr stark.

– Ordnen Sie den beiden Grafiken jeweils die korrekte Halbwertszeit aus A bis D zu.
[2 zu 4]



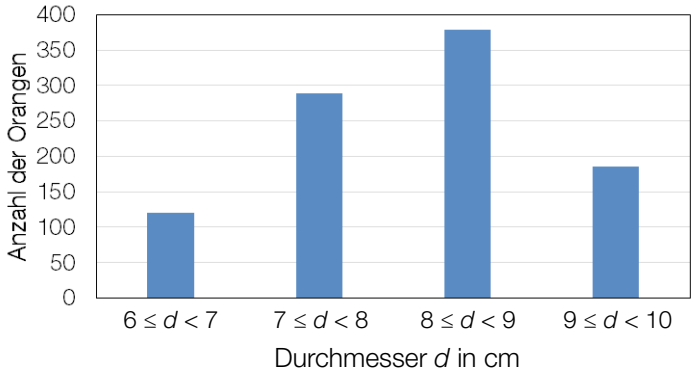


A	18 Tage
B	20 Tage
C	9 Tage
D	40 Tage

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



$\bar{x} = \frac{6{,}5 \cdot 120 + 7{,}5 \cdot 289 + 8{,}5 \cdot 378 + 9{,}5 \cdot 185}{972} = 8{,}14\ldots$

$\bar{x} \approx 8{,}1$ cm

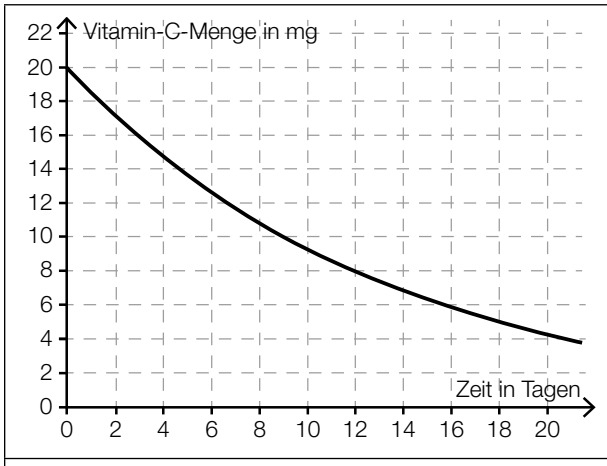
b) 1,5 L verdünnter Orangensaft … 500 mg Vitamin C
0,3 L verdünnter Orangensaft ... x mg Vitamin C

$x = \frac{0{,}3}{1{,}5} \cdot 500 = 100$

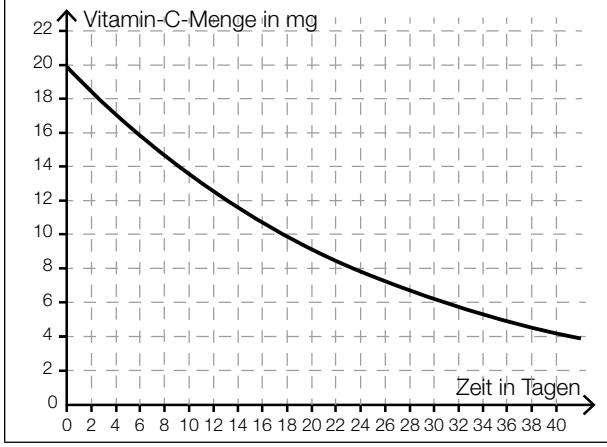
0,3 L des verdünnten Orangensafts enthalten 100 mg Vitamin C.

c) $N(t) = N_0 \cdot e^{-k \cdot t}$
$0{,}875 = e^{-6 \cdot k}$

Durch Umformung auf $k = \frac{\ln(0{,}875)}{-6}$ oder Lösen der Gleichung mit Technologieeinsatz erhält man k.
$k = 0{,}02225\ldots \approx 0{,}0223$



C



A

A	18 Tage
B	20 Tage
C	9 Tage
D	40 Tage

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 1 Zahlen und Maße
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) —
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) leicht
c) leicht

Punkteanzahl:

a) 2
b) 1
c) 2

Thema: Sonstiges

Quelle: http://www.vitalstoff-lexikon.de/Vitamine-A-C-D-E-K/Vitamin-C/

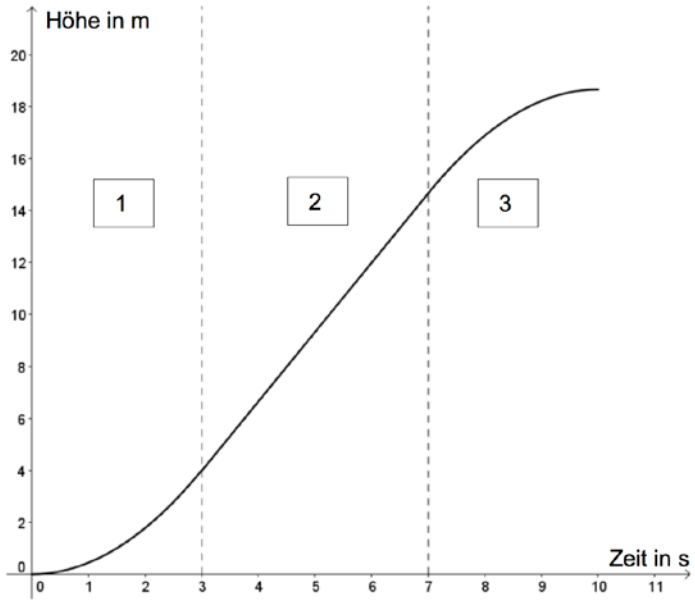
Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Fahrstuhl im Hochhaus

Aufgabennummer: A_221

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Ein Fahrstuhl fährt in einem Hochhaus nach oben. Die nachstehende Grafik stellt die erreichte Höhe in Metern in Abhängigkeit von der Zeit in Sekunden dar.



a) – Beschreiben Sie den Bewegungsablauf dieses Fahrstuhls in Bezug auf die Geschwindigkeit in den drei markierten Abschnitten in Worten.
– Lesen Sie aus der obigen Grafik ab, wann der Fahrstuhl seine maximale Geschwindigkeit während dieser Fahrt erreicht.

b) Der Anfahrtsvorgang in den ersten 3 Sekunden, in denen der Fahrstuhl 4 m zurücklegt, kann durch eine quadratische Funktion beschrieben werden. Der Scheitelpunkt des Funktionsgraphen liegt im Ursprung.

– Stellen Sie eine Gleichung dieser Weg-Zeit-Funktion auf.

c) Während des 3. Abschnitts gilt:

$$h(t) = -\frac{4}{9} \cdot (t - 10)^2 + \frac{56}{3} \text{ mit } 7 \leq t \leq 10$$

t … Zeit in s
$h(t)$ … Höhe zur Zeit t in m

– Erstellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Beschleunigung-Zeit-Funktion a.
– Beschreiben Sie, wie sich die Geschwindigkeit des Fahrstuhls ändert, wenn die Beschleunigung ein negativer, konstanter Wert ist.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) In den ersten 3 Sekunden wird der Aufzug immer schneller. Anschließend, bis zum Ende der 7. Sekunde, behält der Aufzug eine konstante Geschwindigkeit bei. Danach wird er gebremst und kommt zum Zeitpunkt $t = 10$ zum Stillstand.

Die maximale Geschwindigkeit wird nach 3 Sekunden erreicht.

b) $h(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t$

t … Zeit in s
$h(t)$ … Höhe (= zurückgelegter Weg) zur Zeit t in m

$$\left.\begin{array}{l} h(3) = 4 \;\Rightarrow\; 9 \cdot a + 3 \cdot b = 4 \\ h'(0) = 0 \;\Rightarrow\; b = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow\; a = \frac{4}{9},\ b = 0$$

$$h(t) = \frac{4}{9} \cdot t^2$$

c) $v(t) = h'(t) = -\frac{8}{9} \cdot (t - 10)$

$a(t) = h''(t) = -\frac{8}{9}$

Die Geschwindigkeit des Fahrstuhls nimmt gleichmäßig (linear) ab.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 4 Analysis
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) A Modellieren und Transferieren
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2
c) 2

Thema: Alltag

Quellen: —

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Medikamentenabbau (1)*

Aufgabennummer: A_251

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Der Abbau von Medikamenten im Körper kann näherungsweise durch exponentielle Modelle beschrieben werden.

a) Die nachstehende Tabelle gibt an, welche Menge $N(t)$ eines bestimmten Medikaments zur Zeit t im Körper vorhanden ist:

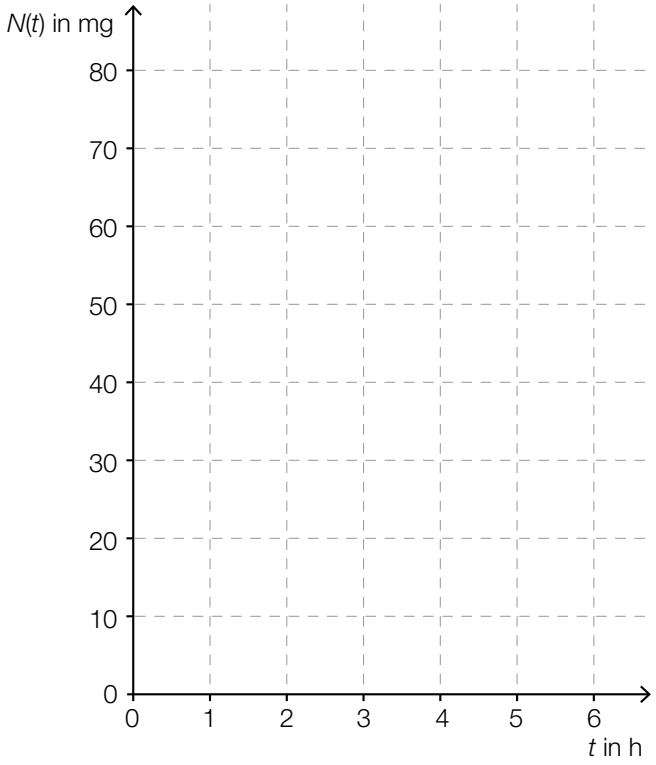
t in h	0	2	4
$N(t)$ in mg	100	60	36

– Erklären Sie, warum die in der Tabelle angegebenen Daten die Beschreibung des Medikamentenabbaus durch ein exponentielles Modell nahelegen.
– Erstellen Sie eine Gleichung derjenigen Exponentialfunktion N, die diesen Medikamentenabbau beschreibt.
– Berechnen Sie diejenige Menge des Medikaments, die zur Zeit $t = 3$ h im Körper vorhanden ist.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Ein anderes Medikament hat im Körper die Halbwertszeit 1,5 h. Am Anfang (t = 0 h) sind 80 mg des Medikaments im Körper vorhanden.
Der Medikamentenabbau im Körper kann näherungsweise durch eine Exponentialfunktion N beschrieben werden.

– Zeichnen Sie im nachstehenden Koordinatensystem den Graphen von N im Zeitintervall [0 h; 6 h] ein.



c) Ein Medikament hat im Körper eine Halbwertszeit $T_{1/2}$.

– Kreuzen Sie die zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]*

Nach einer Zeitdauer von $3 \cdot T_{1/2}$ ist $\frac{1}{6}$ der Ausgangsmenge vorhanden.	☐
Nach einer Zeitdauer von $2 \cdot T_{1/2}$ sind 75 % der Ausgangsmenge abgebaut.	☐
Nach einer Zeitdauer von $2 \cdot T_{1/2}$ sind 50 % der Ausgangsmenge vorhanden.	☐
Nach einer Zeitdauer von $3 \cdot T_{1/2}$ ist weniger als $\frac{1}{8}$ der Ausgangsmenge abgebaut.	☐
Nach einer Zeitdauer von $5 \cdot T_{1/2}$ sind 10 % der Ausgangsmenge vorhanden.	☐

d) Der Abbau eines anderen Medikaments im Körper kann näherungsweise durch die Funktion N beschrieben werden:

$N(t) = 200 \cdot e^{-0,3 \cdot t}$

t ... Zeit ab Verabreichung des Medikaments in h
$N(t)$ ... vorhandene Menge des Medikaments im Körper zur Zeit t in mg

Das Medikament muss wieder verabreicht werden, sobald nur noch 15 % der Ausgangsmenge im Körper vorhanden sind.

– Berechnen Sie denjenigen Zeitpunkt, zu dem das Medikament wieder verabreicht werden muss.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Es liegt nahe, für die Beschreibung des Medikamentenabbaus ein exponentielles Modell zu wählen, weil sich die Menge in gleichen Zeitabständen (von 2 h) jeweils um den gleichen Faktor (0,6) verkleinert.

$N(t) = 100 \cdot e^{k \cdot t}$
$60 = 100 \cdot e^{k \cdot 2}$

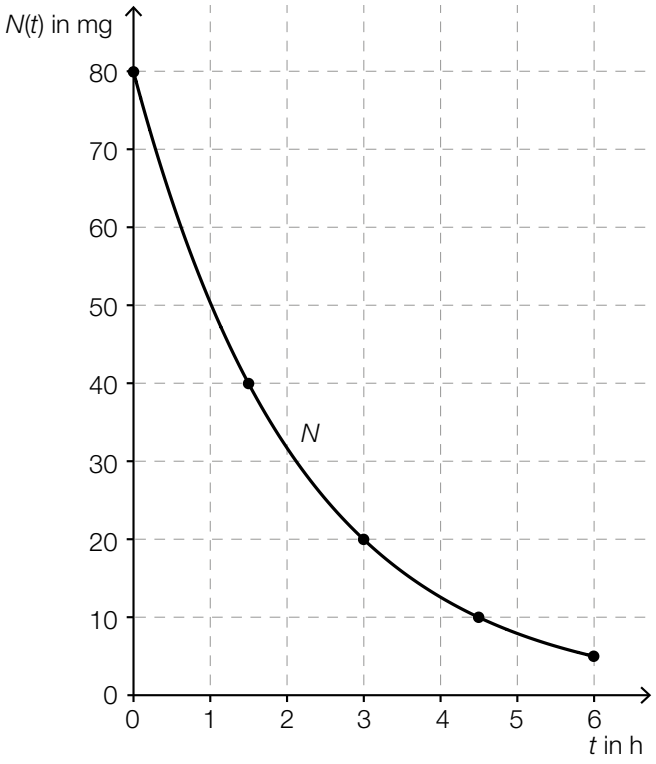
$k = \frac{\ln(0,6)}{2} = -0,25541... \approx -0,2554$

$N(t) = 100 \cdot e^{-0,2554 \cdot t}$

t ... Zeit in h
$N(t)$ ... vorhandene Menge des Medikaments im Körper zur Zeit t in mg

$N(3) = 46,4...$
Zur Zeit $t = 3$ h sind rund 46 mg des Medikaments im Körper vorhanden.

b)



c)

Nach einer Zeitdauer von $2 \cdot T_{1/2}$ sind 75 % der Ausgangsmenge abgebaut.	☒

d) $200 \cdot 0{,}15 = 200 \cdot e^{-0{,}3 \cdot t}$

$t = \frac{\ln(0{,}15)}{-0{,}3} = 6{,}32...$

Nach rund 6,3 Stunden muss das Medikament wieder verabreicht werden.

Lösungsschlüssel

a) 1 × D: für die richtige Erklärung
1 × A: für das richtige Erstellen einer Gleichung der Exponentialfunktion
1 × B: für die richtige Berechnung der Menge zur Zeit $t = 3$ h

b) 1 × A: für das richtige Einzeichnen des Graphen im gegebenen Intervall (Dabei müssen die Funktionswerte nach 1, 2, 3 und 4 Halbwertszeiten richtig eingezeichnet sein.)

c) 1 × C: für das richtige Ankreuzen

d) 1 × B: für die richtige Berechnung des Zeitpunkts

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Teemischungen

Aufgabennummer: B_203

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

In einer Apotheke werden nach eigenem Rezept Teemischungen hergestellt und verkauft. Die nachstehende Tabelle gibt an, wie viel Gramm von einigen Zutaten jeweils in einer Packung Teemischung enthalten sind.

	Erkältungstee	Hustentee	Beruhigungstee	Blasentee	Gallentee
Süßholzwurzel	5	28	4	5	0
Fenchel	5	23	5	5	5
Ringelblumenblüten	0	0	4	5	5

a) – Erstellen Sie einen passenden Gozinto-Graphen, der die Verflechtung zwischen Zutaten und Teemischungen wiedergibt.

b) – Interpretieren Sie die Bedeutung der folgenden Berechnung:

$$\begin{pmatrix} 5 & 28 & 4 & 5 & 0 \\ 5 & 23 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 5 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 420 \\ 430 \\ 140 \end{pmatrix}$$

– Interpretieren Sie die Bedeutung der Zahl 430 in der Ergebnismatrix.

c) Ein Angestellter der Apotheke hat 390 g Süßholzwurzel, 360 g Fenchel und 110 g Ringelblumenblüten zu Hustentee, Beruhigungstee und Blasentee verarbeitet.
– Erstellen Sie ein geeignetes Modell zur Berechnung, wie viele Packungen der einzelnen Teesorten er jeweils hergestellt hat.
– Berechnen Sie die Anzahl der hergestellten Packungen.

d) Die Zutaten Süßholzwurzel, Fenchel und Ringelblumenblüten kann die Apotheke bei 3 verschiedenen Lieferanten beziehen. Die folgende Tabelle gibt die Preise in € pro 100 g an:

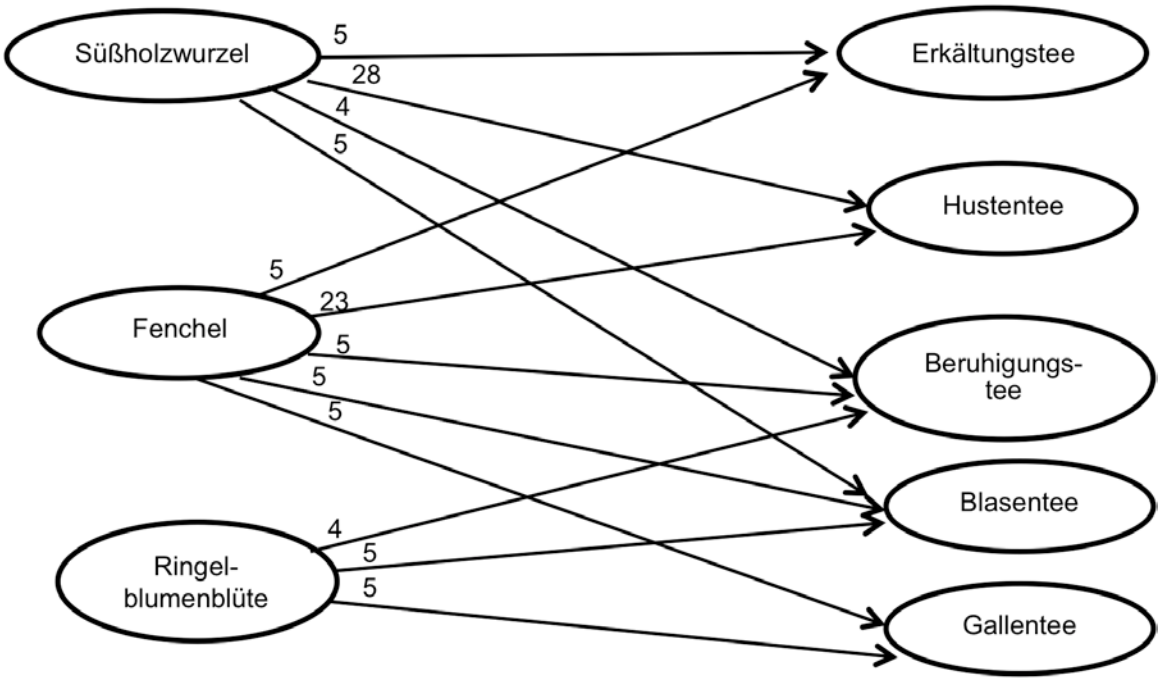
	Lieferant *A*	Lieferant *B*	Lieferant *C*
Süßholzwurzel	€ 3,35	€ 3,85	€ 3,30
Fenchel	€ 3,13	€ 3,00	€ 3,30
Ringelblumenblüten	€ 3,85	€ 3,90	€ 3,60

Die Apotheke möchte in jedem Fall alle 3 Produkte beim gleichen Lieferanten beziehen. Es werden 1 600 g Süßholzwurzel, 1 800 g Fenchel und 500 g Ringelblumenblüten benötigt.
– Berechnen Sie die für die Apotheke entstehenden Kosten bei allen 3 Lieferanten.
– Beurteilen Sie, welcher der Lieferanten für die Apotheke insgesamt am günstigsten ist.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a)



b) Die Formel beschreibt, wie viel Gramm Süßholzwurzel, Fenchel und Ringelblumenblüten man zur Herstellung von jeweils 10 Packungen der angeführten Teemischungen braucht.
Die Zahl 430 in der Ergebnismatrix ist die für 10 Packungen benötigte Menge Fenchel in Gramm.

c) a, b und c sind die Anzahl der Packungen der hergestellten Teemischungen Hustentee, Beruhigungstee und Blasentee.

$$28a + 4b + 5c = 390$$
$$23a + 5b + 5c = 360$$
$$0a + 4b + 5c = 110$$

Lösung des Gleichungssystems mittels Technologieeinsatz: $a = 10$; $b = 20$; $c = 6$

Der Angestellte hat 10 Packungen Hustentee, 20 Packungen Beruhigungstee und 6 Packungen Blasentee hergestellt.

Alternativer Lösungsweg: mit Berechnung der inversen Matrix

$$\begin{pmatrix}28 & 4 & 5\\ 23 & 5 & 5\\ 0 & 4 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}390\\ 360\\ 110\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}28 & 4 & 5\\ 23 & 5 & 5\\ 0 & 4 & 5\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}390\\ 360\\ 110\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}035\ldots & 0 & -0{,}035\ldots\\ -0{,}821\ldots & 1 & -0{,}178\ldots\\ 0{,}657\ldots & -0{,}8 & 0{,}342\ldots\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}390\\ 360\\ 110\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\ 20\\ 6\end{pmatrix}$$

d) $(16 \quad 18 \quad 5)\cdot\begin{pmatrix}3{,}35 & 3{,}85 & 3{,}3\\ 3{,}13 & 3 & 3{,}3\\ 3{,}85 & 3{,}9 & 3{,}6\end{pmatrix}=(129{,}19 \quad 135{,}10 \quad 130{,}20)$

Der Lieferant *A* ist mit € 129,19 für die Apotheke am günstigsten.

Eine richtige Berechnung ohne Verwendung von Matrizen ist auch als richtig zu werten.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 2 Algebra und Geometrie
d) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) –
d) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) A Modellieren und Transferieren
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) –
b) –
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) D Argumentieren und Kommunizieren

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) mittel
d) leicht

Punkteanzahl:

a) 1
b) 2
c) 2
d) 2

Thema: Alltag

Quelle: http://www.meine-teemischung.de/tee-mischen

BMB
Bundesministerium
für Bildung

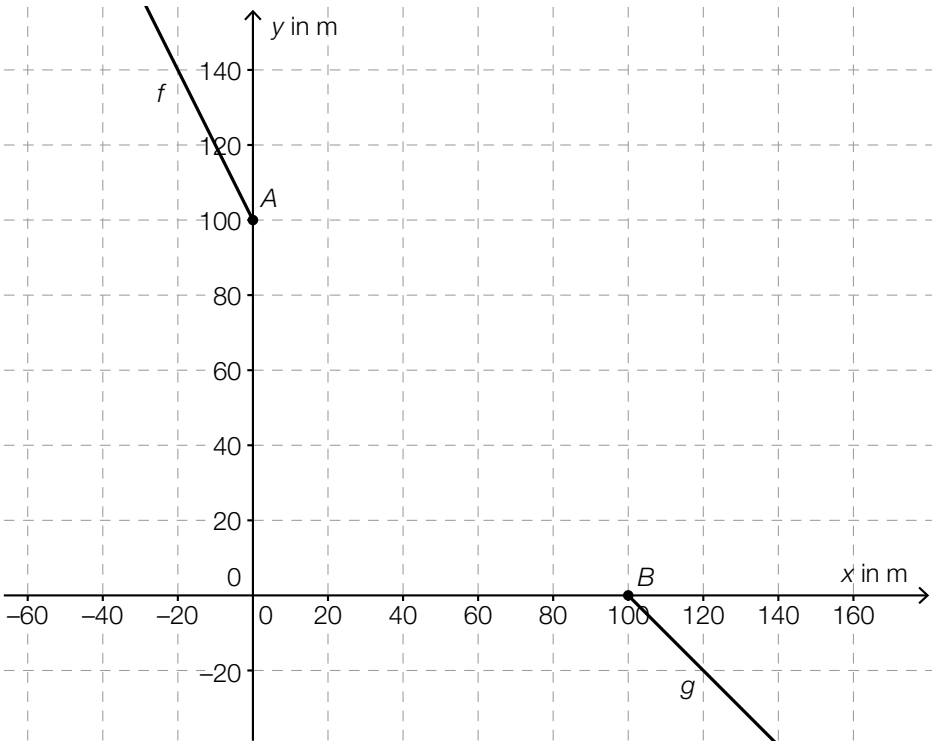
Straßenbau (2)*

Aufgabennummer: B_408

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Zwischen zwei Punkten *A* und *B* soll eine Verbindungsstraße errichtet werden.

Die nachstehende Abbildung zeigt den Bauplan in einem Koordinatensystem in der Draufsicht (von oben betrachtet).



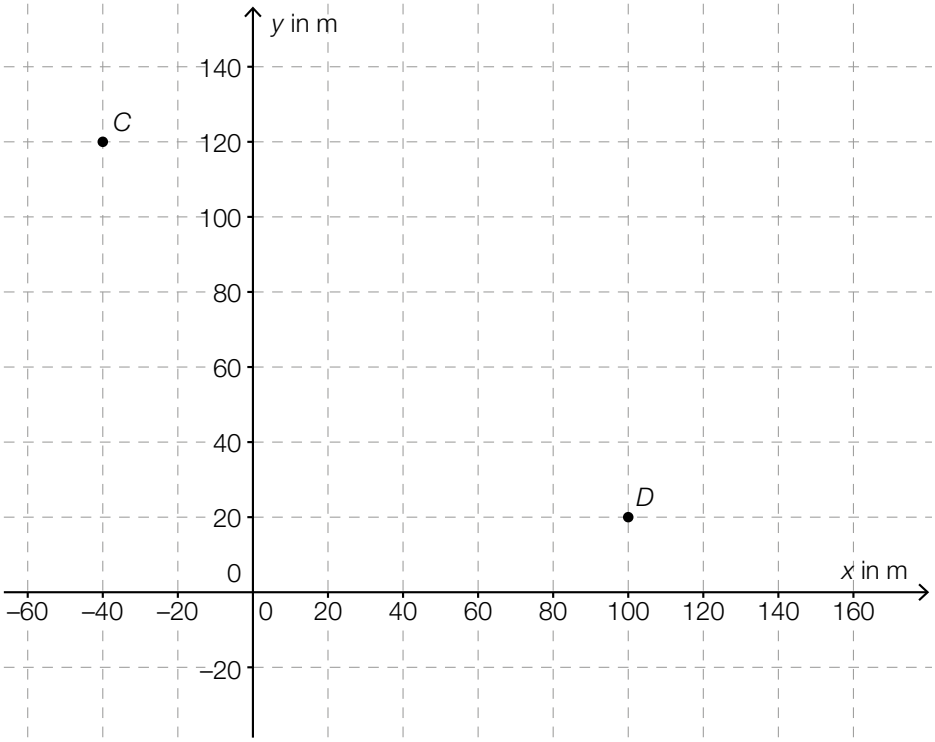
Zu Punkt *A* führt eine Straße, die durch den Graphen der linearen Funktion *f* dargestellt ist. Zu Punkt *B* führt eine Straße, die durch den Graphen der linearen Funktion *g* dargestellt ist.

Die neue Straße, die *A* und *B* verbindet, soll durch den Graphen einer Polynomfunktion *h* mit $h(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ beschrieben werden. Diese Polynomfunktion soll im Punkt *A* die gleiche Steigung wie *f* und im Punkt *B* die gleiche Steigung wie *g* haben.

– Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Ermittlung der Koeffizienten dieser Polynomfunktion *h*.
– Ermitteln Sie die Koeffizienten von *h*.

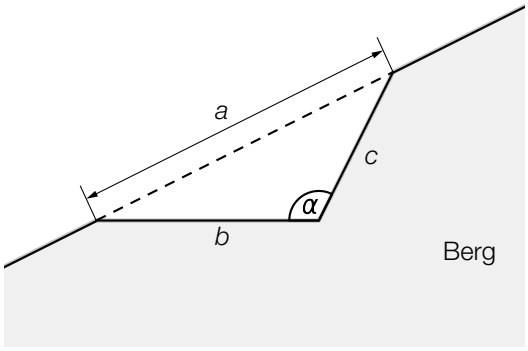
* ehemalige Klausuraufgabe

b) Zwischen zwei Punkten *C* und *D* soll eine geradlinige Verbindungsstraße errichtet werden (siehe nachstehendes Koordinatensystem).



– Ermitteln Sie die Koordinaten des Vektors $\overrightarrow{CD}$.
– Berechnen Sie den Betrag des Vektors $\overrightarrow{CD}$.

c) Ein Straßenabschnitt soll an einem Berghang entlangführen. Der Querschnitt der geplanten Trasse ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



Die Seite *b* ist 15 m und die Seite *c* ist 11,8 m lang.
Der Winkel beträgt $\alpha = 116{,}6°$.

– Berechnen Sie den Flächeninhalt des von *a*, *b* und *c* eingeschlossenen Dreiecks.
– Berechnen Sie die Länge der Seite *a*.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $h(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$
$h'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x + c$

I: $h(0) = 100$
II: $h(100) = 0$
III: $h'(0) = -2$
IV: $h'(100) = -1$

oder:

I: $a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = 100$
II: $a \cdot 100^3 + b \cdot 100^2 + c \cdot 100 + d = 0$
III: $3 \cdot a \cdot 0^2 + 2 \cdot b \cdot 0 + c = -2$
IV: $3 \cdot a \cdot 100^2 + 2 \cdot b \cdot 100 + c = -1$

Berechnen der Koeffizienten mittels Technologieeinsatz:
$a = -0{,}0001$
$b = 0{,}02$
$c = -2$
$d = 100$

b) $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 100 \\ 20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -40 \\ 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 140 \\ -100 \end{pmatrix}$

$|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{140^2 + (-100)^2} = 172{,}0... \approx 172$

c) $A = \frac{b \cdot c \cdot \sin(\alpha)}{2} \approx 79{,}132...$
Der Flächeninhalt beträgt rund 79,13 m^2.

$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha)}$
$a = 22{,}86...$
Die Seite a ist rund 22,9 m lang.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A1: für das richtige Erstellen der beiden Gleichungen mithilfe der Koordinaten der Punkte *A* und *B*
1 × A2: für das richtige Erstellen der beiden Gleichungen mithilfe der Steigung im Punkt *A* bzw. *B*
1 × B: für die richtige Berechnung der Koeffizienten

b) 1 × A: für das richtige Ermitteln der Koordinaten des Vektors
1 × B: für die richtige Berechnung des Betrags des Vektors

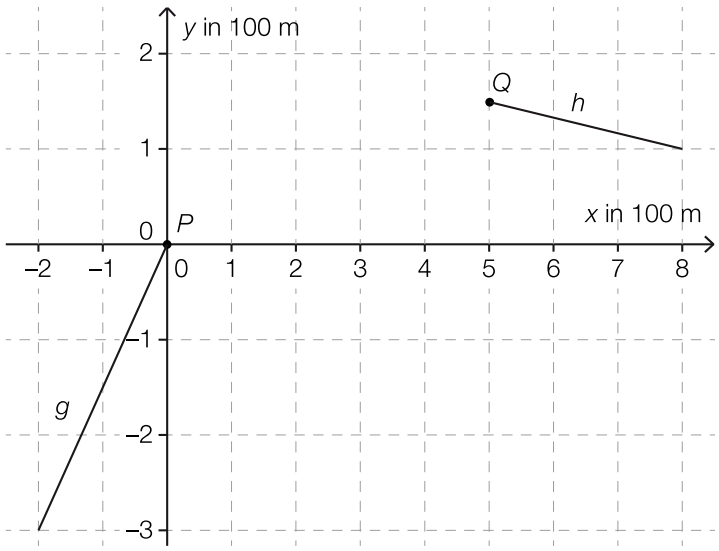
c) 1 × B1: für die richtige Berechnung des Flächeninhalts
1 × B2: für die richtige Berechnung der Länge der Seite *a*

Straßenbau (1)

Aufgabennummer: A_101

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Zwei Straßenstücke können mithilfe der linearen Funktionen g und h beschrieben werden. Zwischen den Punkten $P = (x_P|y_P)$ und $Q = (x_Q|y_Q)$ sollen sie durch eine nicht-lineare Funktion f verbunden werden (siehe nebenstehende Abbildung).



a) Es gelten folgende Bedingungen:

$g'(x_P) = f'(x_P)$
$f''(x_P) = 0$

– Beschreiben Sie die Bedeutung der gegebenen Bedingungen.

b) f soll eine Polynomfunktion 4. Grades mit $f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$ sein.

– Stellen Sie zu den Bedingungen $g(x_P) = f(x_P)$ und $g'(x_P) = f'(x_P)$ die jeweils zugehörige Gleichung auf. Entnehmen Sie dazu die benötigten Zahlenwerte aus der obigen Abbildung.

c) Die Funktion $y = -0{,}00352 \cdot x^5 + 0{,}05067 \cdot x^4 - 0{,}21333 \cdot x^3 + 1{,}5 \cdot x$ stellt im Intervall [0; 5] auch ein geeignetes Modell für das gesuchte Straßenstück dar.

– Skizzieren Sie den Funktionsgraphen im Intervall [0; 5] in der obigen Abbildung.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $g'(x_P) = f'(x_P)$:
Die Steigung der Funktionen g und f ist an der Stelle x_P gleich.

$f''(x_P) = 0$:
An der Stelle x_P ist die Krümmung des Funktionsgraphen der Funktion f null.

Auch andere sinngemäß richtige Erklärungen sind erlaubt.

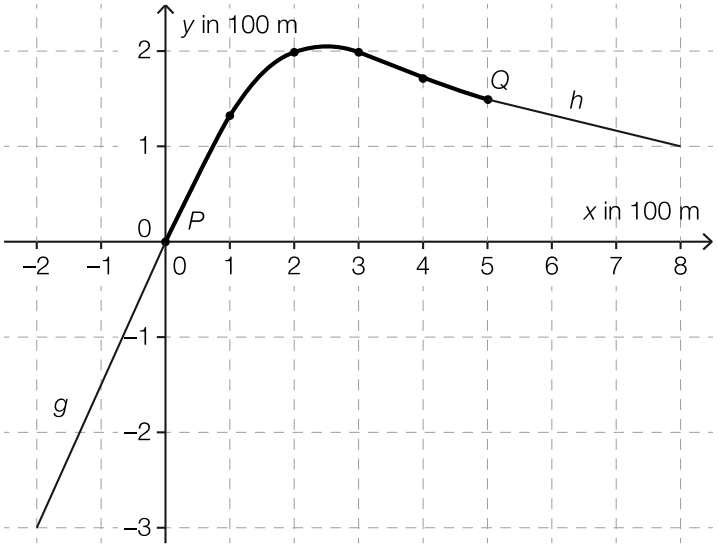
b) $f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$
$f'(x) = 4 \cdot a \cdot x^3 + 3 \cdot b \cdot x^2 + 2 \cdot c \cdot x + d$
$f''(x) = 12 \cdot a \cdot x^2 + 6 \cdot b \cdot x + 2 \cdot c$

$g(x_P) = f(x_P)$
$g(0) = 0 \Rightarrow 0 = e$

$g'(x_P) = f'(x_P)$
$g'(0) = 1{,}5 \Rightarrow d = 1{,}5$

c)

x	1	2	3	4
$f(x)$	1,3338…	1,9914…	1,989	1,7139…



Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 4 Analysis
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) A Modellieren und Transferieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) –
b) –
c) –

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) leicht
c) leicht

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2
c) 1

Thema: Verkehr

Quellen: –

BMBWF
BUNDESMINISTERIUM
FÜR BILDUNG, WISSENSCHAFT
UND FORSCHUNG
www.bmbwf.gv.at

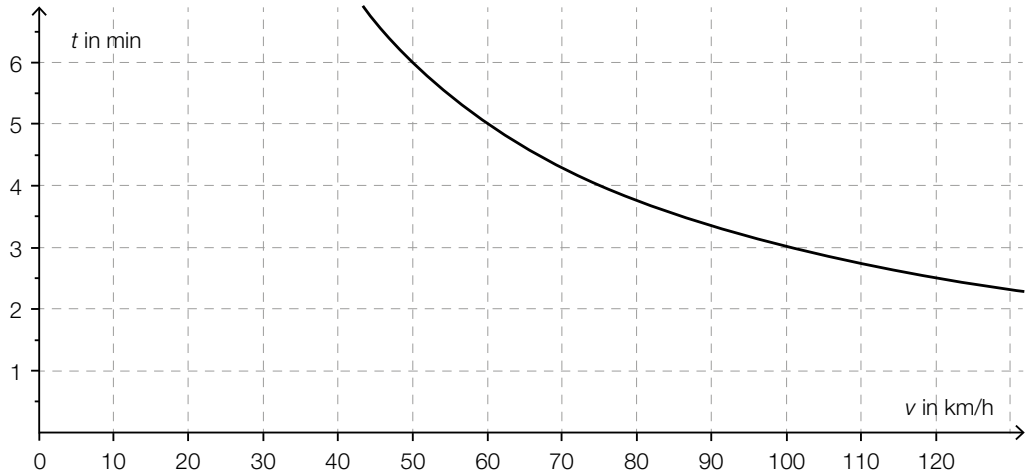
Fahrzeiten

Aufgabennummer: A_165

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Im Folgenden wird das Befahren verschiedener Strecken nach unterschiedlichen Aspekten analysiert.

a) Für eine bestimmte Strecke sind in der nachstehenden Grafik die Fahrzeiten t in min bei unterschiedlichen konstanten Geschwindigkeiten v in km/h dargestellt.



Für die Strecke wird bei einer konstanten Geschwindigkeit von 50 km/h die Zeit t_1 und bei einer konstanten Geschwindigkeit von 100 km/h die Zeit t_2 benötigt.
Es wird behauptet, dass für die gleiche Strecke bei einer konstanten Geschwindigkeit von 75 km/h die Zeit $\frac{t_1 + t_2}{2}$ benötigt wird.

– Zeigen Sie mithilfe der Grafik, dass diese Aussage falsch ist.

b) Eine Person A fährt eine Strecke von 400 km Länge mit durchschnittlich 100 km/h und legt einen Tankstopp von 15 min ein. Eine zweite Person B startet zur gleichen Zeit, fährt auf der gleichen Strecke mit 80 km/h und legt keinen Tankstopp ein.

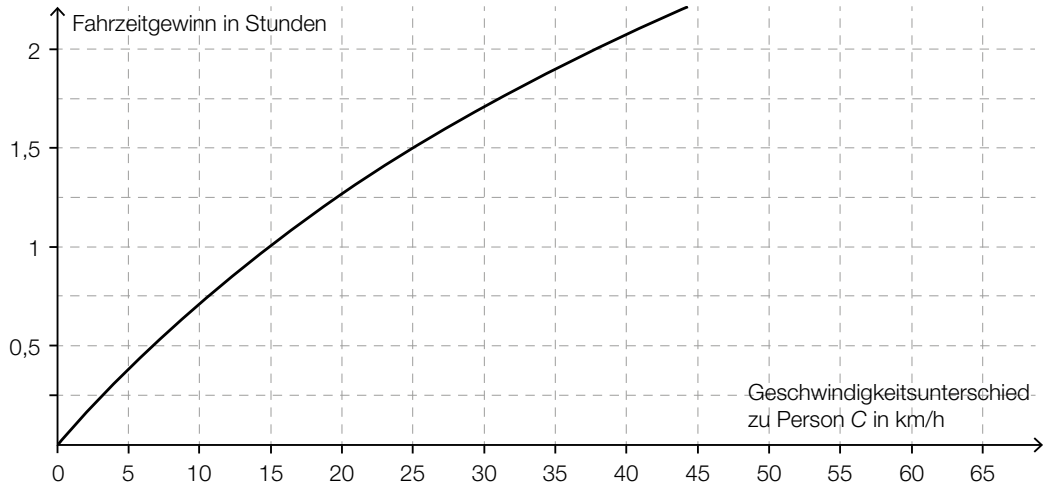
– Berechnen Sie, um wie viele Minuten die Person A trotz des Zwischenstopps früher als die Person B ans Ziel kommt.

c) Eine Person *C* fährt eine Strecke von 400 km Länge mit einer mittleren Geschwindigkeit von 70 km/h.

– Erstellen Sie eine Gleichung derjenigen Funktion *s*, die die Entfernung der Person *C* vom Zielort in Abhängigkeit von der gefahrenen Zeit beschreibt.

Eine weitere Person *D* fährt die Strecke mit durchschnittlich 100 km/h.

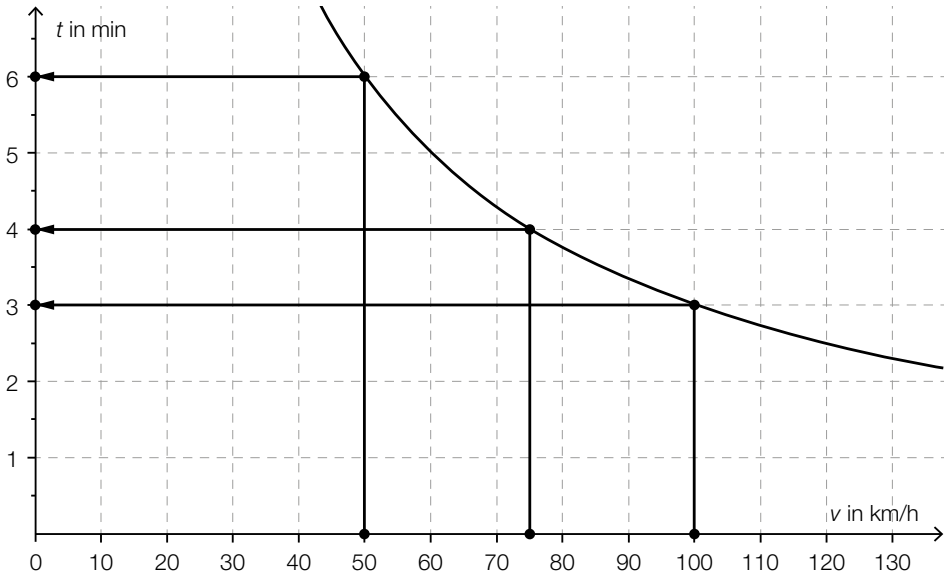
– Lesen aus der nachstehenden Abbildung den Fahrzeitgewinn von Person *D* ab.



Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



Fährt man die Strecke mit 50 km/h, so braucht man 6 min, bei 100 km/h braucht man 3 min.

$$\frac{t_1 + t_2}{2} = \frac{6 + 3}{2} = 4{,}5$$

Das arithmetische Mittel der Fahrzeiten beträgt 4,5 min.
Fährt man 75 km/h, so benötigt man für die Strecke 4 min und nicht 4,5 min. Daher ist die Behauptung falsch.

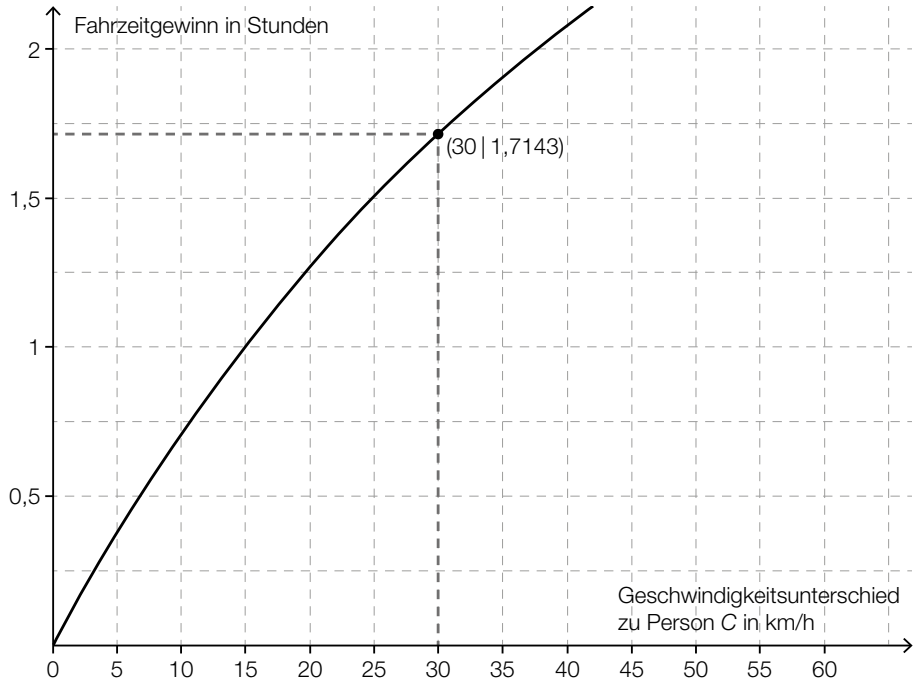
b) Fahrzeit: $t = \frac{400}{v}$

Person *A*: 4 h + 0,25 h
Person *B*: 5 h
Differenz: 0,75 h = 45 min

c) $s(t) = 400 - 70 \cdot t$

t ... gefahrene Zeit in h
$s(t)$ ... Entfernung vom Zielort zur Zeit t in km

Ablesen der Werte bei 30 km/h Geschwindigkeitsunterschied:



Person *D* hat einen Fahrzeitgewinn von rund 1,7 h.
Toleranz: ±0,1 h

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) —
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) leicht
c) leicht

Punkteanzahl:

a) 1
b) 1
c) 2

Thema: Sonstiges

Quellen: —

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Bevölkerungsentwicklung*

Aufgabennummer: A_218

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

In manchen Orten Österreichs, z. B. in der steirischen Gemeinde Eisenerz, nimmt die Bevölkerungszahl ab. Zur mathematischen Beschreibung dieser Entwicklung können verschiedene Modelle verwendet werden.

a) Zu Beginn des Jahres 1992 lebten in der steirischen Gemeinde Eisenerz 7 965 Menschen, zu Beginn des Jahres 2014 waren es 4 524.

Die Entwicklung der Bevölkerungszahl in Eisenerz soll näherungsweise durch eine lineare Funktion N_1 beschrieben werden.

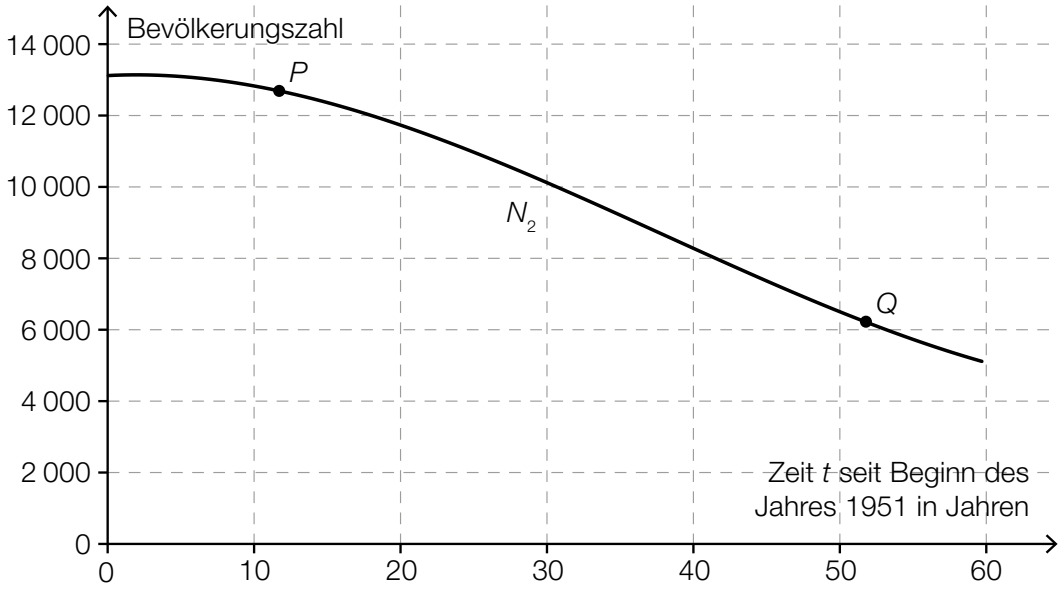
– Erstellen Sie eine Gleichung der Funktion N_1.

t … Zeit in Jahren, $t = 0$ entspricht dem Beginn des Jahres 1992
$N_1(t)$ … Bevölkerungszahl zur Zeit t

– Interpretieren Sie den Wert der Steigung der Funktion N_1 im gegebenen Sachzusammenhang.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Im nachstehenden Diagramm wird die Entwicklung der Bevölkerungszahl von Eisenerz im Zeitraum von 1951 bis 2011 näherungsweise durch den Graphen der Polynomfunktion N_2 dargestellt.



– Ordnen Sie den Punkten P und Q jeweils die an der entsprechenden Stelle zutreffende Aussage aus A bis D zu. *[2 zu 4]*

P	
Q	

A	$N_2'(t) > 0$ und $N_2''(t) > 0$
B	$N_2'(t) < 0$ und $N_2''(t) > 0$
C	$N_2'(t) < 0$ und $N_2''(t) < 0$
D	$N_2'(t) > 0$ und $N_2''(t) < 0$

c) In der nachstehenden Tabelle sind die Bevölkerungszahlen von Eisenerz für den Beginn des Jahres 1981 und den Beginn des Jahres 2014 angegeben:

Beginn des Jahres ...	1981	2014
Bevölkerungszahl	10068	4524

Die Entwicklung der Bevölkerungszahl soll näherungsweise durch eine Exponentialfunktion N_3 beschrieben werden.

– Erstellen Sie eine Gleichung derjenigen Exponentialfunktion N_3, die die Bevölkerungszahl in Abhängigkeit von der Zeit t in Jahren seit Beginn des Jahres 1981 beschreibt.
– Ermitteln Sie mithilfe der Funktion N_3, welche Bevölkerungszahl für den Beginn des Jahres 2030 zu erwarten ist.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $N_1(t) = k \cdot t + d$

$d = N_1(0) = 7\,965$

$k = \frac{4\,524 - 7\,965}{22} = -156{,}4...$

$N_1(t) = -156 \cdot t + 7\,965$

Im gegebenen Zeitraum nahm die Bevölkerungszahl im Mittel pro Jahr um etwa 156 Personen ab.

b)

P	C
Q	B

A	$N_2'(t) > 0$ und $N_2''(t) > 0$
B	$N_2'(t) < 0$ und $N_2''(t) > 0$
C	$N_2'(t) < 0$ und $N_2''(t) < 0$
D	$N_2'(t) > 0$ und $N_2''(t) < 0$

c) $N_3(t) = N_3(0) \cdot a^t$ *oder:* $N_3(t) = N_3(0) \cdot e^{-\lambda \cdot t}$

$4\,524 = 10\,068 \cdot a^{33} \Rightarrow a = 0{,}976...$ $4\,524 = 10\,068 \cdot e^{-\lambda \cdot 33} \Rightarrow \lambda = 0{,}024...$

$N_3(t) = 10\,068 \cdot 0{,}976...^t$ $N_3(t) = 10\,068 \cdot e^{-0{,}024... \cdot t}$

$N_3(49) = 3\,069{,}5...$

Gemäß diesem Modell ist für den Beginn des Jahres 2030 eine Bevölkerungszahl von etwa 3 070 Personen zu erwarten.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Erstellen einer Gleichung der Funktion N_1
1 × C: für die richtige Interpretation des Werts der Steigung im gegebenen Sachzusammenhang

b) 1 × C: für die richtige Zuordnung

c) 1 × A: für das richtige Erstellen einer Gleichung der Funktion N_3
1 × B: für das richtige Ermitteln der Bevölkerungszahl für den Beginn des Jahres 2030

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Differenzialgleichungen in der Technik

Aufgabennummer: B_426

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Unter bestimmten Bedingungen kann die Geschwindigkeit eines Körpers in einer Flüssigkeit durch die Differenzialgleichung $\frac{dv}{dt} = a + b \cdot v$ beschrieben werden.

t … Zeit in s
$v(t)$ … Geschwindigkeit zur Zeit t in m/s
a, b … Konstanten

– Geben Sie die zugehörige homogene Differenzialgleichung an.
– Ermitteln Sie die Konstante b, wenn die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differenzialgleichung lautet: $v(t) = C \cdot e^{-2 \cdot t}$

C … Konstante

Die Lösung dieser Differenzialgleichung lautet für eine bestimmte Anfangsbedingung:
$v(t) = 5 - 4 \cdot e^{-2 \cdot t}$

– Ermitteln Sie die Konstante a.
– Ermitteln Sie die zugehörige Anfangsbedingung für $t = 0$.

b) Bei einer bestimmten chemischen Reaktion ändern sich die vorhandenen Massen der beteiligten Stoffe mit der Zeit. Für einen dieser Stoffe kann die vorhandene Masse näherungsweise durch die Differenzialgleichung $\frac{dm}{dt} = 8 - 2 \cdot m$ beschrieben werden.

t … Zeit in s
$m(t)$ … Masse dieses Stoffes zur Zeit t in mg

Eine Lösung dieser Differenzialgleichung wurde unter Verwendung einer Anfangsbedingung ermittelt.

– Ordnen Sie den beiden Aussagen korrekt zu. *[2 zu 4]*

Für $t \to \infty$ nähert sich der Graph der Lösung des homogenen Teils dieser Differenzialgleichung …	
Für $t \to \infty$ nähert sich der Graph der Lösung dieser Differenzialgleichung …	

A	… asymptotisch der t-Achse.
B	… asymptotisch der waagrechten Gerade mit Ordinatenabschnitt 8.
C	… asymptotisch der waagrechten Gerade mit Ordinatenabschnitt 4.
D	… asymptotisch der waagrechten Gerade mit Ordinatenabschnitt –2.

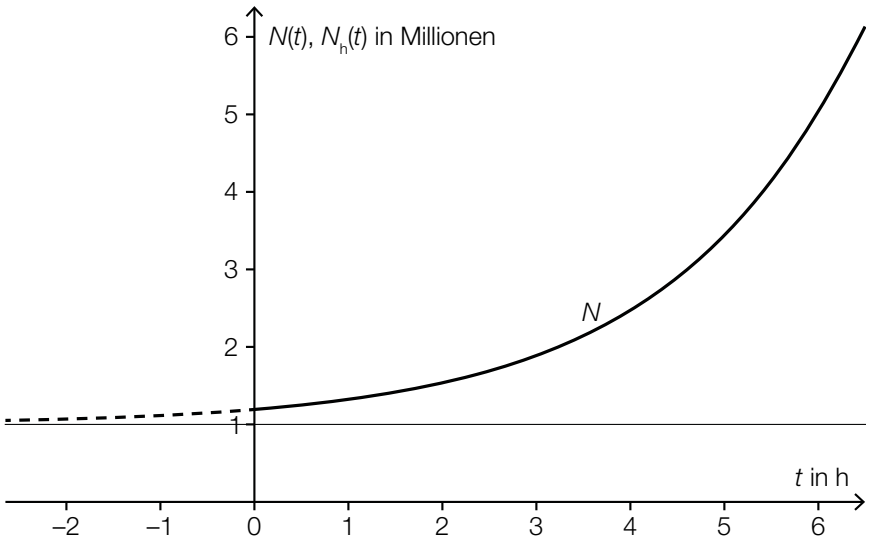
c) Die Anzahl von Bakterien in einer Nährlösung kann in Abhängigkeit von der Zeit näherungsweise durch die Differenzialgleichung $\frac{dN}{dt} + b \cdot N = a$ beschrieben werden.

t … Zeit in h
$N(t)$ … Anzahl der Bakterien zur Zeit t in Millionen
a, b … Konstanten

Die Lösung dieser Differenzialgleichung kann mithilfe des Ansatzes $N(t) = N_h(t) + N_p(t)$ und einer Anfangsbedingung bestimmt werden, wobei gilt:

$N(t)$ … Lösung der Differenzialgleichung
$N_h(t)$ … Lösung des homogenen Teils der Differenzialgleichung
$N_p(t)$ … (eine beliebige) partikuläre Lösung der Differenzialgleichung

Die nachstehende Abbildung zeigt für bestimmte Werte von a und b den Graphen von N:



– Skizzieren Sie in der obigen Abbildung den Graphen von N_h.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) homogene Differenzialgleichung: $\frac{dv}{dt} = b \cdot v$

Einsetzen in die homogene Differenzialgleichung:
$-2 \cdot C \cdot e^{-2 \cdot t} = b \cdot C \cdot e^{-2 \cdot t} \quad \Rightarrow \quad b = -2 \cdot s^{-1}$

Einsetzen in die inhomogene Differenzialgleichung: $\frac{dv}{dt} = a + b \cdot v$
$8 \cdot e^{-2 \cdot t} = a - 2 \cdot (5 - 4 \cdot e^{-2 \cdot t}) \quad \Rightarrow \quad a = 10 \text{ m/s}^2$

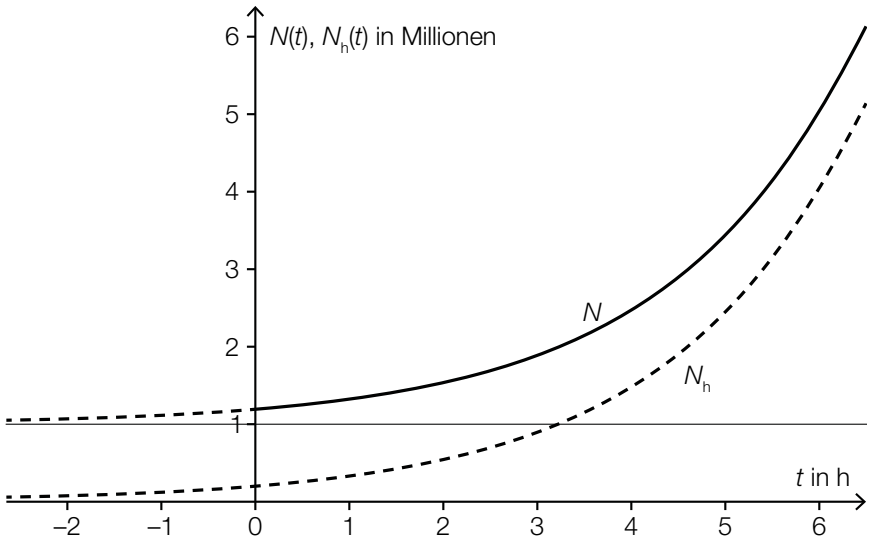
$v(0) = 1$ m/s

b)

Für $t \to \infty$ nähert sich der Graph der Lösung des homogenen Teils dieser Differenzialgleichung …	A
Für $t \to \infty$ nähert sich der Graph der Lösung dieser Differenzialgleichung …	C

A	… asymptotisch der t-Achse.
B	… asymptotisch der waagrechten Gerade mit Ordinatenabschnitt 8.
C	… asymptotisch der waagrechten Gerade mit Ordinatenabschnitt 4.
D	… asymptotisch der waagrechten Gerade mit Ordinatenabschnitt –2.

c)



Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 4 Analysis
c) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) —
c) —

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 4
b) 1
c) 1

Thema: Technik

Quellen: —

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Hefeteig

Aufgabennummer: A_009

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Es wird ein Kuchen aus Hefeteig gebacken. Für den Teig benötigt man ein sogenanntes „Dampfl“ aus Hefe, warmer Milch und Zucker. Diese Zutaten werden verrührt und in ein 12 cm hohes zylindrisches Gefäß gegeben. Man lässt das Gemisch einige Zeit in warmer Umgebung ruhen. Die Höhe des Dampfls im Gefäß beträgt zu Beginn 4 cm. Das Dampfl dehnt sich durch Wärmezufuhr aus.

a) 11 Minuten nach Beginn des Vorgangs erreicht das Dampfl eine Höhe von 7 cm. Dieses „Aufgehen des Dampfls“ kann mit dem Modell des exponentiellen Wachstums beschrieben werden.

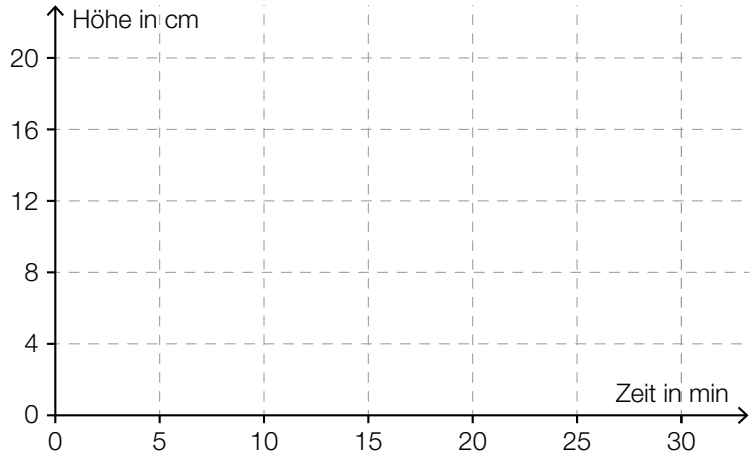
$h(t) = h_0 \cdot e^{\lambda \cdot t}$

t … Zeit nach Beginn des Vorgangs in min
$h(t)$ … Höhe des Dampfls zur Zeit t in cm

– Ermitteln Sie die Parameter h_0 und λ.

b) Man stellt fest, dass sich bei einer bestimmten Umgebungstemperatur die Höhe des Dampfls nach jeweils 15 min verdoppelt.

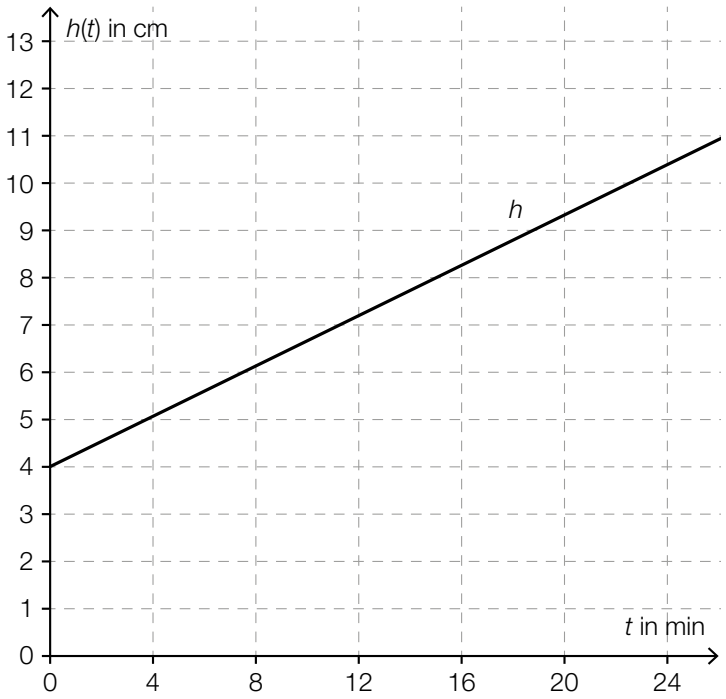
– Skizzieren Sie im nachstehenden Koordinatensystem den Graphen derjenigen Funktion, die diesem Modell im Intervall [0 min; 30 min] entspricht.



c) Eine näherungsweise passende Beschreibung der Ausdehnung des Dampfls kann durch ein lineares Modell erfolgen, wie es in der unten stehenden Grafik dargestellt ist.

t … Zeit in min

$h(t)$ … Höhe des Dampfls zur Zeit t in cm



– Ermitteln Sie mithilfe der obigen Grafik eine Gleichung dieser linearen Funktion.
– Berechnen Sie, wann das Dampfl den Rand des Gefäßes (12 cm) erreicht.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

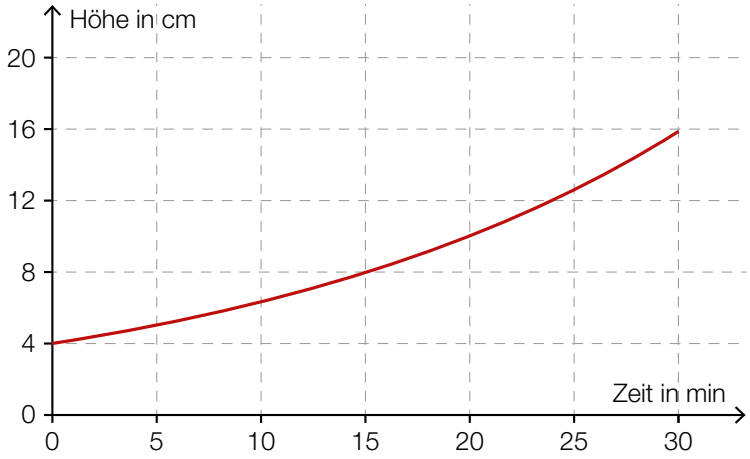
Möglicher Lösungsweg

a) $7 = 4 \cdot e^{\lambda \cdot 11}$

Lösen mittels Technologieeinsatz:
$\lambda = 0{,}05087...$

$h(t) = 4 \cdot e^{0{,}05087... \cdot t}$

b)



c) $h(t) \approx 0{,}268 \cdot t + 4$

$0{,}268 \cdot t + 4 = 12 \quad \Rightarrow \quad t = 29{,}8...$

Nach dem linearen Modell erreicht das Dampfl den Gefäßrand nach rund 30 min.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) A Modellieren und Transferieren
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) –
b) –
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) leicht
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 1
b) 1
c) 2

Thema: Alltag

Quellen: –

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Hotelrenovierung (1)

Aufgabennummer: B_210

Technologieeinsatz:	möglich ☐	erforderlich ☒

Ein Hotel wird renoviert.

a) Ein Viertel aller Hotelzimmer wird als Raucherzimmer angeboten. Bei der Renovierung wurden zwei Drittel aller Raucherzimmer und 40 % aller Nichtraucherzimmer erneuert.

– Erstellen Sie ein Baumdiagramm mit allen gegebenen Daten.
– Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein zufällig ausgewähltes Zimmer renoviert wurde.
– Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein zufällig ausgewähltes renoviertes Zimmer ein Nichtraucherzimmer ist.

b) Für weitere Renovierungsarbeiten benötigt der Hotelbesitzer einen Kredit in Höhe von € 80.000. Seine Hausbank bietet ihm an, dass er den Kreditbetrag innerhalb von 5 Jahren in Form von nachschüssigen Jahresraten in Höhe von € 17.900 begleichen kann.

– Berechnen Sie den effektiven Jahreszinssatz, der diesem Kredit zugrunde liegt.

Der Hotelbesitzer möchte anstelle der Jahresraten den Kredit bei gleicher Laufzeit durch nachschüssige Semesterraten in Höhe von € 8.950 begleichen.

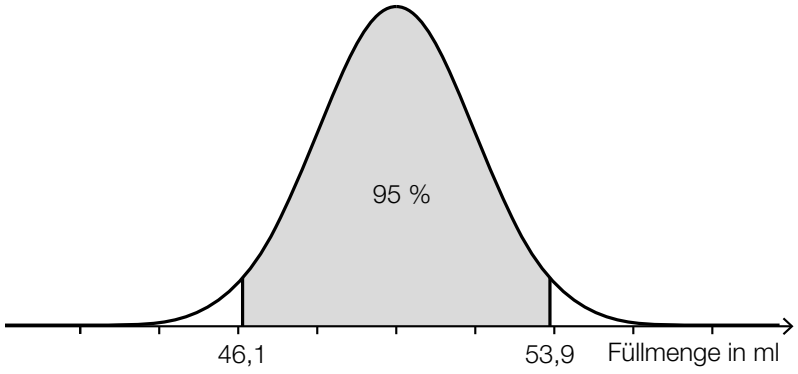
– Argumentieren Sie, warum sich bei dieser Zahlungsvariante ein höherer effektiver Jahreszinssatz ergibt.

c) Während der Renovierungsarbeiten möchte der Hotelbesitzer eine Reisegruppe einquartieren. Leider stehen dafür 2 Zimmer zu wenig zur Verfügung. Aus Erfahrung weiß man, dass im Schnitt 12 % aller Buchungen wieder kurzfristig storniert werden. Das Hotel nimmt daher die Buchung der Reisegruppe an. Dabei wird angenommen, dass Einzelstornierungen voneinander unabhängig sind.

– Kreuzen Sie denjenigen Ausdruck an, mit der die Wahrscheinlichkeit berechnet wird, dass bei der Annahme von 50 Buchungen mindestens 2 storniert werden. *[1 aus 5]*

$1 - \binom{50}{1} \cdot 0{,}12^{1} \cdot 0{,}88^{49} - \binom{50}{2} \cdot 0{,}12^{2} \cdot 0{,}88^{48}$	☐
$1 - \binom{50}{0} \cdot 0{,}12^{0} \cdot 0{,}88^{50} + \binom{50}{1} \cdot 0{,}12^{1} \cdot 0{,}88^{49}$	☐
$1 - \binom{50}{0} \cdot 0{,}12^{0} \cdot 0{,}88^{50} - \binom{50}{1} \cdot 0{,}12^{1} \cdot 0{,}88^{49}$	☐
$1 - \binom{50}{1} \cdot 0{,}88^{1} \cdot 0{,}12^{49} + \binom{50}{2} \cdot 0{,}88^{2} \cdot 0{,}12^{48}$	☐
$1 - \binom{50}{0} \cdot 0{,}88^{0} \cdot 0{,}12^{50} + \binom{50}{1} \cdot 0{,}88^{1} \cdot 0{,}12^{49}$	☐

d) Im Zuge der Renovierung wurden neue Shampoo-Fläschchen bestellt. Die Füllmenge der Fläschchen kann als annähernd normalverteilte Zufallsvariable angenommen werden. Die Füllmenge von 95 % aller Fläschchen liegt im unten dargestellten symmetrischen Intervall um den Erwartungswert.

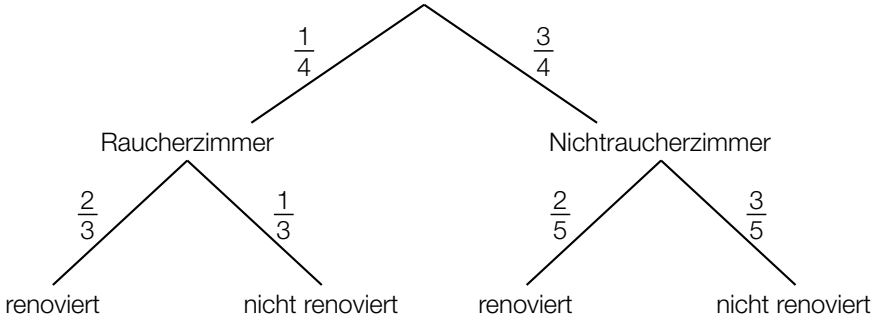


– Bestimmen Sie den Erwartungswert und die zugehörige Standardabweichung.
– Beschreiben Sie, wie sich die Kurve ändern würde, wenn die Standardabweichung bei gleichbleibendem Erwartungswert kleiner wäre.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



$P(\text{„renoviert“}) = P(\text{„Raucherzimmer und renoviert“}) + P(\text{„Nichtraucherzimmer und renoviert“}) =$
$= \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{7}{15}$

$P(\text{„Nichtraucherzimmer und renoviert“}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3}{10}$

$P(\text{„Nichtraucherzimmer} \mid \text{renoviert“}) = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{7}{15}} = \frac{9}{14} \approx 64{,}29\ \%$

b) $80\,000 = 17\,900 \cdot \frac{(1 + i_{\text{eff}})^5 - 1}{i_{\text{eff}}} \cdot \frac{1}{(1 + i_{\text{eff}})^5}$

mittels Technologieeinsatz:
$i_{\text{eff}} = 0{,}03860...$

Der effektive Jahreszinssatz ist rund 3,86 %.

Bei der halbjährlichen Zahlungsart ergibt sich durch die früher fälligen Zahlungen ein höherer effektiver Jahreszinssatz.

c)

[...]	
[...]	
$1 - \binom{50}{0} \cdot 0{,}12^0 \cdot 0{,}88^{50} - \binom{50}{1} \cdot 0{,}12^1 \cdot 0{,}88^{49}$	☒
[...]	
[...]	

d) Der Erwartungswert μ liegt in der Mitte des Intervalls [46,1; 53,9].
Daher gilt: $\mu = \frac{46{,}1 + 53{,}9}{2} = 50$ ml

Normalverteilung mit $\mu = 50$ ml und $P(X \leq 46{,}1) = 0{,}025$
Berechnung der Standardabweichung σ mittels Technologieeinsatz: $\sigma \approx 1{,}99$ ml

Bei einer kleineren Standardabweichung wäre die Gauß'sche Glockenkurve schmäler und höher.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 5 Stochastik
d) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) C Interpretieren und Dokumentieren
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) —
d) D Argumentieren und Kommunizieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) leicht
c) mittel
d) leicht

Punkteanzahl:

a) 4
b) 2
c) 1
d) 3

Thema: Tourismus

Quellen: —

BMBWF
BUNDESMINISTERIUM
FÜR BILDUNG, WISSENSCHAFT
UND FORSCHUNG
www.bmbwf.gv.at

Grazer Hausberg

Aufgabennummer: A_189

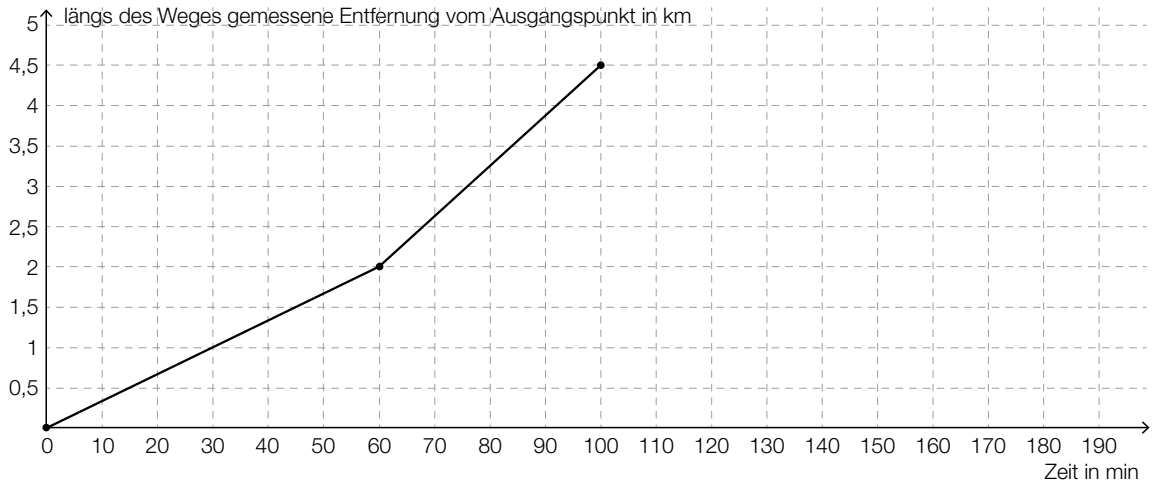
Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Der Schöckl gilt als Grazer Hausberg. Es führen viele verschiedene Wege und Straßen um ihn herum und auf den Gipfel.

a) Die Talstation einer Seilbahn liegt auf 780 m und die Bergstation auf 1 436 m Höhe über dem Meeresspiegel. Die als geradlinig angenommene Strecke, die die Seilbahn zurücklegt, beträgt 2 087 m. Die Fahrtdauer von der Talstation zur Bergstation beträgt 7 min.

– Argumentieren Sie, warum man mit dem Ausdruck $\arctan\left(\frac{656}{2\,087}\right)$ den durchschnittlichen Steigungswinkel der Strecke nicht berechnen kann.
– Berechnen Sie die Durchschnittsgeschwindigkeit der Seilbahn in Metern pro Sekunde.

b) Das nachstehende Diagramm zeigt näherungsweise den Verlauf einer Wanderung auf den Schöckl.

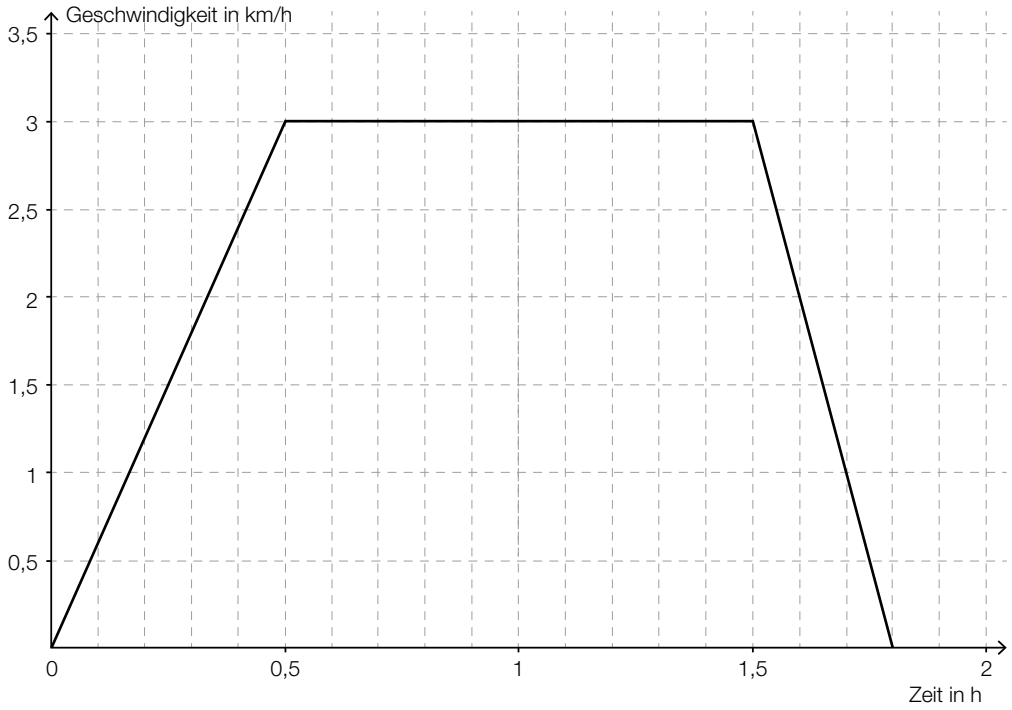


– Begründen Sie unter Verwendung dieses Diagramms, in welchem der beiden Zeitabschnitte der Wanderer schneller gegangen ist.

Der Wanderer macht nach dem Aufstieg keine Pause und wandert mit einer mittleren Geschwindigkeit von 3,375 km/h den gleichen Weg bergab.

– Vervollständigen Sie im obigen Diagramm den Verlauf der Wanderung.

c) Der nachstehende Graph zeigt näherungsweise die Geschwindigkeit bei einer Wanderung auf den Schöckl in Abhängigkeit von der Zeit.

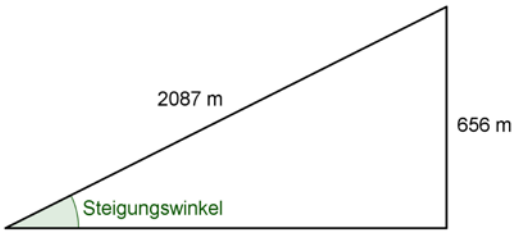


– Bestimmen Sie mithilfe des Graphen den zurückgelegten Weg dieses Wanderers.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Der Tangens ist das Verhältnis zwischen der Länge der Gegenkathete und der Länge der Ankathete.



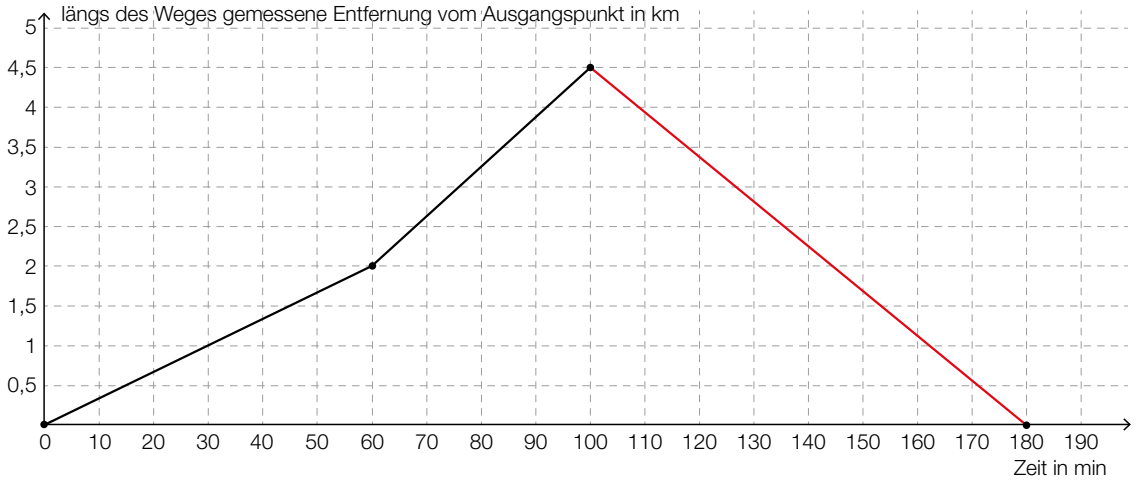
In diesem Beispiel ist aber das Verhältnis der Länge der Gegenkathete zur Länge der Hypotenuse angeschrieben, also muss der Arkussinus verwendet werden: Steigungswinkel = $\arcsin\left(\frac{656}{2087}\right)$.

$v = \frac{2087}{7 \cdot 60} = 4{,}969\ldots$

Die Durchschnittsgeschwindigkeit beträgt rund 4,97 m/s.

b) Der Anstieg der Geraden entspricht der Geschwindigkeit, also ist der Wanderer im zweiten Abschnitt schneller gegangen.

Die rote Gerade stellt den Abstieg des Wanderers grafisch dar:



c) Der zurückgelegte Weg kann als Flächeninhalt unter dem Graphen der Geschwindigkeit-Zeit-Funktion ermittelt werden. Dieser Flächeninhalt kann z. B. mit der Formel für den Flächeninhalt eines Trapezes berechnet werden:

$\frac{1{,}8 + 1}{2} \cdot 3 = 4{,}2$

Der zurückgelegte Weg beträgt 4,2 km.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) 1 Zahlen und Maße
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) A Modellieren und Transferieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) —

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) leicht
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2
c) 1

Thema: Sonstiges

Quelle: http://de.wikipedia.org/wiki/Schöckl-Seilbahn

BMBWF
BUNDESMINISTERIUM
FÜR BILDUNG, WISSENSCHAFT
UND FORSCHUNG
www.bmbwf.gv.at

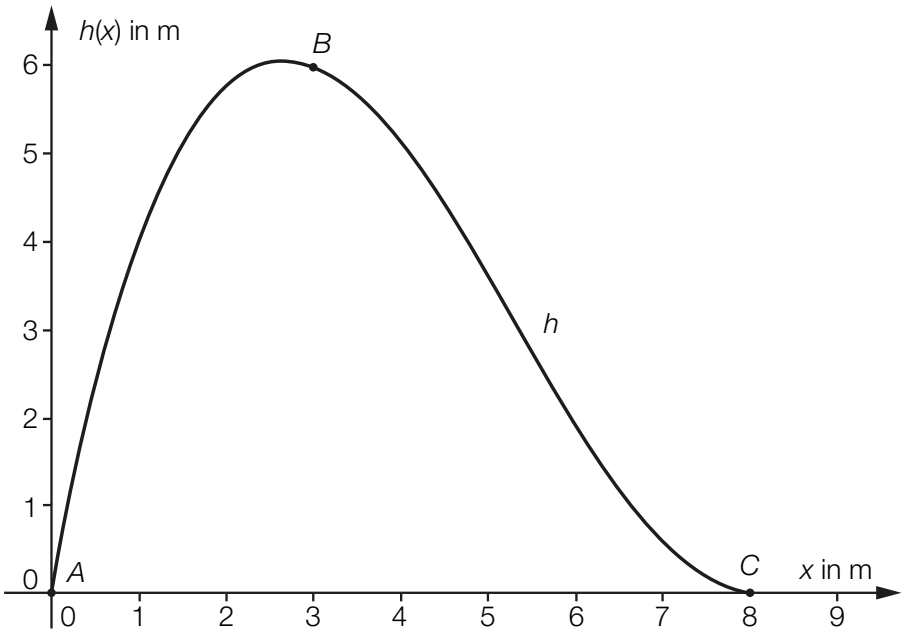
Drohnen

Aufgabennummer: B_362

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Unter einer *Drohne* versteht man ein unbemanntes Luftfahrzeug, das entweder durch einen Computer an Bord oder vom Boden aus über eine Fernsteuerung betrieben wird.

a) Die nachstehende Grafik zeigt die Flugbahn einer Drohne.

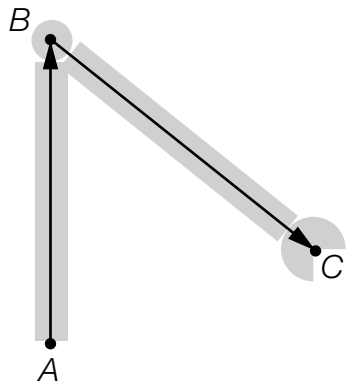


x ... horizontale Entfernung vom Startpunkt A in m
$h(x)$ ... Höhe der Drohne in der Entfernung x in m

Die Flugbahn der Drohne lässt sich näherungsweise durch eine Polynomfunktion h dritten Grades beschreiben. Die Flugbahn verläuft durch den Punkt B und erreicht ein Minimum im Punkt C.

– Erstellen Sie ein Gleichungssystem, das zur Berechnung der Koeffizienten der Polynomfunktion benötigt wird.
– Ermitteln Sie eine Gleichung der Polynomfunktion.
– Berechnen Sie die Länge der Flugbahn zwischen A und C.

b) Bei der Fertigung von Drohnen werden Roboterarme eingesetzt.



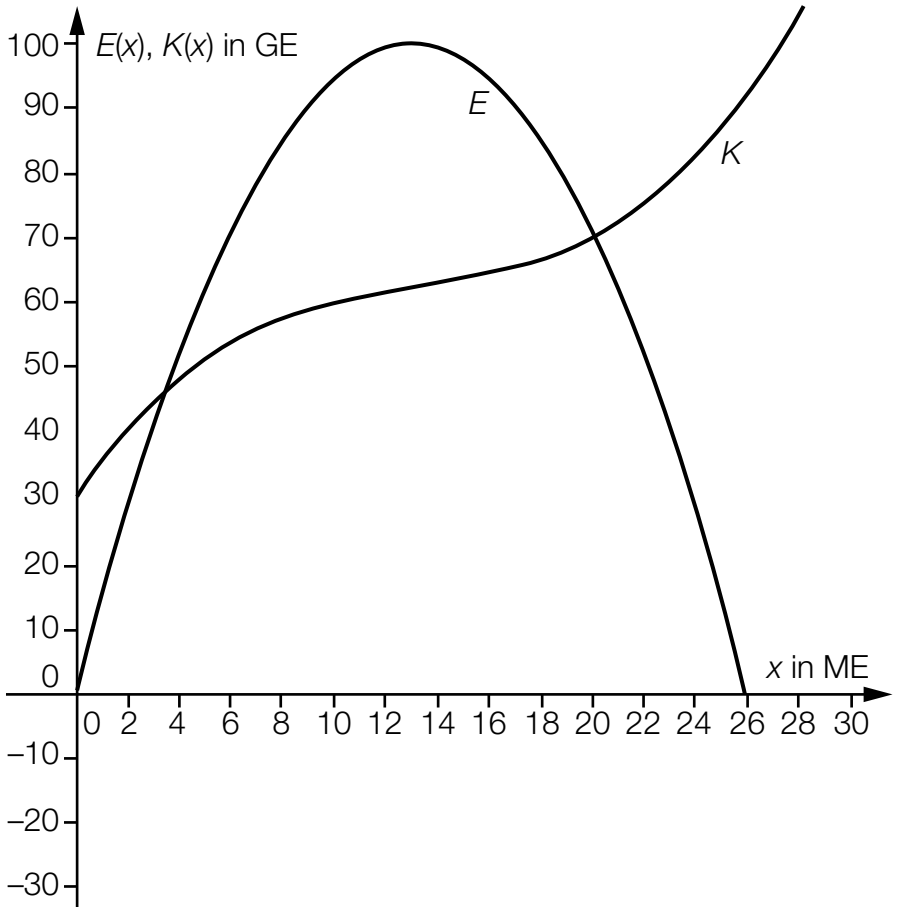
Ein zweiteiliger Arm eines Roboters lässt sich am Computer durch zwei Vektoren beschreiben, die durch die Punkte $A = (1|1|1)$, $B = (3|4|5)$ und $C = (5|2|-1)$ festgelegt sind (Maße in m).

– Berechnen Sie den Winkel zwischen den beiden Roboterarmen.

c) Für eine Drohne werden Kondensatoren mit einer bestimmten Kapazität benötigt. Die Kapazitäten sind annähernd normalverteilt mit der Standardabweichung $\sigma = 1{,}2$ Mikrofarad (µF). Aus einer Lieferung werden 30 Kondensatoren entnommen. Die Messungen der Kapazitäten ergaben den Mittelwert $\bar{x} = 12$ µF.

– Ermitteln Sie das zweiseitige 95-%-Konfidenzintervall für den Erwartungswert μ der Grundgesamtheit.
– Begründen Sie, warum sich die Breite des 95-%-Konfidenzintervalls halbiert, wenn der Stichprobenumfang vervierfacht wird.

d) Ein Unternehmen produziert Drohnen. Die anfallenden Kosten werden durch die Kostenfunktion K in Abhängigkeit von der produzierten Menge x beschrieben. Der durch den Verkauf dieser Drohnen entstehende Erlös in Abhängigkeit von der abgesetzten Menge wird durch die Erlösfunktion E beschrieben (siehe nachstehende Grafik).



– Schätzen Sie mithilfe der Grafik den maximalen Gewinn ab.
– Zeichnen Sie in der Grafik näherungsweise den Graphen der Gewinnfunktion G ein.
– Kennzeichnen Sie in der Grafik die Gewinnschwelle und die obere Gewinngrenze.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $h(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$
$h'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x + c$

$B = (3|6) \quad C = (8|0)$

I: $h(0) = 0 \Rightarrow d = 0$
II: $h(3) = 6 \Rightarrow 27 \cdot a + 9 \cdot b + 3 \cdot c + d = 6$
III: $h(8) = 0 \Rightarrow 512 \cdot a + 64 \cdot b + 8 \cdot c + d = 0$
IV: $h'(8) = 0 \Rightarrow 192 \cdot a + 16 \cdot b + c = 0$

Lösung mittels Technologieeinsatz:

$$a = \frac{2}{25}, \quad b = -\frac{32}{25}, \quad c = \frac{128}{25}, \quad d = 0$$

$$h(x) = \frac{2}{25} \cdot x^3 - \frac{32}{25} \cdot x^2 + \frac{128}{25} \cdot x$$

Berechnung der Weglänge s:

$$h'(x) = \frac{6}{25} \cdot x^2 - \frac{64}{25} \cdot x + \frac{128}{25}$$

$$s = \int_0^8 \sqrt{1 + \left(\frac{6}{25} \cdot x^2 - \frac{64}{25} \cdot x + \frac{128}{25}\right)^2}\, dx$$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$s = 15{,}245\ldots$ m

b) $$\cos(\varphi) = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|}$$

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|}\right)$$

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix}}{\sqrt{29} \cdot 2 \cdot \sqrt{11}}\right)$$

$\varphi = 43{,}292\ldots° \approx 43{,}29°$

c) Zweiseitiges 95-%-Konfidenzintervall mithilfe der Normalverteilung bestimmen:

$$12 \pm z_{0,975} \cdot \frac{1,2}{\sqrt{30}}$$

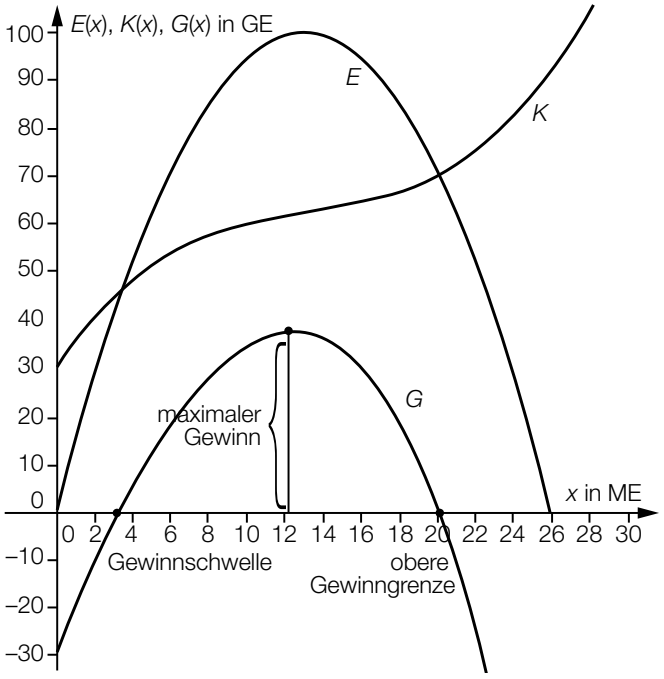
$z_{0,975} = 1,959\ldots$

Daraus ergibt sich folgendes Konfidenzintervall für μ in µF:
[11,57; 12,43] (Intervallgrenzen gerundet)

Eine Vervierfachung der Stichprobenumfangs n bedeutet:

$$\text{Breite}_{neu} = z_{0,975} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{4 \cdot n}} = z_{0,975} \cdot \frac{\sigma}{2 \cdot \sqrt{n}} = \frac{1}{2} \cdot z_{0,975} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{\text{Breite}_{alt}}{2}$$

d)



Der maximale Gewinn beträgt rund 38 GE.
Ablesetoleranz: [35; 40]

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 5 Stochastik
d) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) —
c) —
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) —
c) D Argumentieren und Kommunizieren
d) A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) leicht
c) mittel
d) mittel

Punkteanzahl:

a) 4
b) 2
c) 2
d) 3

Thema: Sonstiges

Quellen: —

BMB
Bundesministerium
für Bildung

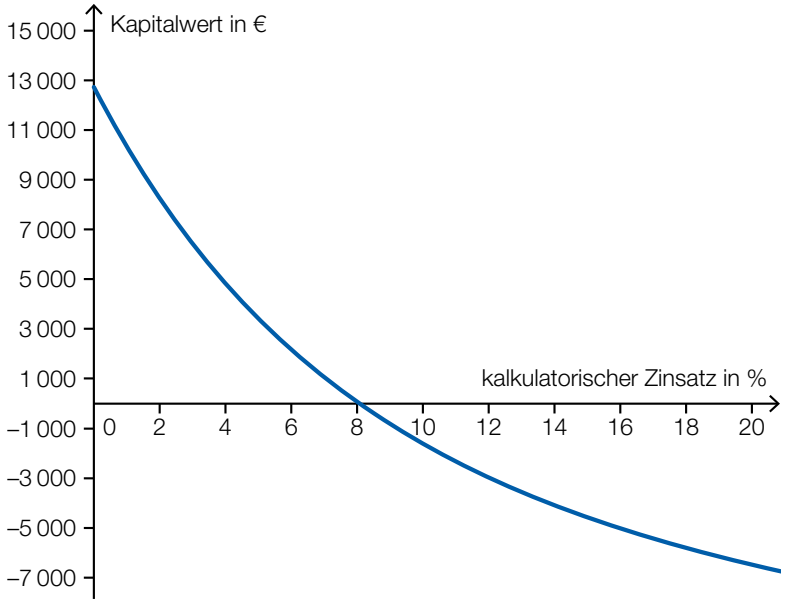
Photovoltaik (1)

Aufgabennummer: B_201

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Herr Maier kann die Kosten für seine Photovoltaikanlage bar bezahlen. Unter Berücksichtigung aller zukünftigen Einnahmen und Ausgaben sowie einer Einmalförderung von € 2.000 zum Errichtungszeitpunkt ergibt sich untenstehender Funktionsgraph für den Kapitalwert der Anlage in Abhängigkeit vom kalkulatorischen Zinssatz.

a)



– Lesen Sie aus dem Funktionsgraphen ab, bis zu welchem ungefähren kalkulatorischen Zinssatz die geförderte Anlage rentabel ist.
– Skizzieren Sie in obiger Abbildung den ungefähren Verlauf des Funktionsgraphen, wenn Herr Maier die Einmalförderung von € 2.000 nicht erhält.

b) Eine Bank bietet Frau Zangerl einen Kredit über € 12.560 für die Finanzierung einer Photovoltaikanlage an. Dieser Kredit soll in 15 Jahren durch nachschüssige Monatsraten in Höhe von je € 98 getilgt werden. Eine Bearbeitungsgebühr von 3 % der Kreditsumme wird bei der Auszahlung des Kredits von der Kreditsumme abgezogen. (Weitere Spesen und Gebühren werden nicht berücksichtigt.)

– Ermitteln Sie den effektiven Jahreszinssatz dieses Angebots in Prozent.

c) Man rechnet in den nächsten Jahren mit einer Strompreissteigerung von 4 % pro Jahr. Derzeit kostet eine Kilowattstunde (kWh) Strom € 0,16.

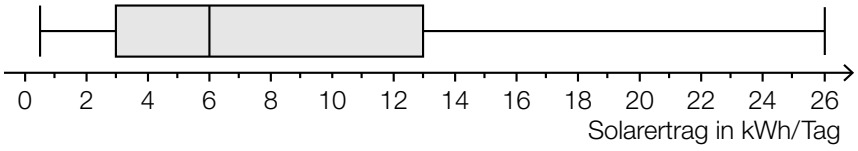
Der Strompreis in Euro pro Kilowattstunde (€/kWh) soll in Abhängigkeit von der Zeit in Jahren durch eine Funktion beschrieben werden.

– Erstellen Sie eine Gleichung dieser Funktion.

Gewerbliche Photovoltaik-Betreiber werden durch spezielle Fördergelder unterstützt. Für einen Zeitraum von 13 Jahren wird ihnen garantiert, dass sie überschüssigen Strom zu einem gleichbleibenden Tarif von € 0,38/kWh ins Netz einspeisen können.

– Überprüfen Sie mithilfe der erstellten Funktion, ob der Strompreis nach 13 Jahren unter dem garantierten Tarif von € 0,38/kWh liegen wird.

d) Im nachstehenden Boxplot ist der tägliche Solarertrag in kWh einer Photovoltaikanlage in Eisenstadt für den Herbst 2012 dargestellt.

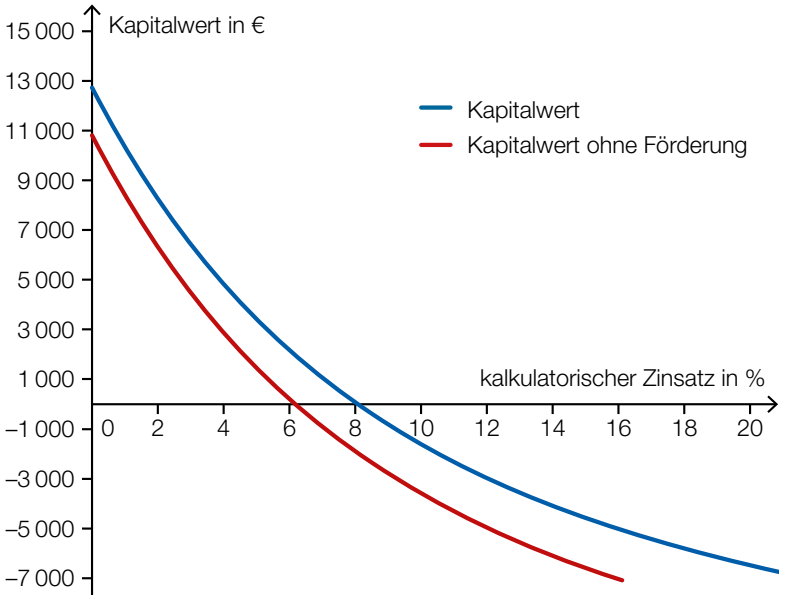


– Lesen Sie den minimalen und den maximalen Solarertrag pro Tag aus der Grafik ab.
– Lesen Sie den Interquartilsabstand ab.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Die geförderte Photovoltaikanlage ist für kalkulatorische Zinssätze bis ca. 8 % rentabel.
Toleranzbereich: [7,9 %; 8,1 %]



b) Gebühren: 3 % von € 12.560 = € 376,80
Auszahlungsbetrag: € 12.183,20

Äquivalenzgleichung: $12\,183{,}20 = 98 \cdot \frac{q_{12}^{180} - 1}{q_{12} - 1} \cdot \frac{1}{q_{12}^{180}}$

Lösung mittels Technologieeinsatz:
$i_{\text{eff}} = q_{12}^{12} - 1 = 0{,}05388...$
$q_{12} = 1{,}00438...$
Der effektive Jahreszinssatz ist rund 5,39 %.

c) t … Zeit in Jahren
$K(t)$ … Strompreis in €/kWh zur Zeit t
$K(t) = 0{,}16 \cdot 1{,}04^t$

$K(13) = 0{,}16 \cdot 1{,}04^{13} = 0{,}2664 < 0{,}38$
Der Strompreis wird nach 13 Jahren unter dem garantierten Tarif liegen.

d) minimaler Ertrag: rund 0,5 kWh/Tag
maximaler Ertrag: rund 26 kWh/Tag

Interquartilsabstand: 10 kWh/Tag

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 3 Funktionale Zusammenhänge
d) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) A Modellieren und Transferieren
d) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) A Modellieren und Transferieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) —

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) leicht
c) leicht
d) leicht

Punkteanzahl:

a) 2
b) 3
c) 2
c) 2

Thema: Wirtschaft

Quelle: http://www.pvaustria.at

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Photovoltaik (2)

Aufgabennummer: B_153

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Eine Bank bietet Frau Zangerl einen Kredit über € 12.560 für die Finanzierung einer Photovoltaikanlage an. Dieser Kredit soll in 15 Jahren durch nachschüssige Monatsraten in Höhe von je € 98 getilgt werden. Eine Bearbeitungsgebühr von 3 % der Kreditsumme wird bei der Auszahlung des Kredits von der Kreditsumme abgezogen. (Weitere Spesen und Gebühren werden nicht berücksichtigt.)

– Ermitteln Sie den effektiven Jahreszinssatz dieses Angebots.

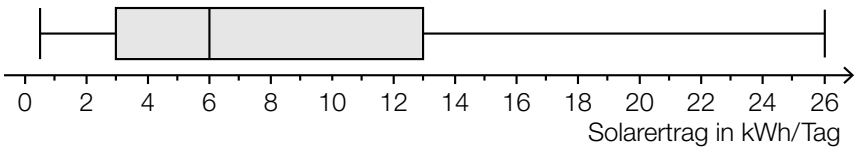
b) Man rechnet in den nächsten Jahren mit einer Strompreissteigerung von 4 % pro Jahr. Derzeit kostet eine Kilowattstunde (kWh) Strom € 0,16.
Der Strompreis in Euro pro Kilowattstunde (€/kWh) soll in Abhängigkeit von der Zeit in Jahren durch eine Funktion beschrieben werden.

– Erstellen Sie eine Gleichung dieser Funktion.

Gewerbliche Photovoltaik-Betreiber werden durch spezielle Fördergelder unterstützt. Für einen Zeitraum von 13 Jahren wird ihnen garantiert, dass sie überschüssigen Strom zu einem gleichbleibenden Tarif von € 0,38/kWh ins Netz einspeisen können.

– Überprüfen Sie mithilfe der erstellten Funktion, ob der Strompreis nach 13 Jahren unter dem garantierten Tarif von € 0,38/kWh liegen wird.

c) Im nachstehenden Boxplot ist der tägliche Solarertrag in kWh einer Photovoltaikanlage in Eisenstadt für den Herbst 2012 dargestellt.



– Lesen Sie den minimalen und den maximalen Solarertrag pro Tag aus der Grafik ab.
– Lesen Sie den Interquartilsabstand ab.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Gebühren: 3 % von € 12.560 = € 376,80
Auszahlungsbetrag: € 12.183,20

Äquivalenzgleichung: $12\,183{,}20 = 98 \cdot \frac{q_{12}^{180} - 1}{q_{12} - 1} \cdot \frac{1}{q_{12}^{180}}$

Lösung mittels Technologieeinsatz:
$i_{\text{eff}} = q_{12}^{12} - 1 = 0{,}05388...$
$q_{12} = 1{,}00438...$
Der effektive Jahreszinssatz ist rund 5,39 %.

b) t … Zeit in Jahren
$K(t)$ … Strompreis in €/kWh zur Zeit t
$K(t) = 0{,}16 \cdot 1{,}04^t$

$K(13) = 0{,}16 \cdot 1{,}04^{13} = 0{,}2664 < 0{,}38$
Der Strompreis wird nach 13 Jahren unter dem garantierten Tarif liegen.

c) minimaler Ertrag: rund 0,5 kWh/Tag
maximaler Ertrag: rund 26 kWh/Tag

Interquartilsabstand: 10 kWh/Tag

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) A Modellieren und Transferieren
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) —

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) leicht
c) leicht

Punkteanzahl:

a) 3
b) 2
c) 2

Thema: Wirtschaft

Quelle: http://www.pvaustria.at

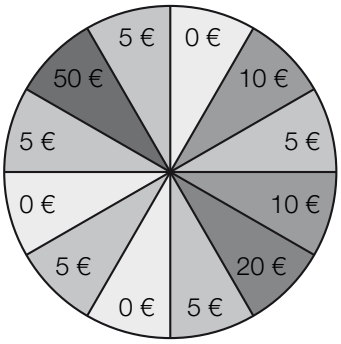
BMBWF
BUNDESMINISTERIUM
FÜR BILDUNG, WISSENSCHAFT
UND FORSCHUNG
www.bmbwf.gv.at

Glücksrad

Aufgabennummer: A_166

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Auf einem Jahrmarkt steht das nachstehend dargestellte Glücksrad, das in 12 gleich große Felder unterteilt ist. Nach jedem Drehen wird der angezeigte Geldbetrag ausbezahlt.



a) Sabine beschäftigt sich mit der Wahrscheinlichkeit, dass man 50 Euro gewinnt. Sie stellt dabei folgende Gleichung auf:

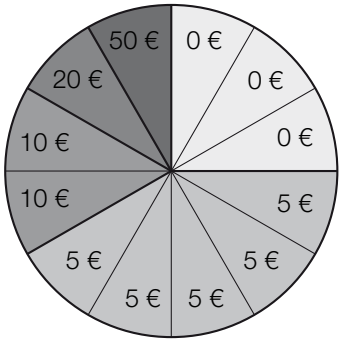
$$1 - \left(\frac{11}{12}\right)^n = 0{,}9$$

– Interpretieren Sie die Bedeutung dieser Gleichung im gegebenen Sachzusammenhang.

b) Die Wahrscheinlichkeit, dass man bei einmaligem Drehen des Glücksrads einen Gewinn erzielt, ist p. Martin dreht das Glücksrad 3-mal.

– Erstellen Sie eine Formel, mit der man die Wahrscheinlichkeit berechnen kann, dass Martin genau 2-mal einen Gewinn erzielt.
– Berechnen Sie diese Wahrscheinlichkeit, wenn die Gewinnwahrscheinlichkeit bei einmaligem Drehen $p = 0{,}75$ beträgt.

c) Der Glücksradbetreiber möchte das Design seines Glücksrads wie nachstehend dargestellt ändern.



– Überprüfen Sie nachweislich, ob die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Auszahlungsbeträge jener des ursprünglichen Glücksrads entsprechen.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Sabine möchte berechnen, wie oft sie das Glücksrad drehen muss, um mit 90%iger Wahrscheinlichkeit mindestens einmal den 50-Euro-Betrag zu erhalten.

b) Die Zufallsvariable X gibt an, wie oft ein Gewinn erzielt wird.
$P(X = 2) = \binom{3}{2} \cdot p^2 \cdot (1 - p) = 3 \cdot p^2 \cdot (1 - p)$
Für $p = 0{,}75$ ergibt sich $P(X = 2) = 0{,}421875 = 42{,}1875\ \%$.

c) Die Anzahl der Felder pro Auszahlungsbetrag ist in beiden Rädern gleich. Da deren Anordnung für die Wahrscheinlichkeit ihres Auftretens keine Rolle spielt, sind die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Auszahlungsbeträge bei beiden Rädern gleich.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 5 Stochastik
c) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) A Modellieren und Transferieren
c) D Argumentieren und Kommunizieren

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) —

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) leicht
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 1
b) 2
c) 1

Thema: Sonstiges

Quellen: —

BMBWF
BUNDESMINISTERIUM
FÜR BILDUNG, WISSENSCHAFT
UND FORSCHUNG
www.bmbwf.gv.at

Glaubensrichtungen und -symbole

Aufgabennummer: A_187

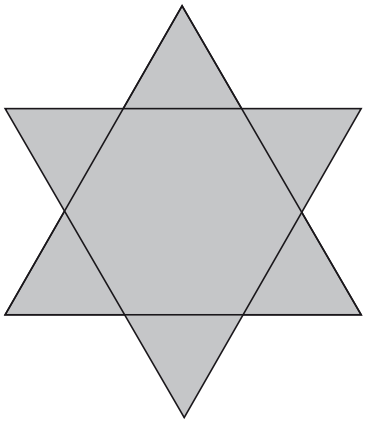
Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Die nachstehende Tabelle stellt die Anteile zweier Religionsgruppen an der Weltbevölkerung im Jahr 2010 dar. Die Anteile wurden für das Jahr 2050 hochgerechnet.

Religions-gemeinschaft	Anzahl 2010 in Tausend	Anzahl 2050 in Tausend	Anteil 2050 an der Weltbevölkerung
Buddhisten	487 760	486 270	
Hindus	1 032 210	1 384 360	14,9 %

– Ergänzen Sie den fehlenden Wert in der obigen Tabelle.
– Berechnen Sie, um wie viel Prozent sich die Anzahl der Buddhisten laut der Hochrechnung vom Jahr 2010 auf das Jahr 2050 verändert haben wird.

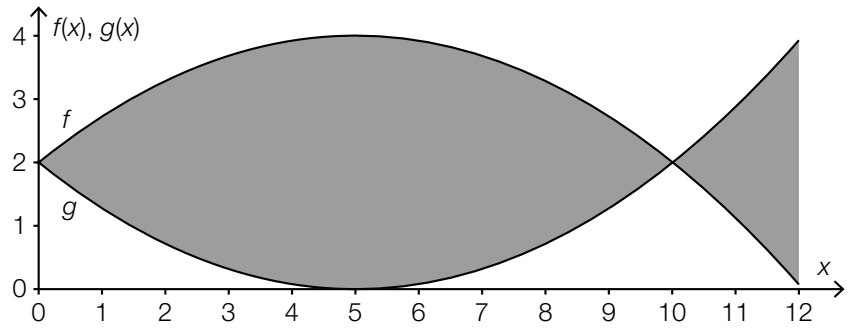
b) Ein bekanntes religiöses Symbol ist der Davidstern. Er besteht aus 2 gleichseitigen Dreiecken mit Seitenlänge a. In der Mitte entsteht ein regelmäßiges Sechseck. An dieses grenzen 6 kleinere gleichseitige Dreiecke. Die Seitenlänge der kleinen Dreiecke beträgt jeweils $\frac{a}{3}$.



– Stellen Sie eine Formel zur Berechnung des Flächeninhalts A des Davidsterns aus der Seitenlänge a auf.

$A =$ _____

c) Ein Fisch-Symbol, dargestellt durch zwei gekrümmte Linien (siehe nachstehende Abbildung), spielte schon im Urchristentum eine wichtige Rolle.



Die beiden im Intervall [0; 12] dargestellten, zur Geraden $y = 2$ symmetrischen Linien wurden durch die quadratischen Funktionen f und g erzeugt.

– Stellen Sie mithilfe der obigen Abbildung die Gleichung der Funktion f auf.
– Kreuzen Sie denjenigen Ausdruck an, mit dem der Inhalt der in der obigen Abbildung eingefärbten Fläche berechnet werden kann. *[1 aus 5]*

$48 - \int_0^{12} f(x)\,dx$	☐
$2 \cdot \left(\int_0^{10} g(x)\,dx + \int_{10}^{12} f(x)\,dx\right)$	☐
$\int_0^{12} (f(x) - g(x))\,dx$	☐
$2 \cdot \int_0^{12} (2 - g(x))\,dx$	☐
$2 \cdot \left(24 - \int_0^{10} g(x)\,dx - \int_{10}^{12} f(x)\,dx\right)$	☐

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Weltbevölkerung 2050 in Tausend: $\frac{1\,384\,360}{0{,}149} = 9\,291\,006{,}711$

Anteil der Buddhisten an der Weltbevölkerung 2050: $\frac{486\,270}{9\,291\,006{,}711} = 0{,}0523...$

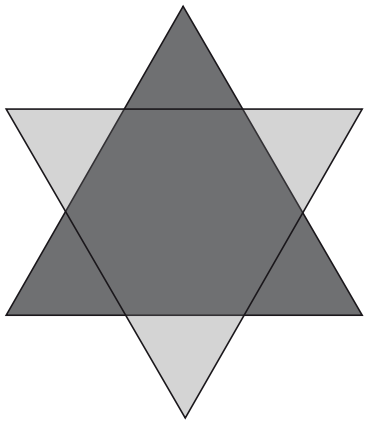
Religions-gemeinschaft	Anzahl 2010 in Tausend	Anzahl 2050 in Tausend	Anteil 2050 an der Weltbevölkerung
Buddhisten	487 760	486 270	rund 5,2 %
Hindus	1 032 210	1 384 360	14,9 %

$\frac{486\,270 - 487\,760}{487\,760} = -0{,}00305\ldots$

Der Anteil der Buddhisten wird sich laut der Hochrechnung von 2010 bis 2050 um rund 0,31 % vermindert haben.

b) Der Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks mit Seitenlänge a ist $\frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$.

Die Fläche des Davidsterns ergibt sich z. B. durch die Fläche des Ausgangsdreiecks (in der nebenstehenden Abbildung dunkel eingefärbt) plus 3-mal der Fläche des kleinen gleichschenkeligen Dreiecks mit Seitenlänge $\frac{a}{3}$:



$$A = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{3^2 \cdot 4} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{3} = \frac{a^2}{\sqrt{3}}$$

Auch andere Herleitungen sind möglich.

c) $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

$f(0) = 2$
$f(5) = 4$
$f(10) = 2$

Lösung mittels Technologieeinsatz:
$a = -0{,}08$, $b = 0{,}8$, $c = 2$

$f(x) = -0{,}08 \cdot x^2 + 0{,}8 \cdot x + 2$

[...]	
[...]	
[...]	
[...]	
$2 \cdot \left(24 - \int_0^{10} g(x)\,dx - \int_{10}^{12} f(x)\,dx\right)$	☒

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 1 Zahlen und Maße
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) 4 Analysis

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) A Modellieren und Transferieren
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) —
c) A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 1
c) 2

Thema: Sonstiges

Quelle: The Future of World Religions: Population Growth Projections, 2010 – 2050; Why Muslims Are Rising Fastest and the Unaffiliated Are Shrinking as a Share of the World's Population. PewResearchCenter, www.pewresearch.org [02.04.2015].

BMBWF
BUNDESMINISTERIUM
FÜR BILDUNG, WISSENSCHAFT
UND FORSCHUNG
www.bmbwf.gv.at

Abfallwirtschaft

Aufgabennummer: A_184

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Die nachstehende Tabelle zeigt die Menge des gesammelten Restmülls in Graz in den Jahren 2001, 2002, 2005 und 2010.

Jahr	2001	2002	2005	2010
Restmüllmenge in t	41 072	41 292	43 312	52 569

Es wird vermutet, dass sich die Entwicklung der Restmüllmenge durch eine quadratische Funktion näherungsweise beschreiben lässt.

– Erstellen Sie mithilfe der Daten der Jahre 2001, 2002 und 2005 eine Gleichung der quadratischen Funktion, die als Modell für die Entwicklung der Restmüllmenge verwendet werden kann. Wählen Sie $t = 0$ für das Jahr 2001.
– Berechnen Sie für das Jahr 2010 die prozentuelle Abweichung dieses Modells von der tatsächlich gesammelten Restmüllmenge.

b) Die Entwicklung der Restmüllmenge in den Jahren 2001 bis 2010 in Graz kann mithilfe der Funktion R näherungsweise beschrieben werden:

$R(t) = 120 \cdot t^2 + 80 \cdot t + 41\,072$

t … Zeit in Jahren ab 2001, d. h., für das Jahr 2001 gilt: $t = 0$
$R(t)$ … Restmüllmenge zur Zeit t in t

– Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate für $t = 5$ bis $t = 9$.

c) Aus dem Abfallwirtschaftsplan des Bundes geht hervor, dass im Jahr 2009 in Österreich insgesamt 53 543 000 t Müll angefallen sind.

– Stellen Sie diesen Wert mittels Gleitkommadarstellung in Kilogramm dar.

In Österreich lebten im Jahr 2009 rund 8,375 Millionen Menschen.

– Berechnen Sie für das Jahr 2009 die durchschnittliche Menge des pro Kopf angefallenen Mülls in Tonnen.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $f(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c$

t … Zeit in Jahren ab dem Jahr 2001 mit $0 \le t \le 9$
$f(t)$ … Restmüllmenge zur Zeit t in t

$41\,072 = c$
$41\,292 = a + b + 41\,072$
$43\,312 = 16 \cdot a + 4 \cdot b + 41\,072$

Lösung mittels Technologieeinsatz:
$a = \frac{340}{3} = 113,\overline{3}$; $b = \frac{320}{3} = 106,\overline{6}$; $c = 41\,072$
$f(t) = 113,\overline{3} \cdot t^2 + 106,\overline{6} \cdot t + 41\,072$

$f(9) = 51\,212$

Die prozentuelle Abweichung vom tatsächlichen Wert beträgt $\frac{52\,569 - f(9)}{52\,569} \approx 2,58\ \%$.

b) $\frac{R(9) - R(5)}{9 - 5} = 1\,760$ t pro Jahr

c) $53\,543\,000$ t $= 53\,543\,000\,000$ kg $= 5,3543 \cdot 10^{10}$ kg

durchschnittliche Menge pro Kopf: $\frac{53\,543\,000}{8\,375\,000} \approx 6,39$ t

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 4 Analysis
c) 1 Zahlen und Maße

Nebeninhaltsdimension:

a) 1 Zahlen und Maße
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) —
c) —

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) leicht
c) leicht

Punkteanzahl:

a) 2
b) 1
c) 2

Thema: Sonstiges

Quelle: Bundes-Abfallwirtschaftsplan 2011

BMBWF
BUNDESMINISTERIUM
FÜR BILDUNG, WISSENSCHAFT
UND FORSCHUNG
www.bmbwf.gv.at

Gravitation

Aufgabennummer: A_168

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Das Gravitationsgesetz beschreibt die Anziehungskraft F zwischen zwei Massen.

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

F … Anziehungskraft in Newton (N)
G … allgemeine Gravitationskonstante $\left(G \approx 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}\right)$
m_1, m_2 … Massen in kg
r … Abstand der Massen in m

a) – Ordnen Sie der angegebenen Veränderung einer Größe in der Formel die daraus resultierende Veränderung der Kraft F aus A bis D zu. *[2 zu 4]*

Der Abstand r wird halbiert.	
Die Masse m_1 wird verdoppelt.	

A	Die Kraft F halbiert sich.
B	Die Kraft F viertelt sich.
C	Die Kraft F verdoppelt sich.
D	Die Kraft F vervierfacht sich.

b) Im Folgenden wird abgeschätzt, welche Masse zwei gleich schwere Körper mit der Masse m_0 haben müssten, damit diese in einem Abstand von 10 m ungefähr eine Kraft von 100 N aufeinander ausüben. (Für diese Abschätzung kann für G der gerundete Wert $G \approx 10 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$ verwendet werden.)

$$100 = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{m_0^2}{10^2}$$
$$10^2 \approx 10 \cdot 10^{-9} \cdot m_0^2$$
$$10^2 \approx 10^{-8} \cdot m_0^2$$
$$10^{10} \approx m_0^2$$
$$10^5 \approx m_0$$

Die Masse der Körper müsste jeweils ungefähr 100 000 kg, also rund 100 t, betragen. Bei dieser Abschätzung wurde ein Fehler gemacht.

– Erklären Sie, welcher Fehler in dieser Abschätzung gemacht wurde.
– Stellen Sie die Abschätzung richtig.

c) Auf der Erde entspricht die Anziehungskraft, die zwischen einem Körper der Masse m_1 und der Erde wirkt, dem Gewicht des Körpers.
Dieses wird mit der Formel $F = m_1 \cdot g$ berechnet.

F … Gewicht des Körpers in N
m_1 … Masse des Körpers in kg
g … Fallbeschleunigung in m/s²

– Zeigen Sie mithilfe des Gravitationsgesetzes, dass die Größe der Fallbeschleunigung g auf der Erdoberfläche rund 9,81 m/s² ist.
Verwenden Sie dazu die Masse der Erde $m_2 = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg und den Abstand zum Erdmittelpunkt $r = 6371$ km.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a)

Der Abstand r wird halbiert.	D
Die Masse m_1 wird verdoppelt.	C

A	Die Kraft F halbiert sich.
B	Die Kraft F viertelt sich.
C	Die Kraft F verdoppelt sich.
D	Die Kraft F vervierfacht sich.

b) Bei der Division von 10^{-11} durch 10^2 müssen die Hochzahlen subtrahiert und nicht addiert werden.

Richtige Abschätzung:

$$100 = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{m_0^2}{10^2}$$

$$10^2 \approx 10 \cdot 10^{-13} \cdot m_0^2 = 10^{-12} \cdot m_0^2$$

$$10^2 \approx 10^{-12} \cdot m_0^{\,2}$$

$$10^{14} \approx m_0^{\,2}$$

$$10^7 \approx m_0$$

Die Masse der Körper müsste jeweils rund 10 000 000 kg, also rund 10 000 t, betragen.

c) $$m_1 \cdot g = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \Rightarrow g = G \cdot \frac{m_2}{r^2}$$

$$g = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5{,}97 \cdot 10^{24}}{(6{,}371 \cdot 10^6)^2} = 39{,}8199 \cdot \frac{10^{13}}{6{,}371^2 \cdot 10^{12}} \approx 9{,}81$$

Die Fallbeschleunigung beträgt rund 9,81 m/s².

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 1 Zahlen und Maße

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) 1 Zahlen und Maße
c) 2 Algebra und Geometrie

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) D Argumentieren und Kommunizieren

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) —

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) schwer

Punkteanzahl:

a) 1
b) 2
c) 1

Thema: Physik

Quellen: —

BMBWF
BUNDESMINISTERIUM
FÜR BILDUNG, WISSENSCHAFT
UND FORSCHUNG
www.bmbwf.gv.at

Dorffest

Aufgabennummer: A_135

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Auf einem Dorffest gibt es ein Unterhaltungsprogramm für Kinder.

a) Lea und Ahmad treten im Bogenschießen als Team an. Zuerst schießt Ahmad und dann Lea auf eine Zielscheibe. Aus Erfahrung weiß man, dass Ahmad bei 3 von 4 Versuchen trifft. Lea trifft das Ziel mit einer Wahrscheinlichkeit p.

– Veranschaulichen Sie diesen Sachverhalt mithilfe eines Baumdiagramms.

Die Wahrscheinlichkeit, dass sowohl Lea als auch Ahmad das Ziel treffen, beträgt 50 %.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit p, mit der Lea das Ziel trifft.

b) Unter den Kindern werden einige Preise verlost.

– Ordnen Sie den beiden Wahrscheinlichkeiten jeweils die dazu äquivalente Wahrscheinlichkeit aus A bis D zu. *[2 zu 4]*

P(„höchstens 1 Mädchen gewinnt“)	
P(„mindestens 1 Mädchen gewinnt“)	

A	1 – P(„kein Mädchen gewinnt“)
B	1 – P(„höchstens 2 Mädchen gewinnen“)
C	1 – P(„mindestens 2 Mädchen gewinnen“)
D	1 – P(„genau 1 Mädchen gewinnt“)

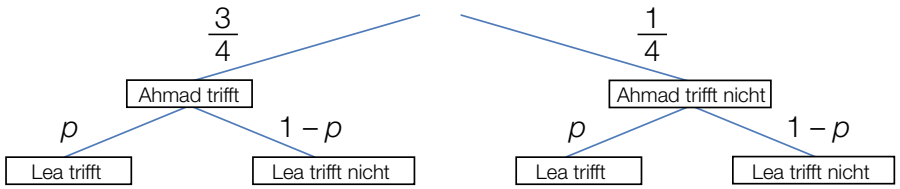
c) Am Festgelände fährt ein Bummelzug. Für Kinder unter 3 Jahren ist die Fahrt kostenlos. Kinder ab 3 Jahren zahlen die Hälfte des Fahrpreises p für Erwachsene.
Insgesamt wurden n Fahrgäste gezählt. Die Tageseinnahmen können mit dem Ausdruck $0{,}5 \cdot n \cdot \frac{p}{2} + 0{,}2 \cdot n \cdot p$ berechnet werden.

– Ermitteln Sie mithilfe des gegebenen Ausdrucks, wie viel Prozent der Fahrgäste unter 3 Jahre alt waren.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a)



$P(\text{„beide treffen“}) = \frac{3}{4} \cdot p = 0{,}5$

$p = \frac{2}{3}$

Lea trifft das Ziel mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$.

b)

P(„höchstens 1 Mädchen gewinnt“)	C
P(„mindestens 1 Mädchen gewinnt“)	A

A	1 – P(„kein Mädchen gewinnt“)
B	1 – P(„höchstens 2 Mädchen gewinnen“)
C	1 – P(„mindestens 2 Mädchen gewinnen“)
D	1 – P(„genau 1 Mädchen gewinnt“)

c) Es waren 30 % der Fahrgäste unter 3 Jahre alt.
Es wurden n Fahrgäste gezählt. 50 % davon fuhren zum Preis $\frac{p}{2}$ und 20 % zum Preis p.
Die verbleibenden 30 % haben für die Fahrt nichts bezahlt.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 5 Stochastik
c) 1 Zahlen und Maße

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) 2 Algebra und Geometrie

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) —
c) —

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) leicht
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 1
c) 1

Thema: Sonstiges

Quellen: —

BMBWF
BUNDESMINISTERIUM
FÜR BILDUNG, WISSENSCHAFT
UND FORSCHUNG
www.bmbwf.gv.at

Ammoniten

Aufgabennummer: B_371

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

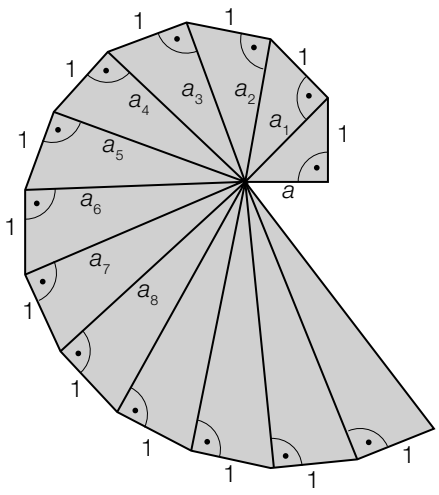
Ammoniten sind eine ausgestorbene Gruppe von im Meer lebenden Kopffüßern.



Gehäuse eines Ammoniten

Bildquelle: Anja Osenberg / https://pixabay.com/de/ammonit-versteinerung-fossil-321695/ [05.04.2018].

a) Eine Näherung der Querschnittsfläche eines Gehäuses ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



– Zeigen Sie, dass $a_3 = \sqrt{(a^2 + 3)}$ ist.

Jemand möchte auf seinem Computerbildschirm das Gehäuse eines Ammoniten als Bildschirmschoner programmieren. Er konstruiert dazu ein Dreieck mit den Eckpunkten $A = (0|0)$, $B = (5|0)$ und $C = (5|4)$. Dieses Dreieck soll in Richtung des Vektors $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ um 7 Einheiten verschoben werden.

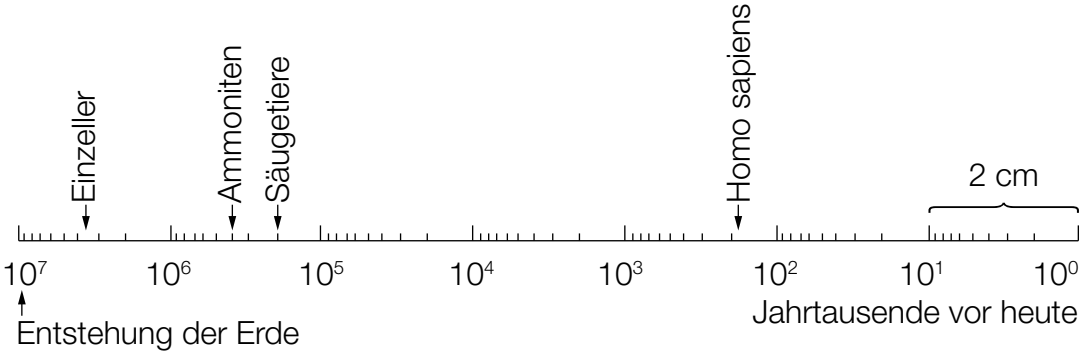
– Berechnen Sie die Koordinaten A', B' und C' des Dreiecks nach der Verschiebung.

Um einen maßstabgetreuen Ausdruck dieser Aufgabe zu gewährleisten, ist darauf zu achten, dass bei den Druckoptionen unter „Seite anpassen“ die Option „Tatsächliche Größe“ ausgewählt ist.

b) Wichtige erdgeschichtliche Entwicklungen werden mit dem erstmaligen Auftreten von Tierarten festgehalten. Einige sind in der folgenden Tabelle aufgelistet.

Ereignis	Jahrtausende vor heute
Einzeller	3,8 Millionen
Eukaryoten	1,5 Millionen
Ammoniten	400 000
Säugetiere	200 000
Homo sapiens	190

Diese Entwicklungen seit Entstehung der Erde sind auf einer logarithmisch skalierten Zeitachse dargestellt. Die logarithmische Achse hat eine Gesamtlänge von 14 cm.
Auf dieser Achse ist der Zeitraum von der Entstehung der Erde (vor 10^7 Jahrtausenden) dargestellt.



Man schätzt, dass die Photosynthese erstmals vor 2 400 Millionen Jahren auftrat.

– Markieren Sie das erstmalige Auftreten der Photosynthese auf der obigen Zeitachse.

Die Markierung für das erstmalige Auftreten von Affen würde sich auf der obigen Zeitachse 9,2 cm von 10^0 entfernt befinden.

– Ermitteln Sie, vor wie vielen Jahren das erste Mal Affen aufgetreten sind. Geben Sie das Ergebnis auf Millionen Jahre gerundet an.

c) Der Nautilus ist ein heute noch vorkommender Nachfahre des Ammoniten. Er lebt in 300 m Wassertiefe.
Die Aufnahme der Lichtintensität mit zunehmender Wassertiefe kann durch eine Funktion I beschrieben werden.

x … Wassertiefe in Metern (m)
$I(x)$ … Lichtintensität in der Tiefe x in Prozent der Lichtintensität an der Oberfläche

Die lokale Änderungsrate der Funktion I ist proportional zu I.

– Stellen Sie die Differenzialgleichung für I auf.
– Lösen Sie diese Differenzialgleichung mithilfe der Methode *Trennen der Variablen*.

An einer bestimmten Stelle im Meer ist die Lichtintensität in 1 m Wassertiefe um 7 % geringer als an der Oberfläche.

– Stellen Sie eine Gleichung der Funktion I auf, die die Abhängigkeit der Lichtintensität von der Wassertiefe an dieser Stelle des Meeres beschreibt.
– Berechnen Sie, wie viel Prozent der Lichtintensität an der Oberfläche in 300 m Tiefe nach diesem Modell noch vorhanden sind.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $a_1 = \sqrt{(a^2 + 1)}$

$a_2 = \sqrt{(a_1^2 + 1)} = \sqrt{(a^2 + 1 + 1)} = \sqrt{(a^2 + 2)}$

$a_3 = \sqrt{(a_2^2 + 1)} = \sqrt{(a^2 + 2 + 1)} = \sqrt{(a^2 + 3)}$

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{a}_0 = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OA'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 7 \cdot \vec{a}_0 = \begin{pmatrix} 4{,}2 \\ 5{,}6 \end{pmatrix} \Rightarrow A' = (4{,}2 \mid 5{,}6)$

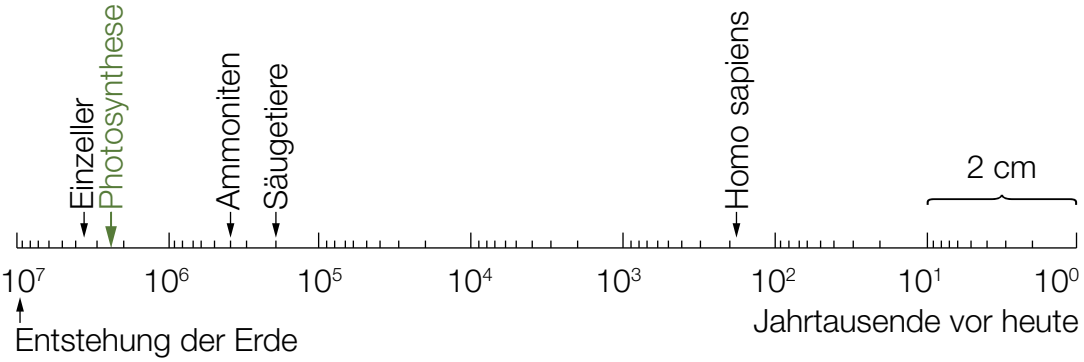
$\overrightarrow{OB'} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} + 7 \cdot \vec{a}_0 = \begin{pmatrix} 9{,}2 \\ 5{,}6 \end{pmatrix} \Rightarrow B' = (9{,}2 \mid 5{,}6)$

$\overrightarrow{OC'} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} + 7 \cdot \vec{a}_0 = \begin{pmatrix} 9{,}2 \\ 9{,}6 \end{pmatrix} \Rightarrow C' = (9{,}2 \mid 9{,}6)$

b) Photosynthese: $\log(2\,400\,000) = 6{,}380\ldots$

$6{,}380\ldots \cdot 2 \approx 12{,}76$ cm

Die Markierung für die Photosynthese befindet sich rund 12,8 cm von 10^0 entfernt.



$9{,}2 : 2 = 4{,}6$

$10^{4{,}6} = 39\,810{,}7\ldots$

Die ersten Affen traten vor rund 40 Millionen Jahren auf.

c) $\frac{dI}{dx} = -k \cdot I$

$\int \frac{dI}{I} = -\int k \, dx$

$\ln(I) = -k \cdot x + C_1$
$I(x) = C \cdot e^{-k \cdot x}$

$93 = 100 \cdot e^{-k}$
$k = 0{,}072\ldots$
$I(x) = 100 \cdot e^{-0{,}072\ldots \cdot x}$

$I(300) = 100 \cdot e^{-0{,}072\ldots \cdot 300}$
$I(300) = 3{,}506\ldots \cdot 10^{-8}$

Die Lichtintensität beträgt noch etwa $3{,}51 \cdot 10^{-8}$ % der Lichtintensität an der Oberfläche.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) 1 Zahlen und Maße
c) 3 Funktionelle Zusammenhänge

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) A Modellieren und Transferieren
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2
c) 4

Thema: Sonstiges

Quellen: https://de.wikipedia.org/wiki/Geologische_Zeitskala;
Georg von Boguslowski, Otto Krümmel: *Handbuch der Ozeanographie. Band 1: Die räumlichen, chemischen und physikalischen Verhältnisse des Meeres.* Villingen-Schwenningen: Nexx, 2014.

BMBWF
BUNDESMINISTERIUM
FÜR BILDUNG, WISSENSCHAFT
UND FORSCHUNG
www.bmbwf.gv.at

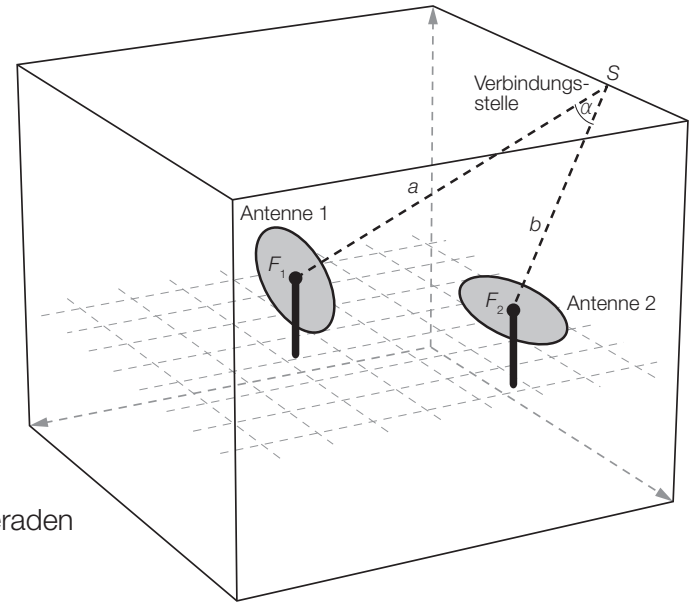
Richtfunk

Aufgabennummer: B_375

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Richtfunksysteme sind Funksysteme zur Übertragung von Informationen zwischen festen Standorten. Oft werden Parabolantennen für das Empfangen und das Senden der Strahlung verwendet.

a) Ein Richtstrahl, der entlang der Geraden a verläuft, wird vom Punkt $F_1 = (-50|-40|0)$ (Angaben in Metern) in Richtung des Vektors $\begin{pmatrix} 16 \\ 12 \\ 15 \end{pmatrix}$ gesendet.



– Stellen Sie eine Gleichung der Geraden a in Parameterform auf.

Ein Richtstrahl, der von F_2 aus gesendet wird, verläuft entlang der Geraden

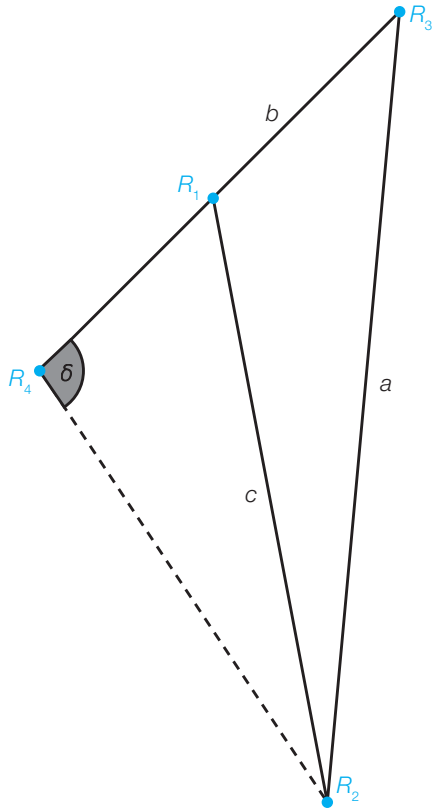
$b: X = \begin{pmatrix} 15 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 15{,}5 \\ 10 \\ 45 \end{pmatrix}$.

– Ermitteln Sie die Koordinaten desjenigen Schnittpunkts S, in dem die beiden Richtstrahlen auf die Verbindungsstelle treffen.

– Berechnen Sie denjenigen Winkel α, den die beiden Richtstrahlen miteinander einschließen.

b) Auf einer Karte sind vier Richtfunkstationen R_1, R_2, R_3 und R_4 eingezeichnet (siehe nebenstehende Abbildung).

– Dokumentieren Sie, wie man aus den bekannten Richtfunkstrecken a, b und c sowie dem Winkel δ die Länge der Richtfunkstrecke zwischen R_2 und R_4 berechnen kann.



c) Der Antennengewinn-Faktor G ist ein Maß für die Verstärkung einer Antenne.

$$G = \frac{4 \cdot \pi}{\lambda^2} \cdot A \cdot \eta$$

η ... dimensionsloser Parameter
A … Antennenfläche in m^2
λ … Wellenlänge in m
G … Antennengewinn-Faktor

– Geben Sie an, um welchen Faktor sich G verändert, wenn λ verdoppelt wird.

Für den Antennengewinn g in Dezibel (dB) gilt:

$$G = 10^{\frac{g}{10}}$$

– Zeigen Sie mithilfe der Logarithmusrechenregeln, dass eine Verdoppelung von G eine Erhöhung von g um rund 3 dB hervorruft.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Gerade a: $X = \begin{pmatrix} -50 \\ -40 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 16 \\ 12 \\ 15 \end{pmatrix}$

Berechnung des Schnittpunkts der beiden Richtstrahlen:

$$\begin{pmatrix} -50 \\ -40 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 16 \\ 12 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 15{,}5 \\ 10 \\ 45 \end{pmatrix}$$

Gleichungssystem:

I: $-50 + 16 \cdot s = 15 + 15{,}5 \cdot t$

II: $-40 + 12 \cdot s = 12 + 10 \cdot t$

III: $15 \cdot s = 45 \cdot t$

I: $16 \cdot s - 15{,}5 \cdot t = 65$

II: $12 \cdot s - 10 \cdot t = 52$

III: $15 \cdot s - 45 \cdot t = 0$

Ermitteln von s und t aus I und II: $s = 6$, $t = 2$
Einsetzen in III: $15 \cdot 6 - 45 \cdot 2 = 0$

$S = (46|32|90)$

$$\cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix} 16 \\ 12 \\ 15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 15{,}5 \\ 10 \\ 45 \end{pmatrix}}{\sqrt{16^2 + 12^2 + 15^2} \cdot \sqrt{15{,}5^2 + 10^2 + 45^2}}$$

$\alpha = 30{,}925\ldots°$

b) Man berechnet zuerst den Winkel α mithilfe des Cosinussatzes:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha)$

$\alpha = \arccos\left(\frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2 \cdot b \cdot c}\right)$

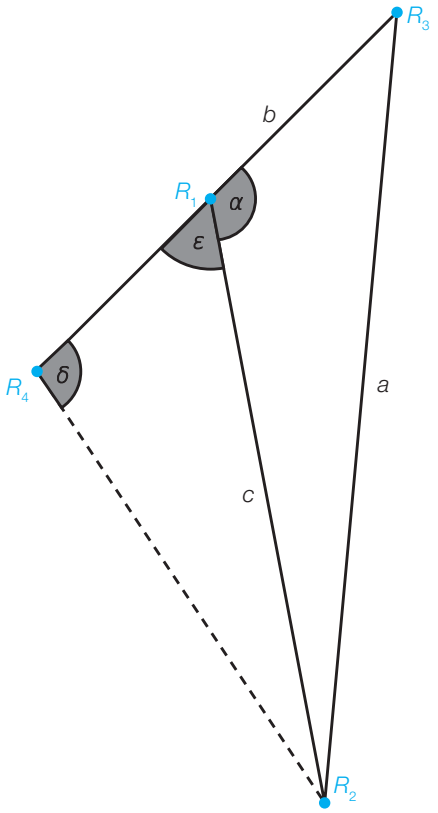
Anschließend berechnet man den Winkel ε:

$\varepsilon = 180° - \alpha$

Dann berechnet man die gesuchte Seite mithilfe des Sinussatzes:

$\frac{c}{\sin(\delta)} = \frac{\overline{R_2R_4}}{\sin(\varepsilon)}$

$\overline{R_2R_4} = \frac{c \cdot \sin(\varepsilon)}{\sin(\delta)}$



c) Wenn die Wellenlänge λ verdoppelt wird, beträgt G nur noch ein Viertel des ursprünglichen Wertes.

$G = 10^{\frac{g}{10}}$

$\lg(G) = \frac{g}{10}$

$10 \cdot \lg(G) = g$

Für eine Verdoppelung von G gilt:

$g_{neu} = 10 \cdot \lg(2 \cdot G) = \underbrace{10 \cdot \lg(2)}_{= 3{,}010\ldots} + \underbrace{10 \cdot \lg(G)}_{= g} \approx 3 + g$

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) D Argumentieren und Kommunizieren

Nebenhandlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) —
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 3
b) 2
c) 2

Thema: Nachrichtentechnik

Quellen: —

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Steinschleuder

Aufgabennummer: A_004

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Andy hat eine einfache Steinschleuder gebaut. Er schießt zur Überprüfung des Geräts einen Stein vertikal nach oben. Der Stein steigt zunächst und fällt dann wegen der Erdanziehung wieder hinab.

Die vom Stein erreichte Höhe h ist von der Zeit t abhängig. Wenn die Abschusshöhe 1,7 m beträgt, kann die Höhe näherungsweise durch die folgende Funktion beschrieben werden:

$$h(t) = -5t^2 + 15t + 1{,}7$$

$h(t)$ … Höhe zum Zeitpunkt t in Metern (m)
t … Zeitpunkt nach dem Abschuss in Sekunden (s)

a) Die Steigungen der Tangenten an den Graphen der Funktion h geben Auskunft über die momentanen Geschwindigkeiten des Steins zu den einzelnen Zeitpunkten t.

– Zeichnen Sie den Graphen der Funktion h und die Tangente an den Graphen bei $t = 2$ s.
– Bestimmen Sie aus der Grafik ungefähr die Steigung der Tangente.

b) Die momentane Geschwindigkeit v berechnet man zu jedem Zeitpunkt t durch die 1. Ableitung der Funktion h.

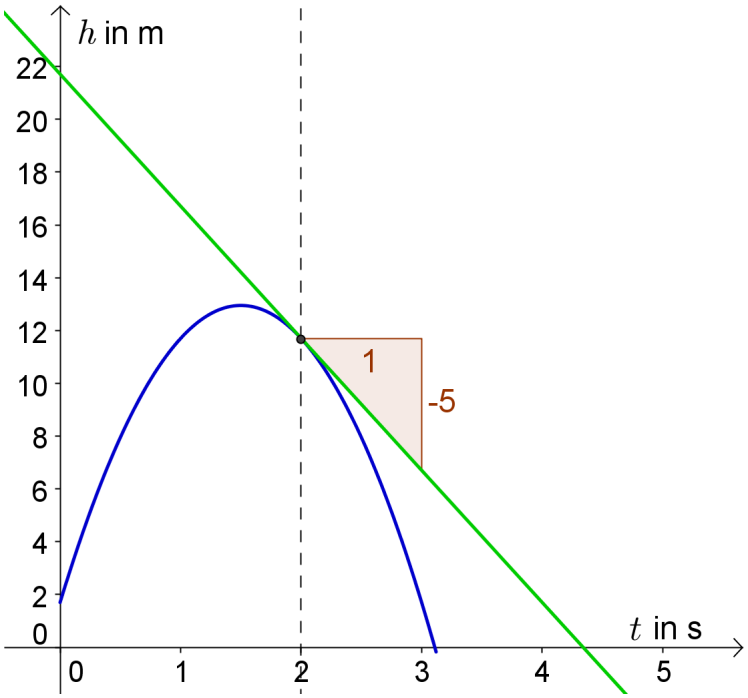
– Berechnen Sie mithilfe der 1. Ableitung, mit welcher Geschwindigkeit v (in m/s) der Stein auf dem Boden auftrifft.

c) – Erklären Sie, wie man mithilfe der 1. und der 2. Ableitung der Funktion h die maximale Höhe, die der Stein erreicht, berechnen kann.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



Die Tangente hat an der Stelle $t = 2$ s die Steigung -5. *(Ableseungenauigkeit ist zu tolerieren!)*

b) Der Stein trifft auf dem Boden auf, wenn $h(t) = 0$.
$h(t) = -5t^2 + 15t + 1{,}7 = 0 \rightarrow$ Technologieeinsatz $t = 3{,}109\ldots$ s

$h'(t) = -10t + 15$
$h'(3{,}109\ldots) \approx -16{,}09$
Die Geschwindigkeit beim Auftreffen auf dem Boden beträgt rund 16,09 m/s.

c) Mit $h'(t) = 0$ berechnet man den Zeitpunkt, an dem ein Extremwert von h erreicht wird. Durch Einsetzen in die Gleichung für $h(t)$ wird dieser Extremwert berechnet. Das kann im Allgemeinen ein Maximum oder ein Minimum sein.

Um bei einem berechneten Extremwert zwischen einem Minimum und einem Maximum zu unterscheiden, benötigt man die 2. Ableitung. Sie beschreibt das Krümmungsverhalten der Funktion. Bei einem lokalen Maximum liegt eine negative Krümmung vor. Wenn man daher den Zeitpunkt, zu dem das Extremum erreicht wird, in die 2. Ableitung einsetzt, dann erhält man im Falle eines Maximums eine negative Zahl.

(Wenn jemand mit Geschwindigkeit und Beschleunigung argumentiert, weil er Kenntnisse aus der Physik einbringen kann, so ist das ebenfalls gültig!)

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 4 Analysis
c) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) D Argumentieren und Kommunizieren

Nebenhandlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) —
c) —

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2
c) 2

Thema: Physik

Quellen: —

Standseilbahn

Aufgabennummer: A_001

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Die Schlossalmbahn in Bad Hofgastein ist eine Standseilbahn. Die Höhe der Talstation beträgt 843 Meter (m) über dem Meeresspiegel (ü. d. M.), die Höhe der Bergstation beträgt 1 302 m ü. d. M., die direkte Verbindungsstrecke zwischen Talstation und Bergstation hat eine Länge von 1 251 m.

a) Übertragen Sie den Text in eine passende Skizze, die mit den gegebenen Größen vollständig zu beschriften ist.
Berechnen Sie den Steigungswinkel der direkten Verbindungsstrecke zwischen Talstation und Bergstation.

b) Bei einer Neuplanung der Bahn überlegt man, den Steigungswinkel der Standseilbahn zu verkleinern, wobei der zu überwindende Höhenunterschied unverändert bleibt.
Erklären Sie, wie man die Steigung der direkten Verbindungsstrecke zwischen Talstation und Bergstation in Prozent (%) ermitteln kann.
Erklären Sie anhand einer passenden Formel, wie sich die Verringerung der Steigung auf die Streckenlänge auswirkt.

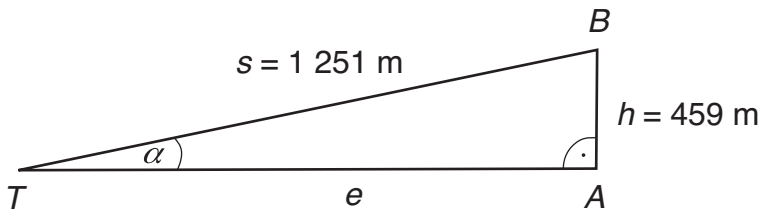
c) Die Schlossalmbahn besitzt 2 Wägen, wobei sich jeweils ein Wagen bei der Bergstation befindet, wenn der andere bei der Talstation steht. In einem Wagen der Schlossalmbahn werden maximal 100 Personen befördert. Die Fahrzeit von der Talstation zur Bergstation beträgt 3,51 Minuten (min). Berechnen Sie, wie viele Personen maximal pro Stunde von der Tal- zur Bergstation befördert werden können, wenn pro Fahrt zum Ein- und Aussteigen zusammen durchschnittlich 3,72 Minuten gebraucht werden.

Hinweis zur Aufgabe:
Antworten müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a)

$\sin \alpha = \frac{h}{s}$



$\alpha \approx 21{,}5°$

Oder:

Nach Berechnung von e über den Lehrsatz des Pythagoras ist auch die Verwendung von Cosinus oder Tangens möglich.

b) Berechnung von e:

$e = \sqrt{s^2 - h^2}$

Das Verhältnis $\frac{h}{e} \cdot 100$ gibt die Steigung in % an.

Oder:

$\tan \alpha = \frac{h}{e}$

Der Tangens des Neigungswinkels ist das Verhältnis von Gegenkathete zu Ankathete. Multipliziert man dieses mit 100, erhält man die Steigung in %.

h bleibt gleich groß, das heißt, Veränderungen können nur bei e vorgenommen werden. Damit der Tangens von α kleiner wird, muss e vergrößert werden.

Damit verbunden ist, dass die Streckenlänge ebenfalls größer wird, weil die Beziehung $s = \sqrt{h^2 + e^2}$ gilt.

(Die Argumentation mithilfe von sin α oder cos α ist ebenfalls möglich.)

c) In 7,23 min (Fahrzeit plus Ein- und Aussteigen) können 100 Personen zur Bergstation transportiert werden.

$\frac{60}{7{,}23} \approx 8{,}299$

Das bedeutet, in 60 min können 8 Fahrten durchgeführt und daher maximal 800 Personen transportiert werden.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 1 Zahlen und Maße

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) —
c) —

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) leicht

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2
c) 1

Thema: Verkehr

Quelle: http://www.lift-world.info (Liftdatenbank)

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Temperaturmessung

Aufgabennummer: A_232

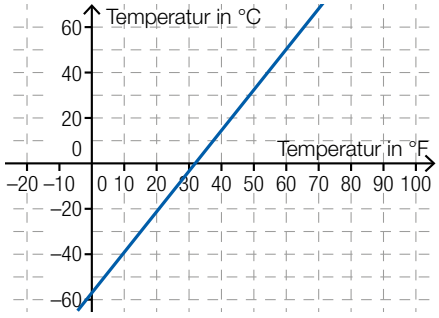
Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Die Umrechnung einer Temperatur T_F in Grad Fahrenheit (°F) auf eine Temperatur T_C in Grad Celsius (°C) erfolgt nach folgender Formel:

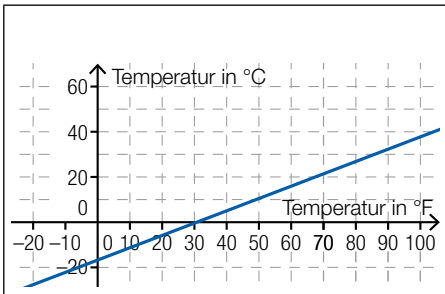
$$T_C = \frac{5}{9} \cdot (T_F - 32)$$

T_F … Temperatur in °F
T_C … Temperatur in °C

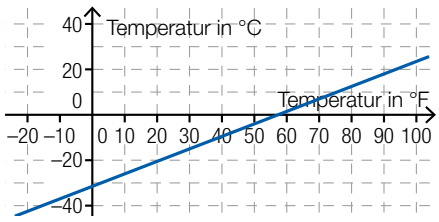
– Kreuzen Sie diejenige Abbildung an, die dieser Formel entspricht. *[1 aus 5]*



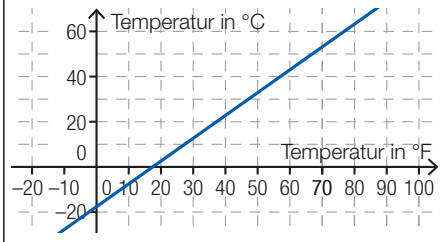
☐



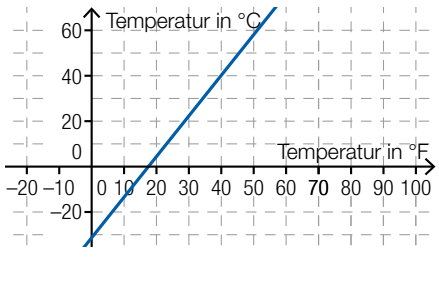
☐



☐



☐



☐

b) Eine alte Temperatureinheit aus dem Jahr 1701 ist Grad Rømer (°Rø). Der Zusammenhang mit der Temperaturskala nach Kelvin ist durch folgende Formel gegeben:

$$T_R = (T_K - 273{,}15) \cdot \frac{21}{40} + 7{,}5$$

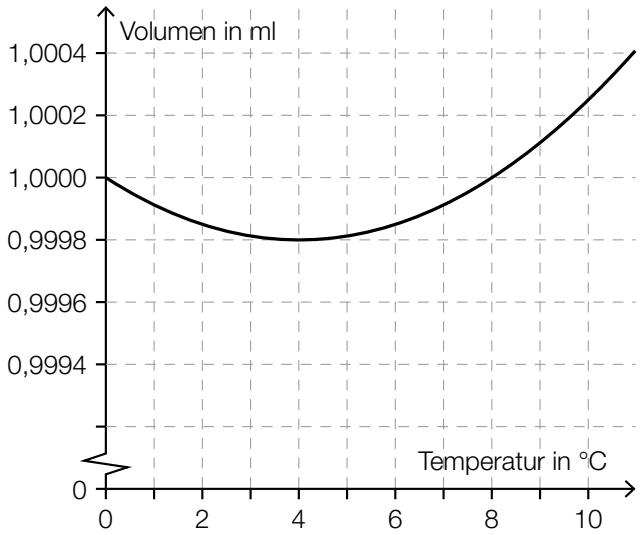
T_K … Temperatur in Kelvin
T_R … Temperatur in Grad Rømer

– Formen Sie diese Formel nach T_K um.

T_K = _____

– Beschreiben Sie, wie sich die Temperatur in Grad Rømer ändert, wenn die Temperatur um 1 Kelvin zunimmt.

c) In der nachstehenden Grafik ist das Volumen von 1 g Wasser in Abhängigkeit von der Temperatur dargestellt.

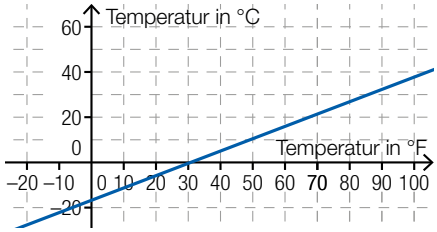


– Bestimmen Sie anhand der Grafik, um wie viel Prozent das Volumen des Wassers steigt, wenn das Wasser von 4 °C auf 8 °C erwärmt wird.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a)



☒

b) $T_K = \frac{40}{21} \cdot (T_R - 7{,}5) + 273{,}15$

Die Temperatur nimmt um $\frac{21}{40}$ °Rø = 0,525 °Rø zu.

c) $\frac{1 - 0{,}9998}{0{,}9998} = 0{,}0002...$

Das Volumen des Wassers steigt um rund 0,02 %.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 1 Zahlen und Maße

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) —

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) leicht
c) leicht

Punkteanzahl:

a) 1
b) 2
c) 1

Thema: Sonstiges

Quellen: —

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Schweinezucht (1)

Aufgabennummer: B_168

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Bei Schweinen wird die Rückenspeckdicke gemessen.

a) In einem Stall gibt es 20 Schweine, die nach der Eigenschaft „ideale Rückenspeckdicke“ und „nicht ideale Rückenspeckdicke“ unterschieden werden können.
Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Schwein eine „ideale Rückenspeckdicke“ hat, liegt bei 93 %.

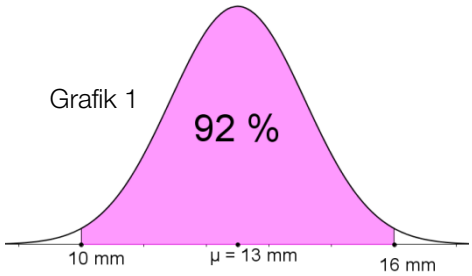
– Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in diesem Stall mindestens 15 Schweine mit idealer Rückenspeckdicke zu finden sind.

b) Man nimmt an, dass die Rückenspeckdicke normalverteilt ist. Unter bestimmten Umständen wird eine Dicke zwischen 9 mm und 14 mm als ideal erachtet.

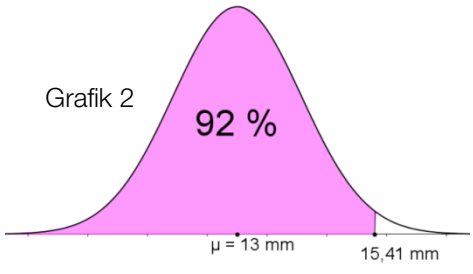
– Berechnen Sie die Standardabweichung, wenn der Erwartungswert der Rückenspeckdicke 11,5 mm ist und 90 % der Schweine im idealen Bereich liegen.
– Stellen Sie den Sachverhalt mithilfe der Gauß’schen Glockenkurve grafisch dar.

c) Der in den nachstehenden Grafiken gefärbte Bereich entspricht dem Prozentsatz derjenigen Schweine, deren Rückenspeckdicke in einem erwünschten Bereich liegt. Der Rest wird als „Ausschussanteil“ bezeichnet.

Grafik 1

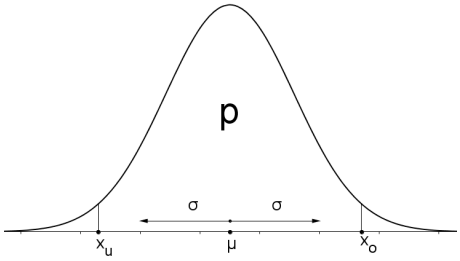


Grafik 2



– Interpretieren Sie die in den beiden Normalverteilungskurven dargestellten Wahrscheinlichkeiten bezüglich des Ausschussanteils.
– Erstellen Sie zu beiden Grafiken jeweils eine Frage nach dem dargestellten Prozentsatz.

d) Bei normalverteilten Werten ist ein bestimmter Erwartungswert μ gegeben.
Innerhalb eines symmetrischen Bereiches mit der unteren Grenze x_u und der oberen Grenze x_o liegt bei einer Standardabweichung σ ein bestimmter Anteil p aller Werte.



– Beschreiben Sie, wie sich eine größere Standardabweichung bei gleichem Anteil p auf die Grenzen des symmetrischen Bereiches und die Form der Kurve auswirkt.
– Beschreiben Sie, wie sich der Anteil p bei einer größeren Standardabweichung und bei gleichbleibenden Grenzen x_u und x_o verändern würde.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Berechnung mit Binomialverteilung:

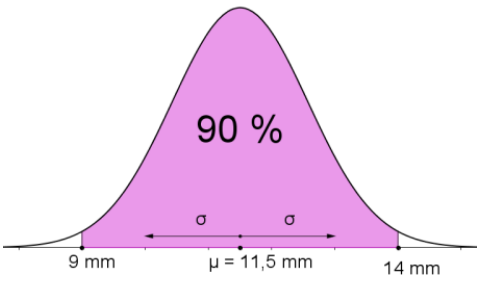
$P(15 \le X \le 20) = \sum_{k=15}^{20} \binom{20}{k} \cdot 0{,}93^k \cdot 0{,}07^{(20-k)} = 0{,}9981$

b) $P(9 \le X \le 14) = 0{,}9$

Aufgrund der Symmetrie gilt: $P(X \le 14) = 0{,}95$

$\Phi(z) = 0{,}95 \Rightarrow z = 1{,}644...$

$\frac{14 - 11{,}5}{\sigma} = 1{,}645 \Rightarrow \sigma = 1{,}52$ mm



c) In Grafik 1 sind zu magere und zu fette Schweine „Ausschuss“. Es sind jeweils 4 % der Schweine.
In Grafik 2 sind nur zu fette Schweine „Ausschuss“. Es sind 8 % der Schweine.

Frage zu Grafik 1: Wie groß ist der Prozentanteil der Schweine, die eine Rückenspeckdicke zwischen 10 mm und 16 mm aufweisen, wenn die mittlere Dicke 13 mm beträgt?

Frage zu Grafik 2: Wie groß ist der Prozentsatz der Schweine, deren Rückenspeckdicke maximal 15,41 mm bei einer mittleren Dicke von 13 mm beträgt?

d) – Eine größere Standardabweichung bewirkt bei gleichem Anteil, dass die Grenzen weiter vom Mittelwert entfernt liegen, und die Kurve würde flacher werden.
– Eine größere Standardabweichung bewirkt bei gleichbleibenden Grenzen einen geringeren Anteil innerhalb der Grenzen.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 5 Stochastik
c) 5 Stochastik
d) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) C Interpretieren und Dokumentieren
d) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) A Modellieren und Transferieren
c) —
d) —

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel
d) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2
c) 3
d) 3

Thema: Wirtschaft

Quellen: —

Schweinezucht (2)

Aufgabennummer: B_149

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

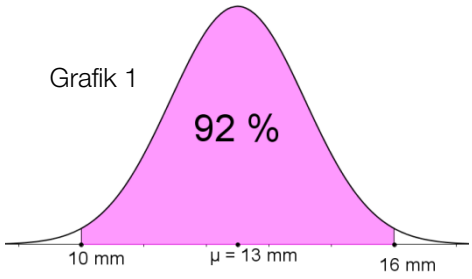
Bei Schweinen wird die Rückenspeckdicke gemessen.

a) In einem Stall gibt es 20 Schweine, die nach der Eigenschaft „ideale Rückenspeckdicke“ und „nicht ideale Rückenspeckdicke“ unterschieden werden können.
Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Schwein eine „ideale Rückenspeckdicke“ hat, liegt bei 93 %.

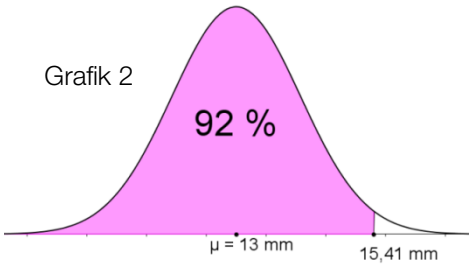
– Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in diesem Stall mindestens 15 Schweine mit idealer Rückenspeckdicke zu finden sind.

b) Der in den nachstehenden Grafiken gefärbte Bereich entspricht dem Prozentsatz derjenigen Schweine, deren Rückenspeckdicke in einem erwünschten Bereich liegt. Der Rest wird als „Ausschussanteil“ bezeichnet.

Grafik 1

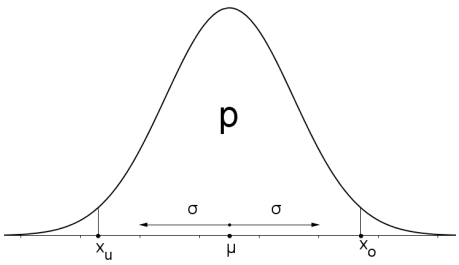


Grafik 2



– Interpretieren Sie die in den beiden Normalverteilungskurven dargestellten Wahrscheinlichkeiten bezüglich des Ausschussanteils.
– Erstellen Sie zu beiden Grafiken jeweils eine Frage nach dem dargestellten Prozentsatz.

c) Bei normalverteilten Werten ist ein bestimmter Erwartungswert μ gegeben.
Innerhalb eines symmetrischen Bereiches mit der unteren Grenze x_u und der oberen Grenze x_o liegt bei einer Standardabweichung σ ein bestimmter Anteil p aller Werte.



– Beschreiben Sie, wie sich eine größere Standardabweichung bei gleichem Anteil p auf die Grenzen des symmetrischen Bereiches und die Form der Kurve auswirkt.
– Beschreiben Sie, wie sich der Anteil p bei einer größeren Standardabweichung und bei gleichbleibenden Grenzen x_u und x_o verändern würde.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Berechnung mit Binomialverteilung:

$P(15 \leq X \leq 20) = \sum_{k=15}^{20} \binom{20}{k} \cdot 0{,}93^{k} \cdot 0{,}07^{(20-k)} = 0{,}9981$

b) In Grafik 1 sind zu magere und zu fette Schweine „Ausschuss“. Es sind jeweils 4 % der Schweine.
In Grafik 2 sind nur zu fette Schweine „Ausschuss“. Es sind 8 % der Schweine.

Frage zu Grafik 1: Wie groß ist der Prozentanteil der Schweine, die eine Rückenspeckdicke zwischen 10 mm und 16 mm aufweisen, wenn die mittlere Dicke 13 mm beträgt?

Frage zu Grafik 2: Wie groß ist der Prozentsatz der Schweine, deren Rückenspeckdicke maximal 15,41 mm bei einer mittleren Dicke von 13 mm beträgt?

c) – Eine größere Standardabweichung bewirkt bei gleichem Anteil, dass die Grenzen weiter vom Mittelwert entfernt liegen, und die Kurve würde flacher werden.
– Eine größere Standardabweichung bewirkt bei gleichbleibenden Grenzen einen geringeren Anteil innerhalb der Grenzen.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 5 Stochastik
c) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) —
c) —

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 3
c) 3

Thema: Wirtschaft

Quellen: —

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Tischlereibetrieb

Aufgabennummer: B_269

Technologieeinsatz:	möglich ☐	erforderlich ☒

Ein Tischlereibetrieb produziert Tischgruppen (Tisch und Sessel), die österreichweit vertrieben werden sollen.

a) Die Kosten für die Produktion eines bestimmten Tischgruppenmodells lassen sich durch die Kostenfunktion K beschreiben:

$$K(x) = \frac{x^3}{300} - x^2 + 200 \cdot x + 9000$$

Folgende Preis-Absatz-Funktion p beschreibt den Zusammenhang zwischen Absatz und Preis für dieses Tischgruppenmodell:

$$p(x) = -\frac{10}{3} \cdot x + 875$$

x … Tischgruppenmodelle in Mengeneinheiten (ME)
$K(x)$ … Kosten bei x ME in Geldeinheiten (GE)
$p(x)$ … Preis bei x ME in GE/ME

– Erstellen Sie eine Gleichung der Gewinnfunktion.
– Ermitteln Sie, bei welcher Menge der maximale Gewinn erreicht wird.
– Ermitteln Sie die Durchschnittskosten für die gewinnmaximierende Menge.
– Dokumentieren Sie in Worten, wie man die langfristige Preisuntergrenze berechnen kann.

b) Für ein anderes Produkt wurde eine fehlerhafte Kostenfunktion erstellt:

$$K(x) = \frac{x^3}{300} - x^2 + 96 \cdot x + 9000$$

– Erklären Sie mithilfe des Graphen der Ableitungsfunktion K', warum diese Funktion keine Grenzkostenfunktion einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion ist.

c) Die Nachfragefunktion ordnet dem Stückpreis die Nachfragemenge zu.
Als Modell für die Nachfragefunktion für eine spezielle Tischgruppe verwendet man eine Polynomfunktion 2. Grades:

$x(p) = a \cdot p^2 + b \cdot p + c$

p … Stückpreis in GE/ME
$x(p)$ … nachgefragte Menge in ME bei einem Preis p in GE/ME

Folgende Daten wurden erhoben: Bei einem Preis von 1 000 GE/ME besteht eine Nachfrage von 6 600 ME. Bei einem Preis von 1 200 GE/ME ist die lokale Änderungsrate der Nachfrage –3 ME pro ME/GE und ab einem Preis von 2 500 GE besteht keine Nachfrage.

– Erstellen Sie ein Gleichungssystem, mit dem eine Gleichung der Nachfragefunktion berechnet werden kann.
– Bestimmen Sie eine Gleichung der Nachfragefunktion.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $G(x) = E(x) - K(x) = \left(-\frac{10}{3} \cdot x + 875\right) \cdot x - \left(\frac{x^3}{300} - x^2 + 200 \cdot x + 9000\right)$

$G(x) = -\frac{x^3}{300} - \frac{7}{3} \cdot x^2 + 675 \cdot x - 9000$

$G'(x) = -\frac{x^2}{100} - \frac{14}{3} \cdot x + 675 = 0 \Rightarrow x = 115{,}87\ldots$

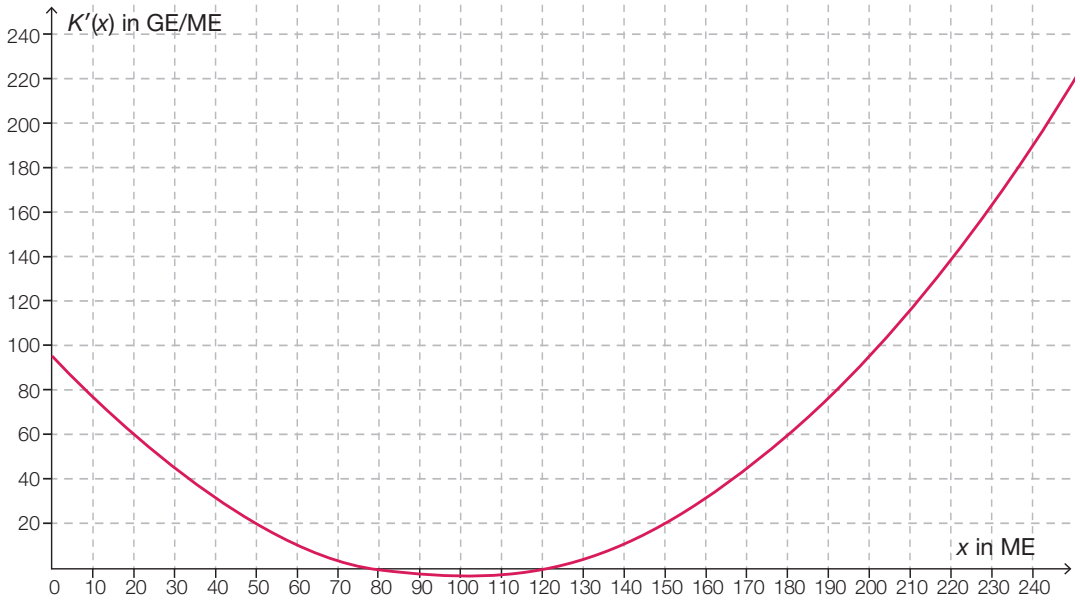
Der maximale Gewinn wird bei rund 116 ME erzielt.

$\frac{K(x)}{x} = \frac{x^2}{300} - x + 200 + \frac{9000}{x} \Rightarrow \overline{K}(115{,}87\ldots) \approx 206{,}55$

Die Durchschnittskosten pro ME betragen rund 206,55 GE.

Man berechnet die Nullstelle der 1. Ableitung der Stückkostenfunktion.
Dieser Wert wird in die Stückkostenfunktion eingesetzt. Die sich daraus ergebenden Stückkosten in GE/ME stellen die langfristige Preisuntergrenze dar.

b) $K'(x) = \frac{x^2}{100} - 2 \cdot x + 96$



Der Funktionsgraph von K' kann keine Grenzkostenfunktion einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion sein, weil eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion streng monoton wachsend ist und daher die Grenzkostenfunktion keine negativen Funktionswerte hat.

c) $6600 = a \cdot 1000^2 + b \cdot 1000 + c$
$-3 = a \cdot 2 \cdot 1200 + b$
$0 = a \cdot 2500^2 + b \cdot 2500 + c$

Mittels Technologieeinsatz:
$x(p) \approx -0{,}00127 \cdot p^2 + 0{,}0545 \cdot p + 7818{,}18$

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 4 Analysis
c) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 2 Algebra und Geometrie

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren, C Interpretieren und Dokumentieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 4
b) 2
c) 2

Thema: Wirtschaft

Quellen: –

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Netzwerkadministration

Aufgabennummer: A_130

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

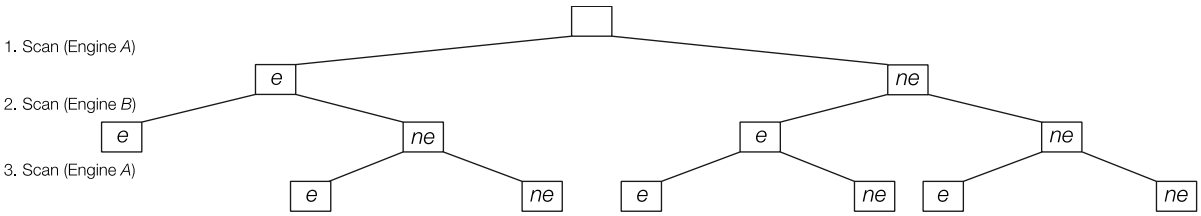
Ein Netzwerkadministrator stellt folgende Überlegungen an.

a) Die Scan-Methodik eines Virenscanners arbeitet mit 2 Scanner-Komponenten, den Engines *A* und *B*. Die Engines überprüfen Dateien in mehreren Scans immer abwechselnd. Der Prozess des abwechselnden Scannens kann beliebig lang fortgesetzt werden. Sobald in einer Datei ein Virus von beiden Engines erkannt wurde, wird die Datei gelöscht.

Die Engine *A* arbeitet mit der Erkennungswahrscheinlichkeit $p_A = \frac{2}{3}$ und die Engine *B* mit der Erkennungswahrscheinlichkeit $p_B = \frac{5}{8}$.

Das nachstehende Baumdiagramm zeigt die Scan-Methodik beginnend mit der Engine *A* bei 3 aufeinanderfolgenden Scans.

e … Virus wird erkannt, *ne* … Virus wird nicht erkannt



– Übertragen Sie die passenden Wahrscheinlichkeiten in das Baumdiagramm.
– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass es nach höchstens 3 Scans zum Löschen der Datei kommt.

b) Ein Image (Abbildung eines Datenträgers) mit 72 Gigabyte (GByte) wird installiert. Die Übertragungsrate beträgt 64 Megabit pro Sekunde (Mbit/s) (1 Byte = 8 Bit).

– Berechnen Sie die Übertragungsrate in MByte/s.
– Berechnen Sie die Zeit in Minuten (min), die benötigt wird, um das Image zu installieren.

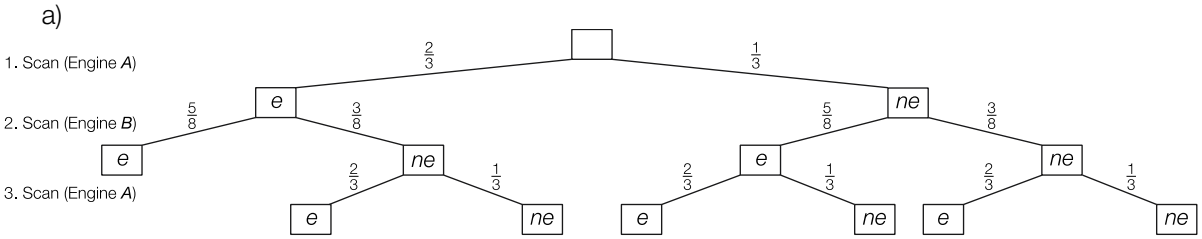
c) Ein Image wird in einem Netzwerk auf 40 nach dem Zufallsprinzip ausgewählten Rechnern installiert. Aus Erfahrung weiß man, dass bei jeder Netzwerkinstallation 4 % der Rechner nicht korrekt funktionieren.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E_1: „Das Image wird auf 38 Rechnern korrekt installiert."
– Stellen Sie eine Formel auf, die die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E_2: „Das Image wird auf mindestens 36 Rechnern korrekt installiert" berechnet.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a)



E … „Löschen der Datei nach höchstens 3 Scans“

$$P(E) = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{8} + \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{2}{3} = \frac{40}{72}$$

b) Übertragungsrate: $64\ \frac{\text{MBit}}{\text{s}} = 8\ \frac{\text{MByte}}{\text{s}}$

$$\frac{72 \cdot 1000}{8} = 9000\ \text{s} = 150\ \text{min}$$

Um das Image zu installieren, werden 150 min benötigt.

c) $P(E_1) = P(X = 38) = \binom{40}{38} \cdot 0{,}96^{38} \cdot 0{,}04^{2} = 0{,}2645\ldots$

$P(E_1) \approx 26{,}5\ \%$

$$P(E_2) = P(X \geq 36) = \sum_{k=36}^{40} \binom{40}{k} \cdot 0{,}96^{k} \cdot 0{,}04^{40-k}$$

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 1 Zahlen und Maße
c) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) —
c) A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) leicht
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2
c) 2

Thema: Informatik

Quellen: —

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Wirksamkeit von Medikamenten

Aufgabennummer: A_048

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Um die Wirksamkeit von 3 verschiedenen Schmerztabletten *A*, *B* und *C* zu überprüfen, wurden diese an einer Versuchsgruppe von 2000 Frauen getestet.

Medikament	Anzahl der Studienteil-nehmerinnen	Anzahl der Frauen mit positiver Wirkung nach Einnahme
A	500	255
B	500	197
C	1000	298

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer zufällig ausgewählten Frau eine positive Wirkung durch eines der Medikamente eintritt.

b) Das Schmerzmittel *D* wirkt erfahrungsgemäß in 60 % aller Fälle positiv. In den anderen Fällen zeigt es keine positive Wirkung. *n* Frauen nehmen das Medikament ein.

– Interpretieren Sie, was durch den Term $0{,}4^n$ in diesem Sachzusammenhang berechnet wird.
– Interpretieren Sie, was durch den Term $(1 - 0{,}4^n)$ in diesem Sachzusammenhang berechnet wird.

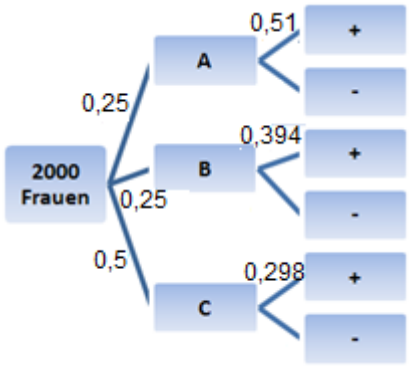
c) Die Körpermasse in der Versuchsgruppe ist normalverteilt.
Der Erwartungswert beträgt 65 Kilogramm (kg) und die Standardabweichung 5,4 kg.
6 % der Versuchsgruppe, symmetrisch verteilt, sind stark über- bzw. untergewichtig.
Bei der Auswertung der Studie hat sich herausgestellt, dass diese 6 % als Testpersonen nicht geeignet sind.

– Berechnen Sie, in welchem Bereich die Körpermassen der Teilnehmerinnen liegen müssten, um ungeeignete Testpersonen auszuschließen.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) *Ein Diagramm ist nicht erforderlich.*



P(„Eintritt einer positiven Wirkung“) = 0,25 · 0,51 + 0,25 · 0,394 + 0,5 · 0,298 = 0,375 = 37,5 %

oder:

P(„Eintritt einer positiven Wirkung“) = $\frac{255 + 197 + 298}{2\,000}$ = 0,375

Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer zufällig ausgewählten Frau eine positive Wirkung durch eines der Medikamente eingetreten ist, beträgt 37,5 %.

b) $0{,}4^n$ drückt mithilfe des Modells der Binomialverteilung die Wahrscheinlichkeit aus, dass bei n Frauen keine positive Wirkung auftritt.

$1 - 0{,}4^n$ ist die Gegenwahrscheinlichkeit dazu und berechnet die Wahrscheinlichkeit, dass von n Frauen mindestens 1 Frau eine positive Wirkung des Medikaments verspürt.

c) X … Körpermassen in kg

Bezeichnet man mit a die untere Grenze des gesuchten Intervalls, so gilt:
$P(X \leq a) = 0{,}03$

Berechnung von a mittels Technologieeinsatz:
$a = 54{,}84$

Testpersonen der Versuchsgruppe mit einer Körpermasse zwischen rund 54,8 kg und rund 75,2 kg sind für das Experiment ideal.

Es sind vor allem mit Technologieeinsatz auch andere Lösungswege möglich.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 5 Stochastik
c) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) –
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) schwer
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2
c) 2

Thema: Medizin

Quellen: –

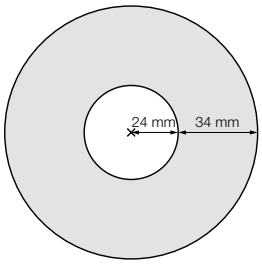
BMB
Bundesministerium
für Bildung

CD

Aufgabennummer: A_233

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Eine CD ist unter anderem auch ein Speichermedium für Multimediadateien.

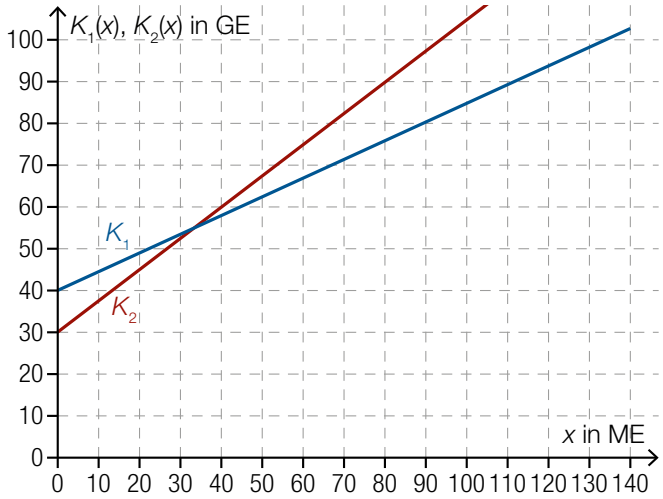


a) Die Fläche einer CD, die zum Speichern von Daten verwendet wird, hat die Form eines Kreisrings. Die Speicherkapazität einer CD umfasst ca. 700 Megabyte (MB). Der Bereich, auf dem die Daten gespeichert werden können, beginnt rund 24 mm vom Mittelpunkt der CD gemessen und ist rund 34 mm breit.

Jemand speichert mehrere Bilddateien mit einer Größe von durchschnittlich je 4 MB.

– Ermitteln Sie, wie viele Bilddateien annähernd auf 1 cm^2 gespeichert werden können.

b) In der nachstehenden Abbildung sind die Graphen der Kostenfunktionen für die Pressung von CDs zweier Unternehmen dargestellt.



x … Menge der gepressten CDs in Mengeneinheiten (ME)
$K_1(x)$, $K_2(x)$ … Kosten bei der Produktionsmenge x in Unternehmen 1 bzw. Unternehmen 2 in Geldeinheiten (GE)

– Stellen Sie eine Gleichung der Kostenfunktion K_2 auf.

Die Funktion K_1 wird durch die Funktionsgleichung $K_1(x) = 0{,}45 \cdot x + 40$ beschrieben.
Es soll diejenige Produktionsmenge bestimmt werden, bei der die Produktionskosten im Unternehmen 2 um 10 GE höher sind als jene im Unternehmen 1.

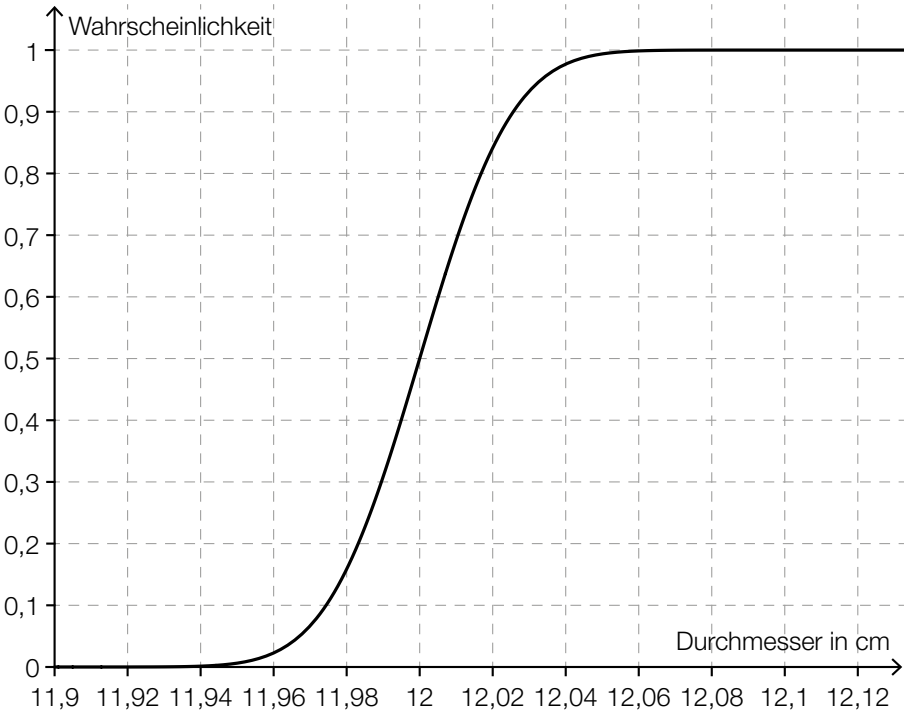
– Erstellen Sie eine Gleichung zur Berechnung dieser Produktionsmenge.

c) Die Durchmesser von CDs eines bestimmten Herstellers sind annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 12$ cm und der Standardabweichung $\sigma = 0{,}02$ cm.

– Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Durchmesser einer zufällig ausgewählten CD dieses Herstellers außerhalb des Intervalls $[\mu - 0{,}04 \text{ cm}; \mu + 0{,}04 \text{ cm}]$ liegt.

In der untenstehenden Abbildung ist der Graph der Verteilungsfunktion dieser Normalverteilung dargestellt.

– Kennzeichnen Sie in dieser Abbildung die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte CD im Bereich $[\mu - 0{,}04 \text{ cm}; \mu + 0{,}04 \text{ cm}]$ liegt.



Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Flächeninhalt des Kreisrings:

$A = \pi \cdot (2{,}4 + 3{,}4)^2 - \pi \cdot 2{,}4^2$

$A = 87{,}587... \text{ cm}^2$

$$\frac{\frac{700}{4}}{87{,}587...} = 1{,}997...$$

Auf 1 cm^2 werden rund 2 Bilddateien gespeichert.

b) $K_2(x) = 0{,}75 \cdot x + 30$

$K_2(x) - K_1(x) = 10$

$0{,}75 \cdot x + 30 - (0{,}45 \cdot x + 40) = 10$

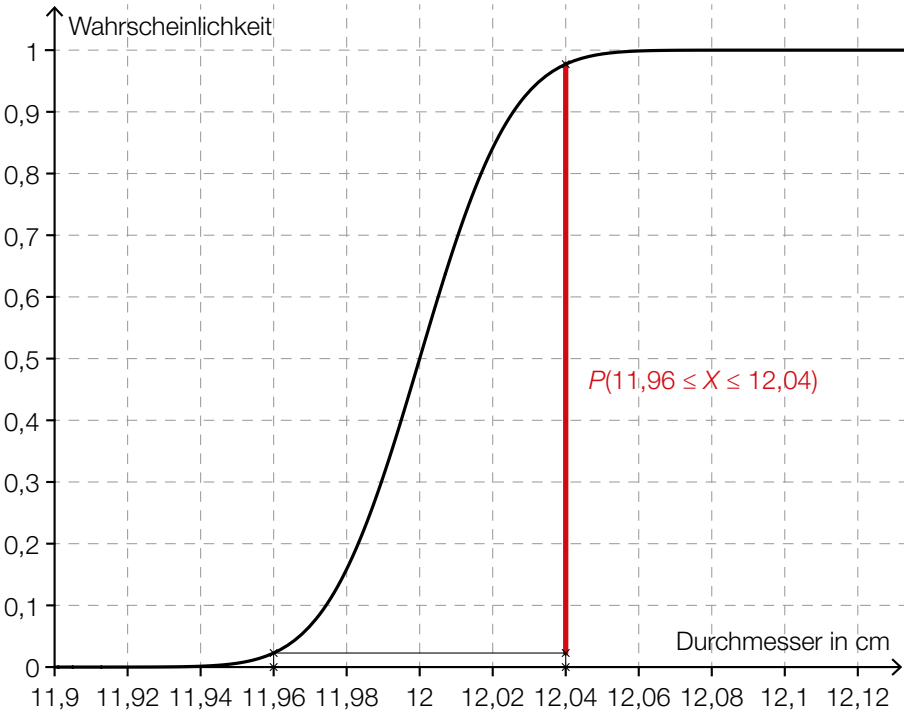
c) X ... Durchmesser einer CD

$P(11{,}96 \text{ cm} \leq X \leq 12{,}04 \text{ cm}) = 0{,}95449\ldots$

$1 - 0{,}95449\ldots = 0{,}04550\ldots$

Die Wahrscheinlichkeit liegt bei rund 4,55 %.

Die Berechnung der Wahrscheinlichkeit mit der σ-Umgebung ist ebenfalls zulässig.



Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) 1 Zahlen und Maße
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) A Modellieren und Transferieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) —
c) A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) leicht
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2
c) 2

Thema: Sonstiges

Quellen: —

Regenrinne

Aufgabennummer: A_051

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Der Querschnitt einer Regenrinne hat die Form eines Kreisabschnitts mit den Maßen laut Abb. 1.

R ... Radius des Kreises
h ... Höhe der Rinne

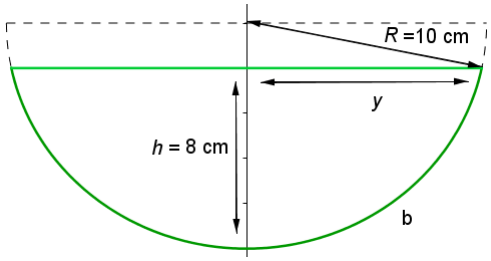


Abb. 1

– Berechnen Sie die Breite der Rinne ($2 \cdot y$) und die Bogenlänge b.

b) Eine halbkreisförmige Rinne verbraucht Material, das mit der Formel $M = R \cdot \pi \cdot L$ berechnet werden kann.

R … Radius der halbkreisförmigen Rinne in cm
L … Länge der Rinne in cm
x … Breite der kastenförmigen Rinne in cm

– Begründen Sie mithilfe der entsprechenden Formeln, warum eine kastenförmige Rinne mit gleich großer Querschnittsfläche und gleich großer Höhe mehr Material benötigt.

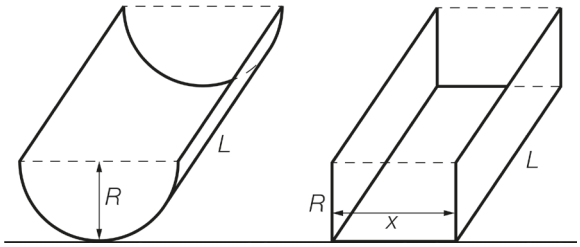


Abb. 2

c) Der Materialverbrauch *M* für eine kastenförmige Rinne mit einer Länge von 1 m kann bei vorgegebener gleichbleibender Querschnittsfläche von 112,5 cm² in Abhängigkeit von der Breite *x* in cm mit dem Graphen aus Abb. 3 dargestellt werden.

– Lesen Sie aus der Grafik den Wert für diejenige Breite ab, bei der der Materialverbrauch am geringsten ist.
– Berechnen Sie die Höhe der Rinne mithilfe des abgelesenen Werts.

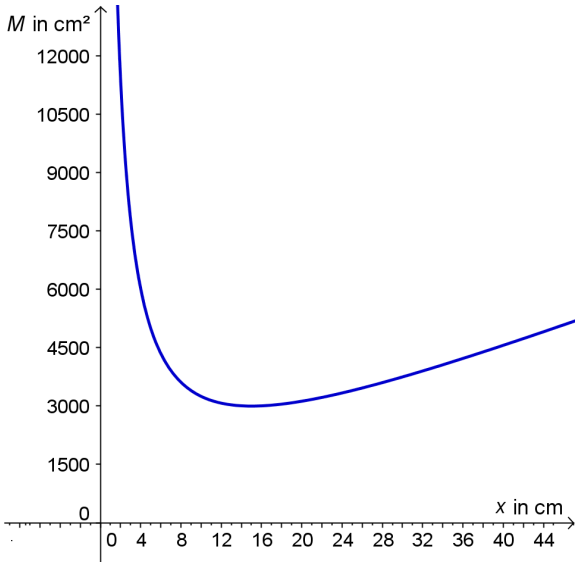


Abb. 3

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $y = \sqrt{100 - 4} = 9{,}797$

$2 \cdot y = 19{,}595 \approx 19{,}6$ cm

Die Rinne ist ungefähr 19,6 cm breit.

$b = \frac{R \cdot \pi \cdot \alpha}{180°}$ α im Gradmaß (°)

$\cos(\alpha) = 0{,}2$

$b = \frac{10 \cdot \pi \cdot 2 \cdot \arccos(0{,}2)}{180°} = 27{,}388\ldots \approx 27{,}4$

Die Bogenlänge beträgt rund 27,4 cm.

b) Kastenquerschnitt = $R \cdot x$
Er entspricht der Halbkreisfläche.

$\frac{R^2 \cdot \pi}{2} = R \cdot x \Rightarrow x = 0{,}5 \cdot \pi \cdot R$

Mantel der kastenförmigen Rinne: $M = (2 \cdot R + x) \cdot L$
Setzt man x ein, so erhält man:
$(2 \cdot R + 0{,}5 \cdot \pi \cdot R) \cdot L = (2 + 0{,}5 \cdot \pi) \cdot R \cdot L$
$M = 3{,}57 \cdot R \cdot L$

Mantel der halbkreisförmigen Rinne:
$M_2 = R \cdot \pi \cdot L$
$3{,}57 > \pi$, daher ist der Materialverbrauch bei der kastenförmigen Rinne etwas größer.

c) Die Regenrinne mit einer Querschnittsfläche von 112,5 cm² hat für die Breite $x \approx 15$ cm einen minimalen Materialverbrauch $15 \cdot h = 112{,}5$.

Die Höhe der Rinne beträgt ungefähr 7,5 cm.

Hinweis: Eine angemessene Ungenauigkeit beim Ablesen der Werte wird toleriert.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) –
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) schwer
c) leicht

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2
c) 2

Themen: Alltag, Technik

Quellen: –

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Donauüberquerung

Aufgabennummer: B_229

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Eine Motorfähre verkehrt zwischen den sich an der Donau genau gegenüberliegenden Anlegestellen in Dürnstein und in Rossatz. An dieser Stelle ist die Donau etwa 200 Meter breit und hat eine gleichmäßige Strömungsgeschwindigkeit v_S von rund 1,6 Metern pro Sekunde (m/s). (Reibungseinflüsse sollen vernachlässigt werden.)

a) Die Vektorgrafiken Abb. 1 und Abb. 2 stellen ein Boot dar, das einen Fluss überquert.
– Interpretieren Sie, welche Aussagen die Grafiken vermitteln.

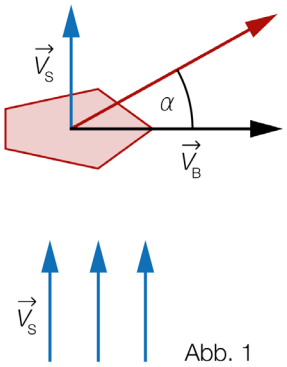


Abb. 1

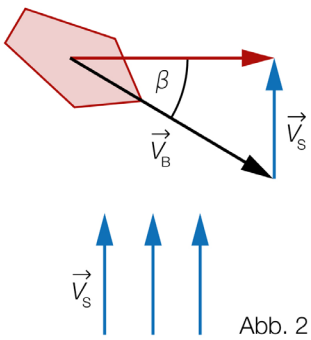


Abb. 2

$\vec{v_S}$ … Strömungsgeschwindigkeit
$\vec{v_B}$ … Geschwindigkeit des Boots

b) Die Motorfähre auf der Donau bewegt sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit. Es gilt:

$$s = v \cdot t$$

s … Weg in Metern (m)
v … Geschwindigkeit in Metern pro Sekunde (m/s)
t … Zeit in Sekunden (s)

– Berechnen Sie, in welchem Winkel der Steuermann gegen die Strömung steuern muss, wenn das Boot eine Geschwindigkeit v_B relativ zum Wasser von durchschnittlich 3 m/s hat und es von Rossatz aus genau in Dürnstein landen soll.
– Ermitteln Sie auch die Dauer der Überfahrt in Minuten.

c) Ein geübter Schwimmer, der beim Schwimmen in ruhendem Gewässer eine Geschwindigkeit von 1,2 m/s erreicht, möchte auf der Bootsroute von Rossatz nach Dürnstein die Donau überqueren.
– Argumentieren Sie mithilfe von Vektordiagrammen, ob der Schwimmer eine Chance hat, die Anlegestelle in Dürnstein auf kürzestem Weg zu erreichen.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Abb. 1: Das Boot fährt normal zur Fließrichtung des Wassers. Dabei wird es durch die Strömung um den Winkel α abgetrieben.

Abb. 2: Das Boot steuert mit einem Winkel β gegen die Flussströmung, sodass es auf kürzestem Wege zum gegenüberliegenden Ufer gelangt.

b) Geschwindigkeit: $\vec{v} = \vec{v_B} + \vec{v_S}$

pythagoräischer Lehrsatz: $v = \sqrt{v_B^2 - v_S^2}$

$\sqrt{3^2 - 1{,}6^2} = 2{,}5377 \approx 2{,}54$

$v \approx 2{,}54$ m/s

Fahrzeit: $t = \frac{s}{v}$

$\frac{200}{2{,}54} = 78{,}74$

$t = 78{,}74$ s $\approx 1{,}31$ min

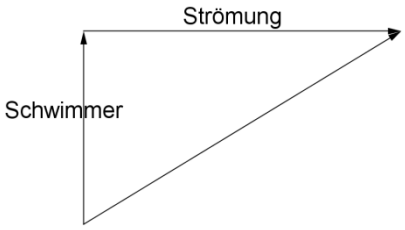
Genau um jenen Winkel, um den das Boot abgetrieben wird, muss gegengesteuert werden:
$\sin(\beta) = \frac{v_S}{v_B}$

$\frac{1{,}6}{3} = 0{,}5333\ldots$

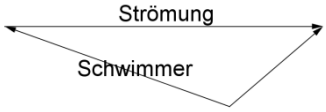
$\beta \approx 32{,}2°$

Der Steuermann muss rund 32,2° gegen die Strömung steuern, um genau gegenüber anzukommen.

c) Vektoren in geeignetem Größenverhältnis darstellen



Wenn der Schwimmer normal zur Strömung schwimmt, dann wird er von der Strömung abgetrieben.



Wenn er mit einer Geschwindigkeit von 1,2 m/s schräg gegen die Strömung schwimmt, egal in welchem Winkel, so wird er wegen der größeren Strömungsgeschwindigkeit ebenfalls abgetrieben.

Er hat keine Chance, normal zur Flussrichtung von Rossatz nach Dürnstein zu gelangen.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) D Argumentieren und Kommunizieren

Nebenhandlungsdimension:

a) –
b) –
c) –

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) leicht

Punkteanzahl:

a) 2
b) 3
c) 2

Thema: Verkehr

Quellen: –

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Gummibärchen ziehen*

Aufgabennummer: B_354

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Gummibärchen werden in unterschiedlichen Farben hergestellt.

a) In einer Packung mit insgesamt 132 Gummibärchen sind 27 orangefärbige Gummibärchen. Carina nimmt ohne hinzusehen ein Gummibärchen aus der Packung. Ist dieses zufällig ausgewählte Gummibärchen orangefärbig, wird es sofort gegessen. Ein andersfärbiges Gummibärchen legt sie wieder in die Packung zurück. Das macht sie 2-mal hintereinander.

– Veranschaulichen Sie die möglichen Ausgänge dieses Zufallsexperiments in einem mit den jeweiligen Wahrscheinlichkeiten beschrifteten Baumdiagramm.
– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Carina 2 orangefärbige Gummibärchen zieht.

b) Stefan nimmt ohne hinzusehen ein Gummibärchen aus einer Packung, die verschiedenfärbige Gummibärchen enthält. Ist dieses zufällig ausgewählte Gummibärchen weiß, legt er es zurück, ist es ein andersfärbiges, wird es sofort gegessen. Das macht er 10-mal hintereinander.
Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der dabei gezogenen weißen Gummibärchen.

– Erklären Sie, warum dieses Zufallsexperiment nicht durch eine Binomialverteilung beschrieben werden kann.

c) Eine kleine Packung Gummibärchen enthält 5 rote Gummibärchen und je 1 grünes, 1 gelbes und 1 weißes Gummibärchen. Es wird ein Gummibärchen nach dem anderen zufällig aus der Packung genommen und nicht wieder zurückgelegt. Dieser Vorgang wird so lange wiederholt, bis ein rotes Gummibärchen gezogen wird.
Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der benötigten Züge, bis ein rotes Gummibärchen gezogen wird.

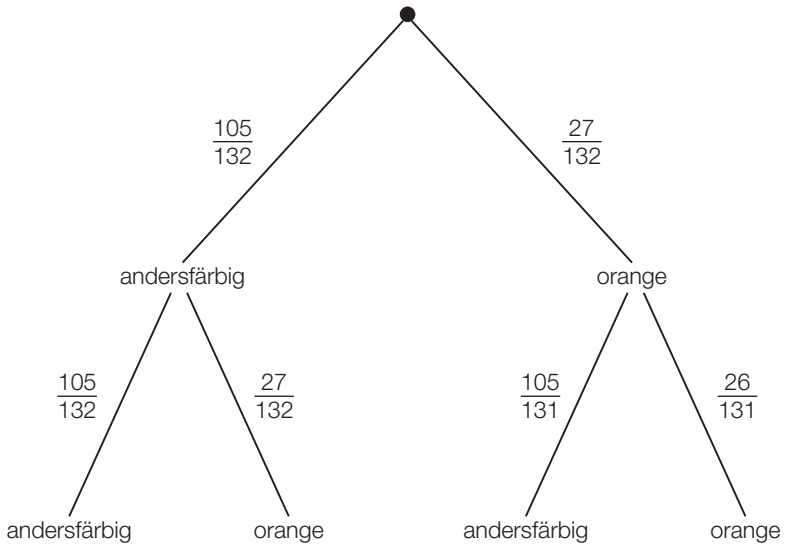
– Erstellen Sie eine Tabelle, der man die möglichen Werte dieser Zufallsvariablen X und die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten entnehmen kann.
– Berechnen Sie den Erwartungswert von X.
– Interpretieren Sie die Bedeutung des Erwartungswertes im gegebenen Sachzusammenhang.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

a)



$P(\text{„2 orangefärbige Gummibärchen“}) = \frac{27}{132} \cdot \frac{26}{131} = 0{,}04059\ldots \approx 4{,}06\ \%$

b) Die Verwendung der Binomialverteilung setzt voraus, dass die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Versuchsausgangs jeweils konstant bleibt. Bei jedem Zug, bei dem kein weißes Gummibärchen gezogen wird, ändert sich die Gesamtzahl in der Packung und damit die Wahrscheinlichkeit des Versuchsausgangs.

c)

x_i	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{15}{56}$	$\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{56}$	$\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{5} = \frac{1}{56}$

$E(X) = 1 \cdot \frac{5}{8} + 2 \cdot \frac{15}{56} + 3 \cdot \frac{5}{56} + 4 \cdot \frac{1}{56} = 1{,}5$

Der Erwartungswert gibt an, wie viele Züge man im Mittel benötigt, bis ein rotes Gummibärchen gezogen wird.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Veranschaulichen in einem mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten beschrifteten Baumdiagramm
1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit

b) 1 × D: für die richtige Erklärung

c) 1 × A: für die richtige und vollständige Angabe der Werte der Zufallsvariablen
1 × B1: für die richtige und vollständige Berechnung der zugehörigen Wahrscheinlichkeiten
1 × B2: für die richtige Berechnung des Erwartungswertes
1 × C: für die richtige Interpretation des Erwartungswertes im gegebenen Sachzusammenhang

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Kindersport

Aufgabennummer: B_227

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Kinder im Kindergarten- und Volksschulalter wurden befragt, welche Sportart sie am liebsten haben.

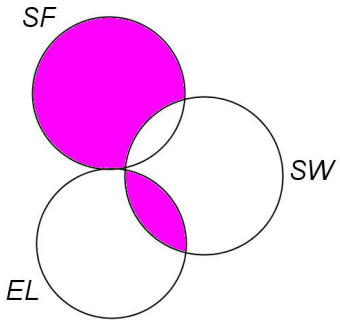
a) Die Befragung von Fünfjährigen wurde in der nebenstehenden Tabelle festgehalten.

Sportart	Anzahl der Meldungen
Schifahren (*SF*)	gesamt 20
Schwimmen (*SW*)	gesamt 28
Eislaufen (*EL*)	gesamt 16
nur Schifahren und Eislaufen	5
nur Schwimmen und Eislaufen	3
nur Schifahren und Schwimmen	7
alle drei	4

– Erstellen Sie ein Mengendiagramm mithilfe der Daten der Tabelle.

– Geben Sie an, wie viele Kinder in dieser Gruppe insgesamt befragt wurden, wie viele nur eine Sportart und wie viele mehr als eine Sportart gewählt haben.

b) Das Ergebnis der Befragung von Vierjährigen ist im nebenstehenden Mengendiagramm grafisch dargestellt.

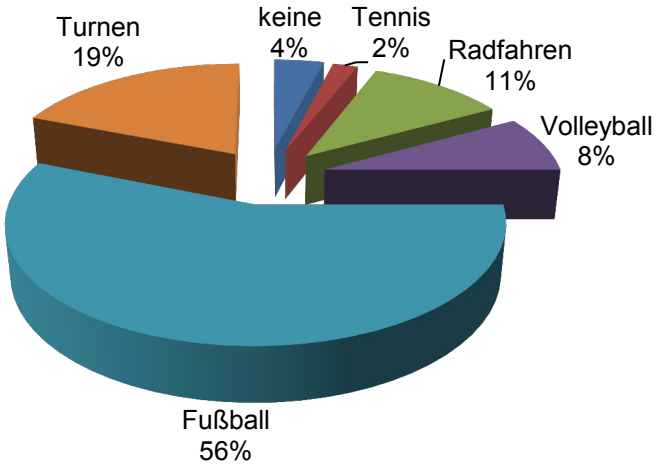


Sportarten: *SF* … Schifahren
SW … Schwimmen
EL … Eislaufen

– Beschreiben Sie mithilfe von Mengensymbolen den farbigen Bereich des Mengendiagramms, der die von den Kindern genannten Sportarten wiedergibt.

c) In einer Volksschule wurden 167 Burschen und 133 Mädchen nach der bevorzugten Sportart befragt. Die Befragung hat das folgende Diagramm ergeben.

– Zeichnen Sie mithilfe der Daten aus dem Kreisdiagramm ein Säulen- oder Balkendiagramm mit den absoluten Häufigkeiten.



Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

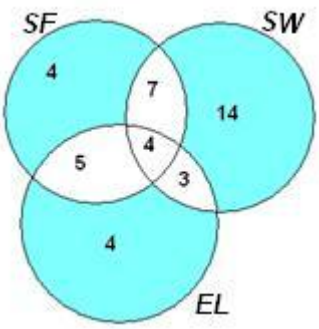
Möglicher Lösungsweg

a) Es sind 41 fünfjährige Kinder befragt worden.
22 Kinder mögen nur eine Sportart, 19 Kinder machen mehr als eine Sportart gerne, davon 15 Kinder zwei Sportarten und vier Kinder drei Sportarten.

b) Die farbige Fläche kann durch folgenden Ausdruck beschrieben werden:

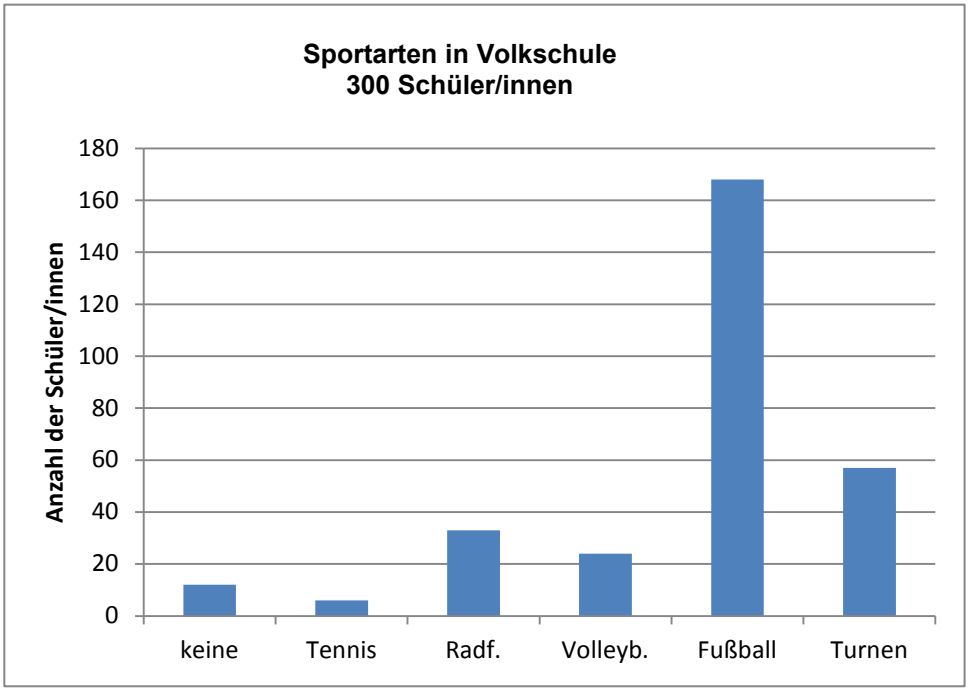
$(SF \setminus SW) \cup (SW \cap EL)$

Es sind hier auch andere Darstellungen möglich und richtig!



c) In der Schule gibt es insgesamt 167 + 133 = 300 Schülerinnen und Schüler.

Sportart	keine	Tennis	Radf.	Volleyb.	Fußball	Turnen
%	4	2	11	8	56	19
absolut	12	6	33	24	168	57



Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 1 Zahlen und Maße
b) 1 Zahlen und Maße
c) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) –
b) –
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) leicht
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 3
b) 2
c) 2

Thema: Sport

Quellen: –

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Glaspyramide des Louvre

Aufgabennummer: A_040

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Die Glaspyramide des Louvre ist eine quadratische Pyramide mit einer Basislänge von 35,42 Metern (m) und einer Höhe von 21,65 m.



a) – Berechnen Sie den Mantel *M* der Pyramide. Geben Sie das Ergebnis auf 2 Dezimalstellen gerundet in Quadratmetern (m^2) an.

b) – Argumentieren Sie anhand der Formel, wie sich das Volumen verändert, wenn die Basislänge der Pyramide verdoppelt wird.

c) Eine Seitenfläche besteht aus 18 Dreiecken und 153 Rauten und nimmt eine Glasfläche von 486 m^2 ein. Die Glasfläche einer Raute ist doppelt so groß wie jene eines Dreiecks.

– Berechnen Sie die Glasfläche eines dreieckigen Glassegments.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Bildquelle: Von Beau Wade from New York, NY, United States - Louvre Pyramids, CC BY 2.0, https://de.wikipedia.org/w/index.php?curid=3749491

Möglicher Lösungsweg

a … Basislänge der Pyramide
h … Höhe der Pyramide

a) $\tan(\alpha) = \frac{21{,}65}{17{,}71} \Rightarrow \alpha = 50{,}72°$

$h_a = \frac{h}{\sin(50{,}72)} = 27{,}969\ldots$

$h_a \approx 27{,}97$ m

Mantel: $M = 4 \cdot \frac{a \cdot h_a}{2} \approx 1981{,}45\ldots$

$M \approx 1981{,}45$ m^2

Der Mantel der Pyramide beträgt 1981,45 m^2.

b) Die Basislänge a steht in der Volumenformel mit dem Exponenten 2. Eine Verdopplung der Seitenlänge führt daher zu einer Vervierfachung des Volumens.

c) x … Glasfläche eines rautenförmigen Segments

$153 \cdot x + 18 \cdot \frac{x}{2} = 486$

$\Rightarrow x \approx 3$ m^2

Die Glasfläche eines dreieckigen Segments beträgt 1,5 m^2.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) 1 Zahlen und Maße
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) —
c) A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) leicht

Punkteanzahl:

a) 2
b) 1
c) 2

Thema: Architektur

Quelle: http://de.wikipedia.org/wiki/Glaspyramide_im_Innenhof_des_Louvre

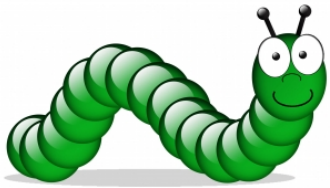
Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Bücherwurm

Aufgabennummer: B_283

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

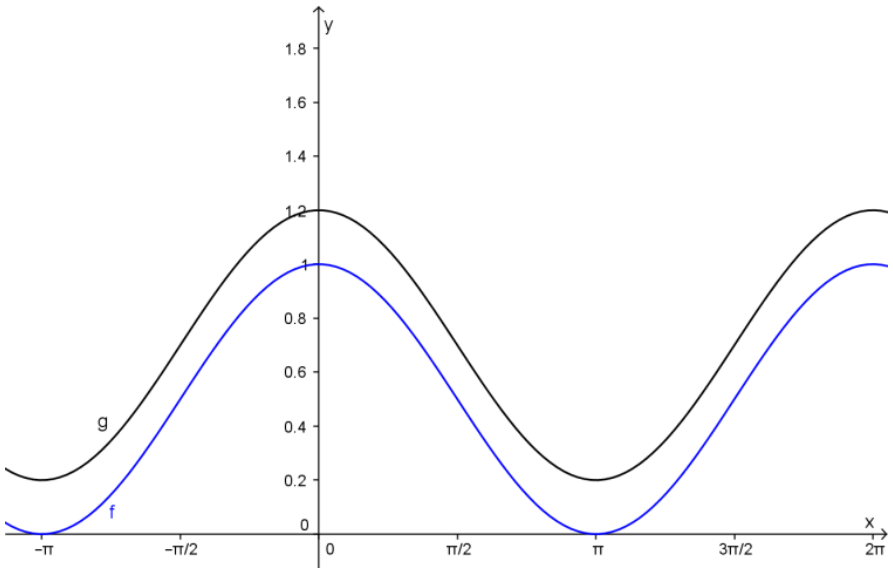
Menschen, die sehr viel lesen, werden oft als „Bücherwürmer“ bezeichnet.



a) Ein Verlag entwirft als Firmenlogo einen „Bücherwurm“. Als Grundlage für das Bild des Logos werden zwei Cosinusfunktionen folgender Form verwendet:

$y = a \cdot \cos(x) + c$

– Ermitteln Sie mithilfe des in der nachstehenden Abbildung dargestellten Funktionsgraphen g die Parameter a und c der Funktion g.



b) Ein Logo wird im Intervall $\left[-\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right]$ durch die Funktionen f und g nach oben bzw. unten begrenzt. Es soll mit Farbe ausgefüllt werden.

$g(x) = 2 \cdot \cos(x) + 3$
$f(x) = 2 \cdot \cos(x) + 6$

– Stellen Sie eine Formel zur Berechnung des Flächeninhalts A zwischen den Funktionsgraphen von f und g im gegebenen Intervall auf.

$A =$ _____

– Berechnen Sie den entsprechenden Flächeninhalt.

Bildquelle: FreeImages.com/de.freepik.com/sxc.

c) Die digitale Verfügbarkeit von Büchern in Form von E-Books nimmt zu. Eine Autorin verkauft von einem Roman 8 000 gebundene Exemplare und 200 E-Books. Pro verkauftem gebundenem Exemplar nimmt sie € 2,20 ein, pro E-Book nur € 1,70.

– Erklären Sie, warum folgende Aussage falsch ist:
„Da der Anteil der Anzahl der verkauften E-Books an der Gesamtverkaufszahl 2,5 % ist, betragen die Einnahmen der Autorin aus dem E-Book-Verkauf 2,5 % der Gesamteinnahmen."

– Berechnen Sie den korrekten Prozentanteil der Einnahmen aus dem E-Book-Verkauf.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Funktion g: $a = 0{,}5$; $c = 0{,}7$

b) $A = \int_{-\frac{7\pi}{6}}^{\frac{11\pi}{6}} \left(f(x) - g(x)\right) \mathrm{d}x$

$A = 28{,}27$ Flächeneinheiten

c) Der Anteil der Einnahmen über E-Books entspricht nicht dem Anteil der verkauften E-Books, da die Einnahmen für gebundene Bücher und E-Books unterschiedlich sind.

Gesamteinnahmen: $8\,000 \cdot 2{,}20 + 200 \cdot 1{,}70 = 17\,940$
Prozentanteil des E-Book-Verkaufs: $\frac{200 \cdot 1{,}70}{17\,940} \cdot 100 = 1{,}8952\ldots \approx 2\ \%$

Die Einnahmen der Autorin aus dem E-Book-Verkauf betragen rund 2 % der Gesamteinnahmen.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 4 Analysis
c) 1 Zahlen und Maße

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) A Modellieren und Transferieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) D Argumentieren und Kommunizieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) leicht
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2
c) 2

Thema: Alltag

Quelle: http://de.freepik.com/fotos-kostenlos/bucherwurm_621016.htm

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Stallbaufinanzierung

Aufgabennummer: B_170

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Ein Landwirt möchte einen größeren Stall bauen. Der Kostenvoranschlag beläuft sich auf € 375.000.

In den angegebenen Zinssätzen sind die Kapitalertragsteuer bzw. anfallende Gebühren berücksichtigt.

a) Er spart seit 14 Jahren jährlich vorschüssig € 2.800, die zu 2,3 % p. a. verzinst werden. Zusätzlich hat er vor 22 Jahren € 65.000 auf ein Sparbuch gelegt, das mit 1,8 % p. a. verzinst wird.

– Berechnen Sie, wie viel Geld er für den Stallbau zusätzlich zu seinem vorhandenen Kapital aufbringen muss.

b) Der Landwirt nimmt einen Kredit zur Begleichung der Gesamtkosten von € 375.000 auf. Zur Rückzahlung werden nachschüssige Jahresraten der Höhe R bei konstantem Zinssatz über einen Zeitraum von 30 Jahren vereinbart.
Er kann die 6., die 7. und die 8. Rate nicht bezahlen. Der Zahlungsausfall wird gleichmäßig auf die Raten der restlichen Laufzeit aufgeteilt. Die neue Ratenhöhe ist R_{neu}.

– Erstellen Sie eine Zeitlinie zur Beschreibung des Zahlungsverlaufs.

Die Höhe der ursprünglichen Rate beträgt gerundet R = € 23.841. Der Zinssatz ist 4,8 % p. a.

– Berechnen Sie die neue Ratenhöhe R_{neu}. (Runden Sie das Ergebnis auf ganze Euro.)

c) Die Bank bietet zur Rückzahlung des Kredits von € 375.000 folgende Möglichkeit an:
5 Jahre nach Auszahlung des Kreditbetrags wird einmalig eine Zahlung der Höhe x entrichtet. Der Rest wird durch eine 10 Jahre nach Auszahlung des Kreditbetrags beginnende Rente mit vorschüssigen Jahresraten der Höhe R über 20 Jahre abgedeckt.
Es ist bei allen Zahlungen von einem Jahreszinssatz i auszugehen.

– Modellieren Sie eine Formel zur Berechnung des Einmalbetrags x.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

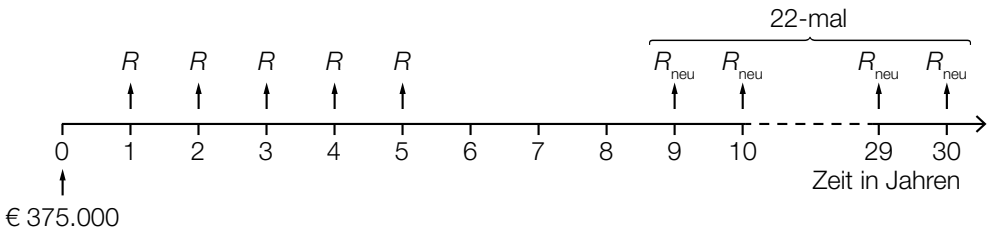
a) $2\,800 \cdot 1{,}023 \cdot \frac{1{,}023^{14} - 1}{0{,}023} \approx 46\,684{,}89$

$65\,000 \cdot 1{,}018^{22} \approx 96\,241{,}96$

$375\,000 - 46\,684{,}89 - 96\,241{,}96 = 232\,073{,}15$

Der Landwirt benötigt noch € 232.073,15.

b)



$375\,000 = 23\,841 \cdot \frac{1{,}048^5 - 1}{0{,}048} \cdot \frac{1}{1{,}048^5} + R_{neu} \cdot \frac{1{,}048^{22} - 1}{0{,}048} \cdot \frac{1}{1{,}048^{30}} \Rightarrow R_{neu} = 29\,436{,}1\ldots$

Die neuen Raten betragen auf ganze Euro gerundet € 29.436.

c) Ansatzformel:

$q = 1 + i$

$375\,000 = \frac{x}{q^5} + R \cdot \frac{q^{20} - 1}{q - 1} \cdot \frac{1}{q^{19}} \cdot \frac{1}{q^{10}}$

Andere richtige Formeln sind ebenfalls zu akzeptieren.
Die Berechnungsformel für x kann man unter Umständen auch direkt – ohne einen Ansatz – angeben. Ist die Formel korrekt, so gilt das auch als richtig angesetzt.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) A Modellieren und Transferieren
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 3
b) 3
c) 2

Thema: Wirtschaft

Quellen: –

BMB
Bundesministerium
für Bildung

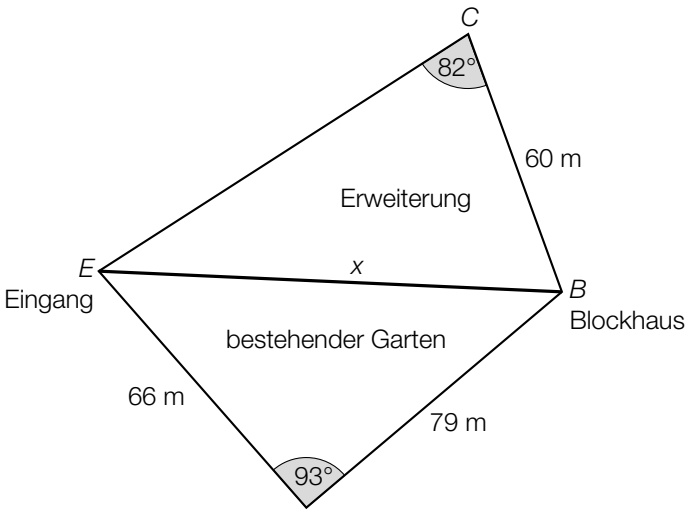
Erlebnisgarten (1)

Aufgabennummer: B_241

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Der Außenbereich eines Kindergartens wird vergrößert und zu einem Erlebnisgarten umgestaltet.

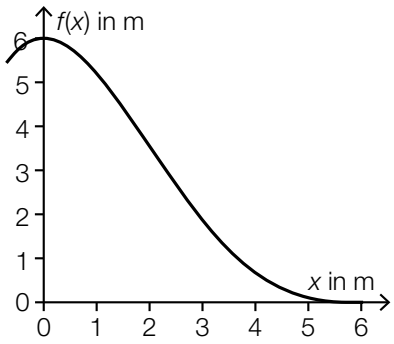
a) Vom Eingang *E* zum Blockhaus *B* soll ein geradliniger Barfußweg angelegt werden (siehe nachstehende Abbildung).



– Berechnen Sie die Länge *x* des Weges in Metern.

b) – Dokumentieren Sie, wie Sie den Flächeninhalt der Erweiterung berechnen können, wenn *x* als bekannt angenommen wird.

c) Vom höchsten Punkt eines Hügels soll eine Rutsche herunterführen.



Das Profil der geplanten Rutsche kann durch die folgende Funktion f annähernd beschrieben werden:

$f(x) = -\frac{1}{72} \cdot (x^4 - 16 \cdot x^3 + 72 \cdot x^2 - 432)$ mit $0 \le x \le 6$

x, $f(x)$ ... Koordinaten in m

Der Neigungswinkel einer Spielplatzrutsche darf laut einer Norm aus Sicherheitsgründen an keiner Stelle 60° überschreiten.

– Überprüfen Sie mithilfe der Differenzialrechnung, ob die geplante Rutsche normgerecht ist.

d) Der gesamte Außenbereich mit einer Fläche von A m² soll neu gestaltet werden.
Der Gärtner veranschlagt einen Preis von p Euro pro Quadratmeter (€/m²) exklusive 20 % Mehrwertsteuer. Bei Barzahlung gewährt der Gärtner einen Preisnachlass von 3 %.

– Erstellen Sie eine Formel für den Gesamtpreis P inklusive Mehrwertsteuer bei Barzahlung.

$P =$ _____

– Begründen Sie mathematisch, warum das Abziehen des Preisnachlasses vom Nettopreis zum selben Ergebnis führt wie das Abziehen des Preisnachlasses vom Bruttopreis.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Cosinussatz:
$x^2 = 66^2 + 79^2 - 2 \cdot 66 \cdot 79 \cdot \cos(93°)$
$x = 105{,}559\ldots$

Der Barfußweg ist rund 106 m lang.

b) Zuerst die benötigten Winkel im Dreieck *EBC* berechnen: den Winkel in der Ecke *E* mit dem Sinussatz, den Winkel in der Ecke *B* mithilfe der Winkelsumme; anschließend die Strecke von $\overline{EC}$ zum neuen Eckpunkt *C* mit dem Sinussatz berechnen; zuletzt den Flächeninhalt mit der trigonometrischen Flächenformel berechnen.

Die Argumentation kann auch über die entsprechenden Formeln bzw. über einen anderen Rechenweg erfolgen.

c) $f(x) = -\frac{1}{72} \cdot (x^4 - 16 \cdot x^3 + 72 \cdot x^2 - 432)$
$f'(x) = -\frac{1}{72} \cdot (4 \cdot x^3 - 48 \cdot x^2 + 144 \cdot x)$
$f''(x) = -\frac{1}{72} \cdot (12 \cdot x^2 - 96 \cdot x + 144)$

Die Steigung (hier: das Gefälle) ist in einem Wendepunkt am größten:
$f''(x) = 0$
Lösung mittels Technologieeinsatz: $x_1 = 2$, $x_2 = 6$
In der Abbildung ist ersichtlich, dass nur die Stelle $x_1 = 2$ in Frage kommt.
$f'(2) = -1{,}777\ldots$
$\alpha = \arctan(f'(2)) = -60{,}642\ldots° \approx -61°$
Der maximal erlaubte Winkel wird überschritten.

Die Rutsche ist nicht normgerecht.

d) $P = p \cdot A \cdot 1{,}2 \cdot 0{,}97$

Bei der Multiplikation können die Faktoren vertauscht werden. Das Ergebnis verändert sich dadurch nicht:
$(p \cdot A \cdot 1{,}2) \cdot 0{,}97 = (p \cdot A \cdot 0{,}97) \cdot 1{,}2$

Auch andere Schreibweisen und andere korrekte Argumentationen sind zulässig.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 4 Analysis
d) 1 Zahlen und Maße

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —
d) 3 Funktionale Zusammenhänge

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) —
c) A Modellieren und Transferieren, D Argumentieren und Kommunizieren
d) D Argumentieren und Kommunizieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel
d) leicht

Punkteanzahl:

a) 2
b) 3
c) 2
d) 2

Thema: Alltag

Quellen: —

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Sparbuch*

Aufgabennummer: B_222

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Von einem Sparbuch soll über 10 Jahre hinweg jeweils am Monatsende ein Betrag von € 200 abgehoben werden. Unmittelbar nach der letzten Abhebung sollen noch € 1.500 auf dem Sparbuch verbleiben. Der Zinssatz beträgt 1,5 % p. a.

– Berechnen Sie die Höhe desjenigen Betrags, der zu Beginn auf das Sparbuch einbezahlt werden muss (ohne Berücksichtigung der KESt).

b) Auf ein Sparbuch wird einmalig ein Betrag von € 10.000 und 5 Jahre später einmalig ein Betrag *x* einbezahlt. Nach insgesamt 8 Jahren soll ein Betrag von € 20.000 zur Verfügung stehen. Der Zinssatz beträgt 1,5 % p. a.

– Erstellen Sie eine Zeitlinie, die diesen Sachverhalt darstellt.
– Berechnen Sie die Höhe des Betrags *x* ohne Berücksichtigung der KESt.
– Begründen Sie, warum sich die Höhe des Betrags *x* verringert, wenn er bereits nach 2 Jahren einbezahlt wird.

c) Auf einem Sparbuch stehen zu Jahresbeginn € 25.000 zur Verfügung. In den folgenden 12 Jahren sollen jeweils am Jahresende € 2.300 abgehoben werden können, sodass das Guthaben zur Gänze aufgebraucht ist.

– Berechnen Sie den entsprechenden Jahreszinssatz (ohne Berücksichtigung der KESt).

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

a) $q_{12} = \sqrt[12]{1{,}015} = 1{,}00124...$

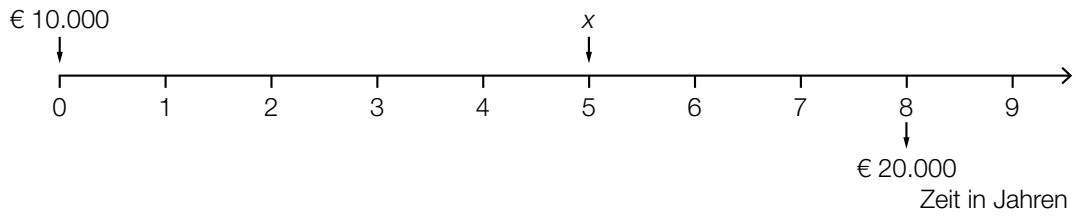
Barwert der Ratenzahlung: $200 \cdot \frac{q_{12}^{120} - 1}{q_{12} - 1} \cdot \frac{1}{q_{12}^{120}} = 22\,284{,}999...$

Barwert des Restbetrags: $\frac{1\,500}{1{,}015^{10}} = 1\,292{,}500...$

$22\,284{,}999... + 1\,292{,}500... = 23\,577{,}500...$

Es müssen zu Beginn € 23.577,50 auf das Sparbuch einbezahlt werden.

b)



$10\,000 \cdot 1{,}015^8 + x \cdot 1{,}015^3 = 20\,000$

$x = 8\,353{,}499...$

Es muss ein Betrag in Höhe von € 8.353,50 nach 5 Jahren einbezahlt werden.

Wird der Betrag x schon nach 2 Jahren einbezahlt, so können dafür zusätzlich 3 Jahre lang Zinsen lukriert werden. Um diesen Betrag sinkt die Höhe von x bei früherer Einzahlung.

c) $25\,000 = 2\,300 \cdot \frac{q^{12} - 1}{q - 1} \cdot \frac{1}{q^{12}}$

$q = 1{,}01555...$

Der jährliche Zinssatz beträgt rund 1,56 %.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das Erkennen des richtigen finanzmathematischen Modells (Barwert)
1 × B1: für die Verwendung des richtigen (monatlichen) Zinssatzes
1 × B2: für die richtige Berechnung des am Beginn einzuzahlenden Betrags

b) 1 × A: für die richtige Erstellung der Zeitlinie
1 × B: für die richtige Berechnung der Höhe des Betrags x
1 × D: für die richtige Begründung

c) 1 × A: für einen richtigen Ansatz zur Berechnung des jährlichen Zinssatzes
1 × B: für die richtige Berechnung des Jahreszinssatzes

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Immobilienhandel

Aufgabennummer: B_127

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Eine Immobilie soll verkauft werden. Der Barwert dieser Immobilie wird mit € 4.400.000 veranschlagt.

a) Ein Kaufinteressent könnte die 1. Hälfte des Betrags sofort bezahlen, die 2. Hälfte aber erst nach 1 Jahr.

– Argumentieren Sie, ohne zu rechnen, welche Zusatzforderungen an den Käufer mindestens gestellt werden müssten, damit der Verkäufer mit einem Zahlungsaufschub der 2. Hälfte einverstanden sein könnte.

b) Der Käufer muss zur Aufbringung des Kaufpreises einen Kredit in der Höhe von € 2.000.000 aufnehmen. Der Kredit soll in 15 Jahren durch gleichbleibende nachschüssige Annuitäten bei einem Zinssatz von 5 % p. a. getilgt werden. (Dieser Zinssatz berücksichtigt auftretende Gebühren und Steuern.)

– Erstellen Sie den Tilgungsplan für die ersten 2 Jahre.

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0				€ 2.000.000,00
1				
2				

c) Der Verkäufer legt aus dem Verkaufserlös für die Immobilie € 800.000 bei seiner Bank zu 3,5 % p. a. an. (Die KESt ist in diesem Zinssatz bereits berücksichtigt.)
Er will jeweils zu Monatsbeginn eine Auszahlung von € 5.000 erhalten, bis die Einlage aufgebraucht ist. Der Zinssatz bleibt während der gesamten Zeit konstant.

– Berechnen Sie, wie viele volle Monatsraten er sich auszahlen lassen kann.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Man muss den Barwert des eingegangenen Vorschlags berechnen, damit man die Zahlungen vergleichen kann (Äquivalenzprinzip der Finanzmathematik).

Bei dem vorliegenden Vorschlag erhält der Besitzer die Hälfte des Betrages sofort. Durch die spätere Einzahlung der 2. Hälfte entgehen dem Verkäufer die von € 2,2 Millionen berechneten Jahreszinsen.

Falls der Käufer diese Zinsen zu einem vom Verkäufer eingebrachten Kalkulationszinssatz und mit allen sonstigen Auslagen für Kontoführung etc. ebenfalls berücksichtigt, wäre erst dann dieser Zahlungsvorschlag gleichwertig.

(Offene Aufgabe, daher nicht unbedingt in dieser Weise zu argumentieren. Stichwörter: gleicher Stichtag zum Vergleich der Zahlungen.)

b) Zunächst wird die Annuität A ermittelt:

$q = 1{,}05$

$$2\,000\,000 = A \cdot \frac{q^{15} - 1}{q - 1} \cdot \frac{1}{q^{15}} \quad \Rightarrow \quad A \approx € \; 192.684{,}58$$

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0				€ 2.000.000,00
1	€ 100.000,00	€ 92.684,58	€ 192.684,58	€ 1.907.315,42
2	€ 95.365,77	€ 97.318,81	€ 192.684,58	€ 1.809.996,61

c) $q_{12} = \sqrt[12]{1{,}035}$

$$800\,000 = 5\,000 \cdot \frac{q_{12}^{n} - 1}{q_{12} - 1} \cdot \frac{1}{q_{12}^{n-1}}$$

Lösung mittels Technologieeinsatz: $n = 213{,}668...$

Der Betrag von € 5.000 kann 213-mal ausgezahlt werden.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) –
b) –
c) –

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) leicht
c) schwer

Punkteanzahl:

a) 1
b) 3
c) 2

Thema: Wirtschaft

Quellen: –

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Rücklage

Aufgabennummer: B_125

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Die Eltern von Martin legen für ihn 5 Jahre vor Abschluss der höheren Schule für sein späteres Studium € 22.500 als Rücklage auf ein Sparkonto.
Lisa erhält von ihren Eltern ab demselben Zeitpunkt 5 Jahre lang € 375 monatlich vorschüssig auf ein Sparkonto, das mit dem gleichen Jahreszinssatz wie bei Martin verzinst wird.
Der Zinssatz bleibt während dieser 5 Jahre konstant, es finden keine weiteren Transaktionen auf den beiden Konten von Martin und Lisa statt. Es gibt keine Kontoführungsgebühr.

a) – Erklären Sie, mit welchem Rechenansatz man aus dem Jahreszinssatz den äquivalenten Monatszinssatz i_{12} anhand der Zinseszinsformel herleiten kann.
(Die Kapitalertragsteuer ist bei dieser Berechnung nicht zu berücksichtigen.)

b) Lisa meint, dass zwar 60-mal € 375 wie bei Martin ebenfalls € 22.500 ergeben, aber die vorschüssige monatliche Ratenzahlung bei Verzinsung mit 0,2 % p. m. einem geringeren Barwert entspricht.

– Argumentieren Sie, weshalb Lisas Aussage stimmt.
– Berechnen Sie die Differenz zwischen dem Barwert der Ratenzahlung bei Lisa und dem Geldbetrag, den Martin von seinen Eltern erhält.
Runden Sie das Ergebnis auf Euro.
(Die Kapitalertragsteuer ist im gegebenen Zinssatz bereits berücksichtigt.)

c) Für Martin wird das Geld mit einem Zinssatz von 2,5 % p. a. angelegt.
Lisa möchte statt € 375 pro Monat 5 nachschüssige Jahresraten in Höhe von € 4.500 erhalten. Sie wünscht sich, dass der Zinssatz so hoch gewählt wird, dass sie nach 5 Jahren einen gleich hohen Betrag wie Martin bekommt.

– Berechnen Sie, wie hoch der Jahreszinssatz für Lisa unter dieser Voraussetzung sein müsste. Berücksichtigen Sie die Kapitalertragsteuer von 25 %.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Der äquivalente Monatszinssatz führt bei monatlicher Verzinsung innerhalb eines Jahres zum gleichen Ergebnis wie eine einmalige jährliche Verzinsung.
Wenn man ein Kapital K_0 ein Jahr lang mit i verzinst, so ergibt dies einen Endwert von:
$E = K_0 \cdot (1 + i)$
Wenn man das gleiche Anfangskapital monatlich mit i_{12} verzinst, lautet die Zinseszinsformel:
$E = K_0 \cdot (1 + i_{12})^{12}$
Da beide Endwerte gleich sein sollen, gilt:
$1 + i = (1 + i_{12})^{12}$
Aus diesem Ansatz lässt sich der äquivalente Monatszinssatz i_{12} berechnen.

b) Martin bekommt bar € 22.500.
Lisa würde in Zukunft monatlich € 375 bekommen, 60 Monate lang.
Um den Barwert dieser Ratenzahlung zu erhalten, müssen alle einzelnen 60 Raten auf den Anfangszeitpunkt abgezinst werden. Man erhält eine Folge von Beträgen:
{375; 374,25; 373,5; ...}
Die Summe dieser Beträge ergibt den Barwert und ist kleiner als 375 mal 60.

Martin: 22 500
Lisa: $375 \cdot \frac{1{,}002^{60} - 1}{0{,}002} \cdot \frac{1}{1{,}002^{59}} = 21\,224{,}8\ldots \approx 21\,225$

Die Differenz beträgt rund € 1.275.

c) Jahreszinssatz bei Martin nach Berücksichtigung der KESt:
2,5 % · 0,75 = 1,875 %
$22\,500 \cdot 1{,}01875^5 = 4\,500 \cdot \frac{q^5 - 1}{q - 1}$

Lösung mittels Technologieeinsatz: $q = 1{,}046457\ldots$

Bei einem Jahreszinssatz von rund 4,65 %, in dem bereits die KESt berücksichtigt ist, würde Lisa nach 5 Jahren den gleichen Betrag wie Martin bekommen.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) —

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 4
b) 3
c) 3

Thema: Wirtschaft

Quellen: —

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Sparkonto

Aufgabennummer: B_120

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Karin zahlt 18 Jahre lang auf ein Sparkonto jährlich nachschüssig einen Betrag in Höhe von € 500 ein.
Der angesparte Betrag kann bei einem Jahreszinssatz von 1,5 % und mit Berücksichtigung der KESt mithilfe der folgenden Funktion beschrieben werden:

$$K = 500 \cdot \frac{1{,}01125^t - 1}{0{,}01125}$$

K ... Kapital in Euro (€)
t ... Zeit in Jahren

– Erklären Sie, um welche finanzmathematische Formel es sich handelt.
– Erklären Sie, wie der Zinssatz von 1,5 % in diese Formel einfließt.

b) Karin hat einen Betrag in Höhe von € 10.000 angespart. Er wird mit einem Zinssatz von 1,2 % p. a. weiter verzinst (Nebengebühren und Steuern sind im angegebenen Zinssatz berücksichtigt). Karin möchte davon monatlich nachschüssig je € 200 abheben.

– Berechnen Sie, wie oft Karin genau diesen Betrag abheben kann.
– Ermitteln Sie, welcher Restbetrag unmittelbar nach der letzten Abhebung auf dem Konto verbleibt.

c) Karin tätigt die in der nachstehenden Zeitlinie dargestellten Abhebungen.



– Beschreiben Sie den dargestellten Sachverhalt in Worten.
– Erstellen Sie eine Formel, mit der der Wert B aller Behebungen zum Zeitpunkt der 1. vorgenommenen Behebung berechnet werden kann. Gehen Sie dabei von einem Jahreszinssatz i aus.

$B =$ _____

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Der Endwert einer nachschüssigen Jahresrente wird mithilfe folgender Formel berechnet:

$$E = R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

R ... jährliche Rate
i ... Jahreszinssatz
q ... Aufzinsungsfaktor, $q = 1 + i$
n ... Anzahl der Raten

Im Falle der vorliegenden Formel gilt:
$E = K$,
$n = t$,
$R = € 500$,
$q = 1 + i = 1{,}01125$,
wobei $i = 1{,}125\ \%$ beträgt, das entspricht dem Jahreszinssatz von 1,5 %, von dem 25 % KESt abgezogen wurden.

b) Berechnung der Anzahl n der monatlichen nachschüssigen Auszahlungen:

$$q_{12} = \sqrt[12]{1{,}012}$$

$$200 \cdot \frac{q_{12}^n - 1}{q_{12} - 1} \cdot \frac{1}{q_{12}^n} = 10\,000$$

Lösung mittels Technologieeinsatz:
$n = 51{,}3...$

Karin kann genau 51-mal € 200 abheben.

$$\text{Restbetrag} = 10\,000 \cdot q_{12}^{51} - 200 \cdot \frac{q_{12}^{51} - 1}{q_{12} - 1} = 62{,}257...$$

Der Restbetrag beträgt rund € 62,26.

c) Karin hebt zunächst jeweils zu Beginn des Jahres 3-mal die Rate R_1 ab. Im Jahr 4 und im Jahr 5 wird nichts abgehoben.
Ab dem 6. Jahr hebt Karin 5-mal jeweils am Ende des Jahres die Rate R_2 ab.

$$B = R_1 \cdot \frac{(1+i)^3 - 1}{i} \cdot \frac{1}{(1+i)^2} + R_2 \cdot \frac{(1+i)^5 - 1}{i} \cdot \frac{1}{(1+i)^{10}}$$

Auch andere Formelentwicklungen sind möglich!

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) A Modellieren und Transferieren
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) schwer

Punkteanzahl:

a) 2
b) 4
c) 3

Thema: Wirtschaft

Quellen: –

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Lebensversicherung

Aufgabennummer: B_119

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Bei Lebensversicherungen spielt der Begriff *Sterbewahrscheinlichkeit* eine große Rolle. Man versteht darunter die Wahrscheinlichkeit, mit der eine versicherte Person innerhalb eines Versicherungsjahres verstirbt.

a) Die Sterbewahrscheinlichkeit ist unter anderem vom Lebensalter der versicherten Person exponentiell abhängig und verdoppelt sich bei jüngeren Personen schätzungsweise alle 9 Jahre. Laut Statistik Austria verstirbt in Österreich ein 30-jähriger Mann innerhalb eines Versicherungsjahres mit einer Wahrscheinlichkeit von nur ungefähr 0,088 %.

– Ermitteln Sie eine Gleichung der Funktion p, die diese Abhängigkeit beschreibt. Runden Sie die Parameter auf 4 Nachkommastellen.

$p(t) = p_0 \cdot a^t$

t ... Alter in Jahren
$p(t)$ ... Sterbewahrscheinlichkeit in Prozent im Alter t

b) Ein junger Mann, dessen altersbedingte Sterbewahrscheinlichkeit zum Zeitpunkt des Vertragsabschlusses mit 0,09 % eingeschätzt wird, schließt eine Lebensversicherung über einen bestimmten Betrag ab, der im Falle des Ablebens an seine Angehörigen ausbezahlt wird.

– Erstellen Sie für diese Situation ein geeignetes Baumdiagramm für die ersten 3 Jahre nach Vertragsabschluss unter modellhafter Annahme einer konstanten Sterbewahrscheinlichkeit.
– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Versicherte innerhalb der ersten 3 Jahre nach Vertragsabschluss stirbt.

c) Statt jährlich € 100 in eine Lebensversicherung mit einer Versicherungssumme von € 20.000 einzuzahlen, möchte ein 30-jähriger Mann jährlich vorschüssig € 100 ansparen. Das Geld soll der Familie nach seinem Ableben zur Verfügung stehen.

– Berechnen Sie, wie lange es dauern würde, bis er gleich viel Geld gespart hat, wie die Lebensversicherungssumme beträgt. Gehen Sie dabei von einem Zinssatz von 2,5 % p. a. aus und berücksichtigen Sie die Kapitalertragsteuer von 25 %.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) 1. Gleichung: $0{,}088 = p_0 \cdot a^{30} \Rightarrow p_0 = \frac{0{,}088}{a^{30}}$

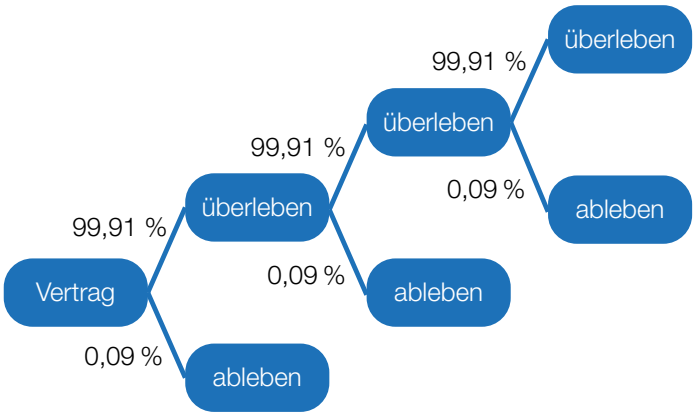
2. Gleichung: $2 \cdot 0{,}088 = p_0 \cdot a^{39} \Rightarrow p_0 = \frac{2 \cdot 0{,}088}{a^{39}}$

Gleichsetzen: $\frac{0{,}088}{a^{30}} = \frac{2 \cdot 0{,}088}{a^{39}} \Rightarrow a = \sqrt[9]{2} \approx 1{,}0801$

$p_0 = 0{,}00873... \approx 0{,}0087$

Gleichung der Funktion:
$p(t) = 0{,}0087 \cdot 1{,}0801^t$ (Parameter gerundet)

b)



$1 - 0{,}9991^3 = 0{,}00269... \approx 0{,}27\ \%$
Die Wahrscheinlichkeit, dass der Versicherte innerhalb der ersten 3 Jahren nach Vertragsabschluss stirbt, ist rund 0,27 %.

c) Zinssatz nach Berücksichtigung der KESt: $2{,}5\ \% \cdot 0{,}75 = 1{,}875\ \%$
Aufzinsungsfaktor $q = 1{,}01875$

$20\,000 = 100 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot q$

Lösung mittels Technologieeinsatz: $n = 83{,}08...$
Es würde rund 83 Jahre dauern.

Erst ungefähr 83 Jahre nach dem Beginn der Spar-Einzahlungen und im Alter von 113 Jahren hätte der Mann den Betrag von € 20.000 angespart.
113 Jahre liegen weit über der durchschnittlichen Lebenserwartung. Daher ist das Ansparen von € 20.000 mit € 100 jährlich nicht zielführend.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 5 Stochastik
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) A Modellieren und Transferieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 4
b) 2
c) 2

Thema: Versicherungen

Quellen: —

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Kredit für einen Wohnungskauf*

Aufgabennummer: B_223

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Frau Simon möchte eine Wohnung kaufen. Sie benötigt dazu einen Kredit und holt deswegen bei Banken verschiedene Angebote ein.

a) Bank *A* bietet Frau Simon einen Kredit zu einem Zinssatz von 3 % p. a. an. Die monatlichen Raten sind nach Auszahlung der Kreditsumme von € 120.000 jeweils am Ende jedes Monats fällig. Die Kreditlaufzeit beträgt 20 Jahre. (Spesen und Gebühren werden nicht berücksichtigt.)

– Ermitteln Sie den zu 3 % p. a. äquivalenten Monatszinssatz.
– Berechnen Sie die Höhe der Monatsraten.

b) Bank *B* bietet Frau Simon einen Kredit über € 120.000 an, der in 15 Jahren durch nachschüssige Quartalsraten in Höhe von je € 2.650 zu tilgen ist. Eine Bearbeitungsgebühr von 2 % der Kreditsumme wird bei Auszahlung des Kredits von der Kreditsumme abgezogen. (Weitere Spesen und Gebühren sind in den Raten berücksichtigt.)

– Berechnen Sie den effektiven Jahreszinssatz dieses Kredits.

c) Bank *C* bietet Frau Simon einen Kredit über € 120.000 an, den sie durch nachschüssige Quartalsraten mit dem Zinssatz 1 % p. q. zurückzahlen soll. Die Bank legt ihr den folgenden Tilgungsplan vor:

Quartal	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0				€ 120.000,00
1	€ 1.200,00	€ 986,26	€ 2.186,26	€ 119.013,74

– Dokumentieren Sie, wie der Zinssatz 1 % p. q. aus dem Tilgungsplan ermittelt werden kann.
– Berechnen Sie die Laufzeit des Kredits.
– Erklären Sie den Zusammenhang zwischen Zinsanteil, Tilgungsanteil und Annuität.

* ehemalige Klausuraufgabe

d) Die jährliche Annuität A eines Kredits kann mittels verschiedener Formeln berechnet werden.

Eine Formel lautet:

$$A = K_0 \cdot \frac{i \cdot q^n}{q^n - 1}$$

Eine andere Formel lautet:

$$A = K_0 \cdot \frac{i}{1 - q^{-n}}$$

K_0 ... Kreditsumme
i ... Jahreszinssatz
n ... Laufzeit in Jahren

– Geben Sie an, was q in diesem Sachzusammenhang bedeutet.
– Zeigen Sie, dass diese beiden Formeln gleichwertig sind.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $i_{12} = \sqrt[12]{1{,}03} - 1 = 0{,}002466... \approx 0{,}247\ \%$
Der Monatszinssatz beträgt rund 0,247 %.

monatlicher Aufzinsungsfaktor: $q_{12} = i_{12} + 1$

Barwertformel für nachschüssige Monatsrente:

$$120\,000 = R \cdot \frac{q_{12}^{240} - 1}{q_{12} - 1} \cdot \frac{1}{q_{12}^{240}} \quad \Rightarrow \quad R \approx 663{,}088...$$

Die Höhe der Monatsraten beträgt € 663,09.

b) Auszahlungsbetrag: $120\,000 \cdot 0{,}98 = 117\,600$

Äquivalenzgleichung: $117\,600 = 2\,650 \cdot \frac{q_4^{60} - 1}{q_4 - 1} \cdot \frac{1}{q_4^{60}}$

Lösung mittels Technologieeinsatz: $q_4 = 1{,}010475\ldots$
$q = q_4^4 = 1{,}042566\ldots$

Die effektive Jahreszinssatz beträgt rund 4,257 %.

c) Den Quartalszinssatz erhält man, indem man den Zinsanteil im Quartal 1 durch die Kreditsumme dividiert, d. h.:

$$i_4 = \frac{1\,200}{120\,000} = 0{,}01 = 1\ \%$$

Die Kreditsumme ist der Barwert einer nachschüssigen Rente, die Annuität deren Rate.
Äquivalenzgleichung:

$$120\,000 = 2\,186{,}26 \cdot \frac{1{,}01^n - 1}{0{,}01} \cdot \frac{1}{1{,}01^n}$$

Lösung mittels Technologieeinsatz: $n = 80{,}00...$
Die Laufzeit des Kredits beträgt 80 Quartale.

Die Annuität ist die Summe von Zinsanteil und Tilgungsanteil.

d) $q = 1 + i$ ist der jährliche Aufzinsungsfaktor.

Die Formeln sind äquivalent, weil $q^{-n} = \frac{1}{q^n}$.

Werden in der 1. Formel Zähler und Nenner durch q^n dividiert, erhält man die 2. Formel.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B1: für die richtige Ermittlung des Monatszinssatzes
1 × B2: für die richtige Berechnung der Monatsrate

b) 1 × A: für einen richtigen Ansatz zur Berechnung des Effektivzinssatzes mit dem richtigen Auszahlungsbetrag
1 × B: für die richtige Berechnung des jährlichen Effektivzinssatzes

c) 1 × C: für die richtige Dokumentation zur Ermittlung des Quartalszinssatzes
1 × B: für die richtige Berechnung der Laufzeit (Runden des Ergebnisses auf 81 Quartale ebenfalls zulässig)
1 × D: für die richtige Erklärung des Zusammenhangs

d) 1 × C: für die richtige Beschreibung von q in diesem Sachzusammenhang
1 × D: für den richtigen Nachweis der Äquivalenz der beiden Formeln

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Segelboot

Aufgabennummer: B_117

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein Segelboot wird zum Kauf angeboten. In den angegebenen Zinssätzen sind die Kapitalertragsteuer und allfällige Gebühren berücksichtigt.

a) Der Verkäufer schlägt folgende Zahlungsvariante vor:
Anzahlung in Höhe von € 6.000 und 5 Jahre lang (ab dem Kaufzeitpunkt gerechnet) nachschüssige Jahresraten in Höhe von jeweils € 1.200 bei einem jährlichen Zinssatz von *i*

– Stellen Sie diese Zahlungsvariante mithilfe einer Zeitlinie grafisch dar.
– Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung des Barwerts *B* des Segelboots.

$B =$ _____

b) Der Verkäufer ändert die Konditionen: Er veranschlagt den Barwert des Bootes mit € 10.800 und verlangt eine Anzahlung in Höhe von € 6.000 sowie 3 nachschüssige Jahresraten in Höhe von jeweils € 1.200. Der Rest soll ab dem 4. Jahr durch 4 nachschüssige Jahresraten der Höhe *R* beglichen werden.

– Berechnen Sie die Ratenhöhe *R*, wenn der Zinssatz 8 % p. a. beträgt.

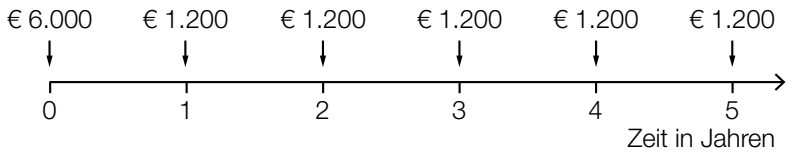
c) Um das Boot neu lackieren zu lassen, borgt sich der Käufer € 5.000, die er in Form von nachschüssigen Quartalsraten von jeweils € 300 bei einem Zinssatz von 6 % p. a. zurückzahlt.

– Berechnen Sie, wie viele volle Quartalsraten zu zahlen sind.
– Berechnen Sie, welcher Restbetrag 1 Quartal nach der letzten Vollrate anfällt.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Die Zeitlinie ist zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Zeitlinie:



$$B = 6\,000 + 1\,200 \cdot \frac{(1+i)^5 - 1}{i} \cdot \frac{1}{(1+i)^5}$$

b) Ansatz mit Berechnung des Endwerts nach 7 Jahren:

$$6\,000 \cdot 1{,}08^7 + 1\,200 \cdot \frac{1{,}08^3 - 1}{0{,}08} \cdot 1{,}08^4 + R \cdot \frac{1{,}08^4 - 1}{0{,}08} = 10\,800 \cdot 1{,}08^7 \quad \Rightarrow \quad R = 649{,}412$$

Die Ratenhöhe beträgt € 649,41.

c) € 5.000 ist der Barwert der nachschüssigen Quartalsrate.

$q_4 = \sqrt[4]{1{,}06}$

$$5\,000 = 300 \cdot \frac{q_4^n - 1}{q_4 - 1} \cdot \frac{1}{q_4^n}$$

Lösung der Gleichung mittels Technologieeinsatz: $n = 19{,}2...$
Es sind 19 volle Quartalsraten zu bezahlen.

Restzahlung am Ende des 20. Quartals:

$$\text{Rest} = 5\,000 \cdot q_4^{20} - 300 \cdot \frac{q_4^{19} - 1}{q_4 - 1} \cdot q_4 = 76{,}262...$$

Ein Quartal nach der letzten Einzahlung ist noch ein Restbetrag in Höhe von € 76,26 zu bezahlen.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) –
b) A Modellieren und Transferieren
c) A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) schwer
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 3
c) 4

Thema: Wirtschaft

Quellen: –

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Liftgesellschaft (2)*

Aufgabennummer: B_435

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Eine Liftgesellschaft plant die Errichtung einer neuen Seilbahn. Die Anschaffungskosten für die Seilbahn betragen € 4,5 Mio. Als Nutzungsdauer werden 8 Jahre angenommen. Die Liftgesellschaft erwartet jährliche Einnahmen von € 940.000. Die jährlichen Personal- und Betriebskosten werden auf € 250.000 geschätzt. Im Jahr 3 und im Jahr 6 entstehen Wartungskosten in Höhe von € 80.000. Am Ende der Nutzungsdauer wird mit einem Liquidationserlös von 10 % der Anschaffungskosten gerechnet.

– Übertragen Sie die Einnahmen und die Ausgaben für den Zeitraum der Nutzungsdauer in die nachstehende Tabelle.

Jahr	Einnahmen	Ausgaben
0		
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		

Die Liftgesellschaft kalkuliert mit einem Zinssatz von 4 % p. a.

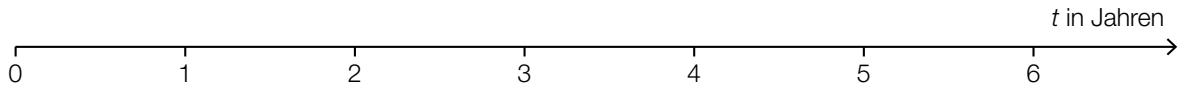
– Ermitteln Sie den Kapitalwert der Investition.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Die Liftgesellschaft bildet eine Rücklage und veranlagt dafür 3 Beträge zu unterschiedlichen Zeitpunkten. Der Gesamtwert der Rücklage nach 6 Jahren wird durch folgende Rechnung ermittelt:

$(50\,000 \cdot 1{,}03^2 + 30\,000) \cdot 1{,}035^4 + 80\,000 \cdot 1{,}035 \approx 178\,096{,}05$

– Beschreiben Sie, zu welchen Zinssätzen der Betrag in Höhe von € 50.000 verzinst wird. Geben Sie an, wie lange die jeweiligen Zinssätze gelten.
– Tragen Sie die 3 Beträge und den Gesamtwert der Rücklage nach 6 Jahren auf der nachstehenden Zeitachse ein.



Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

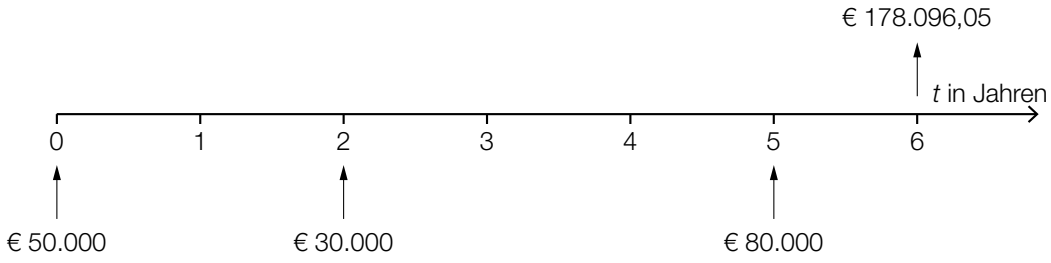
a)

Jahr	Einnahmen	Ausgaben
0		€ 4.500.000
1	€ 940.000	€ 250.000
2	€ 940.000	€ 250.000
3	€ 940.000	€ 330.000
4	€ 940.000	€ 250.000
5	€ 940.000	€ 250.000
6	€ 940.000	€ 330.000
7	€ 940.000	€ 250.000
8	€ 1.390.000	€ 250.000

$$-4\,500\,000 + (940\,000 - 250\,000) \cdot \frac{1{,}04^8 - 1}{0{,}04} \cdot \frac{1}{1{,}04^8} + \frac{450\,000}{1{,}04^8} - \frac{80\,000}{1{,}04^6} - \frac{80\,000}{1{,}04^3} =$$
$$= 340\,059{,}685...$$

Der Kapitalwert dieser Investition beträgt € 340.059,69.

b) Der Betrag in Höhe von € 50.000 wird 2 Jahre zu 3 % p. a., dann 4 Jahre zu 3,5 % p. a. verzinst.



Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Übertragen in die Einnahmen-Ausgaben-Tabelle
1 × B: für das richtige Ermitteln des Kapitalwerts

b) 1 × C: für die richtige Beschreibung der Zinssätze und der Verzinsungsdauer
1 × A: für das richtige Eintragen der 3 Beträge und des Gesamtwerts der Rücklage nach 6 Jahren

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Liftgesellschaft (1)*

Aufgabennummer: B_434

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Für die Finanzierung eines Sessellifts hat eine Liftgesellschaft einen Kredit in Höhe von € 1,4 Mio. aufgenommen. Diesen Kredit zahlt die Liftgesellschaft durch nachschüssige Jahresraten in Höhe von € 90.000 bei einer Verzinsung von 4 % p. a. zurück. (Spesen und Gebühren werden nicht berücksichtigt.)

– Berechnen Sie, wie viele volle Jahresraten zu zahlen sind.

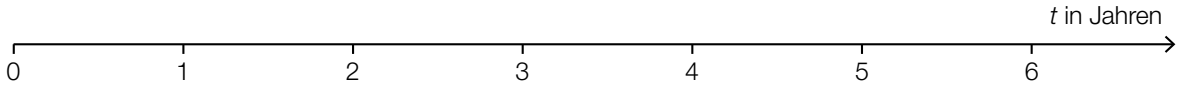
Nach 5 Jahren Kredittilgung gerät die Liftgesellschaft in Zahlungsschwierigkeiten und setzt die Rückzahlungen aus.

– Berechnen Sie die Höhe der Restschuld am Ende des 6. Jahres.

b) Die Liftgesellschaft bildet eine Rücklage und veranlagt dafür 3 Beträge zu unterschiedlichen Zeitpunkten. Der Gesamtwert der Rücklage nach 6 Jahren wird durch folgende Rechnung ermittelt:

$(50\,000 \cdot 1{,}03^2 + 30\,000) \cdot 1{,}035^4 + 80\,000 \cdot 1{,}035 \approx 178\,096{,}05$

– Beschreiben Sie, zu welchen Zinssätzen der Betrag in Höhe von € 50.000 verzinst wird. Geben Sie an, wie lange die jeweiligen Zinssätze gelten.
– Tragen Sie die 3 Beträge und den Gesamtwert der Rücklage nach 6 Jahren auf der nachstehenden Zeitachse ein.



Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

* ehemalige Klausuraufgabe

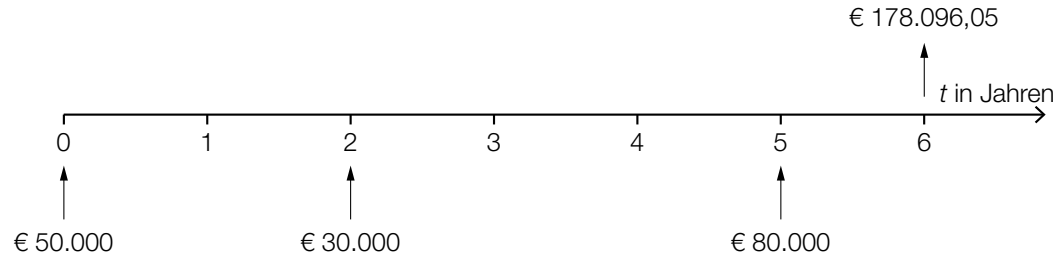
Möglicher Lösungsweg

a) $1\,400\,000 = 90\,000 \cdot \frac{1{,}04^n - 1}{0{,}04} \cdot \frac{1}{1{,}04^n}$

Lösung der Gleichung mittels Technologieeinsatz:
$n = 24{,}81...$
Die Liftgesellschaft muss 24 volle Jahresraten bezahlen.

$\left(1\,400\,000 \cdot 1{,}04^5 - 90\,000 \cdot \frac{1{,}04^5 - 1}{0{,}04}\right) \cdot 1{,}04 = 1\,264\,478{,}834...$
Die Höhe der Restschuld am Ende des 6. Jahres beträgt € 1.264.478,83.

b) Der Betrag in Höhe von € 50.000 wird 2 Jahre zu 3 % p. a., dann 4 Jahre zu 3,5 % p. a. verzinst.



Lösungsschlüssel

a) 1 × B1: für die richtige Berechnung der Anzahl der Vollraten
1 × B2: für die richtige Berechnung der Restschuld am Ende des 6. Jahres

b) 1 × C: für die richtige Beschreibung der Zinssätze und der Verzinsungsdauer
1 × A: für das richtige Eintragen der 3 Beträge und des Gesamtwerts der Rücklage nach 6 Jahren

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Lackproduktion*

Aufgabennummer: B_433

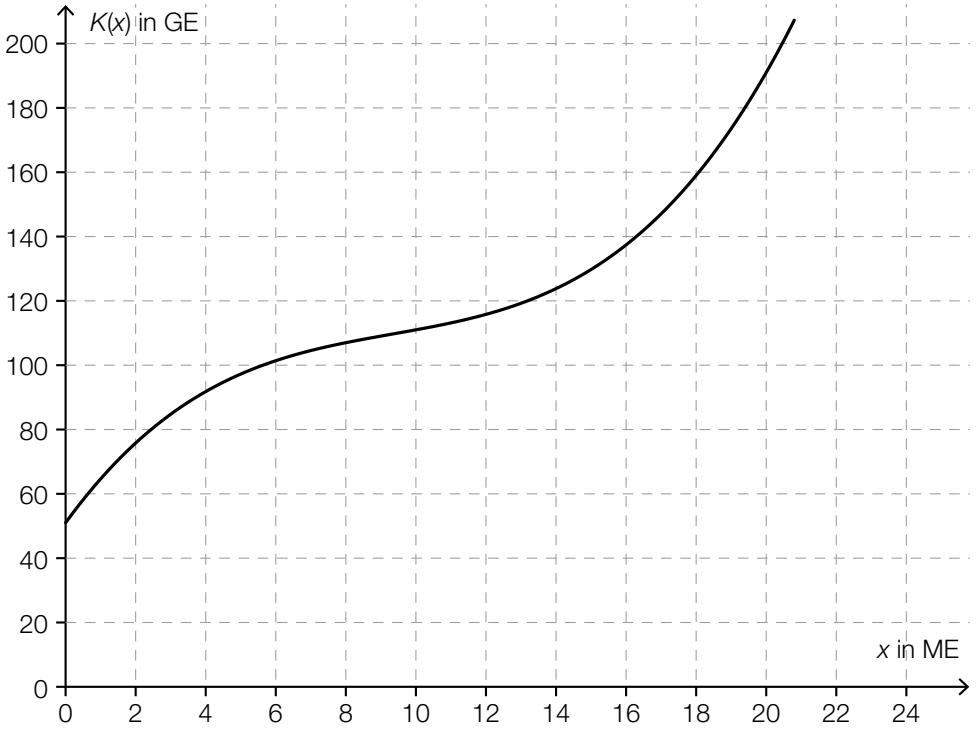
Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein Unternehmen stellt verschiedene Lacke her. Es wird die monatliche Produktion betrachtet.

a) Die Kosten für die Herstellung des Acryllacks *Ferrocolor* sollen durch eine Kostenfunktion K mit $K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ beschrieben werden. Das Unternehmen hat dabei Fixkosten von 450 GE. Bei der Produktion von 8 ME liegt die Kostenkehre. Bei der Produktion von 8 ME betragen die Gesamtkosten 522 GE und die Grenzkosten 5 GE/ME.

– Erstellen Sie ein Gleichungssystem, mit dem die Koeffizienten a, b, c und d ermittelt werden können.
– Ermitteln Sie die Koeffizienten a, b, c und d.

b) Im nachstehenden Diagramm ist der Graph der Kostenfunktion K für die Herstellung des Lacks *VariColor* dargestellt.



Das Betriebsoptimum kann mithilfe des Graphen der Kostenfunktion K ermittelt werden, indem man diejenige Tangente an den Graphen von K einzeichnet, die durch den Koordinatenursprung verläuft. Die x-Koordinate des Berührpunkts ist das Betriebsoptimum.

– Ermitteln Sie grafisch mithilfe des obigen Diagramms das Betriebsoptimum.
– Ermitteln Sie die langfristige Preisuntergrenze.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Für die Holzschutzgrundierung *Pullex* wird der Zusammenhang zwischen dem Preis und der Absatzmenge erhoben:

Absatzmenge x in ME	Preis $p_N(x)$ in GE/ME
10	16
12	13
15	12
17	9
19	8

– Ermitteln Sie mithilfe linearer Regression eine Gleichung der Preisfunktion der Nachfrage p_N.
– Ermitteln Sie den maximalen Erlös.

d) Die Gewinnfunktion G für den Lack *Soloplast* ist gegeben durch:

$G(x) = -0{,}025 \cdot x^3 - 0{,}1 \cdot x^2 + 12 \cdot x - 65$

x ... Anzahl der abgesetzten ME
$G(x)$ ... Gewinn bei x abgesetzten ME in GE

– Lesen Sie aus der Gleichung der Gewinnfunktion die Fixkosten für die Herstellung des Lacks ab.
– Beschreiben Sie, wie sich der Graph der Gewinnfunktion ändert, wenn die Fixkosten steigen.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

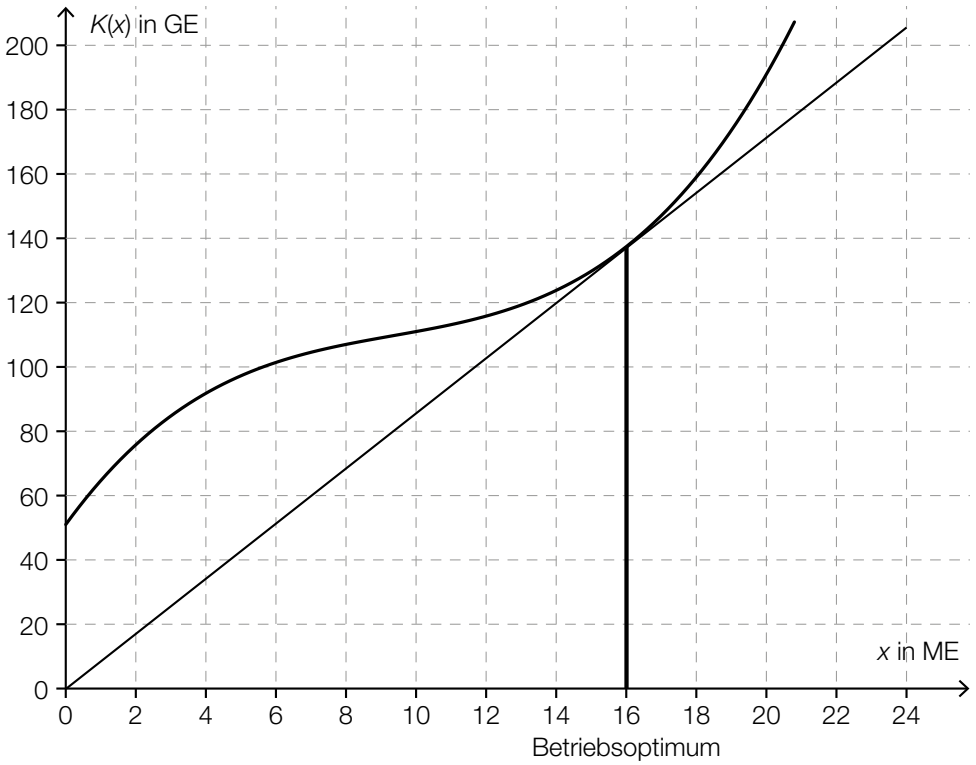
a) $K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$
$K'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x + c$
$K''(x) = 6 \cdot a \cdot x + 2 \cdot b$

I: $K(0) = 450 \Rightarrow 450 = d$
II: $K(8) = 522 \Rightarrow 522 = 512 \cdot a + 64 \cdot b + 8 \cdot c + 450$
III: $K'(8) = 5 \Rightarrow 5 = 192 \cdot a + 16 \cdot b + c$
IV: $K''(8) = 0 \Rightarrow 0 = 48 \cdot a + 2 \cdot b$

Lösung des Gleichungssystems mittels Technologieeinsatz:

$a = \frac{1}{16} = 0{,}0625$
$b = -\frac{3}{2} = -1{,}5$
$c = 17$
$d = 450$

b)



grafische Ermittlung des Betriebsoptimums: 16 ME (Toleranzbereich: [15; 17])
Ermittlung der langfristigen Preisuntergrenze: $\frac{136 \text{ GE}}{16 \text{ ME}} = 8{,}5 \text{ GE/ME}$
(Toleranzbereich: [8; 9])

c) Berechnung der Preisfunktion der Nachfrage mittels Technologieeinsatz:
$p_N(x) = -0{,}861 \cdot x + 24{,}169$ (Koeffizienten gerundet)

$E(x) = p_N(x) \cdot x$

$E'(x) = 0 \Rightarrow x = 14{,}037...$
$E(14{,}037...) = 169{,}632...$
Der maximale Erlös beträgt rund 169,63 GE.

d) $G(0) = -F$

Die Fixkosten betragen 65 GE.

Wenn die Fixkosten steigen, wird der Graph der Gewinnfunktion nach unten verschoben.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A1: für das richtige Erstellen der Gleichungen mithilfe der Funktion K
1 × A2: für das richtige Erstellen der Gleichungen mithilfe der Funktionen K' und K''
1 × B: für das richtige Ermitteln der Koeffizienten a, b, c und d

b) 1 × A: für das richtige grafische Ermitteln des Betriebsoptimums
1 × B: für das richtige Ermitteln der langfristigen Preisuntergrenze

c) 1 × B1: für das richtige Ermitteln der Gleichung mithilfe linearer Regression
1 × B2: für das richtige Ermitteln des maximalen Erlöses

d) 1 × C1: für das richtige Ablesen der Fixkosten
1 × C2: für die richtige Beschreibung der Veränderung des Graphen der Gewinnfunktion

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Elektrische Bauteile*

Aufgabennummer: B_432

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Der zeitliche Verlauf der Spannung beim Entladen eines Kondensators kann näherungsweise durch eine Funktion u beschrieben werden:

$u(t) = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$

t … Zeit ab Beginn des Entladevorgangs
$u(t)$ … Spannung am Kondensator zur Zeit t
U_0 … Spannung zur Zeit $t = 0$
τ … Zeitkonstante

– Erstellen Sie eine Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion u an der Stelle $t = 0$.

b) Der zeitliche Verlauf der Stromstärke in einer Spule kann durch eine Funktion f beschrieben werden, deren Graph in der unten stehenden Abbildung 1 dargestellt ist.

– Skizzieren Sie den Graphen der Ableitungsfunktion f' in Abbildung 2.

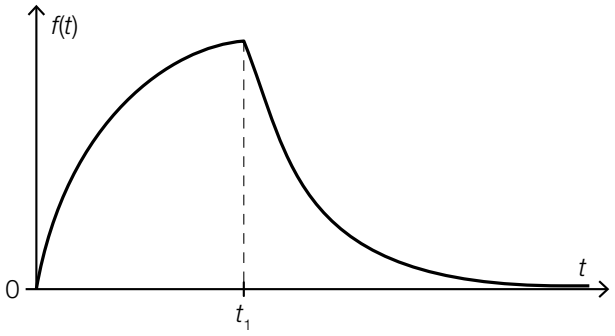


Abbildung 1

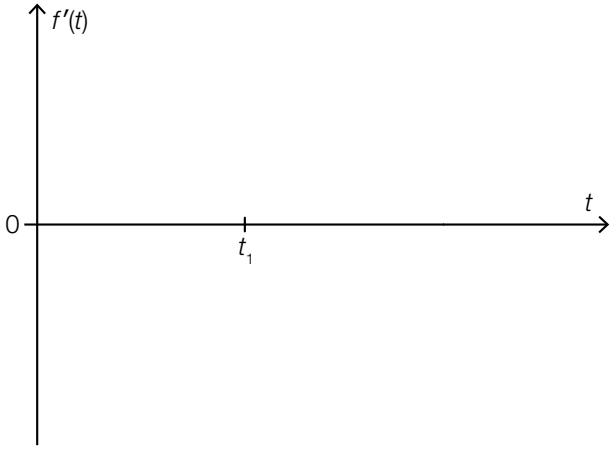


Abbildung 2

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Der zeitliche Verlauf der Spannung an einem Kondensator kann nach dem Einschalten des Stroms durch die Funktion u beschrieben werden:

$$u(t) = 40 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{0{,}24}}\right)$$

t … Zeit nach dem Einschalten des Stroms in s
$u(t)$ … Spannung am Kondensator zur Zeit t in Volt (V)

– Erklären Sie, ausgehend von der Funktionsgleichung für u, warum die Spannung des Kondensators für $t \to \infty$ asymptotisch gegen 40 V geht.

Im Zeitintervall $[t_1; t_2]$ steigt die Spannung am Kondensator von $u(t_1) = 5$ V auf $u(t_2) = 30$ V.

– Berechnen Sie den linearen Mittelwert der Spannung im Zeitintervall $[t_1; t_2]$.

Ihnen wird folgende fehlerhafte Berechnung der 1. Ableitung von u vorgelegt:

$$\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} = -40 \cdot e^{-\frac{t}{0{,}24}}$$

– Geben Sie an, welche Ableitungsregel hier missachtet wurde.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

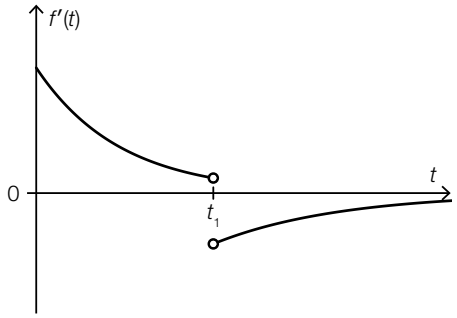
a) Tangente $g(t) = k \cdot t + d$ an der Stelle $t = 0$:

$k = u'(0) = -\frac{U_0}{\tau}$

$d = U_0$

$\Rightarrow \quad g(t) = -\frac{U_0}{\tau} \cdot t + U_0$

b)



c) Da der Ausdruck $e^{-\frac{t}{0{,}24}}$ für steigende Werte von t gegen null geht, nähert sich der Klammerausdruck dem Wert 1. Daher nähert sich der Funktionswert asymptotisch dem Wert 40 V.

Durch Lösen der Gleichung $u(t_1) = 5$ bzw. $u(t_2) = 30$ erhält man die Integrationsgrenze $t_1 = 0{,}0320...$ bzw. $t_2 = 0{,}3327...$

$\frac{1}{t_2 - t_1} \cdot \int_{t_1}^{t_2} u(t)\,\mathrm{d}t = 20{,}04...$

Der lineare Mittelwert der Spannung in diesem Zeitintervall beträgt rund 20,0 V.

Die Kettenregel wurde missachtet.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Erstellen der Gleichung der Tangente

b) 1 × A1: für die richtige Skizze des Graphen der Ableitungsfunktion im Bereich $0 < t < t_1$
(richtiges Monotonieverhalten der Ableitungsfunktion)
1 × A2: für die richtige Skizze des Graphen der Ableitungsfunktion im Bereich $t > t_1$
(richtiges Monotonieverhalten der Ableitungsfunktion)

c) 1 × D: für die richtige Erklärung des Verhaltens der Funktion
1 × B: für die richtige Berechnung des linearen Mittelwerts
1 × C: für das richtige Angeben, dass die Kettenregel missachtet wurde, oder eine richtige Beschreibung

BMB
Bundesministerium
für Bildung

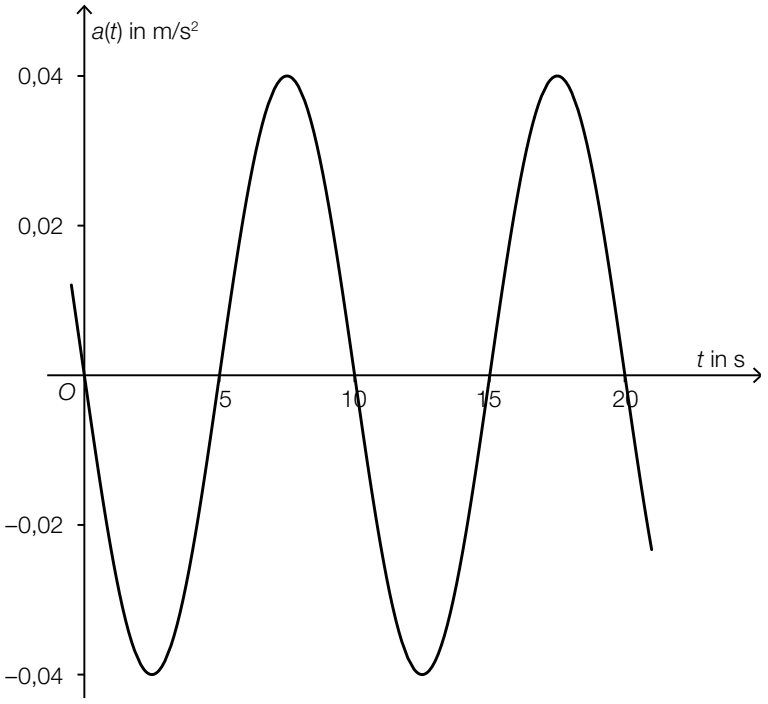
Federpendel*

Aufgabennummer: B_431

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein an einer Feder befestigter Körper bewegt sich unter dem Einfluss der Federkraft.

a) Das nachstehende Beschleunigung-Zeit-Diagramm zeigt den sinusförmigen Verlauf der Beschleunigung eines Körpers durch die Federkraft. Es gilt: $a(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$ mit $A > 0$.



– Bestimmen Sie A, ω und φ mithilfe des obigen Diagramms.
– Markieren Sie im obigen Diagramm alle Punkte, in denen der Betrag der Geschwindigkeit maximal ist.

b) Die Geschwindigkeit eines Körpers in Abhängigkeit von der Zeit kann durch eine Funktion v mit $v(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$ beschrieben werden (A, $\omega > 0$).

– Vervollständigen Sie die nachstehende Aussage mit $t_2 \neq t_1$ so, dass sie richtig ist.

Für $t_2 = t_1 + \frac{\square}{\square} \cdot \pi$ ist $\int_{t_1}^{t_2} A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)\,dt = 0$.

– Zeigen Sie, dass $A \cdot \omega$ die maximale Steigung der Funktion v ist.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Die Bewegung eines Körpers unter dem Einfluss einer Federkraft wird durch Reibung gedämpft. Für die Auslenkung aus der Ruhelage (Startposition) gilt:

$f(t) = e^{-t} \cdot \sin(3 \cdot t)$ mit $t \geq 0$

t ... Zeit in s
$f(t)$ ... Auslenkung aus der Ruhelage zur Zeit t in m

– Bestimmen Sie diejenigen Intervalle, in denen der Betrag der Auslenkung aus der Ruhelage größer als 0,2 m ist.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $A = 0{,}04$

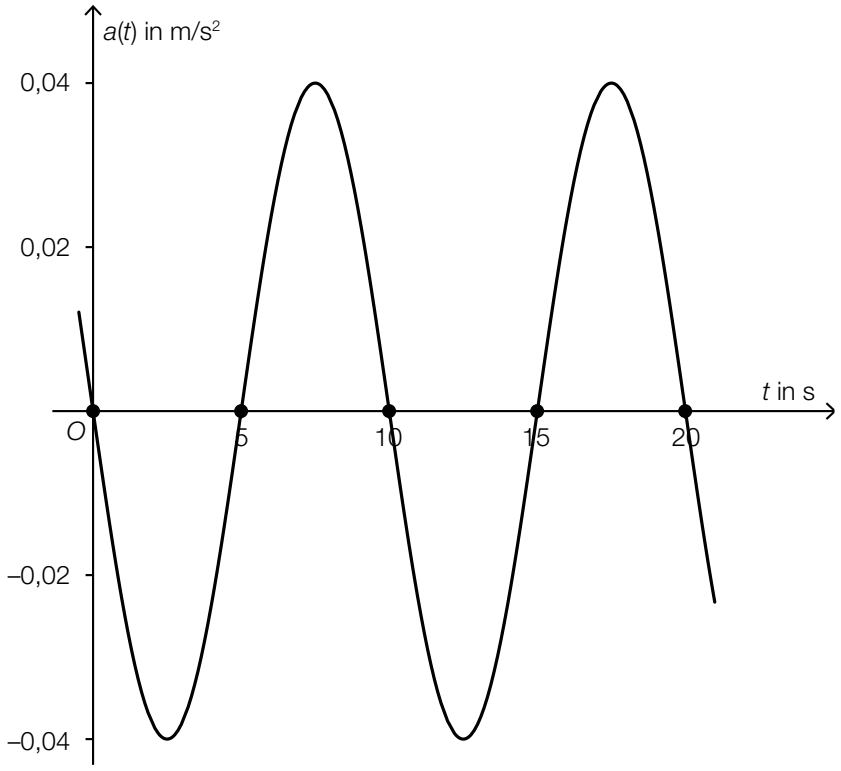
Die Periodendauer T ist 10, daher ergibt sich:

$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{10} = \frac{\pi}{5}$

$t_0 = 5$ und $\varphi = -t_0 \cdot \omega$, daher ergibt sich:

$\varphi = -5 \cdot \frac{\pi}{5} = -\pi$

(Jeder Wert $\varphi = -\pi + 2 \cdot k \cdot \pi$ *mit* $k \in \mathbb{Z}$ *ist als richtig zu werten.)*



b) $t_2 = t_1 + \frac{2 \cdot \pi}{\omega}$

Auch ein Vielfaches der Periodendauer ist als richtig zu werten.

$v'(t) = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$

Da der maximale Wert von $\cos(\omega \cdot t + \varphi)$ gleich 1 ist, ergibt sich als maximale Steigung von v genau $A \cdot \omega$.

c) Lösen der Gleichungen $f(t) = \pm 0{,}2$ mittels Technologieeinsatz:

$]0{,}07...; 0{,}87...[$ und $]1{,}33...; 1{,}60...[$

Lösungsschlüssel

a) 1 × C1: für das richtige Ablesen von A
1 × B1: für das richtige Bestimmen von ω
1 × B2: für das richtige Bestimmen von φ
1 × C2: für das richtige Markieren aller Punkte, in denen der Betrag der Geschwindigkeit maximal ist

b) 1 × A: für das richtige Vervollständigen der Aussage
1 × D: für den richtigen Nachweis

c) 1 × B: für das richtige Bestimmen der Intervalle

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Widerstandstemperatursensoren*

Aufgabennummer: B_430

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Der Zusammenhang zwischen Widerstand und Temperatur eines Sensors wird näherungsweise durch die quadratische Funktion R beschrieben:

$R(T) = 100 \cdot (1 + 0{,}003850 \cdot T - 5{,}775 \cdot 10^{-7} \cdot T^2)$ mit $T \geq 0$

T ... Temperatur in °C
$R(T)$ ... Widerstand bei der Temperatur T in Ohm (Ω)

– Berechnen Sie für $T = 450$ °C den Betrag des relativen Fehlers bei Verwendung der Funktion R, wenn der tatsächliche Widerstand 260 Ω beträgt.

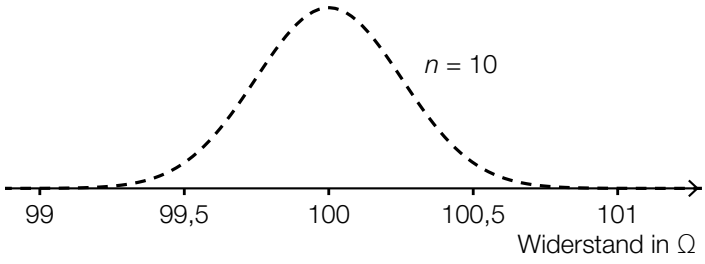
* ehemalige Klausuraufgabe

b) Ein Unternehmen produziert Widerstandstemperatursensoren. Der Widerstand dieser Sensoren bei 0 °C ist annähernd normalverteilt mit $\mu = 100\ \Omega$ und $\sigma = 0{,}8\ \Omega$.

Eine Zufallsstichprobe von 10 Sensoren wird der Produktion entnommen, und es wird jeweils der Widerstand bei 0 °C gemessen.

– Geben Sie die geschätzten Parameter der Verteilung der Stichprobenmittelwerte an.
– Ermitteln Sie den zum Erwartungswert μ symmetrischen Zufallsstreubereich, in dem erwartungsgemäß 98 % aller Stichprobenmittelwerte liegen.

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Dichtefunktion der Verteilung der Stichprobenmittelwerte für eine Zufallsstichprobe von $n = 10$ Sensoren strichliert dargestellt.



– Skizzieren Sie in der obigen Abbildung einen möglichen Graphen der Dichtefunktion für einen Stichprobenumfang $n > 10$.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $\frac{|R(450) - 260|}{260} = 0{,}0059... \approx 0{,}6\ \%$

b) $\mu_{\bar{X}} = 100\ \Omega$

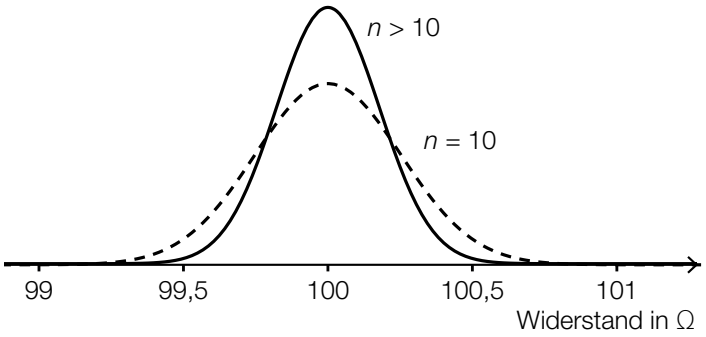
$\sigma_{\bar{X}} = \frac{0{,}8}{\sqrt{10}}\ \Omega$

Zweiseitigen 98-%-Zufallsstreubereich für den Stichprobenmittelwert mithilfe der Normalverteilung bestimmen:

$100 \pm z_{0{,}99} \cdot \frac{0{,}8}{\sqrt{10}}$

$z_{0{,}99} = 2{,}326...$

Daraus ergibt sich folgender Zufallstreubereich in Ω: [99,41; 100,59] (gerundet).



Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für die richtige Berechnung des Betrags des relativen Fehlers

b) 1 × A1: für das richtige Angeben der Parameter der Verteilung der Stichprobenmittelwerte
1 × B: für das richtige Ermitteln des Zufallsstreubereichs
1 × A2: für das richtige Skizzieren des Funktionsgraphen (Maximalwert höher und Kurve schmäler)

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Fundamentale Wechselwirkungen*

Aufgabennummer: B_429

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

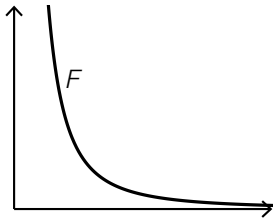
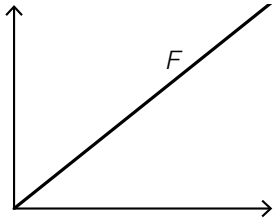
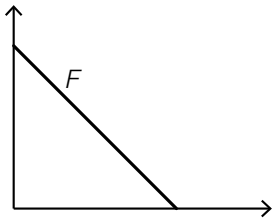
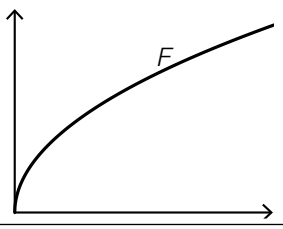
a) Mithilfe des Gravitationsgesetzes kann man den Betrag F der Gravitationskraft zwischen 2 Körpern berechnen:

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

F ... Betrag der Gravitationskraft
m_1 ... Masse des 1. Körpers
m_2 ... Masse des 2. Körpers
G ... Gravitationskonstante ($G > 0$)
r ... Abstand der beiden Körper

– Ordnen Sie den beiden Abhängigkeiten jeweils die zutreffende Grafik aus A bis D zu.
[2 zu 4]

Betrag F der Gravitationskraft abhängig vom Abstand r (m_1 und m_2 konstant)	
Betrag F der Gravitationskraft abhängig von der Masse m_1 (m_2 und r konstant)	

A	
B	
C	
D	

* ehemalige Klausuraufgabe

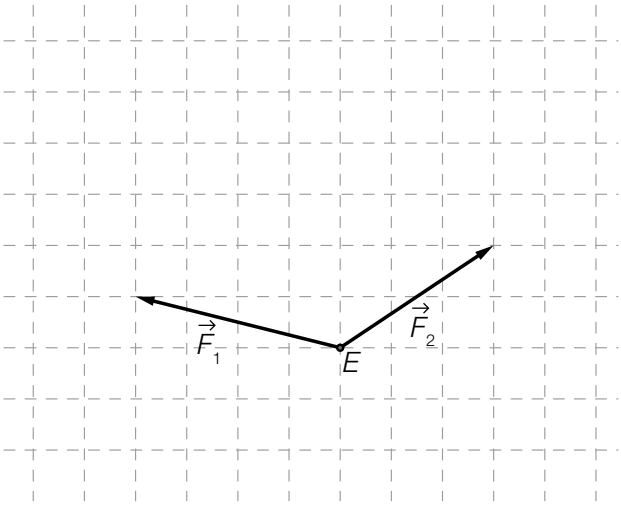
b) Die „elektromagnetische Wechselwirkung“ ist 10000-Milliarden-mal so groß wie die „schwache Wechselwirkung“.

– Ergänzen Sie in der nachstehenden Tabelle die fehlende Hochzahl für die „schwache Wechselwirkung“.

Wechselwirkung	Stärke
elektromagnetische Wechselwirkung	1
schwache Wechselwirkung	$10^{\square}$
Gravitation	10^{-39}

– Ermitteln Sie, um welchen Faktor die „schwache Wechselwirkung“ stärker als die Gravitation ist.

c) In der nachstehenden Grafik sind 2 Kräfte, die auf ein Teilchen im Punkt *E* wirken, dargestellt.



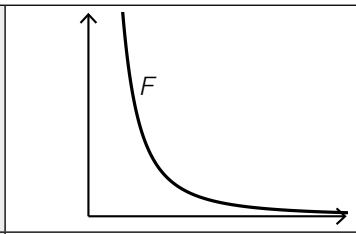
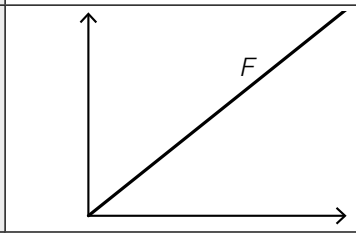
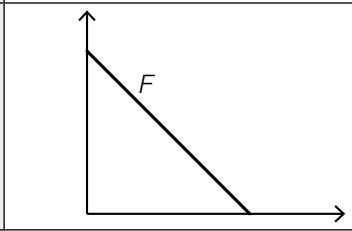
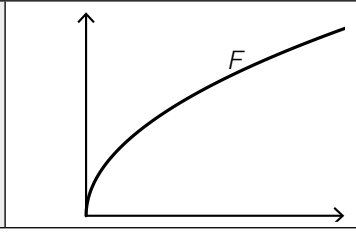
– Zeichnen Sie die Gesamtkraft, die sich aus der Summe der beiden Kräfte $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ ergibt, ausgehend vom Punkt *E* in der obigen Grafik ein.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)

Betrag F der Gravitationskraft abhängig vom Abstand r (m_1 und m_2 konstant)	A
Betrag F der Gravitationskraft abhängig von der Masse m_1 (m_2 und r konstant)	B

A	
B	
C	
D	

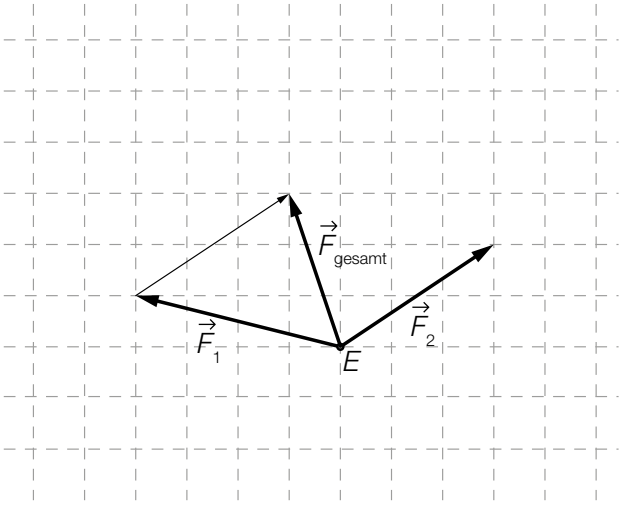
b)

Wechselwirkung	Stärke
elektromagnetische Wechselwirkung	1
schwache Wechselwirkung	10^{-13}
Gravitation	10^{-39}

$$\frac{10^{-13}}{10^{-39}} = 10^{26}$$

Die „schwache Wechselwirkung“ ist um den Faktor 10^{26} stärker als die Gravitation.

c)



Lösungsschlüssel

a) 1 × C: für die richtige Zuordnung

b) 1 × A: für das richtige Ergänzen der fehlenden Hochzahl
1 × B: für das richtige Ermitteln des Faktors

c) 1 × A: für das richtige Einzeichnen der Gesamtkraft

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Ausbreitung von Licht*

Aufgabennummer: B_428

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Bei einem physikalischen Experiment wird Licht durch einen Spalt geschickt und dabei abgelenkt.
Man interessiert sich für Winkel α mit $0° \leq \alpha \leq 90°$ und $\sin(\alpha) = \frac{(n + 0{,}5) \cdot \lambda}{d}$ mit $n \in \mathbb{N}$.

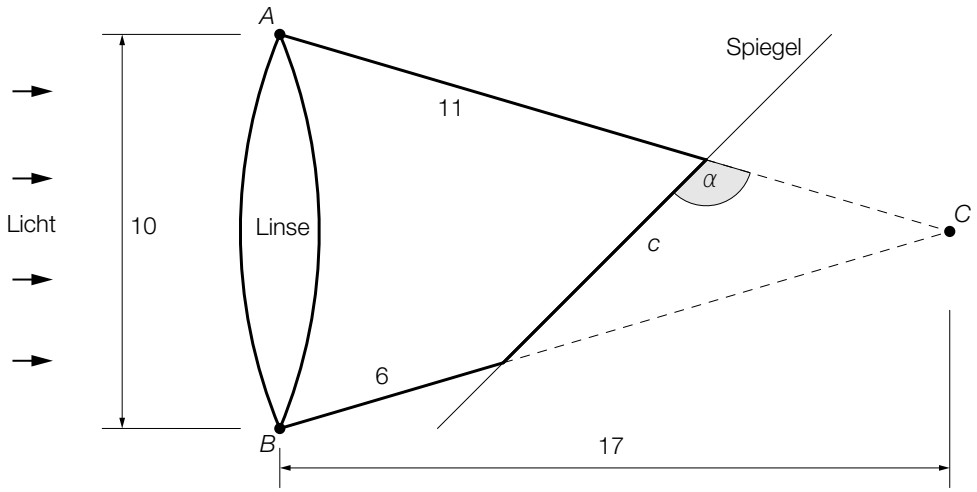
λ ... Wellenlänge des Lichts in m ($\lambda > 0$)
d ... Spaltbreite in m ($d > 0$)

– Geben Sie an, welche Beziehung zwischen d und λ erfüllt sein muss, damit diese Gleichung für $n = 0$ eine Lösung für α hat.

Bei einem bestimmten Experiment gilt: $d = 0{,}01$ mm
$\lambda = 632$ nm

– Ermitteln Sie diejenigen natürlichen Zahlen n, für die diese Gleichung eine Lösung für α hat.

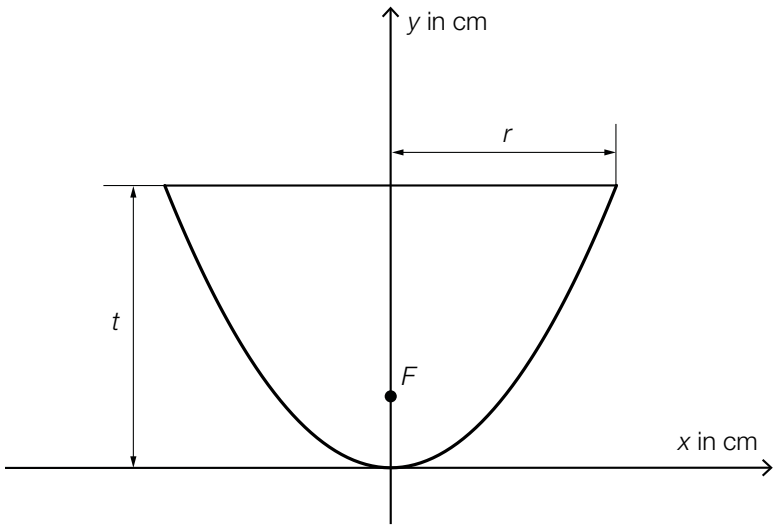
b) Bei einem Experiment wird das von einer Sammellinse gebündelte Licht auf einen schräg gestellten Spiegel gerichtet (siehe nachstehende nicht maßstabgetreue Skizze, alle Abmessungen in cm). Es gilt: $\overline{AC} = \overline{BC}$.



– Berechnen Sie die Länge c.
– Berechnen Sie den stumpfen Winkel α.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Viele Scheinwerfer haben die Form eines Rotationsparaboloids, das durch Rotation einer Parabel mit der Gleichung $y = a \cdot x^2$ um die y-Achse entsteht. Dabei befindet sich die Lampe des Scheinwerfers im Brennpunkt $F = \left(0 \left| \frac{1}{4 \cdot a} \right.\right)$ (siehe nachstehende Abbildung).



– Berechnen Sie die Koordinaten des Brennpunkts F für $r = 12$ cm und $t = 15$ cm.

Jemand behauptet: „Verdoppelt man bei gleichbleibender Tiefe t eines Rotationsparaboloids den Radius r, so vervierfacht sich dadurch die y-Koordinate des Brennpunkts."

– Überprüfen Sie diese Behauptung nachweislich auf ihre Richtigkeit.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Der Nenner muss größer gleich dem Zähler sein, also: $0{,}5 \cdot \lambda \leq d$.

$$\frac{(n + 0{,}5) \cdot 632 \cdot 10^{-9}}{0{,}01 \cdot 10^{-3}} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad n \leq 15{,}3...$$

Daher gibt es für $n = 0, 1, 2, \ldots, 15$ jeweils eine Lösung für α.

b) Berechnung der Schenkel des gleichschenkeligen Dreiecks und des Winkels zwischen den Schenkeln: $s = \sqrt{17^2 + 5^2} = 17{,}72...$

$\gamma = 2 \cdot \arctan\left(\frac{5}{17}\right) = 32{,}77...°$

Mit dem Cosinussatz ergibt sich die Länge c:

$\sqrt{(s - 11)^2 + (s - 6)^2 - 2 \cdot (s - 11) \cdot (s - 6) \cdot \cos(\gamma)} = 7{,}07...$

$c \approx 7{,}1$ cm

$$\frac{c}{\sin(\gamma)} = \frac{s - 6}{\sin(\alpha)} \quad \Rightarrow \quad (\alpha_1 \approx 63{,}7...°),\ \alpha_2 = 116{,}2...°$$

c) Da P ein Punkt der Parabel ist, gilt: $15 = 144 \cdot a \quad \Rightarrow \quad a = \frac{15}{144}$.
Die Koordinaten des Brennpunkts lauten somit:

$$F = \left(0 \left| \frac{1}{4 \cdot \frac{15}{144}} \right.\right) = (0 \,|\, 2{,}4)$$

Ist $R = (r|t)$ ein Punkt der Parabel, dann muss $t = a \cdot r^2$, also $a = \frac{t}{r^2}$ sein.
Die y-Koordinate von F lautet: $y_F = \frac{r^2}{4 \cdot t}$.
Eine Verdoppelung des Radius bewirkt somit eine Vervierfachung der y-Koordinate.

Lösungsschlüssel

a) 1 × C: für das richtige Angeben der Beziehung zwischen d und λ
1 × A: für das richtige Ermitteln der entsprechenden Werte von n

b) 1 × A: für die richtige Modellbildung (z. B. mithilfe eines gleichschenkeligen Dreiecks und eines allgemeinen Dreiecks)
1 × B1: für die richtige Berechnung der Länge c
1 × B2: für die richtige Berechnung des Winkels α

c) 1 × B: für die richtige Berechnung der y-Koordinate des Brennpunkts
1 × D: für die richtige Überprüfung

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Im Möbelhaus*

Aufgabennummer: B_427

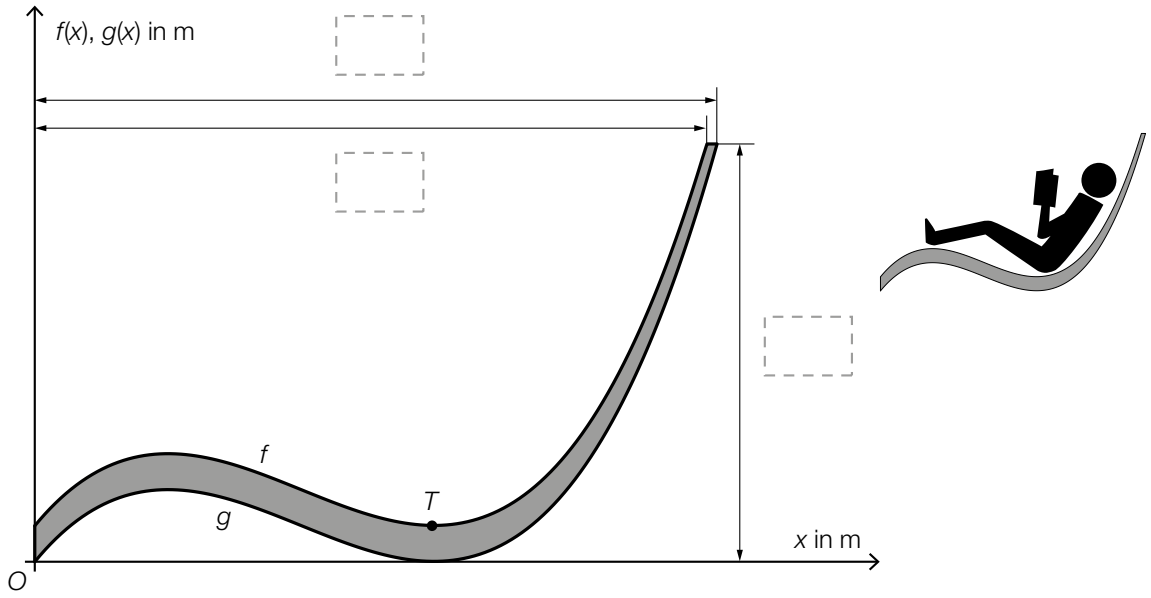
Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Der Profilverlauf einer Liege kann mithilfe der Funktionen f und g näherungsweise beschrieben werden.

Mit folgendem Ausdruck kann der Inhalt der in der nachstehenden Abbildung grau dargestellten Fläche berechnet werden:

$$\int_0^a (f(x) - g(x))\,dx + (b - a) \cdot c - \int_a^b g(x)\,dx$$

– Tragen Sie die fehlenden Beschriftungen a, b und c in der nachstehenden Abbildung in die entsprechenden Kästchen ein.



Es gilt:

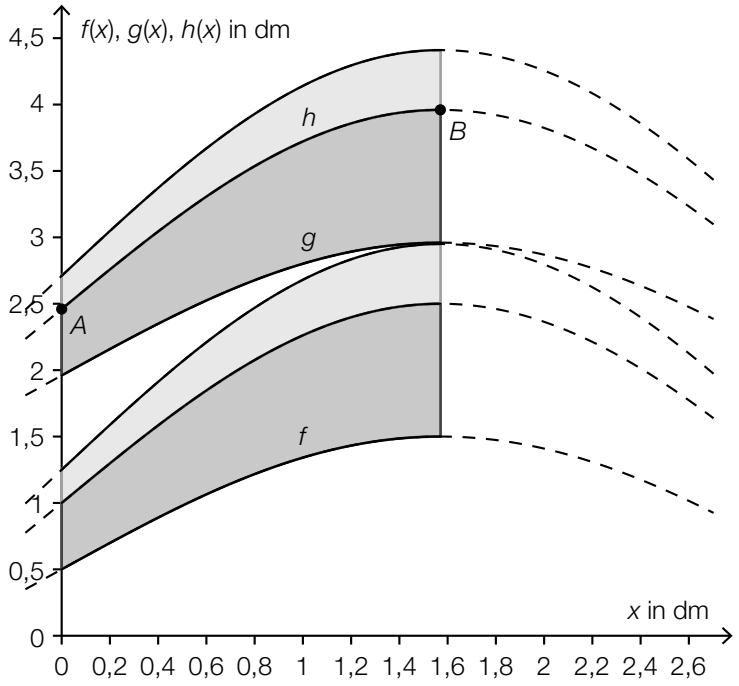
$f(x) = 1{,}033 \cdot x^3 - 2{,}26 \cdot x^2 + 1{,}237 \cdot x + 0{,}1$
$g(x) = 1{,}033 \cdot x^3 - 2{,}26 \cdot x^2 + 1{,}237 \cdot x$

x, $f(x)$, $g(x)$ ... Koordinaten in m

– Berechnen Sie die Koordinaten des Tiefpunkts T des Graphen der Funktion f.
– Berechnen Sie den Steigungswinkel von f an der Stelle $x_0 = 1{,}6$.
– Begründen Sie, warum die Funktion f an jeder Stelle die gleiche Steigung wie die Funktion g hat.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Ein Stoffmuster im Retro-Stil entsteht, indem ein Ausschnitt immer wieder kopiert und gespiegelt wird. Dabei werden die Begrenzungslinien als Graphen von Funktionen modelliert (siehe nachstehende Abbildungen).





Für die Funktion f gilt:

$f(x) = \sin(x) + 0{,}5$

x, $f(x)$ ... Koordinaten in dm

Der Graph der Funktion g entsteht durch Verschiebung des Graphen der Funktion f entlang der vertikalen Achse um 1,46 dm nach oben.

– Stellen Sie eine Gleichung der Funktion g auf.

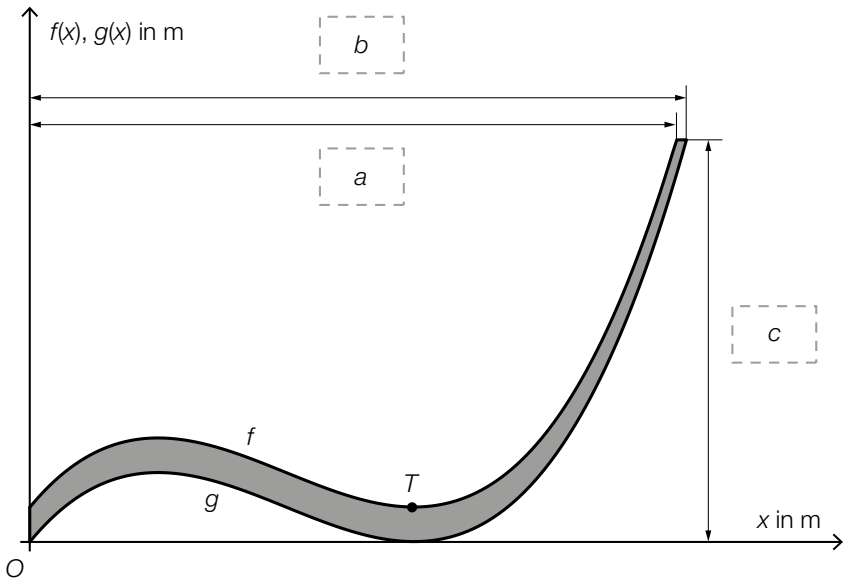
Der Graph der Funktion h mit $h(x) = a \cdot \sin(x) + b$ verläuft durch den Punkt $A = (0 \mid 2{,}46)$ und den Hochpunkt $B = \left(\frac{\pi}{2} \middle| 3{,}96\right)$.

– Bestimmen Sie die Koeffizienten a und b.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



$f'(x) = 0$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$(x_1 = 0{,}365...)$, $x_2 = 1{,}093...$
$f(x_2) = 0{,}100...$
$T \approx (1{,}09 \mid 0{,}10)$

$\alpha = \arctan(f'(1{,}6)) = \arctan(1{,}938...) = 62{,}711...° \approx 62{,}71°$
Auch eine Berechnung des Winkels im Bogenmaß ist als richtig zu werten.

Die ersten Ableitungen der beiden Funktionen sind identisch, also haben die beiden Funktionen an jeder Stelle die gleiche Steigung.

b) $g(x) = \sin(x) + 1{,}96$ oder $g(x) = f(x) + 1{,}46$

$2{,}46 = a \cdot \sin(0) + b \quad \Rightarrow \quad b = 2{,}46$
$3{,}96 - 2{,}46 = 1{,}5 \quad \Rightarrow \quad a = 1{,}5$

Lösungsschlüssel

a) 1 × C: für das richtige Eintragen von a, b und c
1 × B1: für die richtige Berechnung der Koordinaten von T
1 × B2: für die richtige Berechnung des Steigungswinkels
Auch eine Berechnung des Winkels im Bogenmaß ist als richtig zu werten.
1 × D: für die richtige Begründung

b) 1 × A: für das richtige Aufstellen einer Gleichung der Funktion g
1 × B: für das richtige Bestimmen der Koeffzienten a und b

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Verzinsung*

Aufgabennummer: A_256

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Auf einem Konto werden € 3.000 angelegt.

Für eine Zeitspanne von 3 Jahren wird dieser Betrag mit 5 % pro Jahr verzinst, anschließend für 2 Jahre mit 1 % pro Jahr.

– Ermitteln Sie den Kontostand nach 5 Jahren K_5.

Bei einem konstanten Jahreszinssatz i wäre der Kontostand nach 5 Jahren auf denselben Wert K_5 angewachsen.

– Bestimmen Sie diesen Jahreszinssatz i.

b) Die Basisformel für die Zinseszinsrechnung lautet:

$K_n = K_0 \cdot (1 + i)^n$

K_0 ... Anfangskapital
K_n ... Kapital nach n Jahren
i ... Jahreszinssatz

Nach einer bestimmten Anzahl von Jahren n_2 hat sich das Anfangskapital verdoppelt.

– Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung von n_2 aus i.

$n_2 =$ _____

Zur näherungsweisen Berechnung von n_2 kann die sogenannte *0,69er-Regel* verwendet werden:

$n_2 \approx \frac{0{,}69}{i} + 0{,}35$

– Überprüfen Sie nachweislich, ob die 0,69er-Regel für $i = 0{,}04$ eine gute Näherung von n_2 ergibt.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

a) $K_5 = 3000 \cdot 1{,}05^3 \cdot 1{,}01^2 = 3542{,}679...$
Der Kontostand nach 5 Jahren beträgt € 3.542,68.

$1 + i = \sqrt[5]{1{,}05^3 \cdot 1{,}01^2} = 1{,}0338... \approx 1{,}034$ *oder:* $3542{,}679... = 3000 \cdot (1 + i)^5$

$$i = \sqrt[5]{\frac{3542{,}679...}{3000}} - 1 = 0{,}0338...$$

Der Jahreszinssatz beträgt rund 3,4 %.

b) $2 = (1 + i)^{n_2}$

$$n_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(1 + i)}$$

Auch das Erstellen der Formel mit Logarithmen zu einer anderen Basis ist als richtig zu werten.

i	$n_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(1 + i)}$	$n_2 \approx \frac{0{,}69}{i} + 0{,}35$
0,04	17,67...	17,6

Die 0,69er-Regel ergibt also für $i = 0{,}04$ eine gute Näherung von n_2.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B1: für das richtige Ermitteln des Kontostands nach 5 Jahren
1 × B2: für das richtige Bestimmen des Jahreszinssatzes

b) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel für n_2
Auch das Erstellen der Formel mit Logarithmen zu einer anderen Basis ist als richtig zu werten.
1 × D: für die richtige nachweisliche Überprüfung

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Epidemie*

Aufgabennummer: A_255

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

In einem Land breitet sich eine Epidemie aus.

a) Nach wissenschaftlichen Recherchen vor Ort konnte im Nachhinein der Zeitpunkt des ersten Infektionsfalls festgestellt werden.
Zu Beginn der Epidemie verdoppelt sich die Anzahl der Neuinfektionen etwa alle 4 Tage.

– Erstellen Sie eine Gleichung derjenigen Funktion N, die die Anzahl der Neuinfektionen zur Zeit t in Tagen beschreibt. Wählen Sie $t = 0$ für den Zeitpunkt des ersten Infektionsfalls.
– Argumentieren Sie, dass eine exponentielle Zunahme der Anzahl der Neuinfektionen auf lange Sicht nicht realistisch ist.

b) Der zeitliche Verlauf der Gesamtanzahl der seit Ausbruch der Epidemie infizierten Personen kann näherungsweise durch die Funktion I beschrieben werden.

$$I(t) = \frac{30\,000}{1 + b \cdot e^{-0{,}1739 \cdot t}}$$

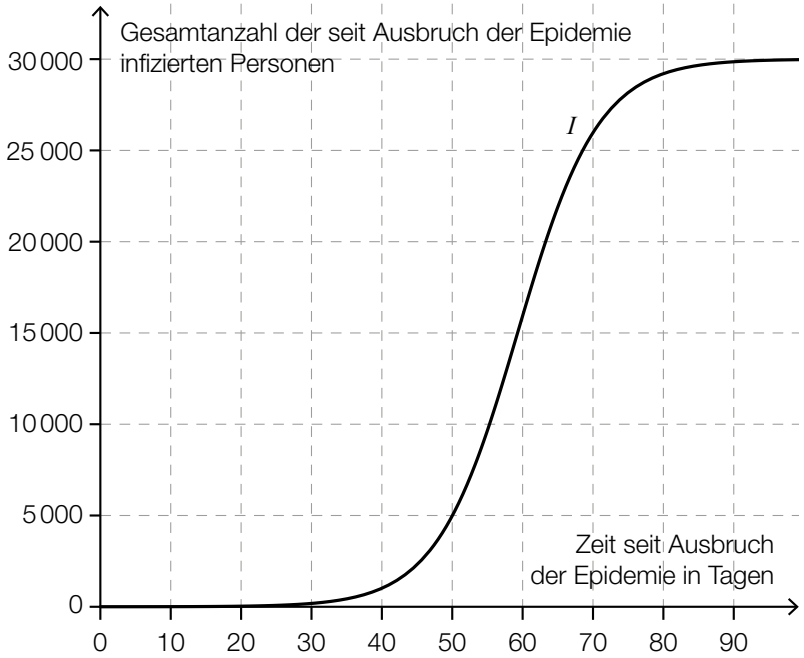
t … Zeit seit Ausbruch der Epidemie in Tagen
$I(t)$ … Gesamtanzahl der seit Ausbruch der Epidemie infizierten Personen zur Zeit t

Nach 41 Tagen wurden insgesamt 1 200 infizierte Personen registriert.

– Berechnen Sie den Parameter b.
– Ermitteln Sie, nach welcher Zeit gemäß diesem Modell erstmals mehr als 17 000 Personen infiziert sein werden.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Der zeitliche Verlauf der Gesamtanzahl der seit Ausbruch der Epidemie infizierten Personen kann näherungsweise durch eine Funktion I beschrieben werden. Der Graph der Funktion I ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



– Interpretieren Sie den Ausdruck $I(45)$ im gegebenen Sachzusammenhang.
– Lesen Sie aus der Grafik denjenigen Zeitpunkt ab, bei dem die Anzahl der Neuinfektionen pro Tag am höchsten ist.
– Dokumentieren Sie in Worten, wie der Zeitpunkt, zu dem die Anzahl der Neuinfektionen pro Tag am höchsten ist, mithilfe der Differenzialrechnung berechnet werden kann, wenn eine Gleichung von I bekannt ist.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $N(t) = N_0 \cdot a^t$
$N_0 = 1$
$a = \sqrt[4]{2} = 1{,}18920...$
$N(t) = 1 \cdot 1{,}1892...^t$ *oder* $N(t) = 1 \cdot 2^{\frac{t}{4}}$
t ... Zeit seit dem ersten Infektionsfall in Tagen
$N(t)$ ... Anzahl der Neuinfektionen zur Zeit t

Eine exponentielle Zunahme ist auf lange Sicht nicht möglich, da die Anzahl der Personen, die infiziert werden können, beschränkt ist, die Funktion N aber nicht.

b) $1\,200 = \frac{30\,000}{1 + b \cdot e^{-0{,}1739 \cdot 41}}$
Lösung der Gleichung mittels Technologieeinsatz: $b = 29\,970{,}0...$

$17\,000 = \frac{30\,000}{1 + 29\,970{,}0... \cdot e^{-0{,}1739 \cdot t}}$
Lösung der Gleichung mittels Technologieeinsatz: $t = 60{,}8...$

Nach etwa 61 Tagen werden erstmals mehr als 17 000 Personen infiziert sein.

c) $I(45)$ gibt an, wie viele Personen insgesamt in den ersten 45 Tagen infiziert wurden.

Nach 60 Tagen ist die Anzahl der Neuinfektionen pro Tag am höchsten (Toleranzbereich: ±5 Tage).

Dazu ermittelt man die Nullstelle der 2. Ableitung der Funktion I im dargestellten Bereich.

In der Grafik ist klar zu erkennen, dass I *im dargestellten Intervall nur eine Wendestelle hat und dass an dieser Stelle die Zunahme am stärksten ist. Daher sind eine Überprüfung mithilfe der 1. Ableitung und eine Überprüfung der Randstellen nicht erforderlich.*

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Erstellen der Gleichung der Funktion N
1 × D: für die richtige Argumentation

b) 1 × B1: für die richtige Berechnung des Parameters b
1 × B2: für das richtige Ermitteln der Zeit, nach der erstmals mehr als 17 000 Personen infiziert sein werden

c) 1 × C1: für die richtige Interpretation im gegebenen Sachzusammenhang
1 × C2: für das richtige Ablesen der Wendestelle im Toleranzbereich [55; 65]
1 × C3: für die richtige Dokumentation in Worten
(In der Grafik ist klar zu erkennen, dass I im dargestellten Intervall nur eine Wendestelle hat und dass an dieser Stelle die Zunahme am stärksten ist. Daher sind eine Überprüfung mithilfe der 1. Ableitung und eine Überprüfung der Randstellen nicht erforderlich.)

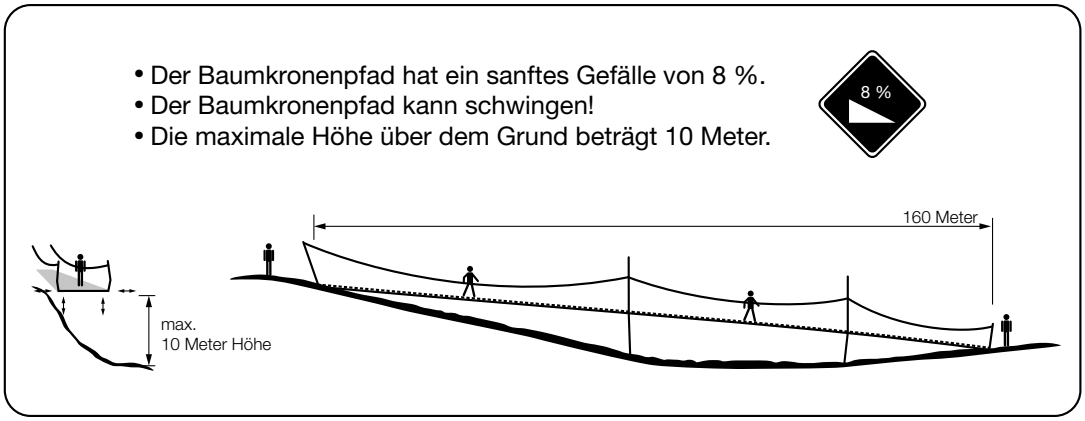
BMB
Bundesministerium
für Bildung

Baumkronenpfad*

Aufgabennummer: A_230

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Der *Baumkronenpfad* ist eine Brückenstrecke durch einen Teil des Schönbrunner Tiergartens.



a) Auf dem Schild zum Baumkronenpfad ist zu lesen:
„Der Baumkronenpfad hat ein sanftes Gefälle von 8 %.“

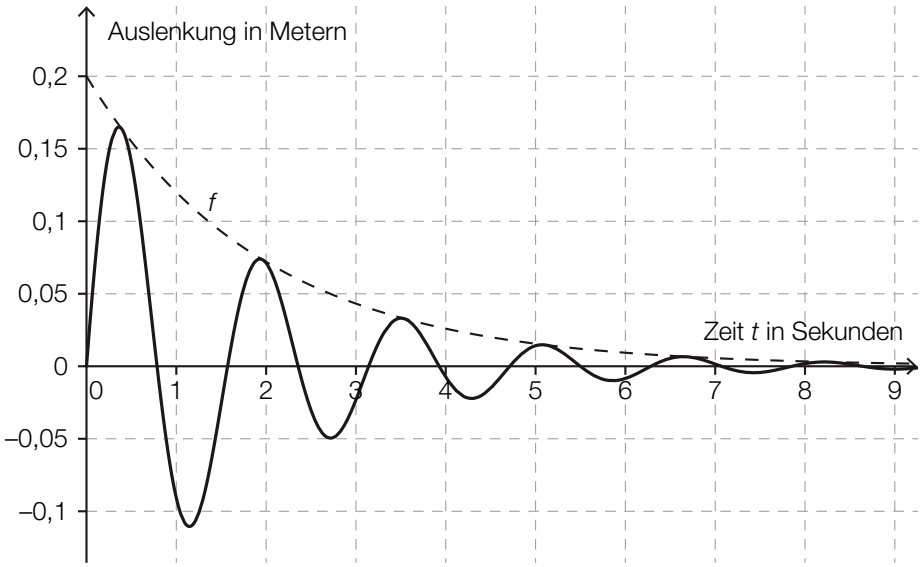
Dabei wird der Baumkronenpfad vereinfacht als geradlinig angenommen. Die horizontale Entfernung zwischen Startpunkt und Endpunkt beträgt 160 m.

– Berechnen Sie den Höhenunterschied zwischen Startpunkt und Endpunkt.
– Berechnen Sie den Neigungswinkel des Baumkronenpfads.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Auf dem Schild zum Baumkronenpfad ist zu lesen: „Der Baumkronenpfad kann schwingen!“

In der nachstehenden Grafik ist das Auf-und-ab-Schwingen des Baumkronenpfads an einer bestimmten Stelle dargestellt.



– Lesen Sie aus der obigen Grafik die maximale Auslenkung ab.

In der obigen Grafik ist die sogenannte „Einhüllende“ strichliert eingezeichnet. Es handelt sich dabei um eine Funktion f mit $f(t) = c \cdot a^t$.

– Lesen Sie aus der Grafik den Parameter c ab.
– Begründen Sie mathematisch, warum für den Parameter a dieser Funktion f gilt: $0 < a < 1$.

c) Auf dem Schild zum Baumkronenpfad ist zu lesen: „Die maximale Höhe über dem Grund beträgt 10 Meter.“ Diese maximale Höhe wird in einer horizontalen Entfernung von 90 m vom Startpunkt erreicht.

In 40 m horizontaler Entfernung vom Startpunkt beträgt die Höhe 8 m.
Die horizontale Entfernung zwischen Startpunkt und Endpunkt beträgt 160 m.
Im Anfangspunkt und im Endpunkt ist die Höhe 0 m.

Die Höhe über dem Grund abhängig von der horizontalen Entfernung vom Startpunkt soll näherungsweise mithilfe einer Polynomfunktion 4. Grades h mit
$h(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$ beschrieben werden.

– Erstellen Sie ein Gleichungssystem, mit dem die Koeffizienten dieser Funktion berechnet werden können.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Höhenunterschied in Metern: $160 \cdot 0{,}08 = 12{,}8$

$\alpha = \arctan(0{,}08) = 4{,}57...°$

Auch $\alpha = -4{,}57...°$ *ist als richtig zu werten.*
Auch die Berechnung des Winkels im Bogenmaß ist als richtig zu werten.

b) maximale Auslenkung: 0,17 m
Toleranzbereich: [0,16 m; 0,18 m]

$c = f(0) = 0{,}2$

Da die gegebene Exponentialfunktion streng monoton fallend ist, gilt für den Parameter a:
$0 < a < 1$.

c) $h(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$
$h'(x) = 4 \cdot a \cdot x^3 + 3 \cdot b \cdot x^2 + 2 \cdot c \cdot x + d$

$h(0) = 0$
$h(40) = 8$
$h(90) = 10$
$h(160) = 0$
$h'(90) = 0$

oder:

$0 = a \cdot 0^4 + b \cdot 0^3 + c \cdot 0^2 + d \cdot 0 + e$
$8 = a \cdot 40^4 + b \cdot 40^3 + c \cdot 40^2 + d \cdot 40 + e$
$10 = a \cdot 90^4 + b \cdot 90^3 + c \cdot 90^2 + d \cdot 90 + e$
$0 = a \cdot 160^4 + b \cdot 160^3 + c \cdot 160^2 + d \cdot 160 + e$
$0 = 4 \cdot a \cdot 90^3 + 3 \cdot b \cdot 90^2 + 2 \cdot c \cdot 90 + d$

Auch das Erstellen eines Gleichungssystems zur Berechnung der Koeffizienten von –h *ist als richtig zu werten.*

Lösungsschlüssel

a) 1 × B1: für die richtige Berechnung des Höhenunterschieds
1 × B2: für die richtige Berechnung des Neigungswinkels
Auch die Berechnung des Winkels im Bogenmaß ist als richtig zu werten.

b) 1 × C1: für das richtige Ablesen der maximalen Auslenkung
im Toleranzbereich [0,16 m; 0,18 m]
1 × C2: für das richtige Ablesen des Parameters c
1 × D: für die richtige Begründung zum Parameter a

c) 1 × A1: für das richtige Erstellen der Gleichungen mithilfe der Koordinaten der gegebenen Punkte
1 × A2: für das richtige Erstellen der Gleichung mithilfe der gegebenen Maximumstelle
Auch das Erstellen eines Gleichungssystems zur Berechnung der Koeffizienten von $-h$ ist als richtig zu werten.

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Der Genfer See*

Aufgabennummer: A_222

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Der *Jet d'eau* ist ein Springbrunnen im Genfer See. Die Wasserfontäne des Springbrunnens erreicht eine maximale Höhe von 140 Metern.

In einem vereinfachten Modell kann die Höhe eines Wasserteilchens über der Wasseroberfläche in Abhängigkeit von der Zeit durch die Funktion h beschrieben werden:

$h(t) = -4{,}9 \cdot t^2 + 55{,}6 \cdot t$ mit $t \geq 0$

t … Zeit nach dem Austritt eines Wasserteilchens in s
$h(t)$ … Höhe des Wasserteilchens über der Wasseroberfläche zur Zeit t in m

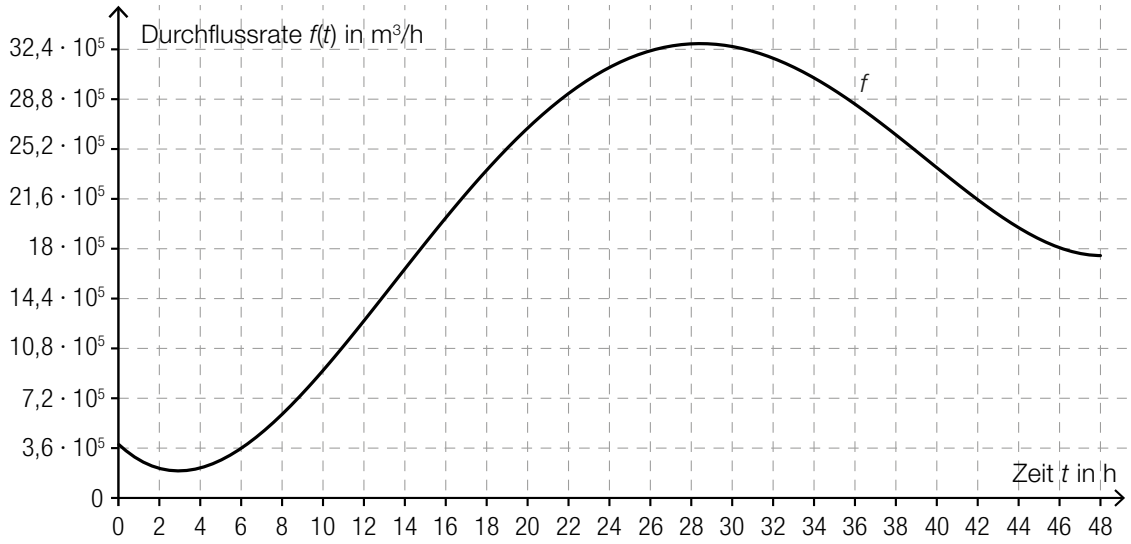
In diesem Modell wird der Luftwiderstand nicht berücksichtigt. Daher weicht die mithilfe der Modellfunktion h ermittelte maximale Höhe deutlich von der angegebenen maximalen Höhe ab.

– Berechnen Sie, um wie viel Prozent die mithilfe der Modellfunktion h ermittelte maximale Höhe über der angegebenen maximalen Höhe von 140 Metern liegt.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Der Genfer See wird durch mehrere Flüsse gespeist. Der Wasserstand des Sees wird beim Abfluss reguliert.

Die nachstehende Grafik zeigt den Verlauf der Durchflussrate des Wassers beim Abfluss innerhalb von 48 Stunden.



– Beschreiben Sie unter Angabe der entsprechenden Einheit, was mit dem Ausdruck $\int_0^{48} f(t)\,\mathrm{d}t$ im gegebenen Sachzusammenhang berechnet wird.

Die Funktion F ist eine Stammfunktion der in der obigen Grafik dargestellten Funktion f.

– Kreuzen Sie die für F zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]*

F hat die Stelle mit dem größten Anstieg im Intervall [14; 18].	☐
F hat eine Maximumstelle im Intervall [26; 30].	☐
F ist monoton fallend im Intervall [32; 44].	☐
F ist monoton steigend im Intervall [4; 26].	☐
F ist im Intervall [0; 16] positiv gekrümmt (linksgekrümmt).	☐

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $h'(t_{max}) = 0$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$t_{max} = 5{,}673...$
$h(t_{max}) = 157{,}72...$

prozentueller Unterschied zur angegebenen maximalen Höhe:
$\frac{157{,}72... - 140}{140} = 0{,}1265... \approx 12{,}7\ \%$

b) Mit dem Ausdruck wird die gesamte Wassermenge in m^3 berechnet, die innerhalb dieser 48 Stunden den See durch den Abfluss verlassen hat.

F ist monoton steigend im Intervall [4; 26].	☒

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für die richtige Berechnung des prozentuellen Unterschieds

b) 1 × C1: für die richtige Beschreibung im gegebenen Sachzusammenhang mit Angabe der entsprechenden Einheit
1 × C2: für das richtige Ankreuzen

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Fußball*

Aufgabennummer: A_219

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Jedes Wochenende fiebern tausende Zuschauer/innen in den Stadien bei den Spielen der Fußball-Bundesliga mit ihren Mannschaften mit.

a) Um nach der Hälfte der Spiele einer Fußballsaison in der österreichischen Bundesliga die voraussichtliche Punktezahl einer Mannschaft am Saisonende schätzen zu können, wurde folgende Formel entwickelt:

$$P = \frac{T^{1,32}}{T^{1,32} + G^{1,32}} \cdot 36 \cdot 2{,}753$$

T ... geschossene Tore in der ersten Saisonhälfte
G ... erhaltene Tore (Gegentore) in der ersten Saisonhälfte
P ... voraussichtliche Punktezahl am Saisonende

Sturm Graz hat in der Saison 2013/14 in der ersten Saisonhälfte 25 Tore geschossen und 30 Tore erhalten.
Ein Fan will mit der angegebenen Formel die Punktezahl von *Sturm Graz* am Saisonende schätzen und tippt das Folgende in den Taschenrechner ein:

$25^{1,32} : 25^{1,32} + 30^{1,32} \cdot 36 \cdot 2{,}753 = 8\,829{,}9...$

– Beschreiben Sie, welcher Fehler dabei gemacht wurde.

Sturm Graz erreichte in der Saison 2013/14 in der ersten Saisonhälfte 19 Punkte und bis zum Saisonende insgesamt 48 Punkte.

– Überprüfen Sie nachweislich, ob die Punktezahl, die man mit der obigen Formel erhält, in diesem Fall den tatsächlichen Punktestand am Saisonende besser annähert als eine Verdoppelung der Punkte in der ersten Saisonhälfte.

In der Formel zur Berechnung der voraussichtlichen Punktezahl einer Mannschaft am Saisonende kommt der Ausdruck $T^{1,32}$ vor.

– Kreuzen Sie denjenigen Ausdruck an, der zu diesem Ausdruck äquivalent (gleichwertig) ist. *[1 aus 5]*

$T^{\frac{1}{32}}$	☐	$\frac{1}{1{,}32^T}$	☐
$\sqrt[132]{T}$	☐	$\frac{1}{T^{32}}$	☐
$\sqrt[100]{T^{132}}$	☐		

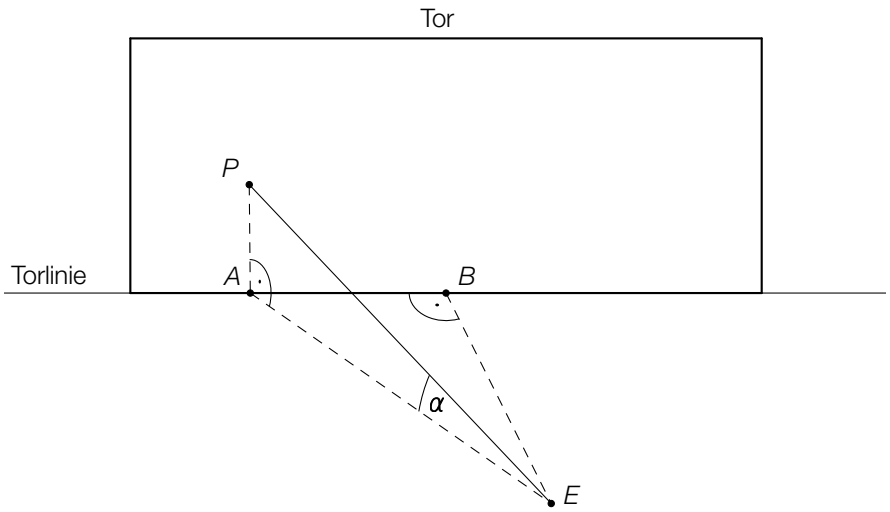
* ehemalige Klausuraufgabe

b) Eine bestimmte Mannschaft verwandelt 80 % der Elfmeter (d. h. erzielt dabei ein Tor).

– Berechnen Sie unter der Annahme einer Binomialverteilung die Wahrscheinlichkeit, dass die Mannschaft genau 4 von 5 Elfmetern verwandelt.

c) Ein Fußballer steht am Elfmeterpunkt E und schießt den Ball unter einem Höhenwinkel von $\alpha = 5°$ ab. Der Ball (vereinfacht als punktförmig angenommen) überfliegt die Torlinie im Punkt P. Aufgrund der hohen Geschwindigkeit des Balls kann seine Flugbahn bis zum Punkt P näherungsweise als geradlinig angenommen werden.

Folgende Entfernungen sind bekannt: $\overline{AB} = 3$ m und $\overline{BE} = 11$ m.



– Berechnen Sie die Länge $\overline{EP}$.

Der Ball erreicht 0,4 Sekunden nach dem Abschuss im Punkt E den Punkt P.

– Berechnen Sie die mittlere Geschwindigkeit des Balls in km/h.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Der Ausdruck $25^{1,32} + 30^{1,32}$ wurde nicht eingeklammert.

Berechnung mithilfe der Formel:
$25^{1,32} : (25^{1,32} + 30^{1,32}) \cdot 36 \cdot 2{,}753 = 43{,}6... \approx 44$
Verdoppelung der Punkte nach der ersten Saisonhälfte: $19 \cdot 2 = 38$
Die Zahl, die mit der Formel berechnet wurde, ist näher an der tatsächlichen Punkteanzahl als die Verdoppelung der Punkte in der ersten Saisonhälfte.

$\sqrt[100]{T^{132}}$	☒

b) $n = 5$ und $p = 0{,}8$
X ... Anzahl der verwandelten Elfmeter
Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$P(X = 4) = 0{,}4096$

c) $\overline{AE}$: $\sqrt{3^2 + 11^2} = \sqrt{130}$

$\overline{EP}$: $\cos(\alpha) = \frac{\overline{AE}}{\overline{EP}} \Rightarrow \overline{EP} = \frac{\sqrt{130}}{\cos(5°)} = 11{,}445...$

$\overline{EP} \approx 11{,}45$ m

$\frac{11{,}44... \text{ m}}{0{,}4 \text{ s}} = 28{,}61... \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 103 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

Lösungsschlüssel

a) 1 × C1: für die richtige Beschreibung, welcher Fehler gemacht wurde
1 × D: für die richtige nachweisliche Überprüfung
1 × C2: für das richtige Ankreuzen

b) 1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit

c) 1 × B1: für die richtige Berechnung der Länge $\overline{EP}$
1 × B2: für die richtige Berechnung der mittleren Geschwindigkeit in km/h

Erfassen der Geschwindigkeit*

Aufgabennummer: A_196

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Auf einer Teststrecke werden Messungen durchgeführt.

a) Die Teststrecke beginnt bei einem Stoppschild. Die Messergebnisse für ein Auto auf dieser Strecke sind in folgender Tabelle angegeben:

	am Stoppschild	Messung 1	Messung 2
Zeit t in min	0	1	2,5
zurückgelegter Weg $s_1(t)$ in km	0	1	3

Der zurückgelegte Weg soll in Abhängigkeit von der Zeit t im Zeitintervall [0; 2,5] durch eine Polynomfunktion s_1 mit $s_1(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c$ beschrieben werden.

– Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten der Funktion s_1.
– Berechnen Sie diese Koeffizienten.

b) Der zurückgelegte Weg eines anderen Autos kann näherungsweise durch die Funktion s_2 beschrieben werden:

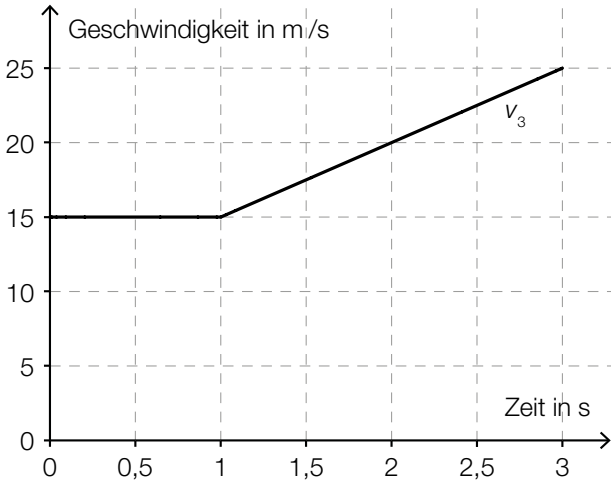
$$s_2(t) = -\frac{1}{3} \cdot t^3 + 2 \cdot t^2 + \frac{1}{3} \cdot t \quad \text{mit} \quad 0 \le t \le 3$$

t ... Zeit in min
$s_2(t)$ ... zurückgelegter Weg zur Zeit t in km

– Überprüfen Sie nachweislich, ob die Geschwindigkeit dieses Autos zu Beginn des angegebenen Zeitintervalls null ist.
– Berechnen Sie, nach welcher Zeit t_0 die Beschleunigung des Autos im angegebenen Zeitintervall null ist.
– Zeigen Sie, dass die Geschwindigkeit zu dieser Zeit t_0 maximal ist.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Die Geschwindigkeit eines anderen Autos kann im Zeitintervall [0; 3] näherungsweise durch die Funktion v_3 beschrieben werden. Der Graph dieser Funktion v_3 ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



– Erstellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Weg-Zeit-Funktion s_3 im Zeitintervall [1; 3] mit $s_3(1) = 15$.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $s_1(0) = 0$
$s_1(1) = 1$
$s_1(2{,}5) = 3$

oder:

$0 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$
$1 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c$
$3 = a \cdot 2{,}5^2 + b \cdot 2{,}5 + c$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$a = \frac{2}{15}$
$b = \frac{13}{15}$
$c = 0$

b) $v_2(t) = s_2'(t) = -t^2 + 4 \cdot t + \frac{1}{3}$
$v_2(0) = \frac{1}{3} \neq 0$

Das Auto hatte zu Beginn des angegebenen Zeitintervalls eine Geschwindigkeit ungleich 0.

$a_2(t) = s_2''(t) = -2 \cdot t + 4$

$a_2(t_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad t_0 = 2$

An der Stelle $t_0 = 2$ gilt:

$v_2'(2) = a_2(2) = 0$

$v_2''(2) = a_2'(2) = -2 < 0$

Daraus folgt, dass die Geschwindigkeit zur Zeit t_0 maximal ist.
Eine Überprüfung der Randstellen ist für die Punktevergabe nicht erforderlich.

c) $v_3(t) = 5 \cdot t + 10$ mit $1 \leq t \leq 3$
Integrieren ergibt:
$s_3(t) = \frac{5}{2} \cdot t^2 + 10 \cdot t + C$
Wegen $s_3(1) = 15$ gilt:
$s_3(t) = \frac{5}{2} \cdot t^2 + 10 \cdot t + \frac{5}{2}$ mit $1 \leq t \leq 3$
t ... Zeit in s
$s_3(t)$ ... zurückgelegter Weg zur Zeit t in m

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Erstellen des Gleichungssystems
1 × B: für die richtige Berechnung der Koeffizienten

b) 1 × D1: für den richtigen Nachweis, dass die Geschwindigkeit ungleich null ist
1 × B: für die richtige Berechnung der Zeit t_0
1 × D2: für den richtigen Nachweis, dass die Geschwindigkeit zur Zeit t_0 maximal ist
Eine Überprüfung der Randstellen ist für die Punktevergabe nicht erforderlich.

c) 1 × A: für das richtige Erstellen der Funktionsgleichung

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Buntes Spielzeug*

Aufgabennummer: A_260

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Spielzeugteile werden von einer Maschine in den Farben Rot, Gelb und Blau eingefärbt.

a) Die 3 zur Produktion notwendigen Farbdüsen arbeiten (unabhängig voneinander) jeweils mit unterschiedlicher Qualität. Die Farbe Rot wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 96,8 %, die Farbe Gelb mit einer Wahrscheinlichkeit von 98,3 % und die Farbe Blau mit einer Wahrscheinlichkeit von 97,2 % so auf die Teile aufgetragen, dass diese die Qualitätskontrolle bestehen.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein zweifärbiges Spielzeugteil in den Farben Rot und Blau die Qualitätskontrolle besteht.
– Beschreiben Sie ein Ereignis E im gegebenen Sachzusammenhang für ein zweifärbiges Spielzeugteil, dessen Wahrscheinlichkeit durch $P(E) = 1 - (0{,}968 \cdot 0{,}983)$ berechnet wird.

b) Die einfärbigen Spielzeugteile einer Produktion werden vermessen und ihre jeweiligen Längen werden tabellarisch erfasst.

rote Spielzeugteile	
Länge in cm	Anzahl
4,5	20
5,6	10
6,0	20
6,5	15
25,3	5

gelbe Spielzeugteile	
Länge in cm	Anzahl
5,5	25
10,0	7
14,5	13

blaue Spielzeugteile	
Länge in cm	Anzahl
7,0	70

– Ermitteln Sie den Median der Längen der gelben Spielzeugteile.
– Zeigen Sie, dass das arithmetische Mittel der Längen der blauen Spielzeugteile gleich groß ist wie das arithmetische Mittel der Längen der roten Spielzeugteile.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

a) E ... zweifärbiger Spielzeugteil in den Farben Rot und Blau besteht die Kontrolle

$P(E) = 0{,}968 \cdot 0{,}972 = 0{,}9408...$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt rund 94,1 %.

E steht in diesem Sachzusammenhang für das Ereignis, dass ein zweifärbiges Spielzeugteil in den Farben Rot und Gelb die Kontrolle nicht besteht.

b) Median der Längen der gelben Spielzeugteile: $\tilde{x} = 5{,}5$ cm

$$\bar{x}_{rot} = \frac{20 \cdot 4{,}5 \text{ cm} + 10 \cdot 5{,}6 \text{ cm} + 20 \cdot 6{,}0 \text{ cm} + 15 \cdot 6{,}5 \text{ cm} + 5 \cdot 25{,}3 \text{ cm}}{70} = 7{,}0 \text{ cm}$$

$\bar{x}_{blau} = 7{,}0$ cm

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit
1 × C: für die richtige Beschreibung des Ereignisses im gegebenen Sachzusammenhang

b) 1 × C: für das richtige Ermitteln des Medians
1 × D: für den richtigen Nachweis

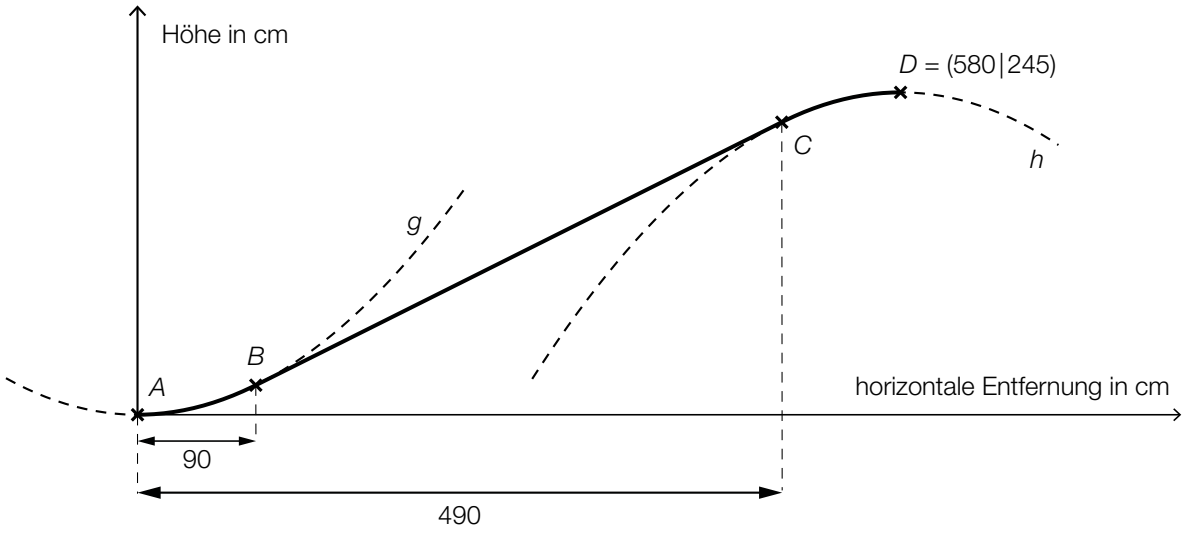
BMB
Bundesministerium
für Bildung

Rolltreppen*

Aufgabennummer: A_259

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Die nachstehende Abbildung zeigt den schematischen Verlauf einer Rolltreppe. Dieser Verlauf setzt sich aus 2 Parabelstücken (Graphen der Funktionen g und h) zwischen den Punkten A und B bzw. C und D sowie einem geradlinig verlaufenden Stück zwischen den Punkten B und C zusammen. Die Übergänge in den Punkten B und C erfolgen knickfrei (das bedeutet, dass die Funktionen an den Stellen, an denen sie zusammenstoßen, den gleichen Funktionswert und die gleiche Steigung haben).



Für die Funktion g gilt:

$g(x) = \frac{1}{360} \cdot x^2$

x ... horizontale Entfernung von der Einstiegsstelle in cm
$g(x)$ ... Höhe an der Stelle x in cm

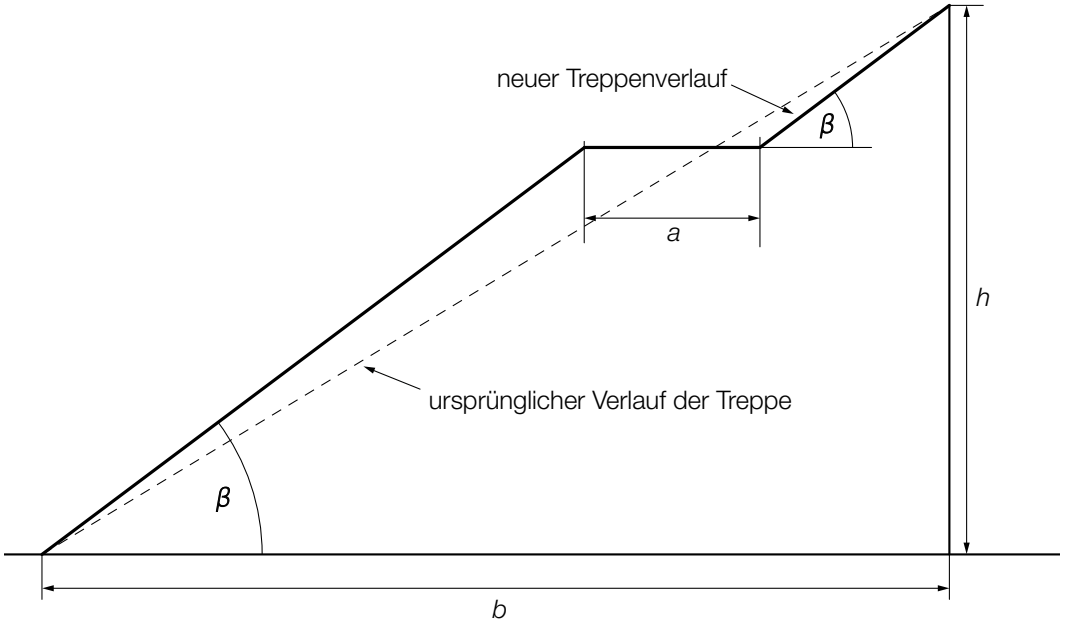
– Zeigen Sie rechnerisch, dass die Funktion g im Punkt B eine Steigung von 50 % aufweist.

Bei der Ausstiegsstelle (Punkt D) verläuft die Rolltreppe waagrecht.

– Stellen Sie ein Gleichungssystem auf, mit dem die Koeffizienten der Funktion h mit $h(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ ermittelt werden können.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Parallel zu einer Rolltreppe verläuft eine Treppe.
Bei der Erneuerung der Treppe soll ein Treppenabsatz eingebaut werden (siehe nachstehende Abbildung).



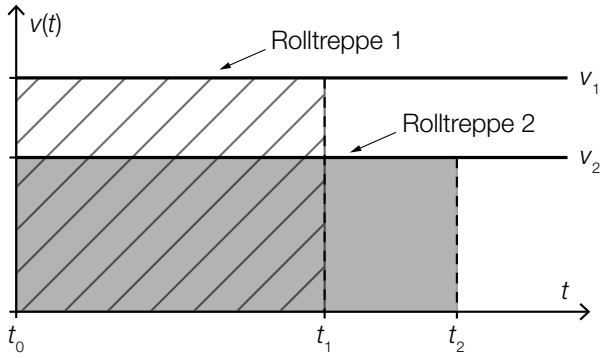
– Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung des Steigungswinkels β aus b, h und a.

$\beta =$ _____

Der Steigungswinkel der ursprünglichen Treppe war kleiner als 45°.

– Erklären Sie, welche Bedingung für a gelten muss, damit auch β kleiner als 45° ist.

c) Im nachstehenden Diagramm sind die Graphen der Geschwindigkeit-Zeit-Funktionen v_1 und v_2 der Stufen zweier Rolltreppen dargestellt.



– Interpretieren Sie, was es im gegebenen Sachzusammenhang bedeutet, dass die beiden gekennzeichneten Flächeninhalte gleich groß sind.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $g'(x) = \frac{1}{180} \cdot x$
$g'(90) = 0{,}5$
Die Steigung beträgt also 50 %.

$h(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$
$h'(x) = 2 \cdot a \cdot x + b$
$h(580) = 245$
$h'(580) = 0$
$h'(490) = 0{,}5$

oder:

$a \cdot 580^2 + b \cdot 580 + c = 245$
$2 \cdot a \cdot 580 + b = 0$
$2 \cdot a \cdot 490 + b = 0{,}5$

b) $\beta = \arctan\left(\frac{h}{b-a}\right)$

Ein Steigungswinkel von genau 45° würde bedeuten, dass h und $b - a$ gleich lang sind.
$h = b - a \quad \Rightarrow \quad a = b - h$
Ist $a < b - h$, so ist der Winkel β kleiner als 45°.

c) Die Stufen von Rolltreppe 1 legen im Zeitintervall $[t_0; t_1]$ den gleichen Weg zurück wie die Stufen von Rolltreppe 2 im Zeitintervall $[t_0; t_2]$.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für den richtigen rechnerischen Nachweis
1 × A1: für das richtige Aufstellen der Gleichung mithilfe der Koordinaten des Punktes D
1 × A2: für das richtige Aufstellen der Gleichungen mithilfe der Informationen zur Steigung

b) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel
1 × D: für die richtige Erklärung

c) 1 × C: für die richtige Interpretation im gegebenen Sachzusammenhang

BMB
Bundesministerium
für Bildung

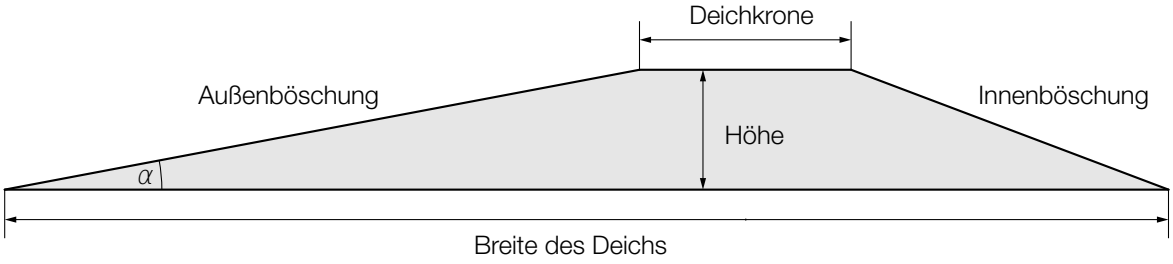
Deiche an der Nordseeküste*

Aufgabennummer: B_425

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Um das Land vor Sturmfluten zu schützen, baut man Schutzwälle, sogenannte Deiche.

a) Auf einer Informationstafel ist ein Deichquerschnitt skizziert (nicht maßstabgetreu). Der Deich hat eine Höhe von 6 m, die Deichkrone ist 5 m breit. Der Inhalt seiner Querschnittsfläche beträgt 192 m^2.



– Berechnen Sie die Breite dieses Deichs.

Die Außenböschung ist 36,5 m lang.

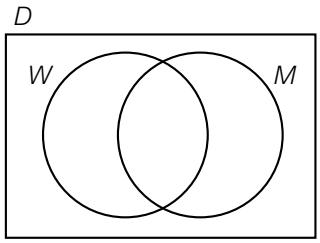
– Bestimmen Sie den Neigungswinkel α der Außenböschung.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) In einer Region werden die Deiche in Deichabschnitte unterteilt.

22 Deichabschnitte werden von Schafen beweidet, aber nicht gemäht.
60 Deichabschnitte werden gemäht, aber nicht von Schafen beweidet.
27 Deichabschnitte werden sowohl von Schafen beweidet als auch gemäht.
19 Deichabschnitte werden gar nicht gepflegt.

D … Menge aller Deichabschnitte
W … Menge der Deichabschnitte, die von Schafen beweidet werden
M … Menge der Deichabschnitte, die gemäht werden



– Kennzeichnen Sie $W \cap M$ im obigen Mengendiagramm.
– Beschreiben Sie die Bedeutung von $W \cap M$ im gegebenen Sachzusammenhang.
– Geben Sie die Menge derjenigen Deichabschnitte, die gar nicht gepflegt werden, in Mengensymbolik an.
– Berechnen Sie, wie viel Prozent der Deichabschnitte gar nicht gepflegt werden.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

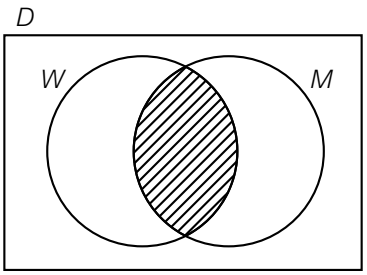
a) $A = \frac{(c + d) \cdot h}{2}$

A ... Inhalt der Querschnittsfläche
c ... Breite der Deichkrone
d ... Breite des Deichs
h ... Höhe

$d = \frac{2 \cdot A}{h} - c = \frac{2 \cdot 192}{6} - 5 = 59$
Der Deich ist 59 m breit.

$\sin(\alpha) = \frac{6}{36{,}5} \Rightarrow \alpha = 9{,}461...°$
Der Winkel α beträgt rund 9,46°.

b)



Das sind die Deichabschnitte, die sowohl von Schafen beweidet als auch gemäht werden.

$D \setminus (W \cup M)$

$19 + 22 + 27 + 60 = 128$

$\frac{19}{128} = 0{,}148... \approx 15\ \%$

Rund 15 % der Deichabschnitte werden gar nicht gepflegt.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für den richtigen Ansatz zur Berechnung der Deichbreite
1 × B1: für die richtige Berechnung der Deichbreite
1 × B2: für das richtige Bestimmen des Neigungswinkels der Außenböschung

b) 1 × C1: für das richtige Kennzeichnen der Schnittmenge
1 × C2: für die richtige Beschreibung im gegebenen Sachzusammenhang
1 × A: für die richtige Angabe in Mengensymbolik
1 × B: für die richtige Berechnung des Prozentsatzes

Wohnungen (2)*

Aufgabennummer: B_424

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Der Fachverband der Immobilien- und Vermögenstreuhänder erstellt Statistiken zu den Trends auf dem Immobilienmarkt. Es werden die ortsüblichen Kaufpreise und Mieten erhoben. Die Höhe der Kaufpreise bzw. der Mieten hängt in der Regel stark von der Größe, der Ausstattung und der Lage der Wohnungen ab.

a) Für eine österreichische Landeshauptstadt hat der Fachverband der Immobilien- und Vermögenstreuhänder die Mietpreise in Euro pro m^2 für Wohnungen bis zu 60 m^2 mit gutem Wohnwert erhoben:

Ende des Jahres ...	Mietpreis in Euro pro m^2
2003	8,10
2004	7,90
2005	8,20
2006	8,50
2007	8,80
2008	9,30
2009	9,60
2010	9,70
2011	10,30
2012	10,80

Der Mietpreis in Euro pro m^2 soll in Abhängigkeit von der Zeit t in Jahren beschrieben werden.

– Ermitteln Sie mithilfe von linearer Regression eine Gleichung der zugehörigen Funktion. Wählen Sie $t = 0$ für das Ende des Jahres 2003.
– Interpretieren Sie den Wert der Steigung dieser Regressionsfunktion im gegebenen Sachzusammenhang.
– Ermitteln Sie mithilfe dieser Regressionsfunktion eine Prognose für den Mietpreis pro m^2 für das Ende des Jahres 2018.

Ein anderes Modell verwendet zur Beschreibung der Mietpreisentwicklung die Funktion B.

$B(t) = 7{,}77 \cdot 1{,}035^t$

t ... Zeit in Jahren ab Ende des Jahres 2003
$B(t)$ ... Mietpreis zur Zeit t in Euro pro m^2

– Interpretieren Sie die Bedeutung des Parameters 1,035 im gegebenen Sachzusammenhang.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Laut einer Erhebung aus dem Jahr 2001 lebten im Bundesland Tirol in 303 632 Wohnungen 661 026 Personen. Die nachstehende Tabelle gibt die Anzahl dieser Wohnungen aufgelistet nach dem Merkmal „Anzahl der Wohnräume“ an.

Anzahl der Wohnräume	Anzahl der Wohnungen
1	19 372
2	28 973
3	61 002
4	80 331
5	56 878
6	57 076
Summe	303 632

– Beschreiben Sie in Worten, was durch folgende Ausdrücke im gegebenen Sachzusammenhang berechnet wird:

(1) $\frac{661\,026}{303\,632} \approx 2{,}18$

(2) $\frac{1 \cdot 19\,372 + 2 \cdot 28\,973 + 3 \cdot 61\,002 + 4 \cdot 80\,331 + 5 \cdot 56\,878 + 6 \cdot 57\,076}{303\,632} \approx 3{,}98$

c) Der durchschnittliche Preis für Eigentumswohnungen mit gutem Wohnwert wurde in einer Landeshauptstadt jeweils am Ende des Jahres erhoben.

Die nachstehende Tabelle gibt die prozentuelle Steigerung des Preises pro m^2 am Ende des Jahres gegenüber dem Preis pro m^2 am Ende des jeweiligen Vorjahres für die Jahre 2009 bis 2013 an.

Ende des Jahres ...	Preissteigerung gegenüber dem Preis pro m^2 am Ende des jeweiligen Vorjahres
2009	5,5 %
2010	1,2 %
2011	7,1 %
2012	6,7 %
2013	5,4 %

Am Ende des Jahres 2013 kostete eine Eigentumswohnung mit gutem Wohnwert durchschnittlich € 3.362 pro m^2.

– Berechnen Sie den durchschnittlichen Preis pro m^2 für eine Eigentumswohnung mit gutem Wohnwert am Ende des Jahres 2010.
– Berechnen Sie die mittlere prozentuelle Preissteigerung pro Jahr für den Zeitraum von Anfang 2009 bis Ende 2013.

d) In einer Landeshauptstadt werden 90 % der Wohnungen als Wohnungen mit mittlerem Wohnwert eingestuft, 10 % der Wohnungen als Wohnungen mit gutem Wohnwert. 20 % der Wohnungen haben eine Größe von weniger als 60 m^2. 16 % aller Wohnungen haben eine Größe von weniger als 60 m^2 und einen mittleren Wohnwert.

– Vervollständigen Sie die nachstehende Vierfeldertafel so, dass sie den beschriebenen Sachverhalt wiedergibt.

	Wohnungsgröße weniger als 60 m^2	Wohnungsgröße mindestens 60 m^2	Summe
mittlerer Wohnwert			
guter Wohnwert			
Summe			

– Weisen Sie nach, dass die Merkmale „Wohnungsgröße“ und „Wohnwert“ (stochastisch) abhängig voneinander sind.
– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Wohnung weniger als 60 m^2 Wohnfläche hat, wenn man weiß, dass sie einen mittleren Wohnwert hat.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Lösung mittels Technologieeinsatz:
$M(t) = 0{,}32 \cdot t + 7{,}69$ (Koeffizienten gerundet)

Die Mietpreise pro m² sind im angegebenen Zeitraum um durchschnittlich rund € 0,32 pro Jahr angestiegen.

$M(15) = 12{,}454... \approx 12{,}45$
Gemäß diesem Modell beträgt der Mietpreis pro m² am Ende des Jahres 2018 rund € 12,45.

Der Änderungsfaktor 1,035 gibt an, dass die Mietpreise pro m² jährlich um 3,5 % steigen.

b) Der Ausdruck (1) gibt die durchschnittliche Anzahl der Personen pro Wohnung (rund 2,18) an.
Der Ausdruck (2) gibt die durchschnittliche Anzahl der Wohnräume pro Wohnung (rund 3,98) an.

c) $\frac{3\,362}{1{,}054 \cdot 1{,}067 \cdot 1{,}071} = 2\,791{,}2... \approx 2\,791$
Der durchschnittliche Preis pro m² für eine Eigentumswohnung mit gutem Wohnwert lag am Ende des Jahres 2010 bei rund € 2.791.

$\sqrt[5]{1{,}055 \cdot 1{,}012 \cdot 1{,}071 \cdot 1{,}067 \cdot 1{,}054} - 1 = 0{,}05158... \approx 0{,}0516$

Die mittlere prozentuelle Preissteigerung pro Jahr beträgt rund 5,16 %.

Die Berechnung des arithmetischen Mittels $\left(\frac{0{,}055 + 0{,}012 + 0{,}071 + 0{,}067 + 0{,}054}{5} = \right.$
$\left. = 0{,}0518$*, also 5,18 %*$\right)$ *ist nicht als richtig zu werten.*

d)

	Wohnungsgröße weniger als 60 m²	Wohnungsgröße mindestens 60 m²	Summe
mittlerer Wohnwert	0,16	0,74	0,90
guter Wohnwert	0,04	0,06	0,10
Summe	0,20	0,80	

Für eine Unabhängigkeit der beiden Merkmale müsste z. B. gelten:
P(„mittlerer Wohnwert und Größe weniger als 60 m²“) =
$= P$(„mittlerer Wohnwert“) $\cdot$ P(„Größe weniger als 60 m²“)

Es gilt jedoch: $0{,}16 \neq 0{,}9 \cdot 0{,}2$

P(„Größe weniger als 60 m²“ | „mittlerer Wohnwert“) $= \frac{0{,}16}{0{,}9} = 0{,}17777... \approx 0{,}1778$

Lösungsschlüssel

a) 1 × B1: für das richtige Ermitteln einer Gleichung der Regressionsfunktion
1 × C1: für die richtige Interpretation des Werts der Steigung im gegebenen Sachzusammenhang
1 × B2: für das richtige Ermitteln der Prognose für das Ende des Jahres 2018
1 × C2: für die richtige Interpretation des Werts 1,035 im gegebenen Sachzusammenhang

b) 1 × C1: für die richtige Beschreibung von Ausdruck (1) im gegebenen Sachzusammenhang
1 × C2: für die richtige Beschreibung von Ausdruck (2) im gegebenen Sachzusammenhang

c) 1 × B1: für die richtige Berechnung des Preises pro m^2 am Ende des Jahres 2010
1 × B2: für die richtige Berechnung der mittleren prozentuellen Preissteigerung pro Jahr

d) 1 × A: für das richtige Vervollständigen der Vierfeldertafel
1 × D: für den richtigen Nachweis der Abhängigkeit der Merkmale
1 × B: für die richtige Berechnung der bedingten Wahrscheinlichkeit

Wohnungen (1)*

Aufgabennummer: B_423

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Der Fachverband der Immobilien- und Vermögenstreuhänder erstellt Statistiken zu den Trends auf dem Immobilienmarkt. Es werden die ortsüblichen Kaufpreise und Mieten erhoben. Die Höhe der Kaufpreise bzw. der Mieten hängt in der Regel stark von der Größe, der Ausstattung und der Lage der Wohnungen ab.

a) Für eine österreichische Landeshauptstadt hat der Fachverband der Immobilien- und Vermögenstreuhänder die Mietpreise in Euro pro m^2 für Wohnungen bis zu 60 m^2 mit gutem Wohnwert erhoben:

Ende des Jahres ...	Mietpreis in Euro pro m^2
2003	8,10
2004	7,90
2005	8,20
2006	8,50
2007	8,80
2008	9,30
2009	9,60
2010	9,70
2011	10,30
2012	10,80

Der Mietpreis in Euro pro m^2 soll in Abhängigkeit von der Zeit t in Jahren beschrieben werden.

– Ermitteln Sie mithilfe von linearer Regression eine Gleichung der zugehörigen Funktion. Wählen Sie $t = 0$ für das Ende des Jahres 2003.
– Interpretieren Sie den Wert der Steigung dieser Regressionsfunktion im gegebenen Sachzusammenhang.
– Ermitteln Sie mithilfe dieser Regressionsfunktion eine Prognose für den Mietpreis pro m^2 für das Ende des Jahres 2018.

Ein anderes Modell verwendet zur Beschreibung der Mietpreisentwicklung die Funktion B.

$B(t) = 7{,}77 \cdot 1{,}035^t$

t ... Zeit in Jahren ab Ende des Jahres 2003
$B(t)$ ... Mietpreis zur Zeit t in Euro pro m^2

– Interpretieren Sie die Bedeutung des Parameters 1,035 im gegebenen Sachzusammenhang.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Laut einer Erhebung aus dem Jahr 2001 lebten im Bundesland Tirol in 303 632 Wohnungen 661 026 Personen. Die nachstehende Tabelle gibt die Anzahl dieser Wohnungen aufgelistet nach dem Merkmal „Anzahl der Wohnräume“ an.

Anzahl der Wohnräume	Anzahl der Wohnungen
1	19 372
2	28 973
3	61 002
4	80 331
5	56 878
6	57 076
Summe	303 632

– Beschreiben Sie in Worten, was durch folgende Ausdrücke im gegebenen Sachzusammenhang berechnet wird:

(1) $\frac{661\,026}{303\,632} \approx 2{,}18$

(2) $\frac{1 \cdot 19\,372 + 2 \cdot 28\,973 + 3 \cdot 61\,002 + 4 \cdot 80\,331 + 5 \cdot 56\,878 + 6 \cdot 57\,076}{303\,632} \approx 3{,}98$

c) Der durchschnittliche Preis für Eigentumswohnungen mit gutem Wohnwert wurde in einer Landeshauptstadt jeweils am Ende des Jahres erhoben.

Die nachstehende Tabelle gibt die prozentuelle Steigerung des Preises pro m^2 am Ende des Jahres gegenüber dem Preis pro m^2 am Ende des jeweiligen Vorjahres für die Jahre 2009 bis 2013 an.

Ende des Jahres ...	Preissteigerung gegenüber dem Preis pro m^2 am Ende des jeweiligen Vorjahres
2009	5,5 %
2010	1,2 %
2011	7,1 %
2012	6,7 %
2013	5,4 %

Am Ende des Jahres 2013 kostete eine Eigentumswohnung mit gutem Wohnwert durchschnittlich € 3.362 pro m^2.

– Berechnen Sie den durchschnittlichen Preis pro m^2 für eine Eigentumswohnung mit gutem Wohnwert am Ende des Jahres 2010.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Lösung mittels Technologieeinsatz:
$M(t) = 0{,}32 \cdot t + 7{,}69$ (Koeffizienten gerundet)

Die Mietpreise pro m² sind im angegebenen Zeitraum um durchschnittlich rund € 0,32 pro Jahr angestiegen.

$M(15) = 12{,}454... \approx 12{,}45$
Gemäß diesem Modell beträgt der Mietpreis pro m² am Ende des Jahres 2018 rund € 12,45.

Der Änderungsfaktor 1,035 gibt an, dass die Mietpreise pro m² jährlich um 3,5 % steigen.

b) Der Ausdruck (1) gibt die durchschnittliche Anzahl der Personen pro Wohnung (rund 2,18) an.
Der Ausdruck (2) gibt die durchschnittliche Anzahl der Wohnräume pro Wohnung (rund 3,98) an.

c) $\frac{3\,362}{1{,}054 \cdot 1{,}067 \cdot 1{,}071} = 2\,791{,}2... \approx 2\,791$
Der durchschnittliche Preis pro m² für eine Eigentumswohnung mit gutem Wohnwert lag am Ende des Jahres 2010 bei rund € 2.791.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B1: für das richtige Ermitteln einer Gleichung der Regressionsfunktion
1 × C1: für die richtige Interpretation des Werts der Steigung im gegebenen Sachzusammenhang
1 × B2: für das richtige Ermitteln der Prognose für das Ende des Jahres 2018
1 × C2: für die richtige Interpretation des Werts 1,035 im gegebenen Sachzusammenhang

b) 1 × C1: für die richtige Beschreibung von Ausdruck (1) im gegebenen Sachzusammenhang
1 × C2: für die richtige Beschreibung von Ausdruck (2) im gegebenen Sachzusammenhang

c) 1 × B: für die richtige Berechnung des Preises pro m² am Ende des Jahres 2010

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Benutzerfreundlichkeit von Websites*

Aufgabennummer: B_422

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Ein für die Zeitoptimierung wichtiges Kriterium ist die Anzahl der Buttons, die auf einer Internetseite angeklickt werden können.

Das *Gesetz von Hick* beschreibt die Zeit, die man benötigt, um sich für einen von n Buttons zu entscheiden:

$t(n) = a + b \cdot \log_2(n)$

n ... Anzahl der Buttons
$t(n)$ ... Entscheidungszeit bei n Buttons in Millisekunden (ms)
a, b ... positive Konstanten in ms

– Ermitteln Sie anhand des Gesetzes von Hick, um wie viel sich die Entscheidungszeit vergrößert, wenn man die Anzahl der Buttons n verdoppelt.

b) Die Anzahl der täglichen Zugriffe auf eine bestimmte Website kann als annähernd normalverteilt angenommen werden. Eine Zufallsstichprobe von 10 Werten wurde erhoben:

9730	9932	8960	10488	9842	10340	10234	9549	9751	10190

– Berechnen Sie das arithmetische Mittel und die Standardabweichung dieser Zufallsstichprobe.
– Bestimmen Sie das 95-%-Konfidenzintervall für den Erwartungswert μ der Normalverteilung.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

a) Entscheidungszeit bei Verdoppelung der Anzahl der Buttons:

$$t(2 \cdot n) = a + b \cdot \underbrace{\log_2(2 \cdot n)}_{= \log_2(2) + \log_2(n) = 1 + \log_2(n)} = a + b \cdot \left[1 + \log_2(n)\right] = a + b + b \cdot \log_2(n) = b + \underbrace{a + b \cdot \log_2(n)}_{= t(n)} = b + t(n)$$

Die Entscheidungszeit erhöht sich um b Millisekunden.

b) Berechnung mittels Technologieeinsatz:
arithmetisches Mittel: $\bar{x} = 9\,901{,}6$
Stichprobenstandardabweichung: $s_{n-1} = 446{,}87\ldots$

$$\mu_u = \bar{x} - t_{n-1;0{,}975} \cdot \frac{s_{n-1}}{\sqrt{n}} = 9901{,}6 - 2{,}262\ldots \cdot \frac{446{,}87\ldots}{\sqrt{10}} = 9581{,}9\ldots$$

$$\mu_o = \bar{x} + t_{n-1;0{,}975} \cdot \frac{s_{n-1}}{\sqrt{n}} = 9901{,}6 + 2{,}262\ldots \cdot \frac{446{,}87\ldots}{\sqrt{10}} = 10221{,}2\ldots$$

95-%-Konfidenzintervall für den Erwartungswert: [9582; 10221]

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für die richtige Ermittlung der Erhöhung der Entscheidungszeit

b) 1 × B1: für die richtige Berechnung des arithmetischen Mittels und der Stichprobenstandardabweichung
1 × A: für die Verwendung des richtigen Modells des Konfidenzintervalls (t-Verteilung)
1 × B2: für die richtige Bestimmung des Konfidenzintervalls

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Grenzkosten und Grenzerlös*

Aufgabennummer: B_421

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Die Produktionskosten eines Unternehmens lassen sich näherungsweise durch die folgende Kostenfunktion K beschreiben:

$K(x) = 0{,}001 \cdot x^3 - 0{,}115 \cdot x^2 + 5{,}2 \cdot x + 50$

x ... Produktionsmenge in Mengeneinheiten (ME)
$K(x)$ ... Kosten bei der Produktionsmenge x in Geldeinheiten (GE)

– Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate von K, wenn die Produktion von 20 ME auf 25 ME erhöht wird.
– Berechnen Sie die Grenzkosten bei einer Produktion von 20 ME.
– Interpretieren Sie diesen Grenzkostenwert im gegebenen Sachzusammenhang.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Um für eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion K mit $K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ das Betriebsoptimum zu ermitteln, wurde folgende Rechnung angesetzt:

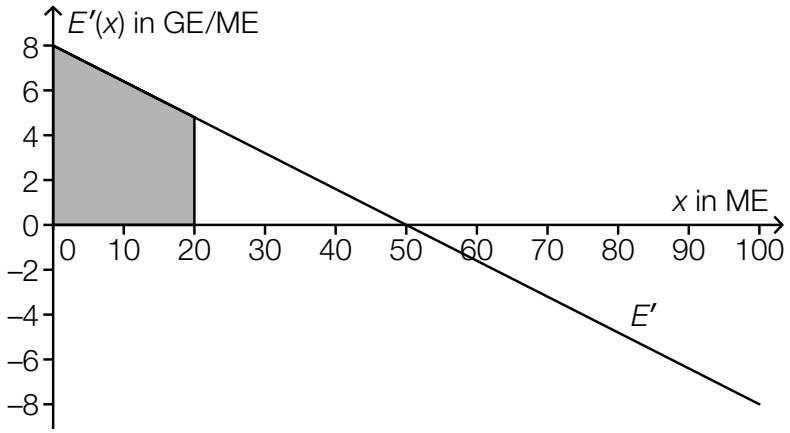
$$\frac{K(x)}{x} = a \cdot x^2 + b \cdot x + c + \frac{d}{x}$$

$$\left(\frac{K(x)}{x}\right)' = 2 \cdot a \cdot x + b + \frac{d}{x}$$

Dabei ist die Berechnung der Ableitungsfunktion fehlerhaft.

– Stellen Sie die Berechnung der Ableitungsfunktion richtig.

c) In der nachstehenden Abbildung ist der Graph einer linearen Grenzerlösfunktion E' dargestellt.



– Stellen Sie eine Gleichung von E' auf.
– Berechnen Sie den Inhalt der markierten Fläche.
– Interpretieren Sie unter Angabe der entsprechenden Einheit den Inhalt der markierten Fläche im gegebenen Sachzusammenhang.
– Interpretieren Sie die Bedeutung der Nullstelle von E' in Bezug auf die zugehörige Erlösfunktion E im gegebenen Sachzusammenhang.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $\frac{K(25) - K(20)}{25 - 20} = \frac{123{,}75 - 116}{5} = \frac{7{,}75}{5} = 1{,}55$

Die mittlere Änderungsrate von K im Intervall [20 ME; 25 ME] beträgt 1,55 GE/ME.

$K'(x) = 0{,}003 \cdot x^2 - 0{,}23 \cdot x + 5{,}2$
$K'(20) = 1{,}8$

Die Grenzkosten bei einer Produktion von 20 ME betragen 1,8 GE/ME.

Bei einer Produktionsmenge von 20 ME führt eine Steigerung der Produktion um 1 ME zu einer Kostensteigerung von näherungsweise 1,8 GE.

b) $\left(\frac{K(x)}{x}\right)' = 2 \cdot a \cdot x + b - \frac{d}{x^2}$

c) $E'(x) = -\frac{8}{50} \cdot x + 8$

$E'(20) = 4{,}8$

$A = \frac{(8 + 4{,}8) \cdot 20}{2} = 128$

Bei 20 abgesetzten ME beträgt der Erlös 128 GE.
Bei 50 abgesetzten ME ist der Erlös maximal.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B1: für die richtige Berechnung der mittleren Änderungsrate
1 × B2: für die richtige Berechnung der Grenzkosten
1 × C: für die richtige Interpretation im gegebenen Sachzusammenhang

b) 1 × B: für das Richtigstellen der Berechnung der Ableitungsfunktion

c) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Grenzerlösfunktion
1 × B: für die richtige Berechnung des Flächeninhalts
1 × C1: für die richtige Interpretation des Inhalts der markierten Fläche im gegebenen Sachzusammenhang mit Angabe der Einheit
1 × C2: für die richtige Interpretation der Nullstelle von E' in Bezug auf die Erlösfunktion E im gegebenen Sachzusammenhang

BMB
Bundesministerium
für Bildung

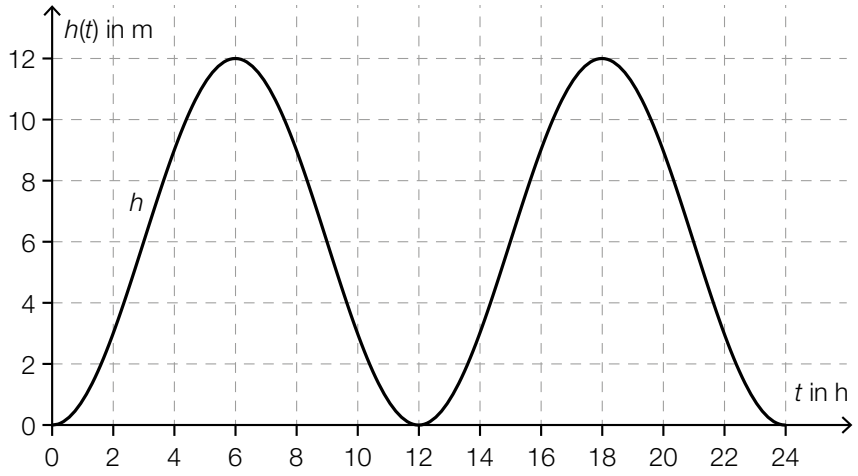
Ebbe und Flut*

Aufgabennummer: B_414

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ebbe und Flut beeinflussen die Höhe des Meeresspiegels.

a) Der tiefste Wasserstand wird als Niedrigwasser bezeichnet. Die zeitliche Abhängigkeit der Höhe des Wasserstands über diesem Wert kann näherungsweise durch eine Funktion h mit $h(t) = A + B \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$ beschrieben werden. Dabei ist t die Zeit in Stunden und $B > 0$.



– Lesen Sie aus dem obigen Diagramm die Parameter A und B ab.
– Bestimmen Sie mithilfe des obigen Diagramms den Parameter ω.
– Bestimmen Sie mithilfe des obigen Diagramms den Parameter φ.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Die Wassertiefe in einem Hafenbecken kann näherungsweise durch die folgende Funktion H beschrieben werden:

$H(t) = 6 + 1{,}8 \cdot \cos(0{,}507 \cdot t)$

t ... Zeit nach Mitternacht in h
$H(t)$ ... Wassertiefe zur Zeit t in m

– Interpretieren Sie die Bedeutung der Zahl 6 im gegebenen Sachzusammenhang.
– Berechnen Sie die Wassertiefe um 8:20 Uhr morgens.
– Geben Sie an, welche Zeitpunkte im gegebenen Sachzusammenhang durch die Lösungen der Gleichung $H'(t) = 0$ berechnet werden.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $A = 6$, $B = 6$
(keine Ablesetoleranz)

Die Periodendauer T ist 12, daher ergibt sich:

$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} = \frac{2 \cdot \pi}{12} = \frac{\pi}{6}$

$t_0 = 3$ h und $\varphi = -t_0 \cdot \omega$, daher ergibt sich:

$\varphi = -\frac{\pi}{2}$

(*Jeder Wert* $\varphi = -\frac{\pi}{2} + 2 \cdot k \cdot \pi$ *mit* $k \in \mathbb{Z}$ *ist als richtig zu werten.)*

b) Im Durchschnitt beträgt die Wassertiefe im Hafenbecken 6 m.

8:20 Uhr entspricht $t = \frac{25}{3}$
$H\left(\frac{25}{3}\right) = 5{,}15...$

Die Wassertiefe um 8:20 Uhr beträgt rund 5,2 m.
Man berechnet diejenigen Zeitpunkte (in h nach Mitternacht), zu denen der Wasserstand maximal bzw. minimal ist.

Lösungsschlüssel

a) 1 × C: für das richtige Ablesen von A und B
1 × B1: für das richtige Bestimmen von ω
1 × B2: für das richtige Bestimmen von φ

b) 1 × C1: für die richtige Interpretation der Zahl 6 im gegebenen Sachzusammenhang
1 × B: für die richtige Berechnung der Wassertiefe um 8:20 Uhr morgens
1 × C2: für die richtige Beschreibung im gegebenen Sachzusammenhang

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Sport und Gesundheit*

Aufgabennummer: B_254

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Die Höhe eines Golfballs über dem horizontalen Boden in Abhängigkeit von der Zeit seit dem Abschlag kann näherungsweise durch eine Funktion h beschrieben werden:

$$h(t) = v_0 \cdot \sin(\alpha) \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2$$

t ... Zeit seit dem Abschlag in s
$h(t)$ ... Höhe des Golfballs über dem Boden zur Zeit t in m
v_0 ... Abschlaggeschwindigkeit in m/s
α ... Abschlagwinkel
g ... Erdbeschleunigung in m/s² (konstant)

– Zeigen Sie, dass der Golfball zur Zeit $t = \frac{v_0 \cdot \sin(\alpha)}{g}$ die maximale Höhe über dem Boden erreicht.
– Berechnen Sie für $v_0 = 60$ m/s, $\alpha = 30°$ und $g = 9{,}81$ m/s² denjenigen Zeitpunkt, zu dem der Golfball wieder auf dem Boden aufkommt.

Die Schlagweite w (in m) kann mithilfe der folgenden Formel berechnet werden:

$$w = \frac{v_0^2}{g} \cdot \sin(2 \cdot \alpha)$$

– Argumentieren Sie ausgehend von dieser Formel, dass bei konstanter Abschlaggeschwindigkeit v_0 die Schlagweite maximal ist, wenn $\alpha = 45°$ beträgt.
– Geben Sie an, wie sich die Schlagweite bei konstantem Abschlagwinkel α verändert, wenn man die Abschlaggeschwindigkeit v_0 verdreifacht.

b) Die *Vitalkapazität* ist eine Kenngröße für die Funktion der Lunge.

Ein sportmedizinisches Institut berechnet den Sollwert der Vitalkapazität eines erwachsenen Mannes mithilfe folgender Formel:

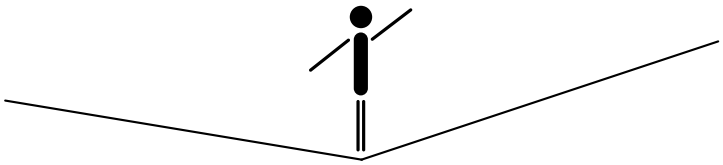
$$V_m = (27{,}63 - 0{,}112 \cdot x) \cdot y$$

V_m ... Sollwert der Vitalkapazität in cm³
x ... Alter in Jahren
y ... Körpergröße in cm

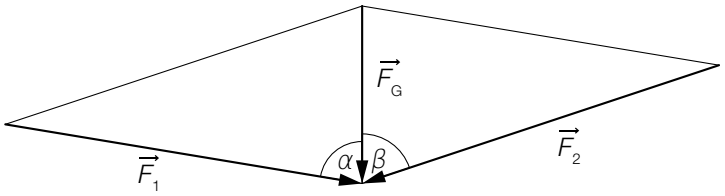
– Ermitteln Sie, um wie viel Liter der Sollwert der Vitalkapazität eines 180 cm großen erwachsenen Mannes in einem Zeitraum von 10 Jahren sinkt.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) *Slacklinen* ist eine Trendsportart, bei der man auf einem gespannten Gurtband, der sogenannten *Slackline*, balanciert.
Eine Slackline wird über einen See gespannt. Ein sportlicher Badegast versucht, über die Slackline den See zu queren, ohne dabei ins Wasser zu fallen.



Das zugehörige Kräfteparallelogramm ist nachfolgend dargestellt:



$\overrightarrow{F_G}$ ... Gewichtskraft der Person auf dem Seil
$\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ ... Seilkräfte

Im Folgenden wird für Kräfte die Schreibweise $|\vec{F}| = F$ verwendet.

– Berechnen Sie F_2 für $F_G = 588{,}6$ Newton, $\alpha = 82°$ und $\beta = 75°$.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $h'(t) = v_0 \cdot \sin(\alpha) - g \cdot t$

$h'(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \dfrac{v_0 \cdot \sin(\alpha)}{g}$

(Da es sich beim Graphen der Funktion h *um eine nach unten geöffnete Parabel handelt, muss der Nachweis, dass es sich dabei um eine Maximumstelle handelt, z. B. mithilfe der 2. Ableitung, nicht erbracht werden.)*

$0 = 60 \cdot \sin(30°) \cdot t - \dfrac{9{,}81}{2} \cdot t^2$

Lösung mittels Technologieeinsatz:

$(t_1 = 0)$, $t_2 = 6{,}11...$

Der Golfball kommt nach etwa 6,1 s wieder auf dem Boden auf.

Die Wurfweite ist umso größer, je größer $\sin(2 \cdot \alpha)$ ist; der maximale Wert dieses Ausdrucks ist 1:

$\sin(2 \cdot \alpha) = 1 \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot \alpha = 90° \quad \Rightarrow \quad \alpha = 45°$

Die Schlagweite ist bei dreifacher Abschlaggeschwindigkeit 9-mal so groß.

b) Der Sollwert der Vitalkapazität sinkt um $0{,}112 \cdot 10 \cdot 180\ \text{cm}^3 = 0{,}2016$ L.

c) $F_2 = \dfrac{588{,}6 \cdot \sin(82°)}{\sin(23°)} = 1\,491{,}7...$

$F_2 \approx 1\,492$ N

Lösungsschlüssel

a) 1 × D1: für den richtigen Nachweis zur maximalen Höhe
1 × B: für die richtige Berechnung des Zeitpunkts
1 × D2: für die richtige Argumentation
1 × C: für die richtige Beschreibung

b) 1 × B: für das richtige Ermitteln desjenigen Wertes, um den der Sollwert der Vitalkapazität sinkt
1 × A: für das richtige Übertragen des Ergebnisses in die Einheit Liter

c) 1 × B: für die richtige Berechnung von F_2

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Bügeleisen*

Aufgabennummer: B_217

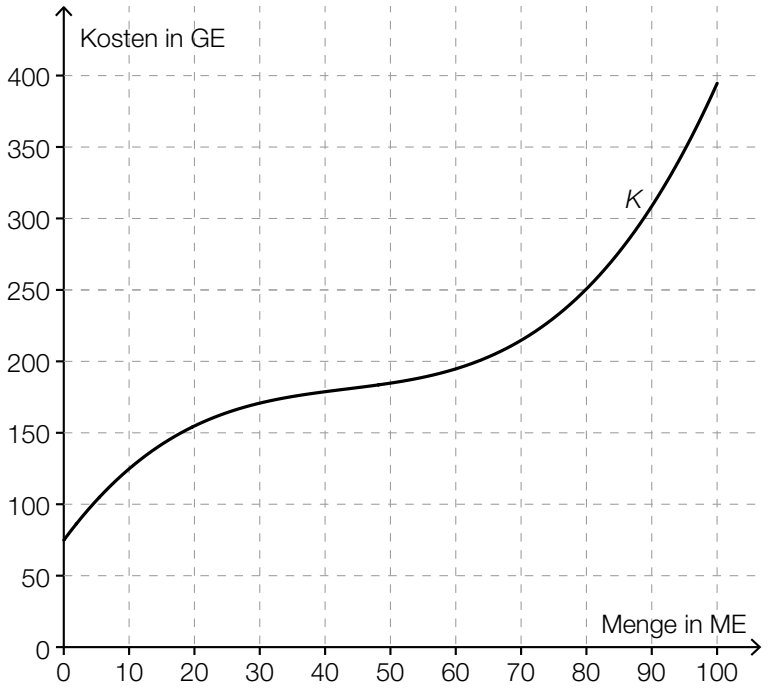
Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein Unternehmen stellt Bügeleisen her. Die Produktionskosten lassen sich näherungsweise durch die folgende Funktion K beschreiben:

$K(x) = 0{,}001 \cdot x^3 - 0{,}13 \cdot x^2 + 6{,}2 \cdot x + 75$ mit $x \geq 0$

x ... Produktionsmenge in Mengeneinheiten (ME)
$K(x)$ ... Kosten bei der Produktionsmenge x in Geldeinheiten (GE)

a) Im nachstehenden Koordinatensystem ist der Graph der Kostenfunktion K dargestellt.



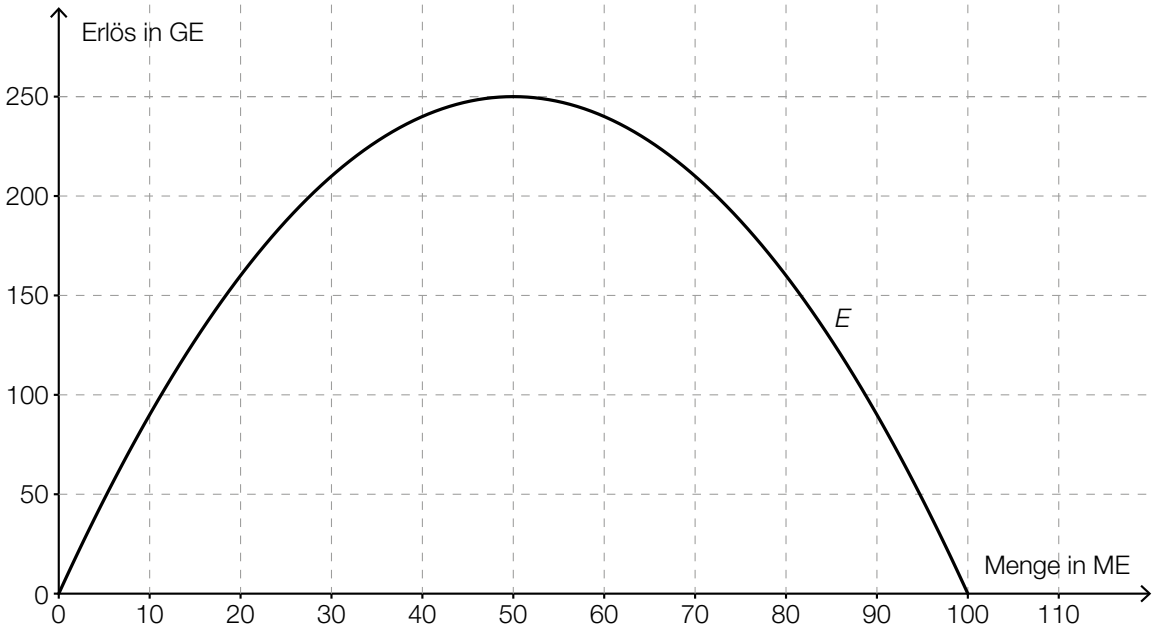
Ein Kostenverlauf heißt in einem Bereich degressiv, wenn der Graph der zugehörigen Kostenfunktion in diesem Bereich negativ gekrümmt (rechtsgekrümmt) ist.

– Lesen Sie aus der obigen Grafik den gesamten Bereich ab, in dem der Kostenverlauf degressiv ist.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) – Ermitteln Sie diejenige Produktionsmenge, bei der die Stückkosten (Durchschnittskosten) minimal sind.
– Zeigen Sie, dass bei dieser Produktionsmenge die Stückkosten (Durchschnittskosten) gleich den Grenzkosten sind.

c) Der Graph der Erlösfunktion E mit $E(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x$ für den Absatz von Bügeleisen ist in der nachstehenden Grafik dargestellt.



– Argumentieren Sie mithilfe des Funktionsgraphen, dass der Koeffizient a negativ sein muss.
– Stellen Sie mithilfe der obigen Grafik eine Gleichung dieser Erlösfunktion auf.
– Berechnen Sie, für welche Produktionsmengen ein Gewinn in Höhe von 50 GE erzielt werden kann, wenn die oben definierte Kostenfunktion K zugrunde gelegt wird.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Im Intervall [0; 43] ist der Kostenverlauf degressiv.
Toleranzbereich der oberen Grenze: [40; 50]

b) $\overline{K}(x) = \frac{K(x)}{x} = 0{,}001 \cdot x^2 - 0{,}13 \cdot x + 6{,}2 + \frac{75}{x}$

$\overline{K}'(x) = 0{,}002 \cdot x - 0{,}13 - \frac{75}{x^2}$
$\overline{K}'(x_{opt}) = 0$

Lösung mittels Technologieeinsatz: $x_{opt} = 72{,}19...$
Bei einer Produktion von rund 72,2 ME sind die Stückkosten minimal.

$\overline{K}(x_{opt}) = K'(x_{opt})$
minimale Stückkosten bei dieser Produktionsmenge: $\overline{K}(72{,}2) = 3{,}06...$
Grenzkosten bei dieser Produktionsmenge: $K'(72{,}2) = 3{,}06...$

Auch ein allgemeiner Nachweis ist zulässig.

c) Der Koeffizient *a* muss negativ sein, weil der Funktionsgraph eine nach unten geöffnete Parabel ist.

$E(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x$
$E(100) = 0$
$E(50) = 250$

Lösung mittels Technologieeinsatz:
$E(x) = -0{,}1 \cdot x^2 + 10 \cdot x$

$G(x) = E(x) - K(x) = -0{,}1 \cdot x^2 + 10 \cdot x - (0{,}001 \cdot x^3 - 0{,}13 \cdot x^2 + 6{,}2 \cdot x + 75)$
$G(x) = -0{,}001 \cdot x^3 + 0{,}03 \cdot x^2 + 3{,}8 \cdot x - 75$

$G(x) = 50$

Lösung mittels Technologieeinsatz:
$x_1 = 34{,}17...$, $x_2 = 58{,}42...$
Bei einer Produktion von rund 34,2 ME bzw. rund 58,4 ME kann jeweils ein Gewinn von 50 GE erzielt werden.

Lösungsschlüssel

a) 1 × C: für das richtige Ablesen des gesamten Bereichs, in dem der Kostenverlauf degressiv ist

b) 1 × B: für die richtige Berechnung der Produktionsmenge, bei der die Stückkosten minimal sind
1 × D: für den richtigen Nachweis
Auch ein allgemeiner Nachweis ist zulässig.

c) 1 × D: für die richtige Argumentation mithilfe des Funktionsgraphen
1 × A: für das richtige Aufstellen der Gleichung der Erlösfunktion
1 × B: für die richtige Berechnung

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Servomotor*

Aufgabennummer: B_213

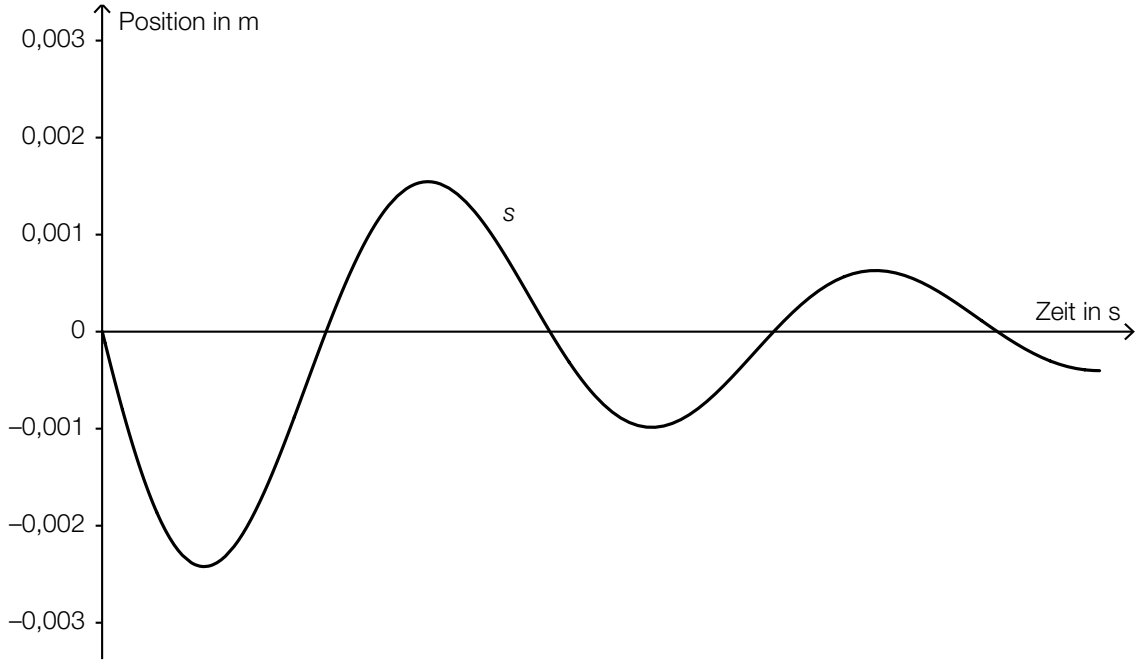
Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Ein Servomotor steuert die Bewegung eines Bauteils. Diese kann näherungsweise durch folgende Funktion s beschrieben werden:

$s(t) = -0{,}003 \cdot e^{-t} \cdot \sin(7 \cdot t)$ mit $t \geq 0$

t ... Zeit in Sekunden (s)
$s(t)$ ... Position des Bauteils bezogen auf die Ausgangslage zum Zeitpunkt t in Metern (m)

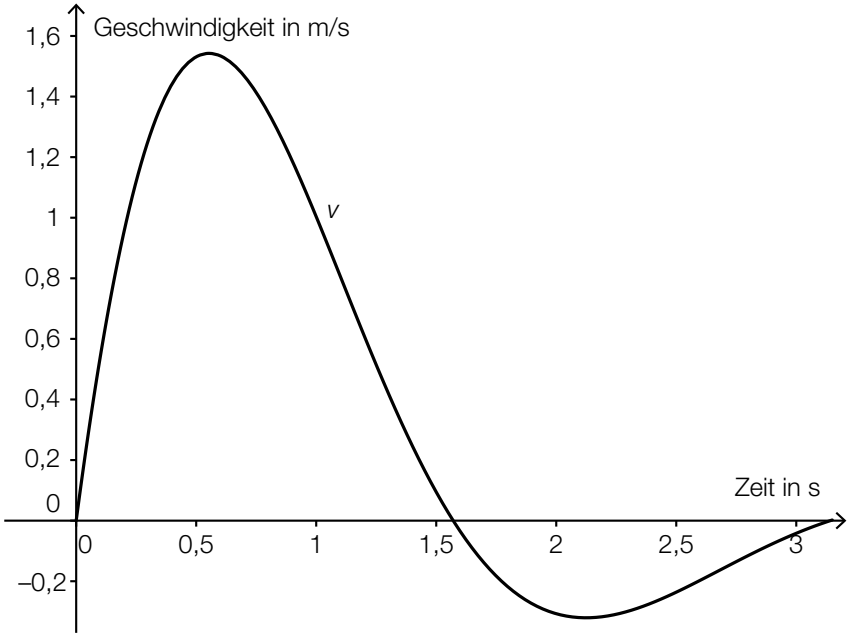
Der Graph der Funktion s ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



– Markieren Sie die Stelle $t = \frac{\pi}{7}$ in der obigen Abbildung.
– Interpretieren Sie die Stelle $t = \frac{\pi}{7}$ im gegebenen Sachzusammenhang.
– Bestimmen Sie denjenigen Zeitpunkt dieser Bewegung, zu dem die Geschwindigkeit erstmals null beträgt.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Ein Werkstück wird von einem Servomotor auf einem geradlinigen Förderband vor- und zurückbewegt. Das zugehörige Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.

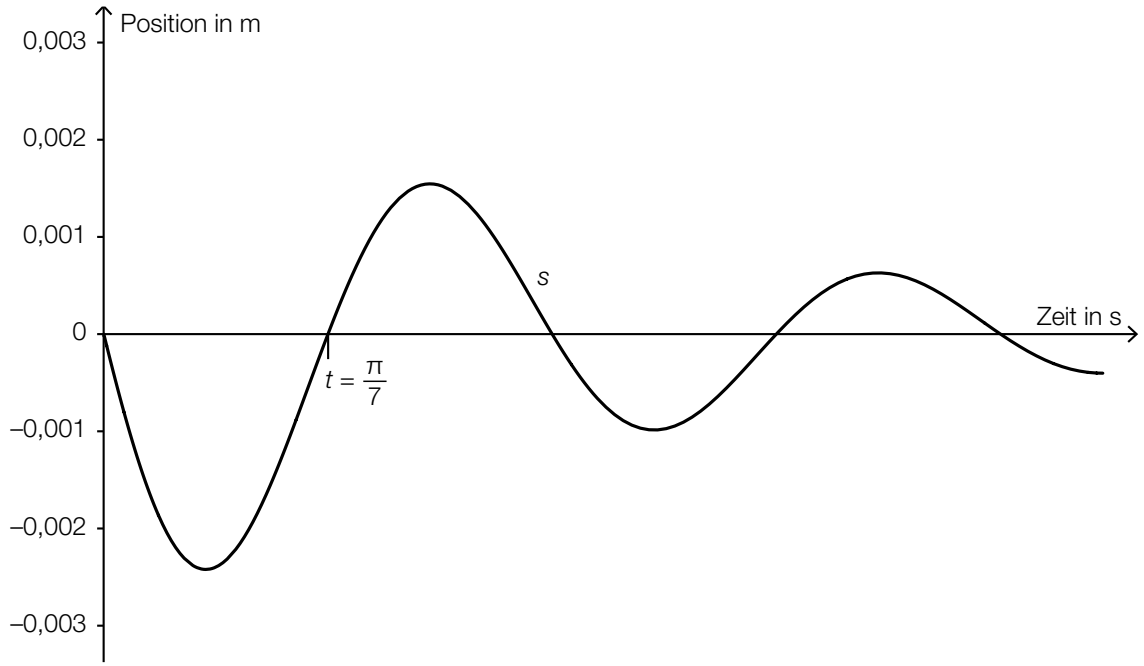


– Markieren Sie in der obigen Abbildung das gesamte Zeitintervall, in dem die Beschleunigung negativ ist.
– Erklären Sie anhand der obigen Abbildung, warum die Position des Werkstücks am Ende der Bewegung nicht der Position am Anfang der Bewegung entspricht.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)

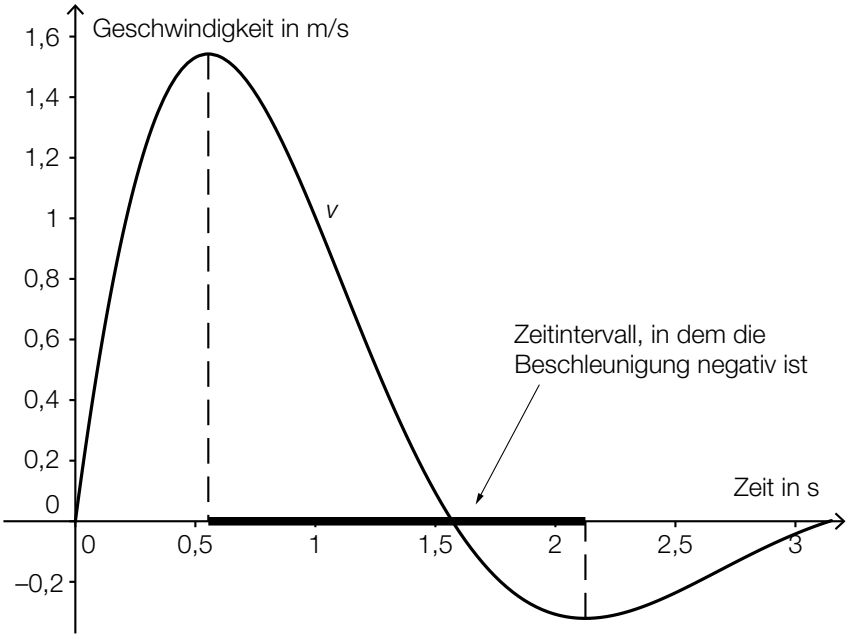


Nach $\frac{\pi}{7}$ Sekunden befindet sich das Bauteil erstmals wieder in der Ausgangslage.

Zeitpunkte mit Geschwindigkeit 0 ergeben sich aus: $s'(t) = 0$.

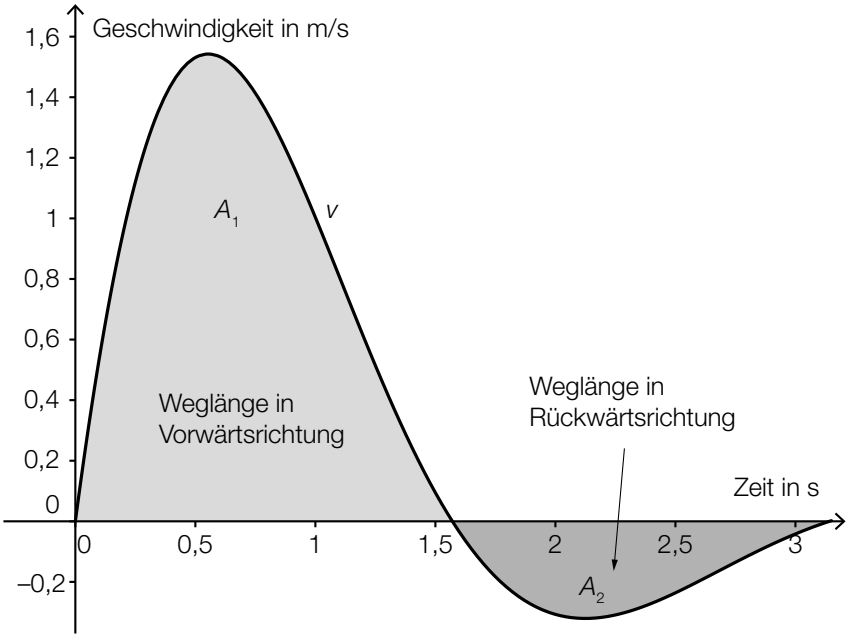
Lösung mittels Technologieeinsatz (für den ersten Zeitpunkt mit $s'(t) = 0$):
$t = 0{,}204...$
Nach etwa 0,20 Sekunden ist die Geschwindigkeit erstmals null.

b)



Da der Flächeninhalt oberhalb der Zeitachse (= Weglänge in Vorwärtsrichtung) deutlich größer ist als jener unterhalb der Zeitachse (= Weglänge in Rückwärtsrichtung), befindet sich das Werkstück am Ende der Bewegung nicht wieder in der Ausgangsposition.

oder:



$A_1 > A_2$

Lösungsschlüssel

a) 1 × C1: für das richtige Markieren der Stelle $t = \frac{\pi}{7}$
1 × C2: für die richtige Interpretation im gegebenen Sachzusammenhang
1 × B: für die richtige Bestimmung der ersten Extremstelle von s

b) 1 × C: für das richtige Markieren des Zeitintervalls zwischen den Extremstellen
1 × D: für die richtige Erklärung

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Statuen und Skulpturen (2)*

Aufgabennummer: B_390

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Das Maria-Theresien-Denkmal in Wien wird vermessen. Es werden die Höhenwinkel $\alpha = 45{,}38°$ und $\beta = 38{,}19°$ gemessen. Weiters ist die in der nachstehenden Abbildung eingetragene Länge bekannt.

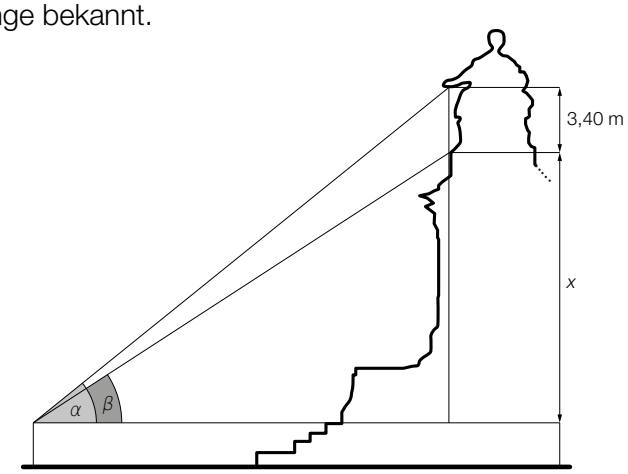
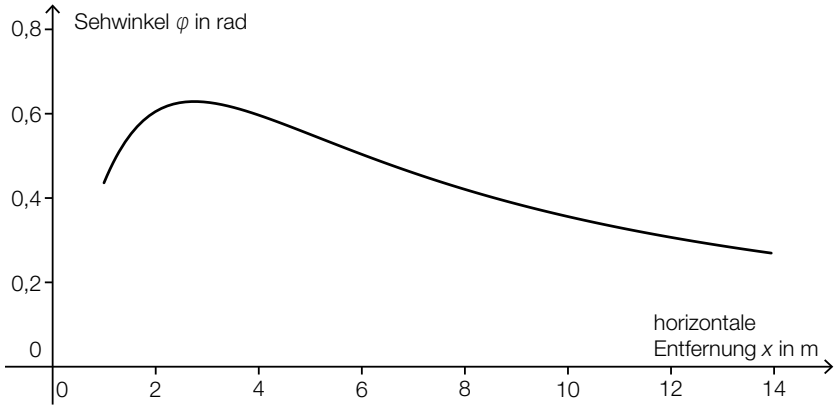


Abbildung nicht maßstabgetreu!

– Berechnen Sie die in der obigen Abbildung mit x bezeichnete Länge.

b) Eine Fotografin möchte eine auf einem Sockel stehende Skulptur unter dem größtmöglichen Sehwinkel fotografieren. Folgende Abbildung gibt zu jeder horizontalen Entfernung x zur Skulptur im Intervall [1; 14] den Sehwinkel φ an:

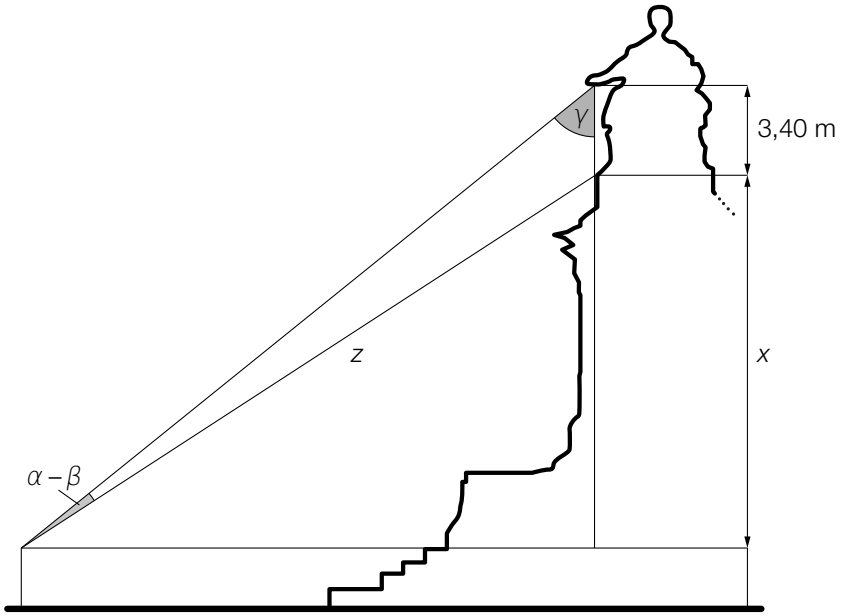


– Kennzeichnen Sie in der obigen Abbildung die horizontale Entfernung mit dem größtmöglichen Sehwinkel.
– Dokumentieren Sie in Worten, wie man vorgehen muss, um diese horizontale Entfernung mithilfe der Differenzialrechnung zu berechnen, wenn eine Gleichung der Funktion mit dem dargestellten Graphen bekannt ist.

* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

a)



$\gamma = 90° - \alpha = 44{,}62°$

$\alpha - \beta = 7{,}19°$

$$\frac{z}{\sin(44{,}62°)} = \frac{3{,}4}{\sin(7{,}19°)}$$

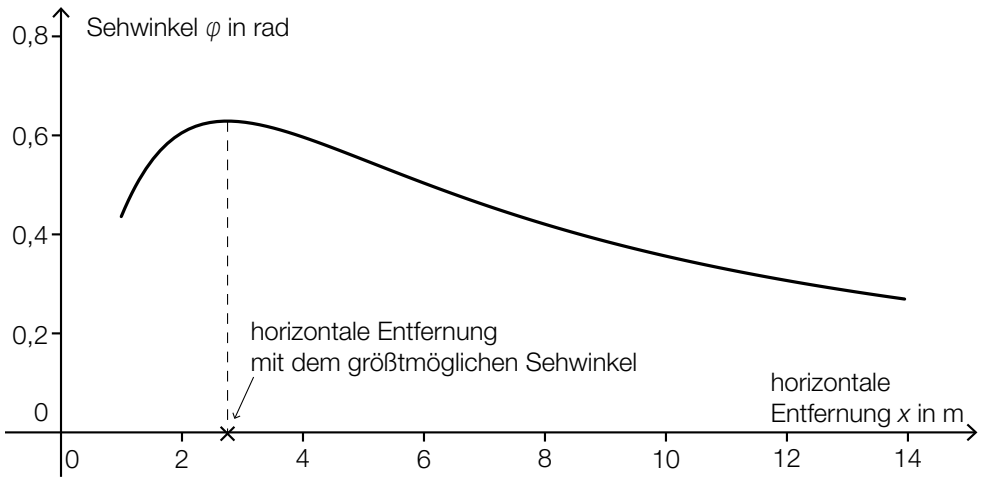
$z = 19{,}08\ldots$

$$\sin(38{,}19°) = \frac{x}{19{,}08\ldots}$$

$x = 11{,}797\ldots$

Die Länge x beträgt rund 11,80 m.

b)



Es muss die Maximumstelle der Funktion ermittelt werden. Daher bildet man die 1. Ableitung und berechnet deren Nullstellen. Diejenige Nullstelle, die im dargestellten Bereich liegt, ist die gesuchte Extremstelle.

Dass es nur eine solche Nullstelle im dargestellten Bereich gibt, geht aus dem Graphen hervor.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für einen richtigen Lösungsansatz (z. B. mithilfe des Sinussatzes)
1 × B: für die richtige Berechnung von x

b) 1 × C1: für das richtige Kennzeichnen in der Abbildung
1 × C2: für die richtige Dokumentation der Berechnung

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Lichtwellenleiter*

Aufgabennummer: B_379

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

In einem Glasfaserkabel nimmt die Intensität des Lichts mit der Entfernung vom Anfangspunkt exponentiell ab. Dieser Zusammenhang kann durch die Funktion I beschrieben werden:

$I(x) = I_0 \cdot e^{-\lambda \cdot x}$

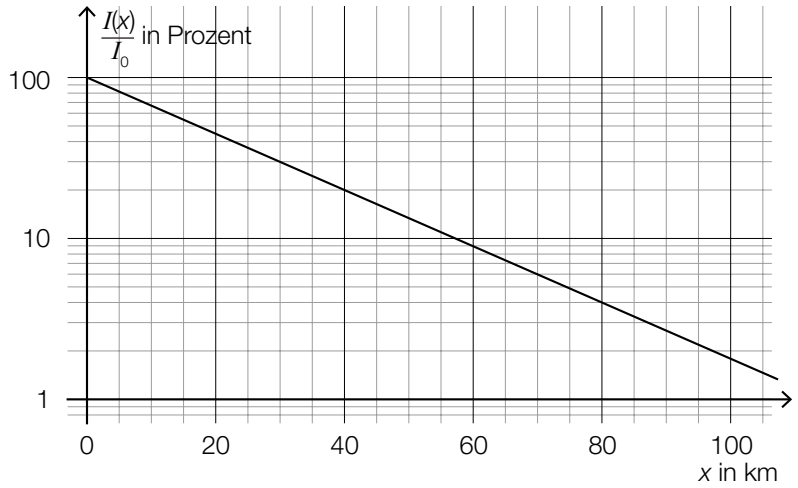
x ... Entfernung entlang des Kabels vom Anfangspunkt des Kabels
$I(x)$ ... Lichtintensität in der Entfernung x
I_0 ... Lichtintensität am Anfangspunkt des Kabels
λ ... positive Konstante

a) Dabei wird angenommen, dass die lokale Änderungsrate der Lichtintensität in Abhängigkeit von der Entfernung proportional zur jeweils vorhandenen Lichtintensität ist.

– Stellen Sie die Differenzialgleichung für I auf. Bezeichnen Sie dabei den Proportionalitätsfaktor mit $-\lambda$ ($\lambda > 0$).
– Zeigen Sie mithilfe der Methode *Trennen der Variablen*, dass die Lösung dieser Differenzialgleichung mit der Anfangsbedingung $I(0) = I_0$ durch $I(x) = I_0 \cdot e^{-\lambda \cdot x}$ gegeben ist.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Die Lichtintensität (in Prozent von I_0) in einem Glasfaserkabel in Abhängigkeit von x wird in einem ordinatenlogarithmischen Koordinatensystem folgendermaßen dargestellt:



– Ermitteln Sie, wie viel Prozent an Intensität das Licht nach 80 Kilometern (km) verloren hat.

Um Signale zu übertragen, muss die Lichtintensität noch mindestens 20 % der Lichtintensität I_0 betragen.

– Lesen Sie die maximale Länge eines Lichtwellenleiters ab, der diese Bedingung erfüllt.
– Ermitteln Sie den Wert des Parameters λ mithilfe der in der obigen Abbildung dargestellten Exponentialfunktion.

c) Um den Intensitätsverlust in einem Lichtwellenleiter zu bestimmen, wird die nach 1 km noch vorhandene Intensität gemessen.
Die Größe zur Beschreibung des Intensitätsverlusts ist die Dämpfung D, die in Dezibel angegeben wird:

$D = 10 \cdot \lg\left(\frac{I_0}{I}\right)$ in Dezibel (dB)

I_0 ... Anfangsintensität
I ... noch vorhandene Intensität nach 1 km

Ein modernes Glasfaserkabel weist nach 1 km noch eine Intensität von 95,5 % des Anfangswertes I_0 auf.

– Berechnen Sie, welcher Dämpfung dies entspricht.

Bei älteren Glasfaserkabeln stellte man pro Kilometer Kabellänge eine Dämpfung von 20 dB fest.

– Berechnen Sie, wie viel Prozent der Anfangsintensität I_0 nach 1 km noch vorhanden waren.

Für die Dämpfung wird oft auch die Formel $D_1 = 10 \cdot \lg\left(\frac{I}{I_0}\right)$ angegeben.

– Zeigen Sie mithilfe der Rechengesetze für Logarithmen: $D_1 = -D$.

Möglicher Lösungsweg

a) $\frac{dI}{dx} = -\lambda \cdot I$

$\frac{dI}{I} = -\lambda \cdot dx$ (oder: $\frac{I'}{I} = -\lambda$)

$\int \frac{dI}{I} = -\lambda \int dx$ (oder: $\int \frac{I'(x)}{I(x)} dx = -\lambda \int dx$)

$\ln|I| = -\lambda \cdot x + C_1$

allgemeine Lösung der Differenzialgleichung: $I(x) = C \cdot e^{-\lambda \cdot x}$
Einsetzen der Anfangsbedingung $I(0) = I_0$:
$I_0 = C$
spezielle Lösung der Differenzialgleichung: $I(x) = I_0 \cdot e^{-\lambda \cdot x}$

b) An der Stelle $x = 80$ gilt: $\frac{I(80)}{I_0} = 4\ \%$.
Daher hat das Licht 96 % an Intensität verloren.

An der Stelle $x = 40$ gilt: $\frac{I(40)}{I_0} = 20\ \%$.
Die maximale Länge des Lichtleiters beträgt also 40 km.

$0{,}2 = e^{-\lambda \cdot 40}$
$\lambda = \frac{\ln(5)}{40} = 0{,}04023\ldots$

c) $D = 10 \cdot \lg\left(\frac{I_0}{0{,}955 \cdot I_0}\right) = 0{,}19\ldots$
Die Dämpfung beträgt rund 0,2 dB.

$20 = 10 \cdot \lg\left(\frac{I_0}{I}\right)$
$I = I_0 \cdot 10^{-2}$

Nach 1 km war noch 1 % der Anfangsintensität vorhanden.

$D_1 = 10 \cdot \lg\left(\frac{I}{I_0}\right)$
$D_1 = 10 \cdot (\lg(I) - \lg(I_0))$
Durch Herausheben von –1 erhält man:
$D_1 = -10 \cdot (\lg(I_0) - \lg(I))$
$D_1 = -10 \cdot \lg\left(\frac{I_0}{I}\right)$
$\Rightarrow\ D_1 = -D$

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Differenzialgleichung
1 × B: für das richtige Anwenden der Methode *Trennen der Variablen* zur Ermittlung der allgemeinen Lösung der Differenzialgleichung
1 × D: für den richtigen Nachweis zur speziellen Lösung der Differenzialgleichung

b) 1 × C1: für das richtige Ermitteln des Intensitätsverlusts
1 × C2: für das richtige Ablesen der maximalen Länge
1 × A: für das richtige Ermitteln des Parameters λ

c) 1 × B1: für die richtige Berechnung der Dämpfung
1 × B2: für die richtige Berechnung des Prozentsatzes
1 × D: für den richtigen Nachweis mithilfe der Rechengesetze für Logarithmen

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Lieblingsspielformen*

Aufgabennummer: B_388

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Eine Gruppe von Kindergartenkindern wurde nach ihren Lieblingsspielformen befragt. Zur Auswahl standen: Konstruktionsspiele, Bewegungsspiele und Regelspiele. Dabei waren Mehrfachnennungen möglich. Das Ergebnis kann man der nachstehenden Tabelle entnehmen.

Lieblingsspielform	Anzahl der Nennungen
Konstruktionsspiele (K)	7
Bewegungsspiele (B)	14
Regelspiele (R)	7

Tabelle 1

Einige dieser Kinder haben sich für genau 2 Spielformen entschieden.

Lieblingsspielform	Anzahl der Nennungen
Konstruktionsspiele und Bewegungsspiele	3
Konstruktionsspiele und Regelspiele	1
Bewegungsspiele und Regelspiele	2

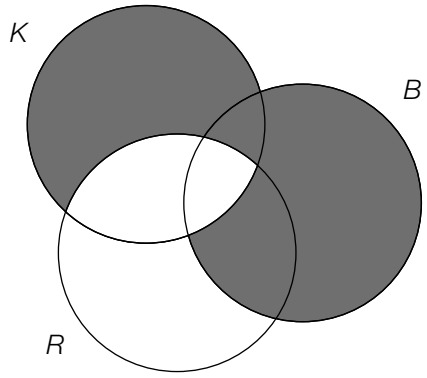
Tabelle 2

2 Kinder haben sogar alle 3 Spielformen genannt.

a) – Veranschaulichen Sie die Ergebnisse dieser Befragung in einem Venn-Diagramm (Mengendiagramm). Tragen Sie die entsprechenden Anzahlen in das Venn-Diagramm ein.
– Ermitteln Sie, wie viele Kinder sich insgesamt für nur eine Spielform als Lieblingsspielform entschieden haben.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Im nachstehenden Venn-Diagramm ist eine bestimmte Menge grau hervorgehoben.

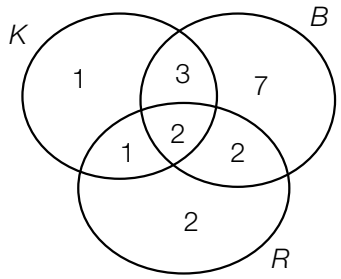


– Geben Sie die grau hervorgehobene Menge des obigen Mengendiagramms mithilfe der Mengensymbolik (Mengenoperationen: Vereinigung, Durchschnitt, Differenz) an.
– Beschreiben Sie die grau hervorgehobene Menge im gegebenen Sachzusammenhang in Worten.

c) – Erstellen Sie mithilfe von Tabelle 1 ein Säulen- oder ein Balkendiagramm mit den absoluten Häufigkeiten der Nennung von Konstruktionsspielen, Bewegungsspielen und Regelspielen.

Möglicher Lösungsweg

a)

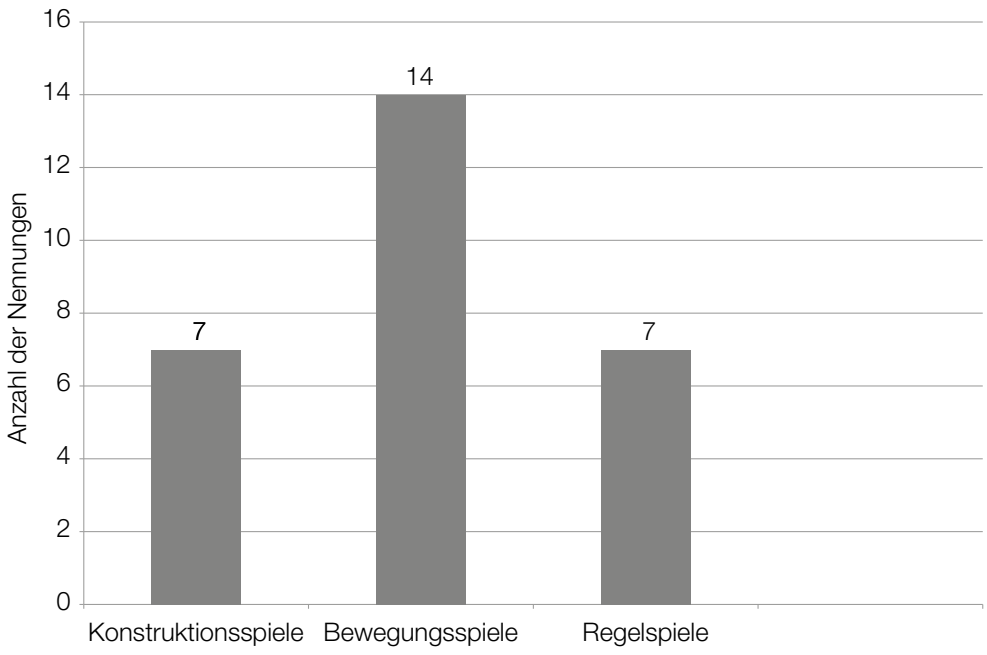


Dem Diagramm zu entnehmen: 1 + 7 + 2 = 10.
10 Kinder haben sich für eine einzige Spielform als Lieblingsspielform entschieden.

b) $(K \cup B) \setminus (K \cap R)$

Die hervorgehobene Menge ist die Menge aller Kinder, die Bewegungsspiele oder Konstruktionsspiele als Lieblingsspielform genannt haben, ohne die Kinder, die sowohl Konstruktionsspiele als auch Regelspiele als Lieblingsspielform genannt haben.

c)



Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Veranschaulichen der Ergebnisse in einem Venn-Diagramm mit den entsprechenden Anzahlen
1 × B: für das richtige Ermitteln der Anzahl der Kinder, die sich insgesamt für eine einzige Spielform als Lieblingsspielform entschieden haben

b) 1 × A: für die richtige Angabe mithilfe der Mengensymbolik
1 × C: für die richtige Beschreibung in Worten

c) 1 × A: für das richtige Erstellen eines Säulen- oder Balkendiagramms

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Kreativ-Workshop*

Aufgabennummer: B_383

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) In den kommenden Sommerferien möchte der Kulturverband einer Großstadt eine Kombination aus Ausstellungsbesuch, Malkurs und Mittagessen für Kinder anbieten.

Laut einer Umfrage würde dieses Angebot bei einem Preis von € 23 pro Kind für 1 050 Kinder gebucht werden. Bei einem Preis von € 27 pro Kind würde dieses Angebot für 990 Kinder gebucht werden.

– Stellen Sie eine Funktionsgleichung der zugehörigen linearen Preisfunktion der Nachfrage auf.

b) Die Preisfunktion der Nachfrage p für einen 2-tägigen Kreativ-Workshop ist erhoben worden:

$p(x) = -0{,}5 \cdot x + 220$

x ... Anzahl der teilnehmenden Personen
$p(x)$ ... Preis bei x Personen in € pro Person

– Berechnen Sie denjenigen Preis pro Person, bei dem 200 Personen zu erwarten sind.
– Geben Sie den Höchstpreis an.
– Berechnen Sie die Sättigungsmenge.

c) Bei einem Kreativ-Workshop fallen für den Veranstalter Kosten an, die sich näherungsweise durch die folgende Kostenfunktion K beschreiben lassen:

$K(x) = 0{,}01 \cdot x^2 + 35 \cdot x + 4\,800$

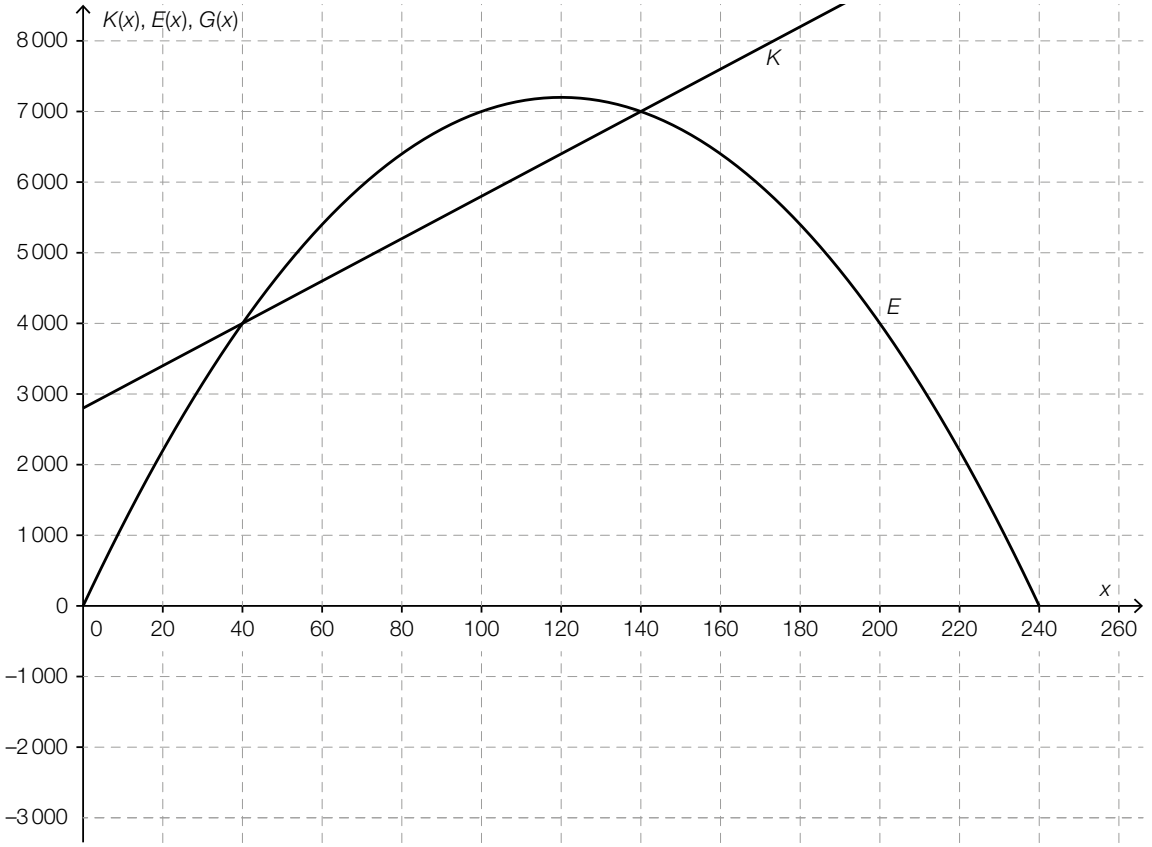
x ... Anzahl der teilnehmenden Personen
$K(x)$ ... Gesamtkosten bei x Personen in €

Der Preis für den Kreativ-Workshop beträgt € 129 pro Person.

– Stellen Sie eine Funktionsgleichung der zugehörigen Gewinnfunktion G auf.
– Berechnen Sie, bei welcher Anzahl an teilnehmenden Personen für diesen Workshop der Break-even-Point erreicht wird.

* ehemalige Klausuraufgabe

d) Die nachstehende Abbildung zeigt die Graphen einer quadratischen Erlösfunktion E und einer linearen Kostenfunktion K.



– Erklären Sie mathematisch, warum die zugehörige Gewinnfunktion eine quadratische Funktion sein muss.
– Zeichnen Sie den Graphen der zugehörigen Gewinnfunktion G im Intervall von 0 bis zur oberen Gewinngrenze in der obigen Abbildung ein.
– Beschreiben Sie, wie sich die beiden Gewinngrenzen verändern, wenn die Fixkosten steigen.

Möglicher Lösungsweg

a) $p(x) = k \cdot x + d$

x … Nachfragemenge
$p(x)$ … Preis bei der Nachfrage x in € pro Kind

$23 = k \cdot 1\,050 + d$
$27 = k \cdot 990 + d$

Lösung mittels Technologieeinsatz:
$k = -\frac{1}{15},\ d = 93$
$p(x) = -\frac{1}{15} \cdot x + 93$

b) $p(200) = -0{,}5 \cdot 200 + 220 = 120$

Der Preis, bei dem 200 teilnehmende Personen zu erwarten sind, beträgt € 120 pro Person.

Der Höchstpreis beträgt € 220 pro Person.

$p(x) = 0 \ \Rightarrow \ x = \frac{220}{0{,}5} = 440$

Die Sättigungsmenge liegt bei 440 Personen.

c) $G(x) = E(x) - K(x) = 129 \cdot x - (0{,}01 \cdot x^2 + 35 \cdot x + 4\,800) = -0{,}01 \cdot x^2 + 94 \cdot x - 4\,800$

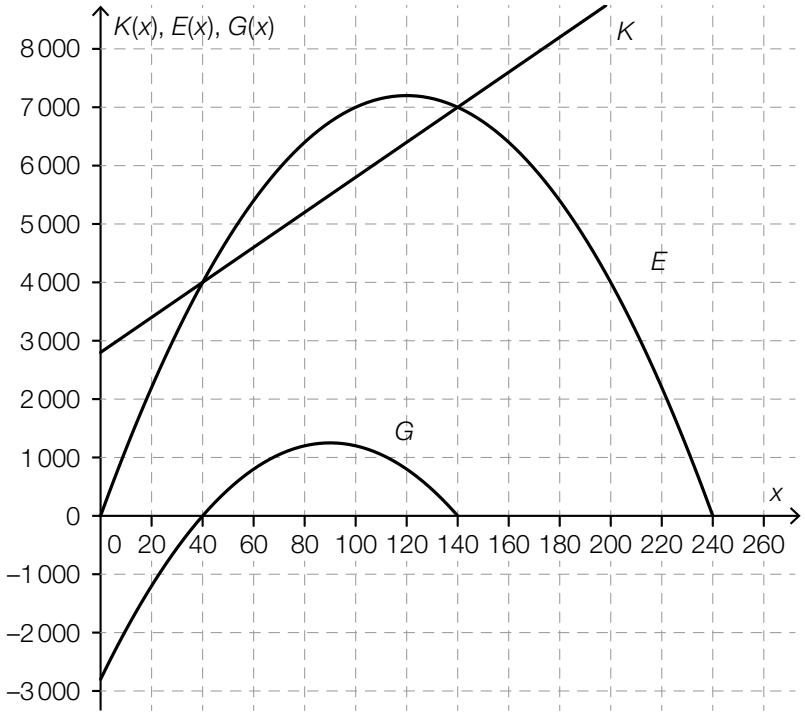
x … Anzahl der teilnehmenden Personen
$G(x)$ … Gewinn bei x Personen in €

$G(x) = 0$

Lösung mittels Technologieeinsatz:
$x = 51{,}3\ldots$

Ab 52 teilnehmenden Personen wird Gewinn erzielt.

d) Wird von einem quadratischen Term ein linearer Term abgezogen, so ist das Ergebnis wieder ein quadratischer Term.



Die untere Gewinngrenze wird höher und die obere Gewinngrenze niedriger.

oder:

Der Gewinnbereich wird schmäler.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung der Preisfunktion der Nachfrage

b) 1 × B1: für die richtige Berechnung des Preises pro Person, bei dem 200 teilnehmende Personen zu erwarten sind
1 × C: für das richtige Angeben des Höchstpreises
1 × B2: für die richtige Berechnung der Sättigungsmenge

c) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Gewinnfunktion
1 × B: für die richtige Berechnung der Teilnehmerzahl, bei der der Break-even-Point erreicht wird

d) 1 × D: für die richtige mathematische Erklärung
1 × A: für das richtige Einzeichnen des Funktionsgraphen (Graph einer quadratischen Funktion mit richtigem Ordinatenabschnitt und richtigen Nullstellen)
1 × C: für die richtige Beschreibung

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Konten*

Aufgabennummer: B_387

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Von den Kunden einer Bankfiliale besitzen 80 % ein Gehaltskonto und 40 % ein Sparkonto.
25 % der Kunden der Bankfiliale besitzen sowohl ein Gehalts- als auch ein Sparkonto.
G bezeichnet das Ereignis, dass ein Kunde ein Gehaltskonto besitzt.
S bezeichnet das Ereignis, dass ein Kunde ein Sparkonto besitzt.

a) – Übertragen Sie die Werte der Angabe in die entsprechenden Felder der unten stehenden Vierfeldertafel.
– Ermitteln Sie die Werte in den restlichen Feldern und tragen Sie diese ein.

	besitzt Gehaltskonto	besitzt kein Gehaltskonto	Summe
besitzt Sparkonto			
besitzt kein Sparkonto			
Summe			

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass von 10 zufällig ausgewählten Kunden mindestens 2 Kunden weder ein Gehalts- noch ein Sparkonto besitzen.

b) – Überprüfen Sie nachweislich, ob die Ereignisse *G* und *S* voneinander unabhängig sind.

* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

a)

	besitzt Gehaltskonto	besitzt kein Gehaltskonto	Summe
besitzt Sparkonto	25 %	15 %	40 %
besitzt kein Sparkonto	55 %	5 %	60 %
Summe	80 %	20 %	

Die hervorgehobenen Werte in der oben stehenden Tabelle sind diejenigen, die aus der Angabe übertragen wurden.

X … Anzahl der Kundinnen und Kunden, die weder ein Gehalts- noch ein Sparkonto besitzen

Binomialverteilung: $n = 10$, $p = 0{,}05$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 0{,}08613\ldots \approx 8{,}61\ \%$

b) Sind zwei Ereignisse unabhängig, so gilt: $P(G \cap S) = P(G) \cdot P(S)$.
$P(G \cap S) = 0{,}25$
$P(G) \cdot P(S) = 0{,}8 \cdot 0{,}4 = 0{,}32 \neq 0{,}25$
Da $P(G) \cdot P(S) \neq P(G \cap S)$, sind die beiden Ereignisse abhängig.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Übertragen der Werte in die Vierfeldertafel
1 × B1: für das richtige Ermitteln der fehlenden Werte
1 × B2: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit

b) 1 × D: für die richtige Überprüfung zur Unabhängigkeit

Angry Birds (1)*

Aufgabennummer: B_377

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Im Computerspiel *Angry Birds* muss man mithilfe einer Schleuder Schweine treffen. Als Wurfgeschoße stehen verschiedene Vögel zur Verfügung. Einige dieser Vögel haben besondere Funktionen, die durch einen Mausklick ausgelöst werden können. Koordinaten bzw. Abstände sind im Folgenden in Längeneinheiten (LE) angegeben.

a) Die Flugparabel des Vogels *Red* bei einem Wurf kann durch den Graphen der Funktion f beschrieben werden:

$f(x) = -0{,}1 \cdot x^2 + 0{,}9 \cdot x + 1$ mit $x \geq 0$

x ... horizontale Entfernung vom Abschusspunkt in Längeneinheiten (LE)
$f(x)$ ... Flughöhe des Vogels über dem horizontalen Boden an der Stelle x in LE

Red trifft kein Schwein und prallt auf den Boden auf.

– Berechnen Sie, in welcher horizontalen Entfernung vom Abschusspunkt der Vogel auf dem Boden aufprallt.

Der Weg, den der Vogel vom Abschusspunkt bis zum Aufprall am Boden zurücklegt, entspricht der Länge der Kurve zwischen diesen Punkten. Für die Länge s der Kurve in einem Intervall $[a; b]$ gilt:

$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$

– Berechnen Sie den vom Vogel zurückgelegten Weg vom Abschusspunkt bis zum Aufprall am Boden.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Die Flugbahn des Vogels *Chuck* kann zu Beginn durch den Graphen der Funktion g beschrieben werden:

$g(x) = -0{,}5 \cdot x^2 + 5 \cdot x + 3$ mit $x \geq 0$

x ... horizontale Entfernung vom Abschusspunkt in LE
$g(x)$ ... Flughöhe des Vogels über dem horizontalen Boden an der Stelle x in LE

Der Spieler löst in 3 LE horizontaler Entfernung vom Abschusspunkt durch einen Mausklick eine Spezialfunktion aus. Der Vogel bewegt sich ab diesem Punkt bis zu einer horizontalen Entfernung von 5 LE vom Abschusspunkt entlang der Tangente an den gegebenen Funktionsgraphen.

– Ermitteln Sie eine Gleichung der Tangente im Punkt $P = (3|g(3))$.
– Veranschaulichen Sie die Flugbahn von Chuck vom Abschusspunkt bis zu einer horizontalen Entfernung von 5 LE vom Abschusspunkt mithilfe einer geeigneten Grafik.

c) Die Flugbahn des Vogels *Matilda* kann durch den Graphen einer Polynomfunktion 3. Grades beschrieben werden.
Der Funktionsgraph schneidet die vertikale Achse bei 12. Er verläuft durch die Punkte $A = (1|16)$ und $B = (5|32)$. A ist ein Hochpunkt des Funktionsgraphen.

– Stellen Sie mithilfe der angegebenen Informationen ein Gleichungssystem auf, mit dem die Koeffizienten dieser Polynomfunktion berechnet werden können.

d) Bei einem anderen Angriff durch den Vogel Matilda kann die Flugbahn durch den Graphen der Funktion h beschrieben werden.

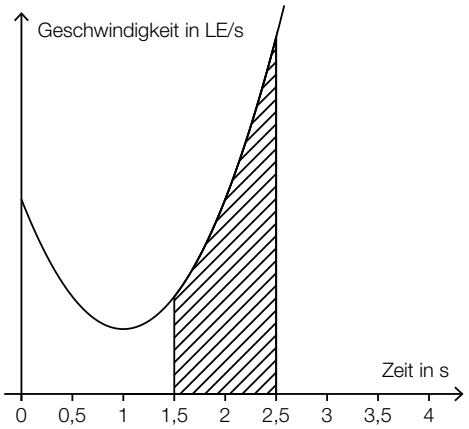
$h(x) = x^3 - 6 \cdot x^2 + 7 \cdot x + 8$ mit $x \geq 0$

x ... horizontale Entfernung vom Abschusspunkt in LE
$h(x)$ ... Flughöhe des Vogels über dem horizontalen Boden an der Stelle x in LE

Ein Schwein befindet sich im Punkt $P = (5|20)$.

– Berechnen Sie den Abstand des Schweins vom Abschusspunkt.
– Überprüfen Sie nachweislich, ob der Punkt P auf Matildas Flugbahn liegt.

e) Die nachstehende Grafik stellt das Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm eines Vogels bei einem Wurf dar.



– Beschreiben Sie die Bedeutung der in der Grafik eingezeichneten Fläche im gegebenen Sachzusammenhang.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

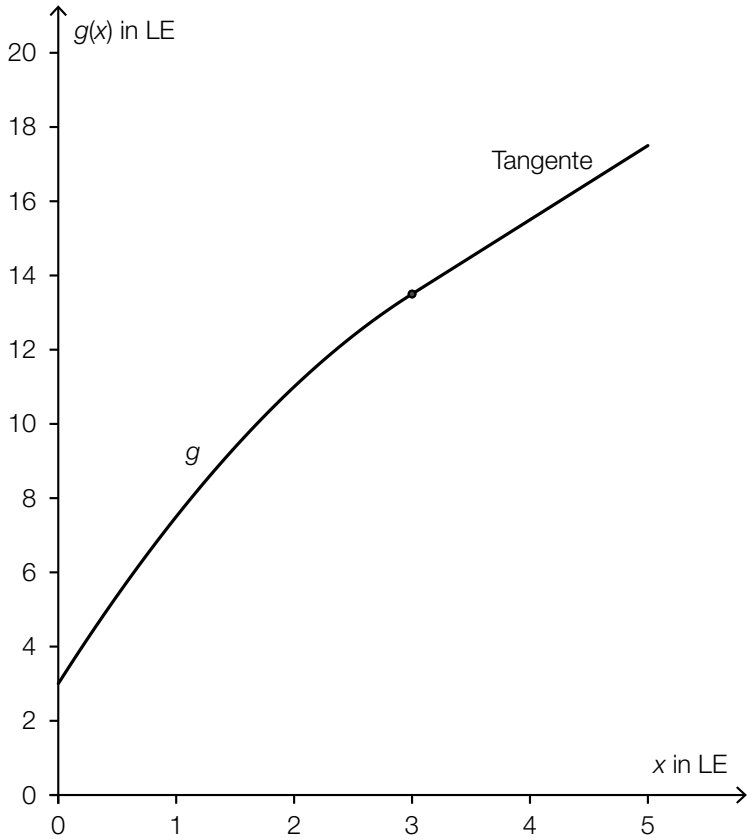
a) $-0{,}1 \cdot x^2 + 0{,}9 \cdot x + 1 = 0$

Lösung der Gleichung mittels Technologieeinsatz:
$(x_1 = -1)$
$x_2 = 10$

Der Vogel prallt in einer horizontalen Entfernung von 10 LE auf den Boden auf.

$\int_0^{10} \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx = 11{,}51\ldots$
Der vom Vogel zurückgelegte Weg beträgt rund 11,5 LE.

b) $g(3) = 13{,}5$
$g'(x) = -x + 5 \Rightarrow g'(3) = 2$
$13{,}5 = 2 \cdot 3 + d \Rightarrow d = 7{,}5$
Tangentengleichung: $y = 2 \cdot x + 7{,}5$



c) $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$
$f'(x) = 3a \cdot x^2 + 2b \cdot x + c$

I: $f(0) = 12$
II: $f(1) = 16$
III: $f(5) = 32$
IV: $f'(1) = 0$

d) Koordinaten des Abschusspunkts: $A = (0|8)$
Position des Schweins: $P = (5|20)$

$\sqrt{5^2 + (20 - 8)^2} = 13$

Der Abstand des Schweins vom Abschusspunkt beträgt 13 LE.

$h(5) = 18$

Der Punkt P liegt nicht auf Matildas Flugbahn.

e) Die Fläche unter dem Graphen der Geschwindigkeitsfunktion beschreibt den vom Vogel zurückgelegten Weg im Zeitintervall [1,5 s; 2,5 s] nach dem Abschuss.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B1: für die richtige Berechnung der horizontalen Entfernung
1 × B2: für die richtige Berechnung des zurückgelegten Weges

b) 1 × A1: für das richtige Aufstellen der Tangentengleichung
1 × A2: für das richtige Veranschaulichen der Flugbahn
(für $0 \leq x \leq 3$ Graph von g, für $3 \leq x \leq 5$ Tangente)

c) 1 × A1: für das richtige Aufstellen der Gleichungen mithilfe der Koordinaten der Punkte
1 × A2: für das richtige Aufstellen der Gleichung mithilfe der 1. Ableitung

d) 1 × B: für die richtige Berechnung des Abstands
1 × D: für die richtige Überprüfung, ob der Punkt P auf Matildas Flugbahn liegt

e) 1 × C: für die richtige Beschreibung der Bedeutung der Fläche im gegebenen Sachzusammenhang unter Bezugnahme auf das Zeitintervall [1,5 s; 2,5 s]

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Taxi*

Aufgabennummer: B_386

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Ein Taxiunternehmen möchte seinen PKW-Park um einen Kleinbus erweitern.

a) Der Anschaffungswert des Kleinbusses beträgt € 90.000. In den ersten 3 Jahren erhält das Taxiunternehmen jährlich eine Förderung von 10 % des Anschaffungswerts. Diese Förderung muss nicht zurückgezahlt werden.

Das Taxiunternehmen rechnet mit folgenden Ausgaben und Einnahmen (die Förderung ist bei den Angaben in der Tabelle nicht berücksichtigt):

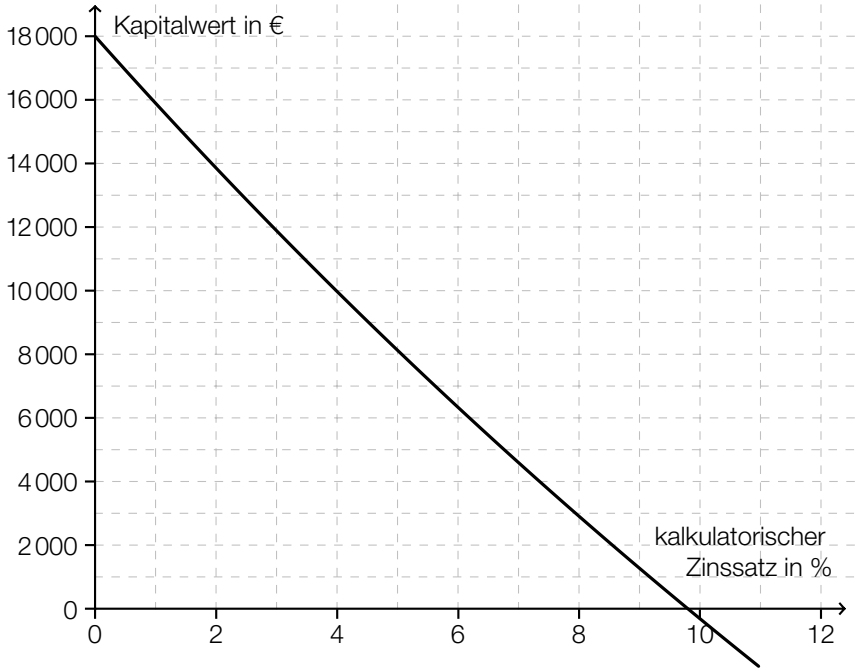
Jahr	Ausgaben	Einnahmen
1	€ 2.000	€ 30.000
2	€ 5.000	€ 32.000
3	€ 7.000	€ 33.000

Das Taxiunternehmen rechnet mit einem kalkulatorischen Zinssatz von 4 % p. a.

– Berechnen Sie den Kapitalwert der Investition unter Berücksichtigung der Förderung.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) In der nachstehenden Abbildung ist der Kapitalwert einer Investition in Abhängigkeit vom kalkulatorischen Zinssatz dargestellt.



– Lesen Sie aus der obigen Abbildung den internen Zinssatz ab.
– Beschreiben Sie in Worten, wie sich der interne Zinssatz ändert, wenn der Anschaffungswert der Investition sinkt.

Möglicher Lösungsweg

a) Höhe der jährlichen Förderung: € 90.000 · 0,1 = € 9.000

Rückflüsse unter Berücksichtigung der Förderung:

Jahr	Rückflüsse
1	€ 37.000
2	€ 36.000
3	€ 35.000

$C_0 = -90\,000 + 37\,000 \cdot 1{,}04^{-1} + 36\,000 \cdot 1{,}04^{-2} + 35\,000 \cdot 1{,}04^{-3} = +9\,975{,}819\ldots$
$\approx +9\,975{,}82$

Der Kapitalwert dieser Investition unter Berücksichtigung der Förderung beträgt € 9.975,82.

b) interner Zinssatz: 9,8 %
Toleranzbereich: [9,6 %; 10,0 %]

Wenn der Anschaffungswert der Investition sinkt, wird die Kapitalwertkurve nach oben verschoben, der interne Zinssatz wird größer.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für einen richtigen Ansatz zur Berechnung des Kapitalwerts
1 × B: für die richtige Berechnung des Kapitalwerts der Investition unter Berücksichtigung der Förderung

b) 1 × C1: für das richtige Ablesen des internen Zinssatzes im Toleranzbereich [9,6 %; 10,0 %]
1 × C2: für eine richtige Beschreibung

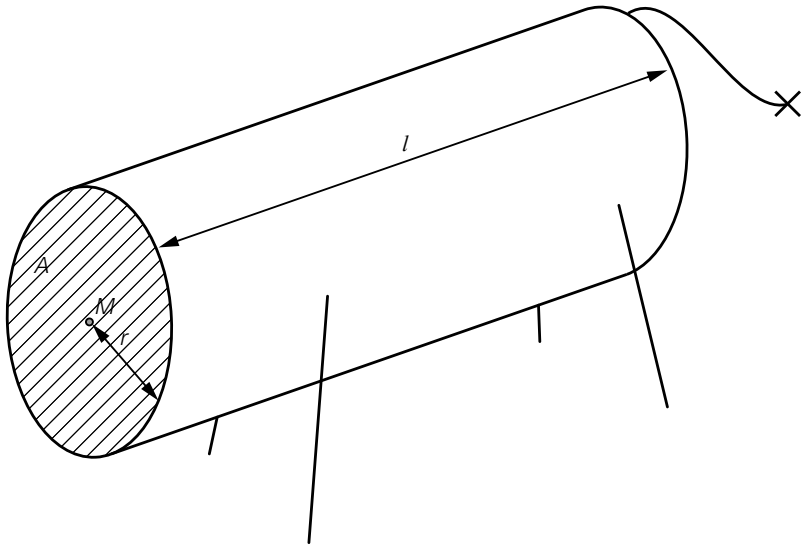
BMB
Bundesministerium
für Bildung

Modell-Kuh*

Aufgabennummer: B_385

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Um in einer Faustformel einen Zusammenhang zwischen Brustumfang und Volumen einer Kuh herzustellen, wird die Kuh modellhaft als Zylinder mit einer kreisförmigen Querschnittsfläche und der Länge l angenommen.



Dazu muss der Flächeninhalt A der Kreisfläche durch den Umfang u des Kreises ausdrückt werden.

– Stellen Sie eine Formel zur Berechnung des Flächeninhalts A in Abhängigkeit vom Umfang u auf.

$A =$ _____

In diesem Modell wird die Länge l des Zylinders als das 9-Fache des Radius r angenommen.

– Stellen Sie eine Formel zur Berechnung des Volumens V in Abhängigkeit vom Umfang u auf.

$V =$ _____

Der Brustumfang einer Kuh ist um 10 % größer als jener einer anderen Kuh.

– Bestimmen Sie, um wie viel Prozent das Volumen dieser Kuh größer ist als das Volumen der anderen Kuh.

* ehemalige Klausuraufgabe

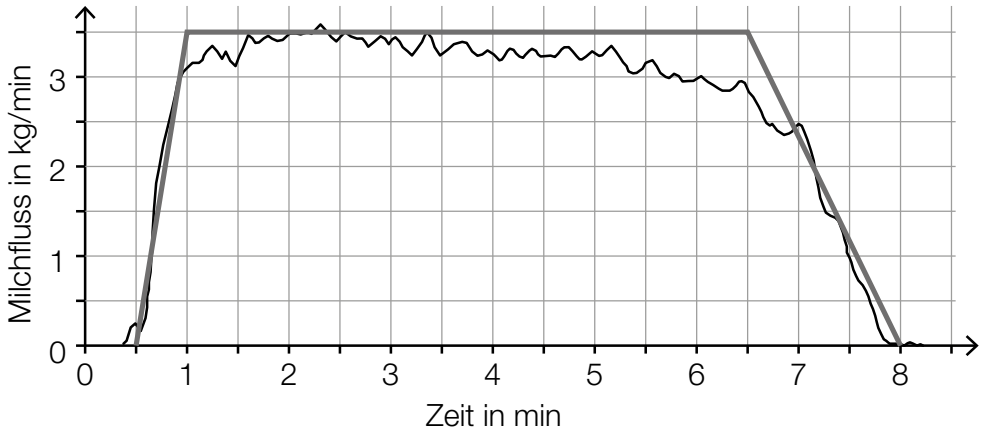
b) Die nachstehende Tabelle gibt den Brustumfang und die Lebendmasse von 8 Kühen an.

Brustumfang in cm	Lebendmasse in kg
153	240
155	303
161	285
163	320
165	373
167	318
169	387
170	358

In einem vereinfachten Modell kann für Brustumfänge von 150 cm bis 170 cm ein linearer Zusammenhang zwischen den beiden angegebenen Größen angenommen werden.

– Ermitteln Sie eine Gleichung der zugehörigen linearen Regressionsfunktion. (Die Lebendmasse soll in Abhängigkeit vom Brustumfang beschrieben werden.)
– Interpretieren Sie den Wert der Steigung dieser Regressionsfunktion im gegebenen Sachzusammenhang.
– Berechnen Sie mithilfe dieses Modells die Lebendmasse, die man bei einem Brustumfang von 160 cm erwarten kann.

c) Die nachstehende Grafik zeigt den Milchfluss während eines Melkvorgangs in Kilogramm pro Minute (kg/min) in Abhängigkeit von der Zeit in Minuten (min).
Für weitere Berechnungen wird der Milchfluss durch einen Streckenzug in Form eines Trapezes modelliert. Dieser Streckenzug ist ebenfalls eingezeichnet.



– Veranschaulichen Sie in der obigen Grafik die während dieses Melkvorgangs insgesamt gemolkene Milchmenge.
– Bestimmen Sie näherungsweise die während dieses Melkvorgangs insgesamt gemolkene Milchmenge.

Möglicher Lösungsweg

a) $u = 2 \cdot r \cdot \pi \Rightarrow r = \frac{u}{2 \cdot \pi}$

$A = r^2 \cdot \pi$

$\Rightarrow A = \frac{u^2}{4 \cdot \pi}$

$l = 9 \cdot r$

$V = A \cdot 9 \cdot r$

$V = \frac{u^2}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{9 \cdot u}{2 \cdot \pi} = \frac{9 \cdot u^3}{8 \cdot \pi^2}$

$V_{neu} = \frac{9 \cdot (1{,}1 \cdot u)^3}{8 \cdot \pi^2} = \frac{9 \cdot 1{,}1^3 \cdot u^3}{8 \cdot \pi^2} = 1{,}1^3 \cdot V = 1{,}331 \cdot V$

Wenn der Umfang um 10 % steigt, nimmt gemäß diesem Modell das Volumen um 33,1 % zu.

b) Ermitteln der Gleichung der Regressionsfunktion mittels Technologieeinsatz:

$y = 6{,}50 \cdot x - 736$ *(Koeffizienten gerundet)*

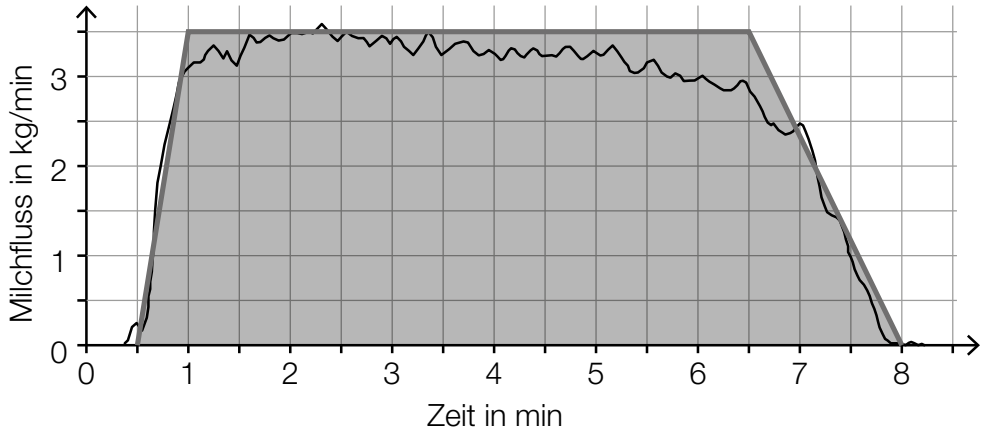
x … Brustumfang in cm
y … Lebendmasse in kg

Gemäß dem Modell steigt die Lebendmasse pro Zentimeter Brustumfang um rund 6,50 kg.

x = 160 cm:
6,50… · 160 – 736,… = 304,2… ≈ 304

Gemäß dem Modell kann man bei einem Brustumfang von 160 cm eine Lebendmasse von rund 304 kg erwarten.

c)



Auch das Veranschaulichen der Milchmenge als Fläche zwischen dem Graphen der Funktion und der horizontalen Achse ist als richtig zu werten.

Die gemolkene Milchmenge entspricht dem Flächeninhalt A des Trapezes:

$$A = \frac{(7{,}5 + 5{,}5) \cdot 3{,}5}{2} = 22{,}75$$

Es wurden 22,75 kg Milch gemolken.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A1: für das richtige Aufstellen der Formel für A in Abhängigkeit von u
1 × A2: für das richtige Aufstellen der Formel für V in Abhängigkeit von u
1 × A3: für das richtige Bestimmen des prozentuellen Unterschieds

b) 1 × B1: für das richtige Ermitteln der Gleichung der Regressionsfunktion
1 × C: für eine richtige Interpretation des Werts der Steigung im gegebenen Sachzusammenhang
1 × B2: für die richtige Berechnung der Lebendmasse bei 160 cm Brustumfang

c) 1 × A: für das richtige Veranschaulichen der Milchmenge als Fläche zwischen dem Streckenzug bzw. dem Graphen der Funktion und der horizontalen Achse
1 × B: für das richtige Bestimmen der insgesamt gemolkenen Milchmenge

Waschmittel (2)*

Aufgabennummer: B_381

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Die Firma Blitzweiß produziert ein neues Waschmittel.

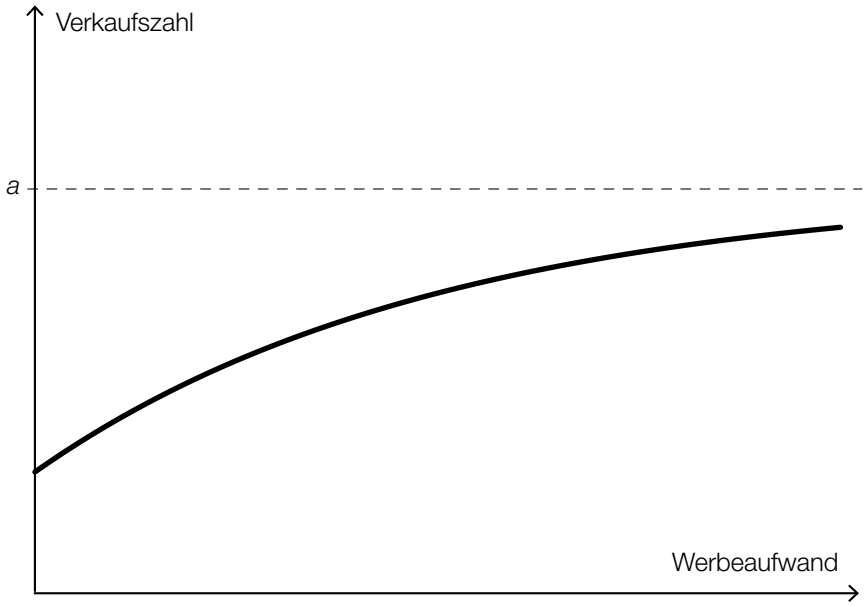
a) Die Abhängigkeit der Verkaufszahlen vom Werbeaufwand x kann für einen Monat modellhaft durch die Funktion V beschrieben werden:

$V(x) = a - b \cdot e^{-\lambda \cdot x}$

a, b, λ sind positive Parameter der Funktion mit $a > b$.

– Ermitteln Sie unter Verwendung der Parameter von V die Verkaufszahl, wenn kein Werbeaufwand betrieben wird.
– Begründen Sie mathematisch, warum für $x \to \infty$ die Funktion V asymptotisch gegen a strebt.

Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen der Funktion V für einen bestimmten Wert λ_1.



– Zeichnen Sie den Funktionsverlauf für einen Wert λ_2 mit $\lambda_2 > \lambda_1$ in die obige Abbildung ein. (Die Parameter a und b bleiben unverändert.)

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Die Kostenfunktion K für die Produktion eines Tages kann folgendermaßen beschrieben werden:

$K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$

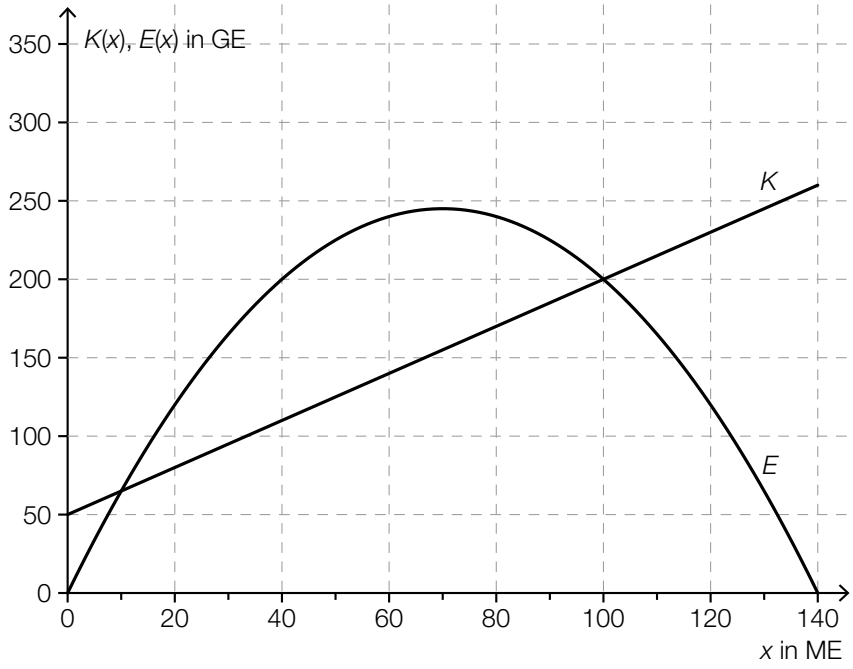
x … Anzahl der produzierten Mengeneinheiten (ME)
$K(x)$ … Produktionskosten für x ME in Geldeinheiten (GE)

Folgende Informationen sind verfügbar:
Die Fixkosten betragen € 500.

x in ME	20	30	50
$K(x)$ in GE	604	672	920

– Stellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Parameter a, b, c und d in Matrizenform auf.
– Berechnen Sie die Parameter a, b, c und d.

c) In der nachstehenden Abbildung sind die Funktionsgraphen der linearen Kostenfunktion K und der quadratischen Erlösfunktion E eines Produkts dargestellt.

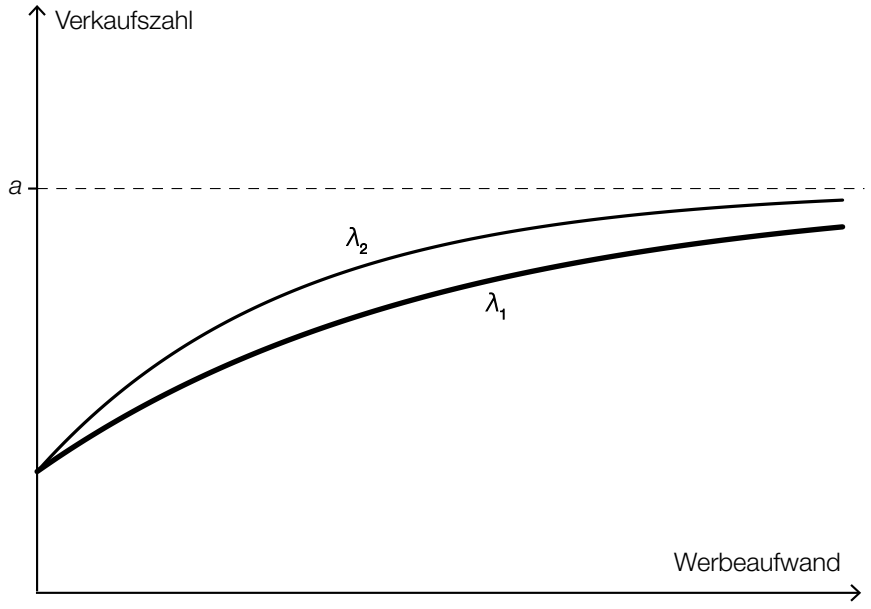


– Stellen Sie eine Funktionsgleichung dieser Kostenfunktion K auf.
– Kennzeichnen Sie den Gewinnbereich in der obigen Abbildung.
– Erklären Sie mathematisch, warum die zugehörige Gewinnfunktion eine quadratische Funktion sein muss.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Verkaufszahl ohne Werbeaufwand: $V(0) = a - b$
Wenn x gegen unendlich geht, strebt $e^{-\lambda \cdot x}$ und daher auch das Produkt $b \cdot e^{-\lambda \cdot x}$ gegen 0 und V somit gegen a.

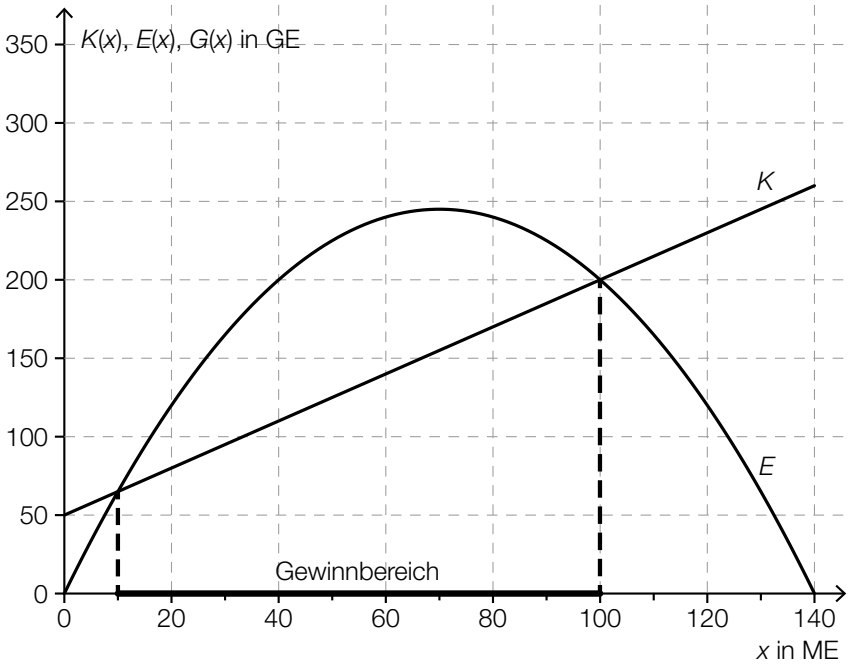


b) $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 8\,000 & 400 & 20 & 1 \\ 27\,000 & 900 & 30 & 1 \\ 125\,000 & 2\,500 & 50 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500 \\ 604 \\ 672 \\ 920 \end{pmatrix}$$

Lösung mittels Technologieeinsatz:

$a = \frac{1}{375}$, $b = -\frac{2}{25}$, $c = \frac{86}{15}$ und $d = 500$

c) Ablesen aus dem Funktionsgraphen: $K(0) = 50$ und $K(100) = 200$
$\Rightarrow K(x) = 1{,}5 \cdot x + 50$



Für die Gewinnfunktion G gilt: $G(x) = E(x) - K(x)$.
Wird von einem quadratischen Term ein linearer Term abgezogen, so ist das Ergebnis wieder ein quadratischer Term.

Lösungsschlüssel

a) 1 × C: für das richtige Ermitteln der Verkaufszahl ohne Werbeaufwand unter Verwendung der Parameter der Funktion
1 × D: für die richtige Erklärung, warum für wachsende x die Verkaufszahlen V gegen a streben
1 × A: für das richtige Einzeichnen des Funktionsverlaufs (Startwert und charakteristischer Verlauf einer Sättigungsfunktion, wobei die Kurve mit λ_2 oberhalb der gegebenen Kurve verläuft)

b) 1 × A: für das richtige Aufstellen des Gleichungssystems in Matrizenform
1 × B: für die richtige Berechnung der Parameter

c) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Kostenfunktion
1 × C: für das richtige Kennzeichnen des Gewinnbereichs
1 × D: für die richtige mathematische Erklärung

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Waschmittel (1)*

Aufgabennummer: B_376

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Die Firma Blitzweiß produziert ein neues Waschmittel.

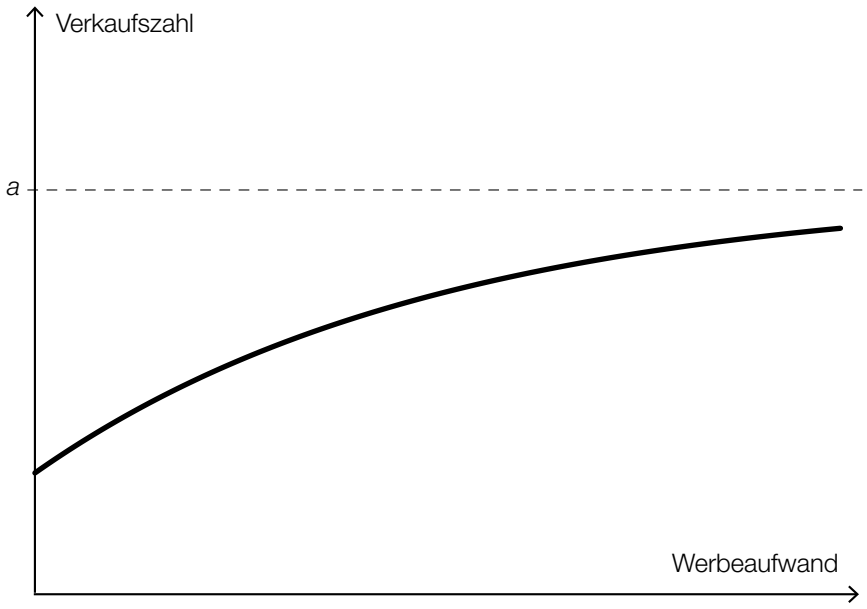
a) Die Abhängigkeit der Verkaufszahlen vom Werbeaufwand x kann für einen Monat modellhaft durch die Funktion V beschrieben werden:

$V(x) = a - b \cdot e^{-\lambda \cdot x}$

a, b, λ sind positive Parameter der Funktion mit $a > b$.

– Ermitteln Sie unter Verwendung der Parameter von V die Verkaufszahl, wenn kein Werbeaufwand betrieben wird.
– Begründen Sie mathematisch, warum für $x \to \infty$ die Funktion V asymptotisch gegen a strebt.

Die folgende Abbildung zeigt den Graphen der Funktion V für einen bestimmten Wert λ_1:



– Zeichnen Sie den Funktionsverlauf für einen Wert λ_2 mit $\lambda_2 > \lambda_1$ in die obige Abbildung ein. (Die Parameter a und b bleiben unverändert.)

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Die Kostenfunktion K für die Produktion eines Tages kann folgendermaßen beschrieben werden:

$K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$

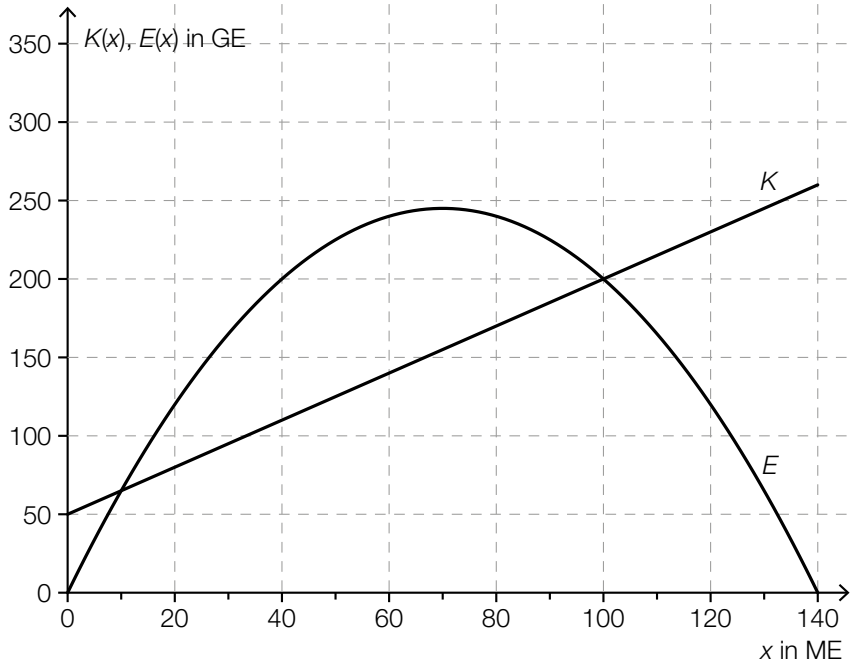
x … Anzahl der produzierten Mengeneinheiten (ME)
$K(x)$ … Produktionskosten für x ME in Geldeinheiten (GE)

Folgende Informationen sind verfügbar:
Die Fixkosten betragen € 500.

x in ME	20	30	50
$K(x)$ in GE	604	672	920

– Stellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Parameter a, b, c und d auf.
– Berechnen Sie die Parameter a, b, c und d.

c) In der nachstehenden Abbildung sind die Funktionsgraphen der linearen Kostenfunktion K und der quadratischen Erlösfunktion E eines Produkts dargestellt:

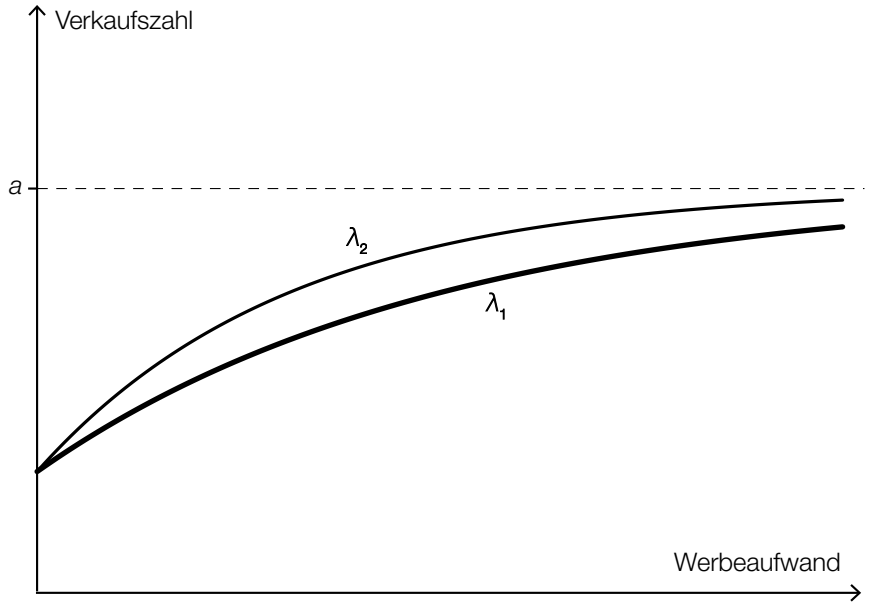


– Stellen Sie eine Funktionsgleichung dieser Kostenfunktion K auf.
– Kennzeichnen Sie den Gewinnbereich in der obigen Abbildung.
– Erklären Sie mathematisch, warum die zugehörige Gewinnfunktion eine quadratische Funktion sein muss.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Verkaufszahl ohne Werbeaufwand: $V(0) = a - b$
Wenn x gegen unendlich geht, strebt $e^{-\lambda \cdot x}$ und daher auch das Produkt $b \cdot e^{-\lambda \cdot x}$ gegen 0 und V somit gegen a.

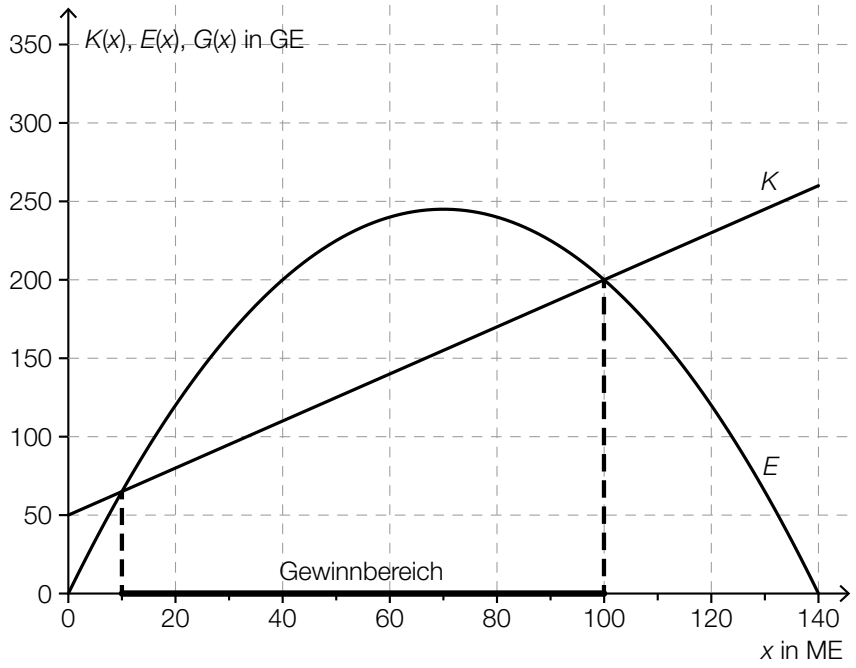


b) $K(0) = 500$: $500 = d$
$K(20) = 604$: $604 = 20^3 \cdot a + 20^2 \cdot b + 20 \cdot c + d$
$K(30) = 672$: $672 = 30^3 \cdot a + 30^2 \cdot b + 30 \cdot c + d$
$K(50) = 920$: $920 = 50^3 \cdot a + 50^2 \cdot b + 50 \cdot c + d$

Lösung mittels Technologieeinsatz:

$a = \frac{1}{375}$, $b = -\frac{2}{25}$, $c = \frac{86}{15}$ und $d = 500$

c) Ablesen aus dem Funktionsgraphen: $K(0) = 50$ und $K(100) = 200$
$\Rightarrow K(x) = 1{,}5 \cdot x + 50$



Für die Gewinnfunktion G gilt: $G(x) = E(x) - K(x)$.
Wird von einem quadratischen Term ein linearer Term abgezogen, so ist das Ergebnis wieder ein quadratischer Term.

Lösungsschlüssel

a) 1 × C: für das richtige Ermitteln der Verkaufszahl ohne Werbeaufwand unter Verwendung der Parameter der Funktion
1 × D: für die richtige Erklärung, warum für wachsende x die Verkaufszahlen V gegen a streben
1 × A: für das richtige Einzeichnen des Funktionsverlaufs (Startwert und charakteristischer Verlauf einer Sättigungsfunktion, wobei die Kurve mit λ_2 oberhalb der gegebenen Kurve verläuft)

b) 1 × A: für das richtige Aufstellen des Gleichungssystems
1 × B: für die richtige Berechnung der Parameter

c) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Kostenfunktion
1 × C: für das richtige Kennzeichnen des Gewinnbereichs
1 × D: für die richtige mathematische Erklärung

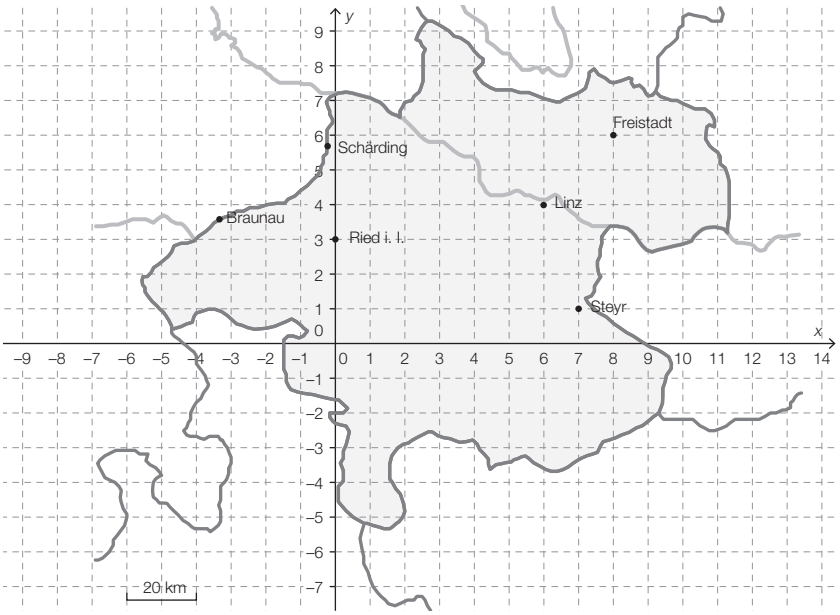
Brieftauben*

Aufgabennummer: B_355

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Brieftauben werden bei Wettkämpfen an einen Ort gebracht, von dem sie selbstständig wieder zurück nach Hause fliegen. Bei der vorliegenden Aufgabe wird angenommen, dass Brieftauben stets den kürzesten Weg nach Hause suchen.

Die nachstehende Grafik zeigt einige Städte in Oberösterreich, in denen es Taubenzüchter/innen gibt, in einem Koordinatensystem. Dabei entspricht eine Längeneinheit im Koordinatensystem einer Entfernung von 10 Kilometern.



a) Eine Taube wird in Freistadt losgelassen und fliegt auf direktem Weg nach Steyr.

– Ermitteln Sie die Koordinaten desjenigen Vektors (Pfeil von Anfangspunkt zu Endpunkt des Fluges), der die Flugstrecke der Taube beschreibt.

b) Eine Brieftaube fliegt von Ried i. I. in ihre Heimatstadt. Dieser Flug wird durch den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$ beschrieben.

– Lesen Sie die Heimatstadt dieser Brieftaube ab.
– Berechnen Sie den Betrag des Vektors $\vec{v}$.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Eine Taube startet in Linz. Sie fliegt eine Strecke von 67,08 km Länge in Richtung des Vektors $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

– Ermitteln Sie die Koordinaten desjenigen Vektors, den die Taube von Linz bis zu ihrem Ziel entlangfliegt. Geben Sie die Koordinaten dabei in den Längeneinheiten des obigen Koordinatensystems an.

d) Die Berechnung des Skalarprodukts zweier Vektoren im $\mathbb{R}^2$ ergibt: $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ a \end{pmatrix} = 0$

– Ermitteln Sie a.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Freistadt: $F = (8|6)$
Steyr: $S = (7|1)$
$\overrightarrow{FS} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix}$

b) Heimatstadt dieser Brieftaube: Freistadt (8|6)

$|\vec{v}| = \sqrt{8^2 + 3^2} = 8{,}544\ldots \approx 8{,}54$

c) Einheitsvektor: $\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$6{,}708 \cdot \vec{e} = \frac{6{,}708}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \approx 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix}$

d) $3 \cdot 2 + (-1) \cdot a = 0 \Rightarrow a = 6$

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für das richtige Ermitteln der Koordinaten des Vektors

b) 1 × C: für das richtige Ablesen der Heimatstadt (Name oder Koordinaten)
1 × B: für die richtige Berechnung des Betrags des Vektors

c) 1 × A: für einen richtigen Ansatz (Länge des Vektors muss verändert werden)
1 × B: für das richtige Ermitteln der Koordinaten des Vektors in den Längeneinheiten des gegebenen Koordinatensystems

d) 1 × A: für das richtige Ermitteln von a

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Skispringen (2)*

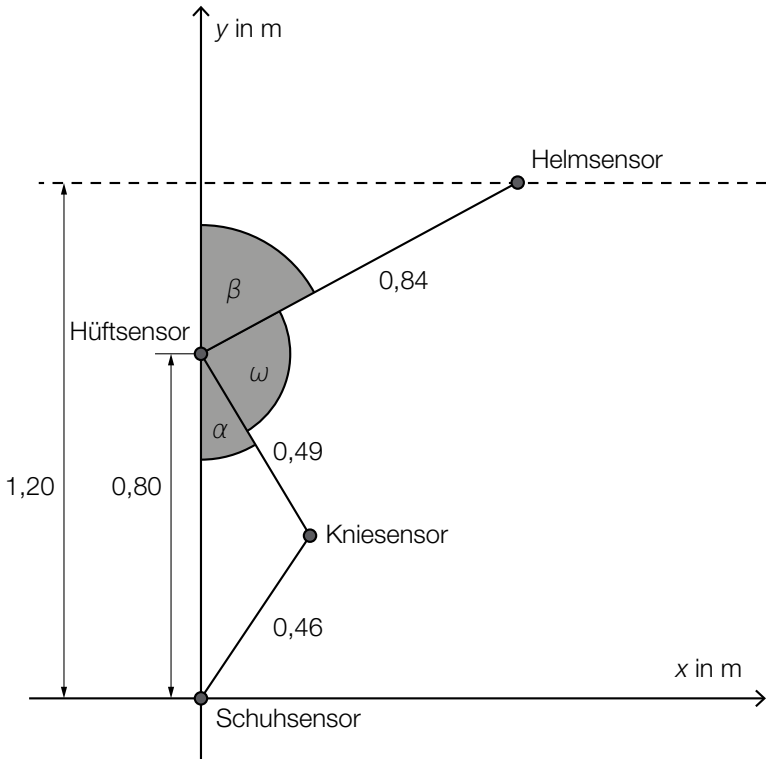
Aufgabennummer: B_380

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Für die Analyse eines Bewegungsablaufs beim Skispringen wurden 4 Sensoren an der Ausrüstung eines Skispringers befestigt.

1. Sensor: Schuh
2. Sensor: Knie
3. Sensor: Hüfte
4. Sensor: Helm

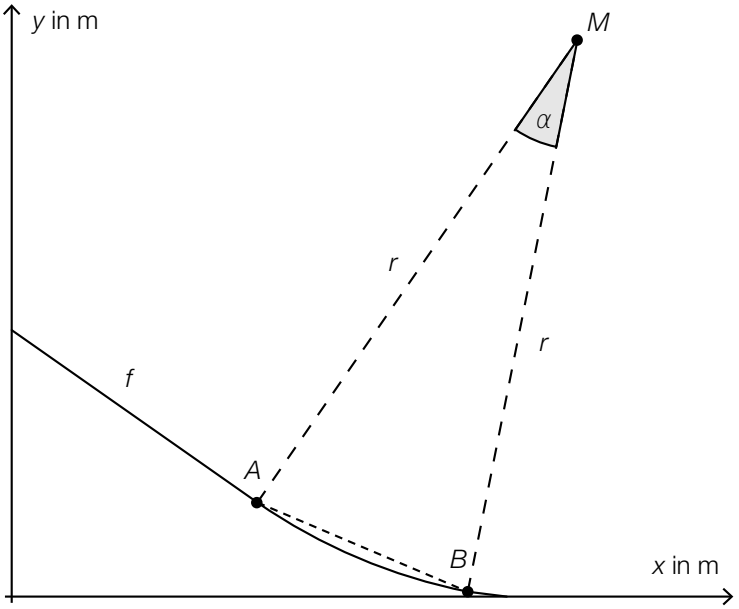
In der nachstehenden Abbildung sind die Positionen der Sensoren für eine Position im Bewegungsablauf des Skispringers in einem Koordinatensystem dargestellt (Angaben in Metern).



– Berechnen Sie den Winkel ω.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Der Anlauf der Mühlenkopfschanze in Willingen (Deutschland) ist in der nachstehenden Abbildung vereinfacht als Graph einer Funktion f dargestellt.



A und B sind Punkte eines Kreises mit Mittelpunkt M und Radius $r = 105{,}6$ m.
Die geradlinige Strecke AB hat eine Länge von 43,4 m.

– Berechnen Sie den Winkel α.
– Bestimmen Sie, um wie viel Prozent die Strecke AB kürzer als der Kreisbogen von A nach B ist.

c) Der Zusammenhang zwischen der Absprunggeschwindigkeit und der Sprungweite soll untersucht werden. Es wird vermutet, dass die Sprungweite linear von der Absprunggeschwindigkeit abhängt.

Es stehen folgende Messdaten zur Verfügung:

Absprunggeschwindigkeit in km/h	88,0	89,9	90,2	91,2	91,5	91,9	92,5
Sprungweite in m	110,0	112,5	113,7	115,8	116,6	118,7	120,0

– Bestimmen Sie für diese Datenpaare eine Gleichung der linearen Regressionsfunktion.
– Interpretieren Sie den Wert der Steigung dieser Regressionsfunktion im gegebenen Sachzusammenhang.

Möglicher Lösungsweg

a) $0{,}46^2 = 0{,}49^2 + 0{,}8^2 - 2 \cdot 0{,}49 \cdot 0{,}8 \cdot \cos(\alpha)$

$\alpha = \arccos\left(\frac{0{,}46^2 - 0{,}49^2 - 0{,}8^2}{-2 \cdot 0{,}49 \cdot 0{,}8}\right)$

$\alpha = 31{,}49\ldots°$

$\cos(\beta) = \frac{0{,}4}{0{,}84}$

$\beta = 61{,}56\ldots°$

$\omega = 180° - \alpha - \beta$

$\omega = 86{,}94\ldots° \approx 86{,}9°$

b) $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\frac{\overline{AB}}{2}}{r} = \frac{21{,}7}{105{,}6}$

$\alpha = 23{,}716\ldots°$

Kreisbogen b von A nach B:

$b = \frac{\alpha \cdot r \cdot \pi}{180°}$

$b = \frac{23{,}716\ldots° \cdot 105{,}6 \cdot \pi}{180°} = 43{,}711\ldots$

prozentueller Unterschied zwischen der Länge der Strecke AB und dem Kreisbogen b:

$\frac{43{,}711\ldots - 43{,}4}{43{,}711\ldots} = 0{,}00712\ldots \approx 0{,}71\ \%$

Die Streckenlänge $\overline{AB}$ ist um rund 0,71 % kürzer als der Kreisbogen b.

c) Ermittlung der Gleichung der Regressionsfunktion mittels Technologieeinsatz:

$f(x) = 2{,}3 \cdot x - 90{,}6$ *(Koeffizienten gerundet)*

x … Absprunggeschwindigkeit in km/h
$f(x)$ … Sprungweite bei einer Absprunggeschwindigkeit x in m

Wird die Absprunggeschwindigkeit um 1 km/h erhöht, so ist die Sprungweite gemäß dem Modell um rund 2,3 m größer.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für einen richtigen Lösungsansatz (z. B.: mittels Cosinussatz)
1 × B: für die richtige Berechnung des Winkels ω

b) 1 × B1: für die richtige Berechnung des Winkels α
1 × B2: für das richtige Bestimmen des prozentuellen Unterschieds

c) 1 × B: für das richtige Bestimmen der Gleichung der Regressionsfunktion
1 × C: für die richtige Interpretation im gegebenen Sachzusammenhang

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Statuen und Skulpturen (1)*

Aufgabennummer: B_378

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Das Maria-Theresien-Denkmal in Wien wird vermessen. Es werden die Höhenwinkel $\alpha = 45{,}38°$ und $\beta = 38{,}19°$ gemessen. Weiters ist die in der nachstehenden Abbildung eingetragene Länge bekannt.

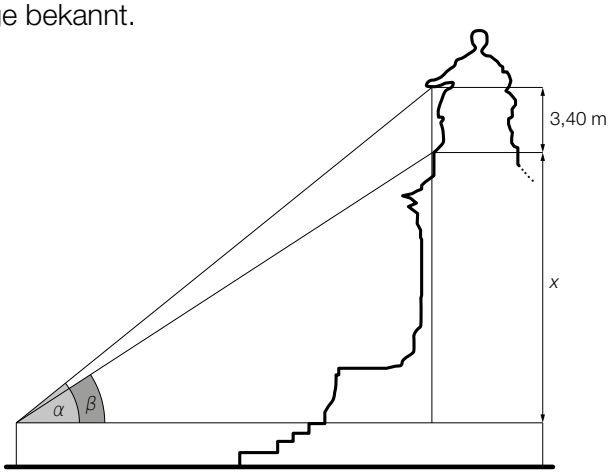
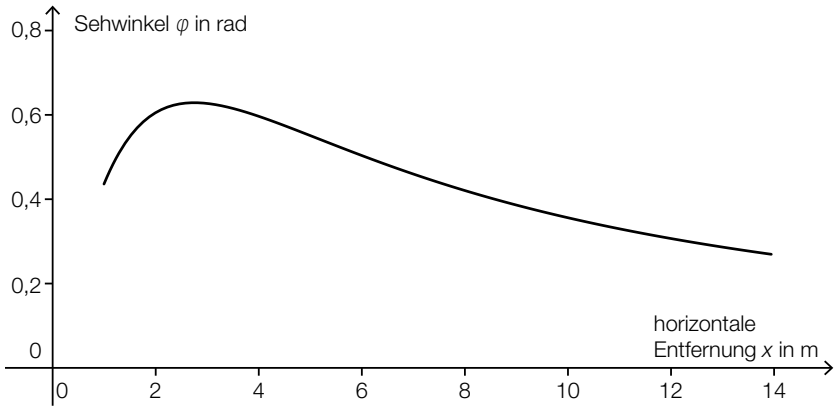


Abbildung nicht maßstabgetreu!

– Berechnen Sie die in der obigen Abbildung mit x bezeichnete Länge.

b) Eine Fotografin möchte eine auf einem Sockel stehende Skulptur unter dem größtmöglichen Sehwinkel fotografieren. Folgende Abbildung gibt zu jeder horizontalen Entfernung x zur Skulptur im Intervall [1; 14] den Sehwinkel φ an:



– Kennzeichnen Sie in der obigen Abbildung die horizontale Entfernung mit dem größtmöglichen Sehwinkel.
– Dokumentieren Sie in Worten, wie man vorgehen muss, um diese horizontale Entfernung mithilfe der Differenzialrechnung zu berechnen, wenn eine Gleichung der Funktion mit dem dargestellten Graphen bekannt ist.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Das Abschlusselement einer Säule soll aus Marmor hergestellt werden. Dieses kann durch Rotation des Graphen der Funktion f um die x-Achse beschrieben werden:

$f(x) = 4 - \frac{x}{2} - \sin(x)$ mit $0 \le x \le 5$

x, $f(x)$ … Koordinaten in Dezimetern (dm)

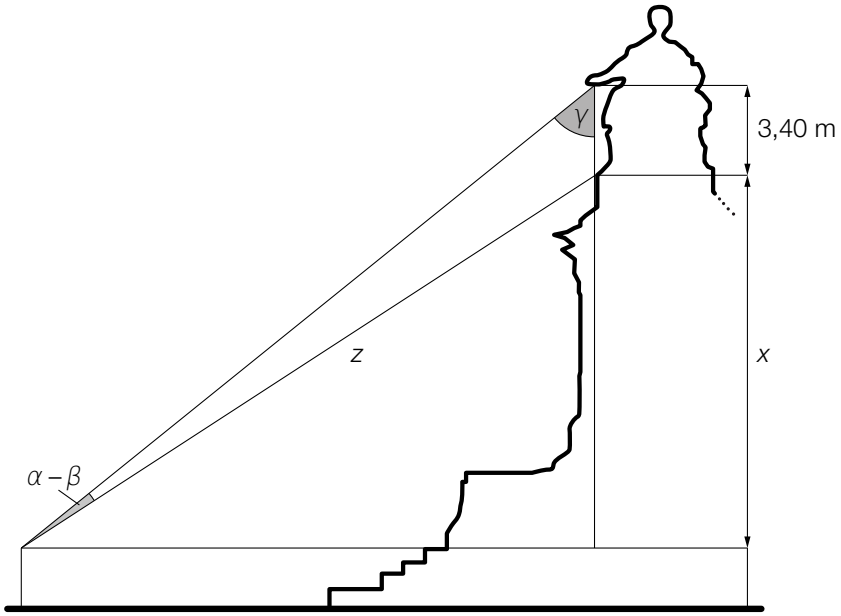
– Zeichnen Sie den Funktionsgraphen von f.
– Kennzeichnen Sie in Ihrer Darstellung den kleinsten und den größten Radius dieses Abschlusselements.

Die Dichte des verwendeten Marmors beträgt 2,7 kg/dm^3.

– Berechnen Sie die Masse des Abschlusselements.

Möglicher Lösungsweg

a)



$\gamma = 90° - \alpha = 44{,}62°$

$\alpha - \beta = 7{,}19°$

$$\frac{z}{\sin(44{,}62°)} = \frac{3{,}4}{\sin(7{,}19°)}$$

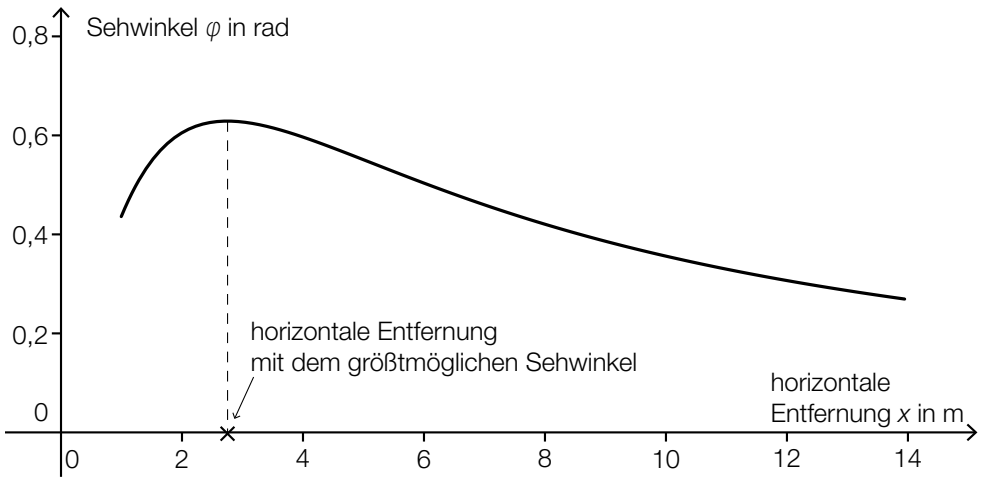
$z = 19{,}08\ldots$

$$\sin(38{,}19°) = \frac{x}{19{,}08\ldots}$$

$x = 11{,}797\ldots$

Die Länge x beträgt rund 11,80 m.

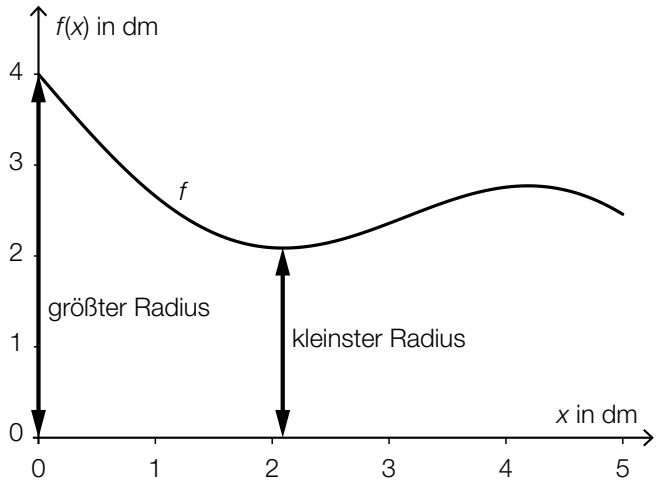
b)



Es muss die Maximumstelle der Funktion ermittelt werden. Daher bildet man die 1. Ableitung und berechnet deren Nullstellen. Diejenige Nullstelle, die im dargestellten Bereich liegt, ist die gesuchte Extremstelle.

Dass es nur eine solche Nullstelle im dargestellten Bereich gibt, geht aus dem Graphen hervor.

c)



$V = \pi \cdot \int_0^5 \left(4 - \frac{x}{2} - \sin(x)\right)^2 \mathrm{d}x = 109{,}78\ldots$

Die Masse (in kg) ist das Produkt aus Dichte (in kg/dm^3) und Volumen (in dm^3):
$2{,}7 \cdot 109{,}78\ldots = 296{,}41\ldots$
Die Masse beträgt rund 296,4 kg.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für einen richtigen Lösungsansatz (z. B. mithilfe des Sinussatzes)
1 × B: für die richtige Berechnung von x

b) 1 × C1: für das richtige Kennzeichnen in der Abbildung
1 × C2: für die richtige Dokumentation der Berechnung

c) 1 × B1: für die richtige Darstellung des Funktionsgraphen
1 × C: für das richtige Kennzeichnen der Radien
1 × A: für die richtige Verwendung des Volumsintegrals
1 × B2: für die richtige Berechnung der Masse

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

WhatsApp*

Aufgabennummer: B_356

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

WhatsApp ist ein Anwendungsprogramm für internetfähige Mobiltelefone zum Austausch von Nachrichten.

a) Zu Beginn des Jahres 2012 verzeichnete WhatsApp in einem Land 9,3 Millionen Nutzer/innen, zu Beginn des Jahres 2013 waren es 20 Millionen Nutzer/innen, zu Beginn des Jahres 2014 waren es 32 Millionen Nutzer/innen.

Jemand behauptet, dass für diesen Zeitraum ein exponentielles Wachstum vorliegt.

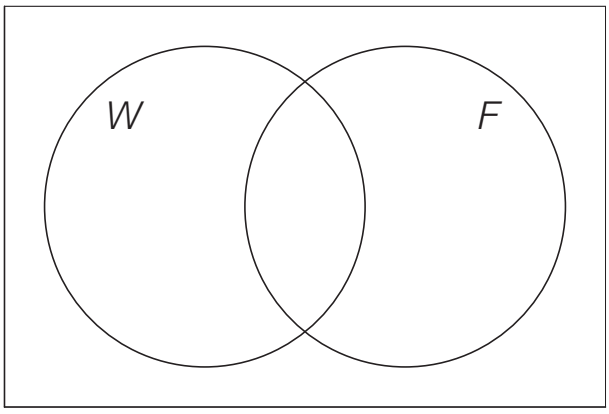
– Modellieren Sie mithilfe der Werte für 2012 und 2014 eine Exponentialfunktion A, die die Anzahl der WhatsApp-Nutzer/innen beschreibt.

t ... Zeit in Jahren, $t = 0$ entspricht dem Beginn des Jahres 2012
$A(t)$ ... Anzahl der WhatsApp-Nutzer/innen zur Zeit t in Millionen

– Berechnen Sie, innerhalb welcher Zeitspanne sich die Anzahl der Nutzer/innen in diesem Modell jeweils verdoppelt.
– Beurteilen Sie, ob dieses Modell den Wert für 2013 gut wiedergibt, wenn Abweichungen bis zu 1 Million Nutzerinnen/Nutzern toleriert werden.

b) In einer Klasse mit 28 Schülerinnen/Schülern wird erhoben, welche sozialen Netzwerke genutzt werden. 12 nutzen WhatsApp (W), 15 nutzen Facebook (F) und 4 keines dieser beiden.

– Vervollständigen Sie das nachstehende Mengendiagramm durch Eintragen der richtigen Anzahlen.

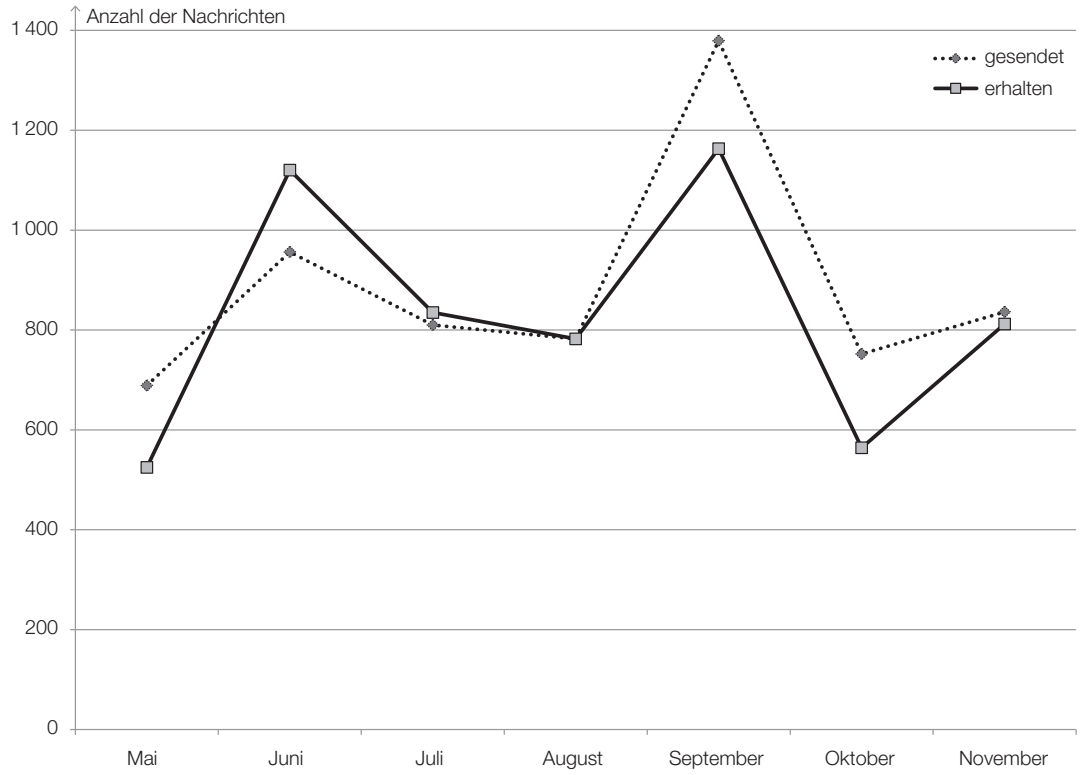


– Berechnen Sie, wie viel Prozent der Schüler/innen dieser Klasse sowohl WhatsApp als auch Facebook nutzen.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) WhatsApp bietet die Möglichkeit, das persönliche Nutzerverhalten statistisch zu erfassen.

Die Aktivitäten eines bestimmten Nutzers (Anzahl der gesendeten bzw. erhaltenen Nachrichten im jeweiligen Monat) auf WhatsApp können Sie der nachstehenden Abbildung entnehmen.



– Lesen Sie aus der oben stehenden Abbildung ab, wie viele Nachrichten der Nutzer im August und September insgesamt gesendet hat.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $A(t) = A_0 \cdot a^t$

$A_0 = 9{,}3$

$32 = 9{,}3 \cdot a^2 \Rightarrow a = \sqrt{\frac{32}{9{,}3}} = 1{,}85495\ldots$

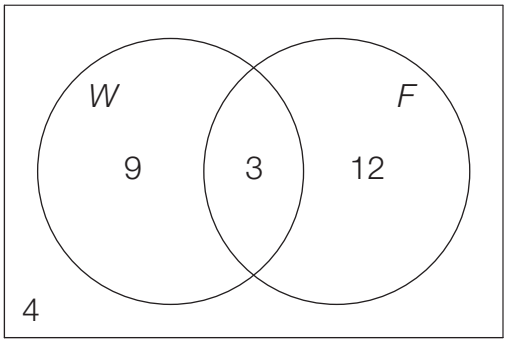
$2 \cdot A_0 = A_0 \cdot a^T \Rightarrow T = \frac{\ln(2)}{\ln(a)} = 1{,}121\ldots$

Die Anzahl der Nutzer/innen verdoppelt sich gemäß diesem Modell in jeweils rund 1,12 Jahren.

$A(1) = 17{,}25\ldots \approx 17{,}3$

Diesem Modell zufolge hätte es zu Beginn des Jahres 2013 in diesem Land rund 17,3 Millionen Nutzer/innen gegeben. Die Abweichung vom tatsächlichen Wert (20 Millionen) ist größer als 1 Million, daher eignet sich das Modell hier nicht gut.

b)



$\frac{3}{28} = 0{,}10714\ldots \approx 10{,}71\ \%$

Rund 10,71 % der Schüler/innen dieser Klasse nutzen sowohl WhatsApp als auch Facebook.

c) 780 + 1 380 = 2 160

Toleranzbereich: [2 100; 2 200]

Im August und September wurden insgesamt rund 2 160 Nachrichten gesendet.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Modellieren der Exponentialfunktion
1 × B: für die richtige Berechnung der Verdoppelungszeit
1 × D: für die richtige Beurteilung

b) 1 × A: für das richtige Vervollständigen des Mengendiagramms
1 × B: für die richtige Berechnung des Prozentsatzes

c) 1 × C: für das richtige Ablesen im Toleranzbereich [2 100; 2 200]

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Größe von Mädchen*

Aufgabennummer: B_353

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

In der nachstehenden Tabelle ist angegeben, wie groß Mädchen eines bestimmten Alters durchschnittlich sind.

Alter (in Jahren)	durchschnittliche Körpergröße (in Zentimetern)
0	51,5
1	74,0
2	85,4
3	95,4
4	102,8
5	109,5
6	115,3

a) – Stellen Sie die durchschnittliche Körpergröße in Abhängigkeit vom Alter in einem Koordinatensystem dar. Verwenden Sie dazu die Angaben aus der obigen Tabelle.

b) – Bestimmen Sie den absoluten Größenzuwachs im 3. Lebensjahr anhand der gegebenen Daten.
– Beschreiben Sie, was mit der folgenden Rechnung im gegebenen Sachzusammenhang ermittelt wird:

$$\frac{102{,}8 - 95{,}4}{95{,}4}$$

* ehemalige Klausuraufgabe

c) In der nachstehenden Tabelle sehen Sie, wie schwer Mädchen eines bestimmten Alters durchschnittlich sind.

Alter (in Jahren)	durchschnittliche Masse (in Kilogramm)
1	9,3
2	12,2
3	14,5
4	16,6
5	19,0
6	21,0

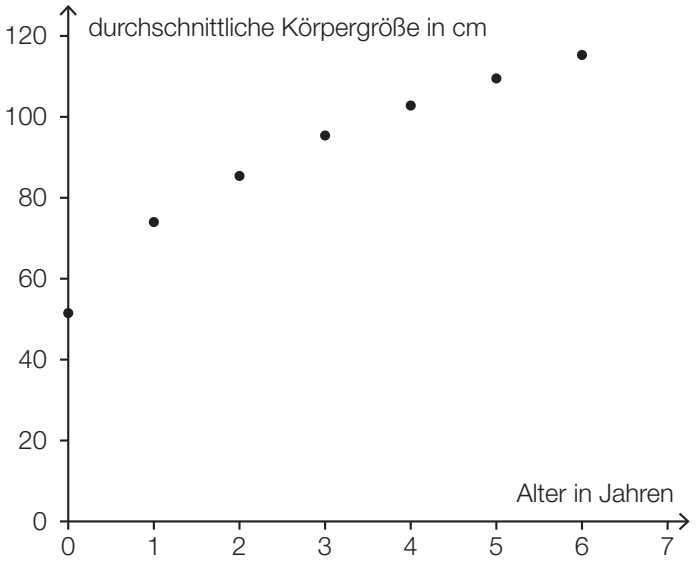
Aufgrund der gegebenen Daten kann man vermuten, dass die Abhängigkeit der durchschnittlichen Masse von der durchschnittlichen Körpergröße annähernd durch eine lineare Funktion beschrieben werden kann. Die Werte für die durchschnittliche Körpergröße entnehmen Sie der im Einleitungstext gegebenen Tabelle.

– Berechnen Sie den Korrelationskoeffizienten für den linearen Zusammenhang zwischen durchschnittlicher Körpergröße und durchschnittlicher Masse.
– Interpretieren Sie diesen Korrelationskoeffizienten.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



b) 95,4 – 85,4 = 10
Der absolute Größenzuwachs im 3. Lebensjahr beträgt 10 cm.

Es wird der relative Zuwachs der durchschnittlichen Körpergröße im 4. Lebensjahr ermittelt.

c) Berechnung des Korrelationskoeffizienten mittels Technologieeinsatz: $r \approx 0{,}9961$

Der Korrelationskoeffizient liegt nahe bei 1 und lässt daher einen starken positiven linearen Zusammenhang vermuten.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für die richtige grafische Darstellung

b) 1 × B: für das richtige Bestimmen des absoluten Größenzuwachses
1 × C: für die richtige Beschreibung im Sachzusammenhang

c) 1 × B: für die richtige Berechnung des Korrelationskoeffizienten
1 × C: für die richtige Interpretation des Korrelationskoeffizienten

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Staatseinnahmen und -ausgaben*

Aufgabennummer: B_352

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Die Statistik Austria gibt u. a. Auskunft über die Einnahmen und Ausgaben des Staates Österreich (vgl. Statistik Austria: Struktur der Einnahmen und Ausgaben des Staates, konsolidiert, Jahresdaten – erstellt am 30.09.2013).

a) Die folgende Tabelle gibt die Ausgaben des Staates Österreich für den Zeitraum von 2006 bis 2012 in Milliarden Euro an:

Jahr	Ausgaben in Mrd. Euro
2006	127,293
2007	133,180
2008	139,494
2009	145,333
2010	150,593
2011	151,881
2012	158,735

– Ermitteln Sie mit diesem Datensatz die Gleichung der Regressionsgeraden, die die Ausgaben in Abhängigkeit von der Zeit t in Jahren annähert. Wählen Sie $t = 0$ für das Jahr 2006.
– Beurteilen Sie mithilfe des Korrelationskoeffizienten, ob die Regressionsgerade ein geeignetes Modell darstellt, um die Entwicklung der Ausgaben zu beschreiben.
– Berechnen Sie anhand dieses Modells näherungsweise die Ausgaben im Jahr 2015.

b) Bei den Einnahmen aus Einkommen- und Vermögensteuern gab es besonders in den Jahren 2006 bis 2009 große Schwankungen.
Die folgende Tabelle gibt die prozentuelle Veränderung der Einnahmen aus Einkommen- und Vermögensteuern gegenüber dem jeweiligen Vorjahr an:

Jahr	2006	2007	2008	2009
Änderung	+6,0 %	+10,0 %	+8,1 %	–11,1 %

– Berechnen Sie die mittlere prozentuelle Änderung der Einnahmen aus Einkommen- und Vermögensteuern pro Jahr für den angegebenen Zeitraum.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Die Vermögenseinkommen auf der Einnahmenseite für die Jahre 1976 bis 2012 können näherungsweise durch die folgende quadratische Funktion V beschrieben werden:

$V(t) = -0{,}0027 \cdot t^2 + 0{,}1732 \cdot t + 0{,}8381$

t ... Anzahl der Jahre ab 1976, d. h., für das Jahr 1976 gilt: $t = 0$
$V(t)$ ... Vermögenseinkommen im Jahr t in Milliarden Euro

– Argumentieren Sie anhand der Funktionsgleichung, dass der Graph dieser Funktion einen Hochpunkt hat.
– Ermitteln Sie die Stelle dieses Maximums.
– Berechnen Sie das Integral $\int_0^{36} V(t)\,dt$.
– Interpretieren Sie den Wert dieses Integrals im gegebenen Sachzusammenhang.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Ermitteln der Gleichung der Regressionsgeraden mittels Technologieeinsatz:
$f(t) = 5{,}1 \cdot t + 128{,}5$

Ermitteln des Korrelationskoeffizienten mittels Technologieeinsatz: $r \approx 0{,}992$
Da der Korrelationskoeffizient sehr nahe bei 1 liegt, kann ein starker linearer Zusammenhang vermutet werden.

$f(9) = 174{,}39\ldots \approx 174{,}4$
Gemäß diesem Modell betragen die Staatsausgaben im Jahr 2015 rund € 174,4 Milliarden.

b) $\sqrt[4]{1{,}06 \cdot 1{,}1 \cdot 1{,}081 \cdot 0{,}889} - 1 = 0{,}02886\ldots \approx 2{,}89\ \%$
Die mittlere prozentuelle Änderung der Einnahmen aus Einkommen- und Vermögensteuern pro Jahr beträgt im angegebenen Zeitraum rund +2,89 %.

c) Da der Koeffizient $a = -0{,}0027$ negativ ist, ist der Graph dieser quadratischen Funktion eine nach unten geöffnete Parabel. Der Scheitel dieser Parabel ist daher ein Hochpunkt.

$V'(t) = -0{,}0054 \cdot t + 0{,}1732$
$V'(t) = 0 \Rightarrow t = 32{,}07\ldots \approx 32{,}1$

Berechnung mittels Technologieeinsatz: $\int_0^{36} V(t)\,dt = 100{,}4148$

Dieses Integral beschreibt näherungsweise die Summe der Vermögenseinkommen der Jahre 1976 bis 2012.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B1: für das richtige Ermitteln der Gleichung der Regressionsgeraden
1 × D: für die richtige Beurteilung mithilfe des Korrelationskoeffizienten
1 × B2: für die richtige Berechnung der Ausgaben im Jahr 2015

b) 1 × B: für die richtige Berechnung der mittleren prozentuellen Änderung pro Jahr

c) 1 × D: für die richtige Argumentation anhand der Funktionsgleichung
1 × B1: für die richtige Berechnung der Stelle des Maximums
1 × B2: für die richtige Berechnung des Integrals
1 × C: für die richtige Interpretation des Integrals im gegebenen Sachzusammenhang

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Höhenwachstum von Fichten*

Aufgabennummer: B_350

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Der Zusammenhang zwischen dem Alter und der durchschnittlichen Höhe von Fichten kann näherungsweise mithilfe einer Funktion h beschrieben werden:

$h(t) = a \cdot e^{-\frac{b}{t}}$

t ... Alter in Jahren
$h(t)$ ... durchschnittliche Höhe im Alter t in Metern (m)
$a > 0$ ... Parameter in m
$b > 0$ ... Parameter in Jahren

a) – Begründen Sie mathematisch, warum $e^{-\frac{b}{t}}$ für $t = 0$ nicht definiert ist.
– Begründen Sie mathematisch, warum die durchschnittliche Höhe in diesem Modell a nicht überschreiten kann.

Für einen 80-jährigen Fichtenbestand beträgt die durchschnittliche Höhe der Fichten 19,24 m. Der Parameter a ist gleich 28 m.

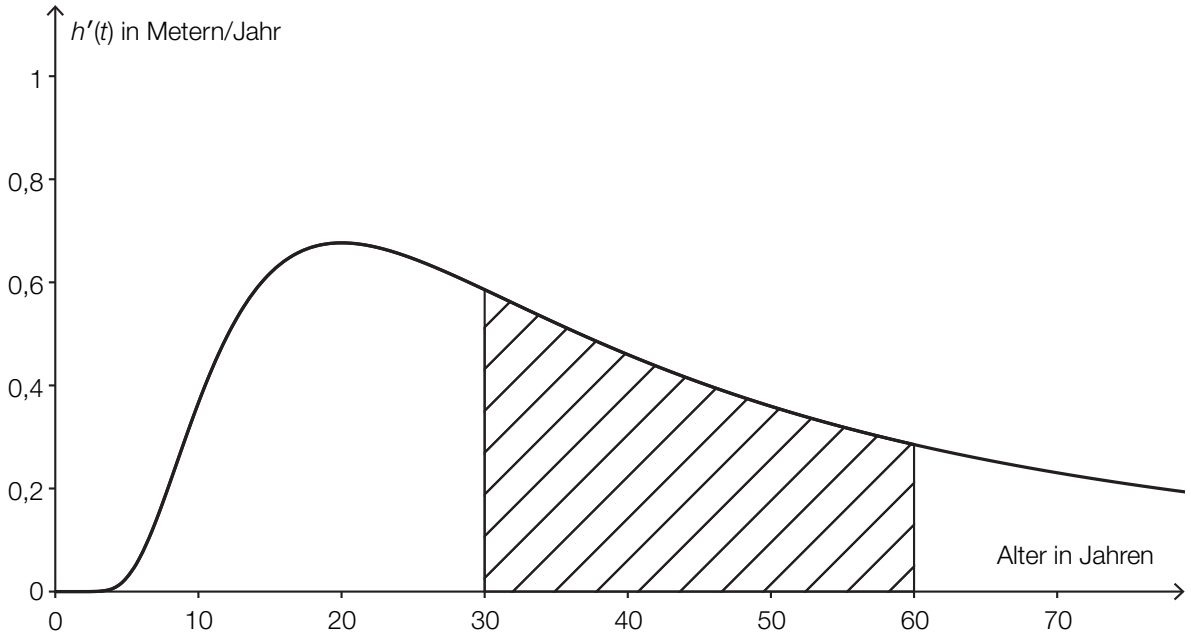
– Berechnen Sie den Parameter b.
– Berechnen Sie anhand dieses Modells, um wie viel Prozent die durchschnittliche Höhe in den nächsten 20 Jahren zunehmen wird.

b) Für einen Fichtenbestand gilt: $a = 60$ m, $b = 50$ Jahre.

– Zeichnen Sie den Graphen der Funktion h im Intervall [10; 70].
– Berechnen Sie die momentane Änderungsrate der durchschnittlichen Höhe für 40-jährige Fichten.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der momentanen Änderungsrate der durchschnittlichen Höhe eines Fichtenbestandes $h'(t)$ dargestellt.



– Interpretieren Sie die Bedeutung des Inhalts der schraffierten Fläche im gegebenen Sachzusammenhang.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Durch 0 kann nicht dividiert werden.

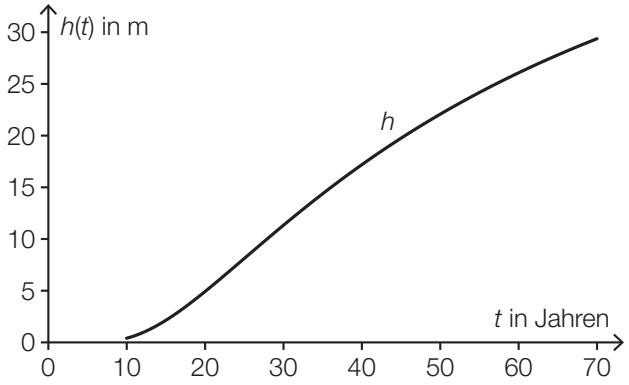
Für $b > 0$ und $t > 0$ ist $-\frac{b}{t}$ kleiner als 0 und daher $e^{-\frac{b}{t}}$ kleiner als 1. Daher gilt: $a \cdot e^{-\frac{b}{t}} < a$.

$19{,}24 = 28 \cdot e^{-\frac{b}{80}}$
Berechnung mittels Technologieeinsatz: $b = 30{,}0\ldots \approx 30$

$\frac{h(100) - h(80)}{h(80)} = 0{,}0779\ldots \approx 7{,}8\ \%$

Gemäß diesem Modell rechnet man in den nächsten 20 Jahren mit einer Zunahme der durchschnittlichen Höhe um rund 7,8 %.

b)



$h'(t) = \frac{3000}{t^2} \cdot e^{-\frac{50}{t}}$

$h'(40) = 0{,}537\ldots \approx 0{,}54$
Die momentane Änderungsrate der durchschnittlichen Höhe für 40-jährige Fichten beträgt rund 0,54 m pro Jahr.

c) Der Inhalt der schraffierten Fläche entspricht der Zunahme der durchschnittlichen Höhe dieses Fichtenbestands zwischen $t = 30$ Jahre und $t = 60$ Jahre.

Lösungsschlüssel

a) 1 × D1: für die richtige mathematische Begründung, warum die Funktion an der Stelle $t = 0$ nicht definiert ist
1 × D2: für die richtige mathematische Begründung, warum die durchschnittliche Höhe a nicht überschreiten kann
1 × B1: für die richtige Berechnung des Parameters b
1 × B2: für die richtige Berechnung des Prozentsatzes

b) 1 × B1: für das richtige Zeichnen des Funktionsgraphen im Intervall [10; 70]
1 × B2: für die richtige Berechnung der momentanen Änderungsrate der durchschnittlichen Höhe von 40-jährigen Fichten

c) 1 × C: für die richtige Interpretation im gegebenen Sachzusammenhang

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Renovierungskredit*

Aufgabennummer: B_349

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Frau Eberharter muss für die Renovierung ihrer Wohnung einen Kredit in Höhe von € 30.000 aufnehmen. Dazu holt sie verschiedene Angebote von Privatpersonen und von Banken ein. (Spesen und Gebühren werden nicht berücksichtigt.)

a) Eine Bekannte bietet Frau Eberharter privat einen Kredit in Höhe von € 30.000 zu einem Zinssatz von 2 % p. a. an.

Frau Eberharter soll diesen Kredit folgendermaßen zurückzahlen:
€ 8.000 nach einem Jahr und 2 gleich hohe Raten, eine davon nach 3 Jahren und die andere nach 4 Jahren.

– Stellen Sie diese Zahlungen auf einer Zeitachse dar.
– Berechnen Sie die Ratenhöhe.
– Erklären Sie, warum sich diese Ratenhöhe verringert, wenn beide Raten früher bezahlt werden.

b) Frau Eberharter recherchiert im Internet Angebote von Banken für Kredite in Höhe von € 30.000 mit einer Laufzeit von 60 Monaten.

Eine Bank bietet einen Kredit mit einer monatlichen Rate in Höhe von € 559,11 bei einem Zinssatz von 4,58 % p. a.

– Ermitteln Sie den zugehörigen monatlichen Zinssatz.
– Überprüfen Sie nachweislich, ob es sich um eine vorschüssige oder eine nachschüssige Ratenzahlung handelt.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Eine Bank bietet Frau Eberharter einen Kredit in Höhe von € 30.000 an, den sie in 10 nachschüssigen Halbjahresraten in Höhe von je € 3.480 zurückzahlen muss.

Für diesen Kredit kann Frau Eberharter einen Annuitätenzuschuss bei der Landesregierung beantragen, d. h., 10 % jeder Halbjahresrate werden vom Land übernommen.

– Berechnen Sie die Höhe der Halbjahresraten, die Frau Eberharter unter Berücksichtigung des Annuitätenzuschusses bezahlen muss.
– Ermitteln Sie den effektiven Jahreszinssatz, der sich für Frau Eberharter unter Berücksichtigung des Annuitätenzuschusses ergibt.
– Ermitteln Sie die Höhe desjenigen Annuitätenzuschusses in Euro, bei dem sich für Frau Eberharter ein effektiver Jahreszinssatz von null Prozent ergeben würde.

d) Frau Eberharter vereinbart für einen Kredit mit einer Bank Sonderkonditionen. Die Bank erstellt dazu einen Tilgungsplan. Ein Auszug dieses Tilgungsplans ist in der nachstehenden Tabelle dargestellt.

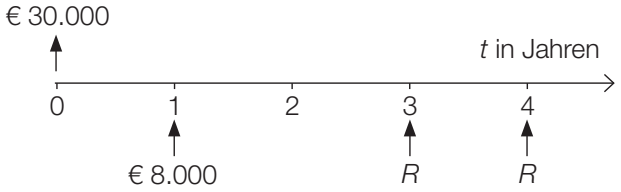
Semester	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0				€ 30.000,00
1	€ 660,00	€ –660,00	€ 0,00	€ 30.660,00
2	€ 674,52	€ 0,00	€ 674,52	€ 30.660,00
3	€ 674,52	€ 5.325,48	€ 6.000,00	€ 25.334,52

– Interpretieren Sie die Bedeutung der beiden auftretenden Beträge in Höhe von € 0,00 im gegebenen Sachzusammenhang.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a)



$30\,000 = 8\,000 \cdot 1{,}02^{-1} + R \cdot 1{,}02^{-3} + R \cdot 1{,}02^{-4}$
$R = 11\,872{,}921\ldots$

Die Ratenhöhe beträgt € 11.872,92.

Wenn die Raten früher bezahlt werden, wird die ausstehende Kreditsumme über eine kürzere Zeitspanne verzinst. Daher sind die Raten niedriger.

b) $i_{12} = \sqrt[12]{1 + 0{,}0458} - 1 = 0{,}0037388\ldots$

Der zugehörige monatliche Zinssatz beträgt rund 0,3739 %.

$$B_{nach} = 559{,}11 \cdot \frac{1}{(1 + i_{12})^{60}} \cdot \frac{(1 + i_{12})^{60} - 1}{i_{12}} = 30\,000{,}132\ldots$$
$B_{vor} = B_{nach} \cdot (1 + i_{12}) = 30\,112{,}297\ldots$

Es handelt sich um eine nachschüssige Ratenzahlung.

c) $3\,480 \cdot 0{,}9 = 3\,132$

Unter Berücksichtigung des Annuitätenzuschusses muss Frau Eberharter Halbjahresraten in Höhe von € 3.132 bezahlen.

$$30\,000 = 3\,132 \cdot \frac{1}{(1 + i_2)^{10}} \cdot \frac{(1 + i_2)^{10} - 1}{i_2}$$

Lösung mittels Technologieeinsatz: $i_2 = 0{,}007906\ldots$
$i = (1 + i_2)^2 - 1 = 0{,}01587\ldots \approx 1{,}59\ \%$

Der effektive Jahreszinssatz beträgt rund 1,59 %.

Die Verzinsung beträgt 0 %, wenn die Halbjahresraten $\frac{€\ 30.000}{10}$ = € 3.000 betragen. Dafür muss zur vereinbarten Halbjahresrate von € 3.480 ein Zuschuss in Höhe von € 480 gewährt werden.

d) Im Semester 1 erfolgt keine Rückzahlung. Im Semester 2 werden nur die anfallenden Zinsen zurückbezahlt.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Darstellen auf einer Zeitachse
1 × B: für die richtige Berechnung der Ratenhöhe
1 × D: für die richtige Erklärung

b) 1 × B: für das richtige Ermitteln des zugehörigen monatlichen Zinssatzes
1 × D: für die richtige Überprüfung

c) 1 × B1: für die richtige Berechnung der Höhe der Halbjahresraten unter Berücksichtigung des Annuitätenzuschusses
1 × B2: für das richtige Ermitteln des effektiven Jahreszinssatzes
1 × B3: für das richtige Ermitteln der Höhe des Annuitätenzuschusses

d) 1 × C: für die richtige Interpretation im gegebenen Sachzusammenhang

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Sportartikel*

Aufgabennummer: B_348

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Für einen Sportartikel lassen sich die Produktionskosten mithilfe der linearen Funktion K beschreiben:

$K(x) = 25 \cdot x + 300$

x ... Anzahl der produzierten Mengeneinheiten (ME)
$K(x)$ ... Kosten für x ME in Geldeinheiten (GE)

Die Kapazitätsgrenze liegt dabei bei 50 ME.
Das Produkt kann zu einem Preis von 40 GE/ME verkauft werden.

– Erklären Sie, warum der maximale Gewinn hier nicht mithilfe der Differenzialrechnung ermittelt werden kann.
– Berechnen Sie den maximalen Gewinn.

b) Die Fixkosten für die Erzeugung eines bestimmten Sportartikels betragen 2 900 GE. Die Kostenkehre liegt bei 5 ME. Die Gesamtkosten bei einer Produktionsmenge von 5 ME betragen 3 100 GE. Bei einer Produktionsmenge von 9 ME betragen die Gesamtkosten 3 252,80 GE.
Der Kostenverlauf soll mithilfe einer Kostenfunktion K mit $K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ beschrieben werden.

– Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten dieser Kostenfunktion.
– Berechnen Sie die Koeffizienten dieser Kostenfunktion.

* ehemalige Klausuraufgabe

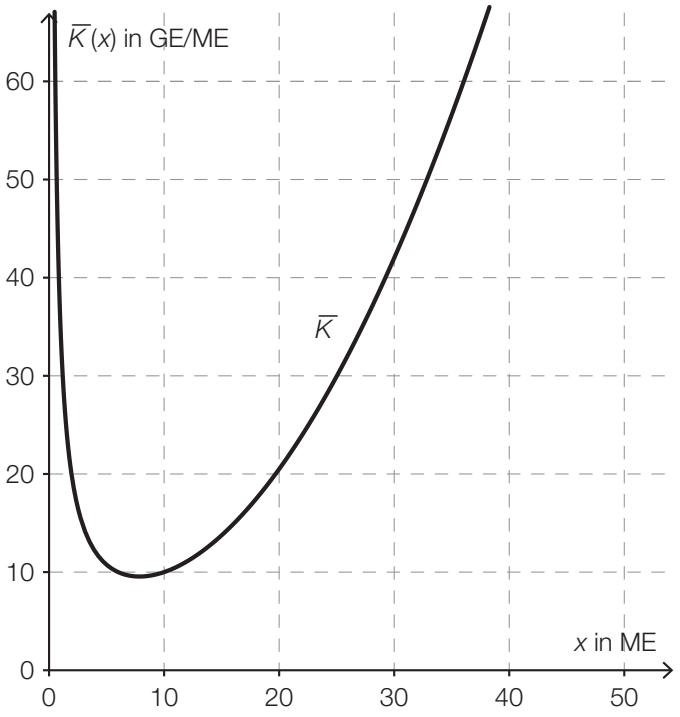
c) Für die Grenzkostenfunktion K' eines anderen Sportartikels gilt:

$K'(x) = 0{,}15 \cdot x^2 - 0{,}6 \cdot x + 5$

Die Fixkosten betragen 30 GE.

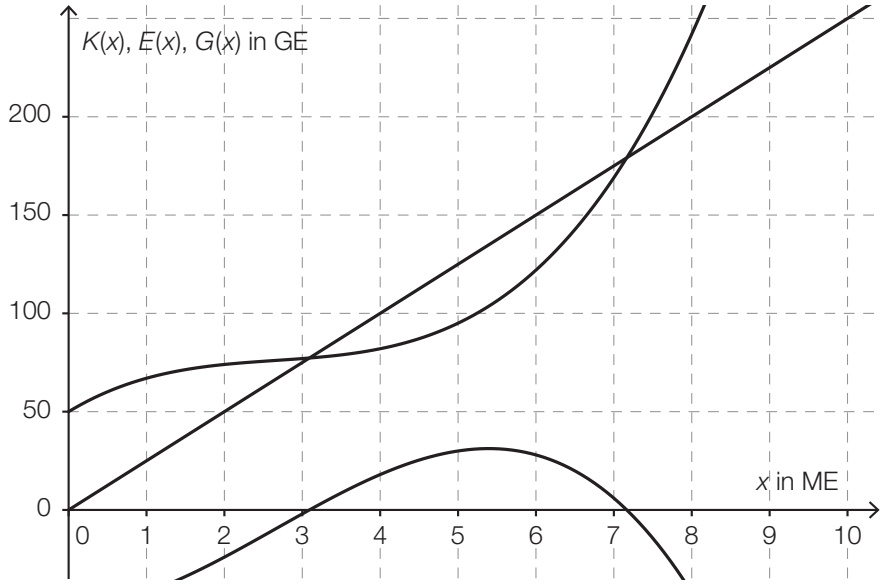
– Ermitteln Sie die zugehörige Kostenfunktion K.

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der zugehörigen Stückkostenfunktion $\overline{K}$ dargestellt.



– Lesen Sie das Betriebsoptimum ab.

d) Die Graphen einer Kostenfunktion K, einer Erlösfunktion E und der zugehörigen Gewinnfunktion G sind im nachstehenden Diagramm dargestellt.



– Beschriften Sie im obigen Diagramm diese 3 dargestellten Graphen.
– Stellen Sie die Gleichung der Erlösfunktion E mithilfe des Diagramms auf.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Die Gewinnfunktion ist im gegebenen Fall eine lineare Funktion mit positiver Steigung. Sie nimmt ihren maximalen Funktionswert am rechten Rand des Definitionsbereichs (Kapazitätsgrenze) an.

$G(x) = 40 \cdot x - (25 \cdot x + 300)$
$G(50) = 450$
Der maximale Gewinn beträgt 450 GE.

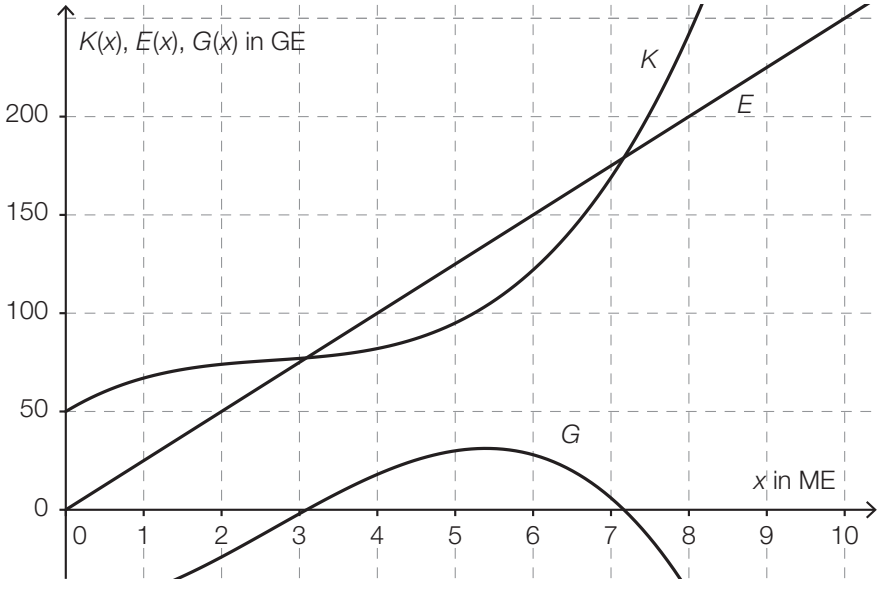
b) I. $K(0) = 2900$
II. $K''(5) = 0$
III. $K(5) = 3100$
IV. $K(9) = 3252{,}80$

Lösen dieses Gleichungssystems mittels Technologieeinsatz:
$a = 0{,}2$; $b = -3$; $c = 50$; $d = 2900$

c) $K(x) = \int K'(x)\,dx = 0{,}05 \cdot x^3 - 0{,}3 \cdot x^2 + 5 \cdot x + C$
$K(0) = 30 \Rightarrow C = 30$
$K(x) = 0{,}05 \cdot x^3 - 0{,}3 \cdot x^2 + 5 \cdot x + 30$

Betriebsoptimum: rund 8 ME
Toleranzbereich: [7 ME; 9 ME]

d)



$E(x) = 25 \cdot x$

Lösungsschlüssel

a) 1 × D: für die richtige Erklärung
(Auch eine Argumentation, dass die Gewinnfunktion keine lokalen Extremstellen hat, an denen die Tangentensteigung null ist, ist zulässig.)
1 × B: für die richtige Berechnung des maximalen Gewinns

b) 1 × A1: für das richtige Aufstellen der Gleichung mithilfe der Information zur Kostenkehre
1 × A2: für das richtige Aufstellen der 3 Gleichungen mithilfe der Informationen zu den Kosten
1 × B: für die richtige Berechnung der Koeffizienten

c) 1 × A: für das richtige Ermitteln der Kostenfunktion
1 × C: für das richtige Ablesen des Betriebsoptimums im Toleranzbereich [7 ME; 9 ME]

d) 1 × C: für die richtige Beschriftung der 3 dargestellten Funktionsgraphen
1 × A: für das richtige Aufstellen der Gleichung der Erlösfunktion

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Vektorgrafiken*

Aufgabennummer: B_347

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Eine Vektorgrafik besteht im Gegensatz zur Pixelgrafik nicht aus einzelnen Bildpunkten (Pixeln), sondern wird durch geometrische Primitive (Linie, Kreis, Polygone, Splines …) definiert.

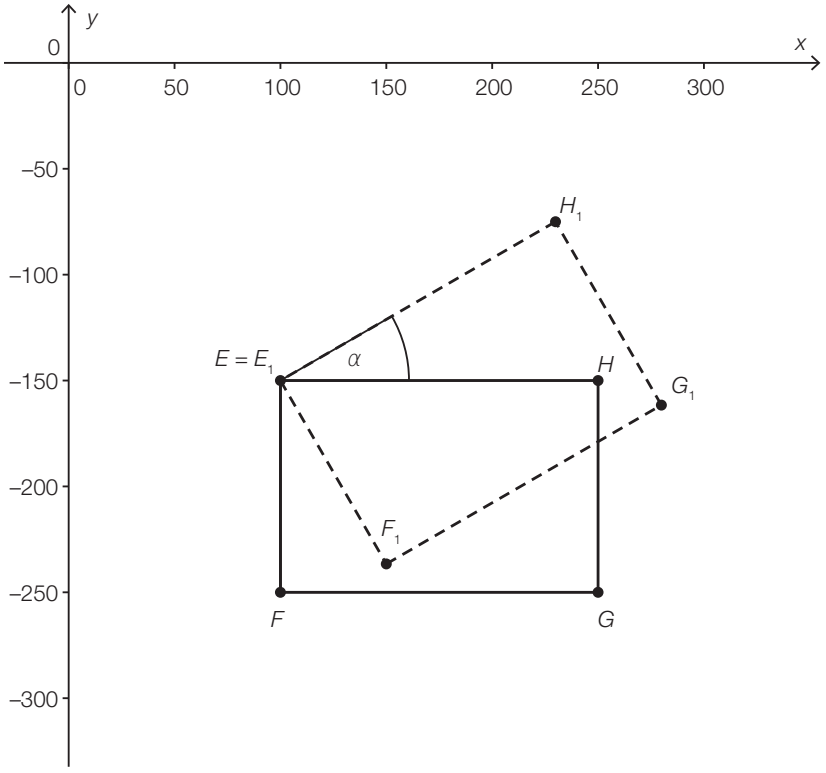
a) Rechtecke können in einer Vektorgrafik durch Angabe der Eckpunkte als geschlossene Streckenzüge definiert werden.
Es gibt zwei Rechtecke *ABCD* mit:

- $A = (50|{-100})$ und $B = (250|{-250})$ sind zwei benachbarte Eckpunkte.
- Die Seite *BC* ist halb so lang wie die Seite *AB*.

– Berechnen Sie die Koordinaten des Punkts *C* für eines dieser Rechtecke.

b) Ein Vorteil von Vektorgrafiken ist, dass geometrische Transformationen sehr einfach und ohne Qualitätsverlust durchgeführt werden können.

Das in der nachstehenden Grafik dargestellte Rechteck $E_1F_1G_1H_1$ entstand aus dem Rechteck *EFGH* durch Drehung um den Eckpunkt $E = (100|{-150})$ gegen den Uhrzeigersinn.



– Zeigen Sie rechnerisch unter Verwendung der Punkte $E = (100|{-150})$, $H = (250|{-150})$ und $H_1 = (230|{-75})$, dass der Drehwinkel gerundet 30° beträgt.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) – Zeigen Sie, dass der Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} -a_y \\ a_x \end{pmatrix}$ ein Normalvektor des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ ist.

d) Splines sind stückweise zusammengesetzte Funktionen, deren Graphen knickfrei ineinander übergehen. Knickfrei bedeutet, dass die Funktionen an den Stellen, an denen sie zusammenstoßen, den gleichen Funktionswert und die gleiche Steigung haben.

Ein kubischer Spline, der aus 2 Funktionen 3. Grades zusammengesetzt ist, ist für das Intervall [0; 2] folgendermaßen definiert:

$s_0(x) = -\frac{2}{3} \cdot x^3 + \frac{5}{3} \cdot x$ für $0 \le x \le 1$

$s_1(x) = \frac{4}{3} \cdot (x-1)^3 - 2 \cdot (x-1)^2 - \frac{1}{3} \cdot (x-1) + 1$ für $1 \le x \le 2$

– Zeigen Sie, dass der Übergang von s_0 auf s_1 knickfrei erfolgt.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 200 \\ -150 \end{pmatrix}$

Normalvektor zu $\overrightarrow{AB}$ mit halber Länge: $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 75 \\ 100 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 325 \\ -150 \end{pmatrix}$

Der Punkt C hat die Koordinaten $(325|-150)$.

Auftragen des Normalvektors in die andere Richtung ist ebenfalls zulässig. Man erhält dann: C = (175|–350).

b) $\overrightarrow{EH} = \begin{pmatrix} 150 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{EH_1} = \begin{pmatrix} 130 \\ 75 \end{pmatrix}$

$$\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{EH_1}}{|\overrightarrow{EH}| \cdot |\overrightarrow{EH_1}|} \Rightarrow \alpha = 29{,}98\ldots° \approx 30°$$

c) Für das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{n}$ gilt:

$$\vec{a} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a_y \\ a_x \end{pmatrix} = -a_x \cdot a_y + a_y \cdot a_x = 0$$

Da das Skalarprodukt der beiden Vektoren 0 ist, stehen sie normal aufeinander.

d) $s_0(1) = s_1(1) = 1$

$s_0'(x) = -2 \cdot x^2 + \frac{5}{3} \Rightarrow s_0'(1) = -\frac{1}{3}$

$s_1'(x) = 4 \cdot x^2 - 12 \cdot x + \frac{23}{3} \Rightarrow s_1'(1) = -\frac{1}{3}$

Die beiden Funktionen haben also an der Stelle $x = 1$ den gleichen Funktionswert und die gleiche Steigung, der Übergang ist also knickfrei.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für die richtige Modellbildung (Ermitteln des Normalvektors mit halber Länge)
1 × B: für die richtige Berechnung der Koordinaten des Punkts C für eines dieser Rechtecke

b) 1 × B: für den richtigen rechnerischen Nachweis

c) 1 × D: für einen richtigen Nachweis

d) 1 × D: für den richtigen Nachweis (Funktionswert und Steigung)

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

LED-Lampen (5)*

Aufgabennummer: B_346

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Traditionelle Glühlampen wurden wegen ihrer geringen Energieeffizienz in der EU schrittweise verboten. Als Alternative zu den Glühlampen bieten Hersteller LED-Lampen an.

a) Die Helligkeit einer LED-Lampe kann mithilfe des Lichtstroms beschrieben werden.
In der nachstehenden Tabelle ist für LED-Lampen verschiedener Leistung der jeweilige Lichtstrom angegeben.

Leistung in Watt	3	4	5	6	9,5	11	17
Lichtstrom in Lumen	130	250	280	350	600	800	1 000

Der Lichtstrom soll in Abhängigkeit von der Leistung beschrieben werden.

– Ermitteln Sie die Gleichung der zugehörigen linearen Regressionsfunktion.
– Berechnen Sie mithilfe dieser Regressionsfunktion, welcher Lichtstrom für eine 15-Watt-LED-Lampe zu erwarten ist.

b) Laut einem Ratgeber für LED-Lampen kann der Lichtstrom von 12-Watt-LED-Lampen als annähernd normalverteilt mit $\sigma = 75$ Lumen angenommen werden.
Für 8 zufällig ausgewählte Lampen wurde jeweils der Lichtstrom (in Lumen) gemessen.

1 053	900	984	873	838	1 045	960	955

– Ermitteln Sie den 95-%-Vertrauensbereich für den Erwartungswert μ.
– Zeigen Sie anhand der entsprechenden Formel, warum für eine normalverteilte Grundgesamtheit mit bekanntem σ gilt: Wird der Stichprobenumfang vervierfacht, so halbiert sich die Breite des $(1-\alpha)$-Vertrauensbereichs für den Erwartungswert μ.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

a) Ermitteln der Gleichung der linearen Regressionsfunktion mittels Technologieeinsatz:

$f(x) = 63{,}97 \cdot x - 20{,}06$

x … Leistung in Watt (W)
$f(x)$ … Lichtstrom bei der Leistung x in Lumen (lm)

$f(15) = 939{,}5... \approx 940$
Gemäß diesem Modell ist für eine 15-Watt-LED-Lampe ein Lichtstrom von rund 940 lm zu erwarten.

b) Zweiseitigen 95-%-Vertrauensbereich mithilfe der Normalverteilung bestimmen:

$\bar{x} \pm u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Berechnung von $\bar{x}$ mittels Technologieeinsatz: $\bar{x} = 951$ Lumen
$\sigma = 75$ Lumen
$n = 8$
$\alpha = 5\ \%$
$u_{0{,}975} = 1{,}959...$
Daraus ergibt sich folgender Vertrauensbereich in Lumen: $899 \leq \mu \leq 1003$.

Der Ausdruck $u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ bestimmt die Breite des Vertrauensbereichs.

Eine Vervierfachung des Stichprobenumfangs n bedeutet für die Breite:

$u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{4n}} = u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{2 \cdot \sqrt{n}} = \frac{1}{2} \cdot u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Lösungsschlüssel

a) 1 × B1: für das richtige Ermitteln der linearen Regressionsfunktion
1 × B2: für die richtige Berechnung des Lichtstroms einer 15-Watt-LED-Lampe

b) 1 × A: für die Verwendung des richtigen Modells (Vertrauensbereich mithilfe der Normalverteilung)
1 × B: für die richtige Berechnung des Vertrauensbereichs
1 × D: für den richtigen Nachweis

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Roboter (2)*

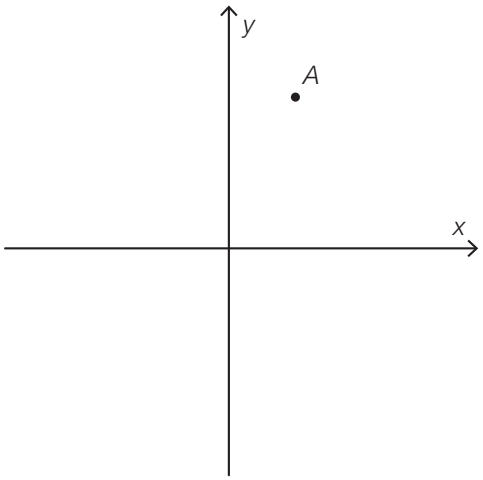
Aufgabennummer: B_345

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Roboterbewegungen werden mithilfe der Vektorrechnung modelliert.

Folgende Anweisung zur Verschiebung eines Punktes ist vorgegeben:
„Der Punkt A wird um einen Vektor $\vec{s}$ mit den Komponenten $s_x > 0$ und $s_y < 0$ in den Punkt B verschoben."

– Veranschaulichen Sie diese Anweisung, indem Sie einen möglichen Vektor $\vec{s}$ und den entsprechenden Punkt B im nachstehenden Koordinatensystem einzeichnen.



b) – Zeigen Sie, dass der Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} -a_y \\ a_x \end{pmatrix}$ ein Normalvektor des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ ist.

c) Die Spitze eines Roboterarms bewegt sich geradlinig vom Punkt $C = (1|-2|3)$ zum Punkt $D = (5|-3|2)$. Dort ändert sich die Bewegungsrichtung geringfügig und die Spitze bewegt sich geradlinig zum Punkt $E = (10|-4|0)$.

– Berechnen Sie den Winkel, um den die Bewegungsrichtung geändert wurde.

* ehemalige Klausuraufgabe

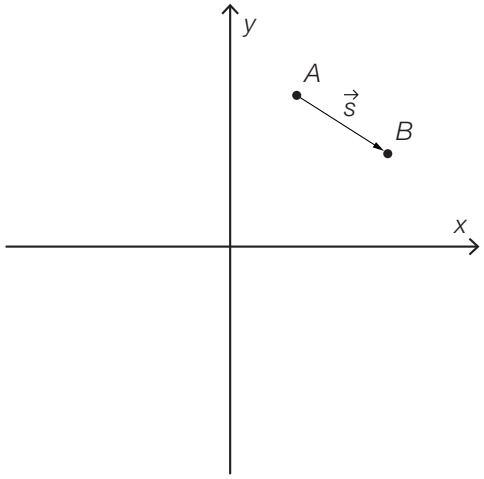
d) Für Schweißroboter werden Schweißelektroden benötigt.
Ein Unternehmen liefert Elektroden, deren Längen annähernd normalverteilt mit $\mu = 300$ mm und $\sigma = 5$ mm sind.
Man entnimmt einer umfangreichen Lieferung eine Zufallsstichprobe von 20 Schweißelektroden.

– Ermitteln Sie den zum Erwartungswert symmetrischen Zufallsstreubereich, in dem der Stichprobenmittelwert mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % liegt.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Zum Beispiel:



b) Für das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{n}$ gilt:

$$\vec{a} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a_y \\ a_x \end{pmatrix} = -a_x \cdot a_y + a_y \cdot a_x = 0$$

Da das Skalarprodukt der beiden Vektoren 0 ist, stehen sie normal aufeinander.

c) $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\cos(\varphi) = \frac{\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{DE}}{|\overrightarrow{CD}| \cdot |\overrightarrow{DE}|} \Rightarrow \varphi = 8{,}205...° \approx 8{,}21°$$

Der Winkel, um den die Bewegungsrichtung geändert wurde, beträgt rund 8,21°.

d) Zweiseitigen 95-%-Zufallsstreubereich mithilfe der Normalverteilung bestimmen:

$$300 \pm u_{0{,}975} \cdot \frac{5}{\sqrt{20}}$$

$u_{0{,}975} = 1{,}959…$

Daraus ergibt sich folgender Zufallsstreubereich in mm: [297,81; 302,19].

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für eine richtige Veranschaulichung im Koordinatensystem

b) 1 × D: für einen richtigen Nachweis

c) 1 × B: für die richtige Berechnung des Winkels φ

d) 1 × A: für die Verwendung des richtigen Modells (Zufallsstreubereich für einen Stichprobenmittelwert mithilfe der Normalverteilung)
1 × B: für das richtige Ermitteln des Zufallsstreubereichs

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Atemvolumen*

Aufgabennummer: B_343

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Das Atemvolumen in der Lunge einer Person in Abhängigkeit von der Zeit kann näherungsweise durch eine Funktion V beschrieben werden:

$V(t) = 3 + A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$ mit $A > 0$, $\omega > 0$, $-\pi < \varphi \leq \pi$

t ... Zeit in Sekunden (s)
$V(t)$ ... Atemvolumen zur Zeit t in Litern (L)

Zu Beginn des Einatemvorgangs ist das Atemvolumen minimal und beträgt 2,75 L. Nach 2 s wird das maximale Volumen erreicht.

– Bestimmen Sie A, ω und φ.

b) Das Atemvolumen einer anderen Person in Abhängigkeit von der Zeit kann näherungsweise durch eine Funktion V, deren Ableitung bekannt ist, beschrieben werden:

$V'(t) = 0{,}4 \cdot \sin(1{,}6 \cdot t)$

t ... Zeit in Sekunden (s)
$V'(t)$ ... momentane Änderungsrate des Atemvolumens zur Zeit t in Litern pro Sekunde (L/s)

Zur Zeit $t = 0$ beträgt das Atemvolumen 2,4 L.

– Ermitteln Sie die Funktion V.

c) In der nachstehenden Tabelle ist die jeweilige momentane Änderungsrate des Atemvolumens $V'(t)$ in Litern pro Sekunde zu bestimmten Zeitpunkten t einer Atmungsphase einer Person angegeben.

t in s	0,0	0,5	1,5	2,5	3,0
$V'(t)$ in L/s	0,00	0,33	0,49	0,29	0,00

– Stellen Sie die Messpunkte in einem Koordinatensystem dar.
– Ermitteln Sie für diese Atmungsphase eine quadratische Ausgleichsfunktion.
– Begründen Sie, warum es sich bei diesem Vorgang um eine Einatmungsphase handelt.

* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

a) $A = 3 - 2{,}75 = 0{,}25$

$\omega = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

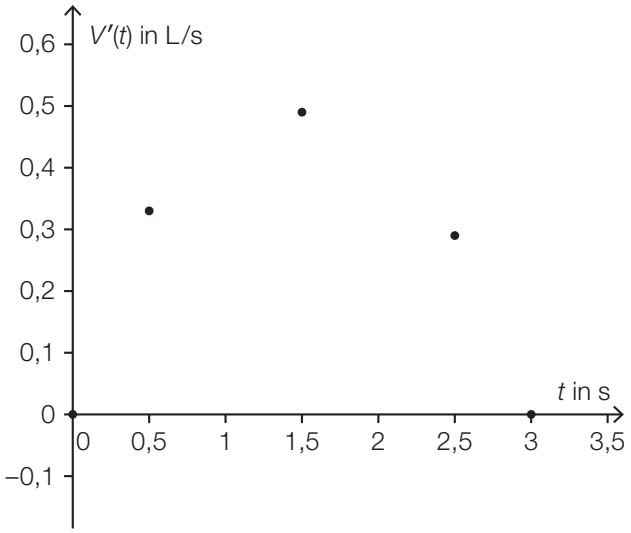
$V(0) = 3 + 0{,}25 \cdot \sin(\omega \cdot 0 + \varphi)$
$\sin(\omega \cdot 0 + \varphi) = -1 \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2}$

Der Beginn des Einatemvorgangs könnte auch mit $t \neq 0$ angesetzt werden. Die diesem Ansatz entsprechende Lösung für φ ist dann als richtig zu werten.

b) $V(t) = \int (0{,}4 \cdot \sin(1{,}6 \cdot t))\,dt$
$V(t) = -0{,}25 \cdot \cos(1{,}6 \cdot t) + C$

$V(0) = 2{,}4 \Rightarrow 2{,}4 = -0{,}25 + C \Rightarrow C = 2{,}65$
$V(t) = -0{,}25 \cdot \cos(1{,}6 \cdot t) + 2{,}65$

c)



Ermitteln der Ausgleichsfunktion mittels Technologieeinsatz:

$V'(t) = -0{,}22 \cdot t^2 + 0{,}67 \cdot t + 0{,}018$

Es handelt sich um eine Einatmungsphase, weil die momentane Änderungsrate des Atemvolumens im betrachteten Intervall immer positiv ist.

Lösungsschlüssel

a) 1 × C: für das richtige Angeben des Parameters A
1 × A1: für das richtige Angeben des Parameters ω
1 × A2: für das richtige Angeben des Parameters φ
Der Beginn des Einatemvorgangs könnte auch mit $t \neq 0$ angesetzt werden. Die diesem Ansatz entsprechende Lösung für φ ist dann als richtig zu werten.

b) 1 × A: für eine richtige Modellbildung (unbestimmtes Integral)
1 × B: für das richtige Ermitteln der Funktion unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung

c) 1 × B1: für die richtige Darstellung der Messpunkte
1 × B2: für das richtige Ermitteln der quadratischen Ausgleichsfunktion
1 × D: für die richtige Begründung

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Förderbänder*

Aufgabennummer: B_342

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

In der automatisierten Fertigung werden Werkstücke auf Förderbändern bewegt.

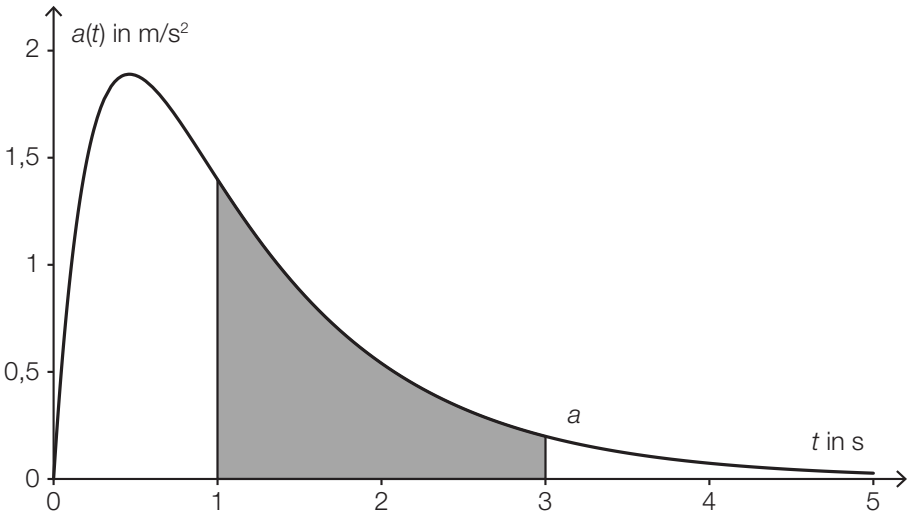
a) Die Bewegung eines Werkstücks wird für $t \geq 0$ näherungsweise durch die Funktion s beschrieben:

$s(t) = 0{,}4 \cdot e^{-4 \cdot t} - 0{,}1 \cdot e^{-t} + 0{,}5$

t ... Zeit in Sekunden (s)
$s(t)$ ... Entfernung zu einem Bezugspunkt zur Zeit t in Metern (m)

– Beschreiben Sie die Bedeutung von $s'(0)$ im gegebenen Sachzusammenhang.
– Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Werkstücks zu demjenigen Zeitpunkt, zu dem die Beschleunigung null ist.

b) Die Beschleunigung eines Werkstücks wird für $t \geq 0$ näherungsweise durch die Funktion a beschrieben.
Der Graph der Funktion a ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



– Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung des Inhalts A der markierten Fläche.

$A =$ _____

– Interpretieren Sie die Bedeutung dieses Flächeninhalts im gegebenen Sachzusammenhang.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Die Geschwindigkeit eines Werkstücks wird für $t \geq 0$ näherungsweise durch die Funktion v beschrieben:

$v(t) = 1{,}3 \cdot \sin(20 \cdot t)$

t ... Zeit in Sekunden
$v(t)$ ... Geschwindigkeit zur Zeit t in m/s

Für die 1. Ableitung von v gilt:
$v'(t) = 26 \cdot \cos(20 \cdot t)$

– Beschreiben Sie anhand der Ableitungsregeln, wodurch der Faktor 26 der Ableitungsfunktion v' zustande kommt.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $s'(0)$ ist die Geschwindigkeit des Werkstücks zum Zeitpunkt $t = 0$ s.

$s''(t) = 6{,}4 \cdot e^{-4 \cdot t} - 0{,}1 \cdot e^{-t}$
$s''(t) = 0 \Rightarrow t = \ln(4)$
$s'(\ln(4)) = 0{,}01875$

Die Geschwindigkeit beträgt 0,01875 m/s.

b) $A = \int_1^3 a(t)\,dt$

Dieser Flächeninhalt entspricht der Zunahme der Geschwindigkeit zwischen $t = 1$ s und $t = 3$ s.

c) Anwendung von Faktorregel und Kettenregel

oder:

Multiplikation des Faktors 1,3 mit der inneren Ableitung

Lösungsschlüssel

a) 1 × C: für die richtige Beschreibung im gegebenen Sachzusammenhang
1 × A: für die richtige Modellbildung zur Berechnung der Geschwindigkeit (z. B. über die Nullstelle der 2. Ableitung oder einen grafischen Lösungsansatz)
1 × B: für das richtige Bestimmen der Geschwindigkeit zum Zeitpunkt mit Beschleunigung null

b) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel
1 × C: für die richtige Interpretation des Flächeninhalts im gegebenen Sachzusammenhang

c) 1 × C: für das richtige Angeben der beiden Ableitungsregeln oder die richtige Beschreibung

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Fertigbetonelement mit dreieckiger Grundfläche*

Aufgabennummer: B_341

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Die Grundfläche eines Fertigbetonelements hat die Form eines Dreiecks mit den Seiten a, b und c, von dem die folgenden Informationen bekannt sind:

- Der Umfang beträgt 150 cm.
- Die Seite c ist doppelt so lang wie die Seite a.
- Die Seite b ist um 10 cm länger als die Seite a.

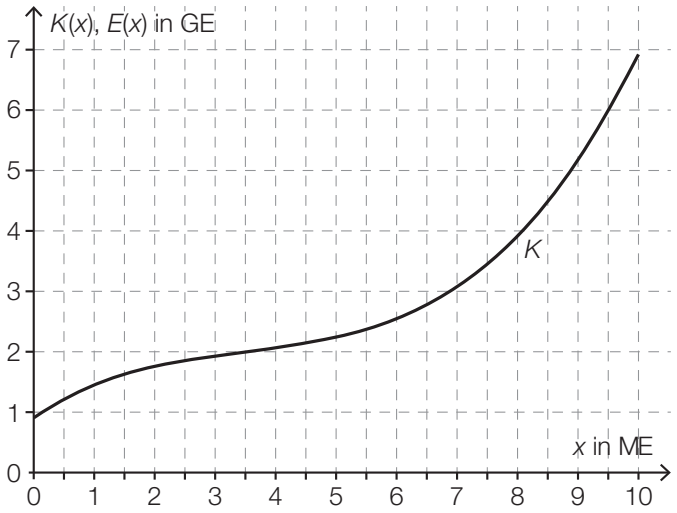
– Erstellen Sie ein Gleichungssystem mit den Unbekannten a, b und c, um die Seitenlängen des angegebenen Dreiecks zu bestimmen.
– Berechnen Sie die Seitenlängen des Dreiecks.
– Berechnen Sie den größten Winkel in diesem Dreieck.

b) Bei einer Produktion von Fertigbetonelementen ist die Kostenfunktion näherungsweise eine Polynomfunktion 3. Grades.
Das Produkt wird zu einem fixen Preis pro Mengeneinheit verkauft.

– Erklären Sie, warum die Stelle des maximalen Gewinns unabhängig von den Fixkosten ist.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) In der nachstehenden Abbildung ist der Funktionsgraph einer Kostenfunktion K dargestellt. Das Produkt wird zu einem fixen Preis pro Mengeneinheit (ME) verkauft.



– Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den Graphen derjenigen Erlösfunktion ein, für die die untere Grenze des Gewinnbereichs bei 3,5 ME liegt.
– Geben Sie an, zu welchem Preis pro ME das Produkt in diesem Fall verkauft werden muss.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

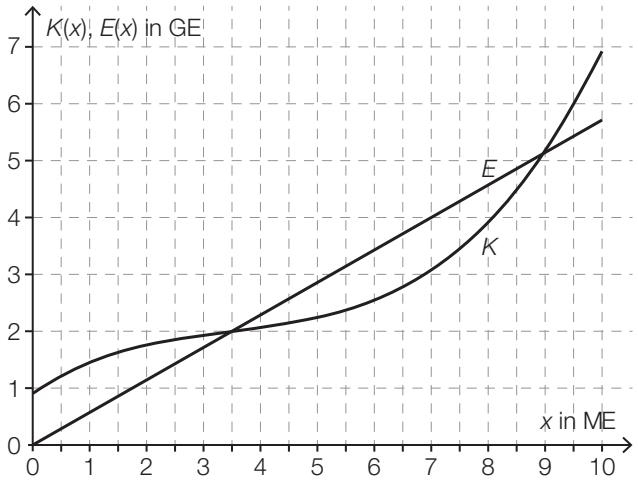
a) $a + b + c = 150$
$c = 2 \cdot a$
$b = a + 10$

Lösung des Gleichungssystems mittels Technologieeinsatz:
$a = 35$ cm
$b = 45$ cm
$c = 70$ cm

Der größte Winkel des Dreiecks γ liegt gegenüber von c:
$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma) \Rightarrow \gamma = 121{,}58\ldots° \approx 121{,}6°$

b) Die Änderung der Fixkosten entspricht der Addition bzw. Subtraktion einer konstanten Funktion zur Gewinnfunktion. Sie bewirkt eine vertikale Verschiebung des Graphen, wodurch sich die Maximumstelle nicht verändert.

c)



Aus dem Graphen der Erlösfunktion liest man beispielsweise ab, dass 3,5 ME um insgesamt 2 GE verkauft werden. Der Preis pro ME ist daher rund 0,57 GE.
Toleranzbereich: [0,54; 0,60]

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Erstellen des Gleichungssystems
1 × B1: für die richtige Berechnung der Seitenlängen
1 × B2: für die richtige Berechnung des größten Winkels

b) 1 × D: für eine richtige Erklärung

c) 1 × A1: für das richtige Einzeichnen des Graphen der Erlösfunktion
1 × A2: für die richtige Angabe des Preises pro ME im Toleranzbereich [0,54; 0,60]

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Abbau von Arzneimitteln*

Aufgabennummer: B_340

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Bei der Einnahme von Arzneimitteln gelangen Wirkstoffe über den Verdauungstrakt in den Blutkreislauf, wo diese dann abgebaut werden.

a) Nach Einnahme einer Tablette kann die Wirkstoffmenge im Blut näherungsweise durch die Funktion m beschrieben werden:

$m(t) = 20 \cdot (1 - e^{-0{,}05 \cdot t}) - 0{,}125 \cdot t$ mit $t \geq 0$

t … Zeit nach der Einnahme in Minuten (min)
$m(t)$ … Wirkstoffmenge im Blut zur Zeit t in Milligramm (mg)

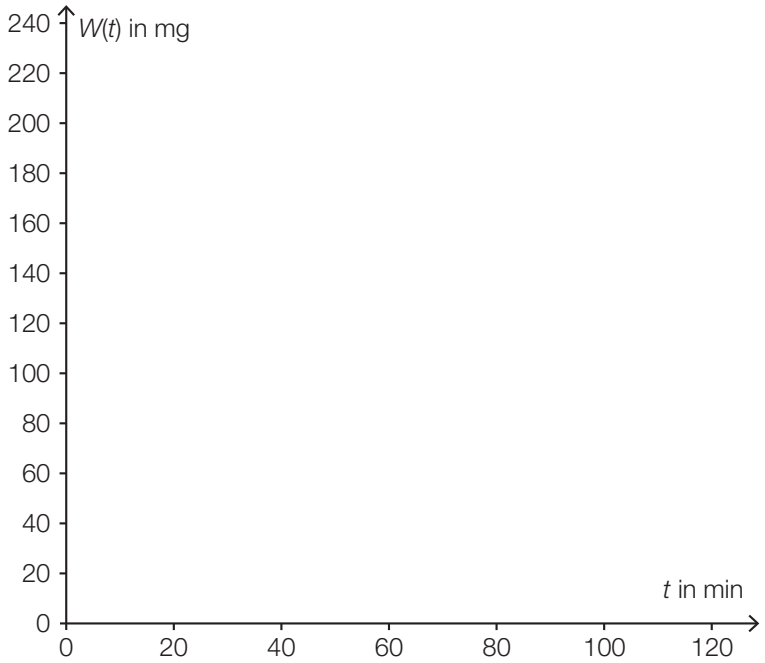
– Ermitteln Sie, zu welchem Zeitpunkt der Wirkstoff vollständig abgebaut ist.
– Berechnen Sie, zu welchem Zeitpunkt die momentane Änderungsrate der Wirkstoffmenge im Blut 0,5 mg/min beträgt.
– Argumentieren Sie mithilfe der Differenzialrechnung, dass die Funktion m negativ gekrümmt ist.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Zur näherungsweisen Beschreibung des Abbaus eines Arzneimittels können lineare oder exponentielle Modelle verwendet werden.

Zu Beginn (t = 0 min) sind 200 mg des Wirkstoffs im Blut, nach 120 Minuten ist nur noch ein Achtel dieser Menge vorhanden.

– Veranschaulichen Sie den Verlauf des linearen Modells im nachstehenden Diagramm.



– Ermitteln Sie die Halbwertszeit desjenigen exponentiellen Modells, das diesen Abbau beschreibt, in Minuten.
– Veranschaulichen Sie den Verlauf des exponentiellen Modells unter Verwendung der ermittelten Halbwertszeit im obigen Diagramm.
– Erklären Sie, für welches der beiden Modelle zu jedem Zeitpunkt gilt: $\frac{dW}{dt} = -\frac{35}{24}$.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

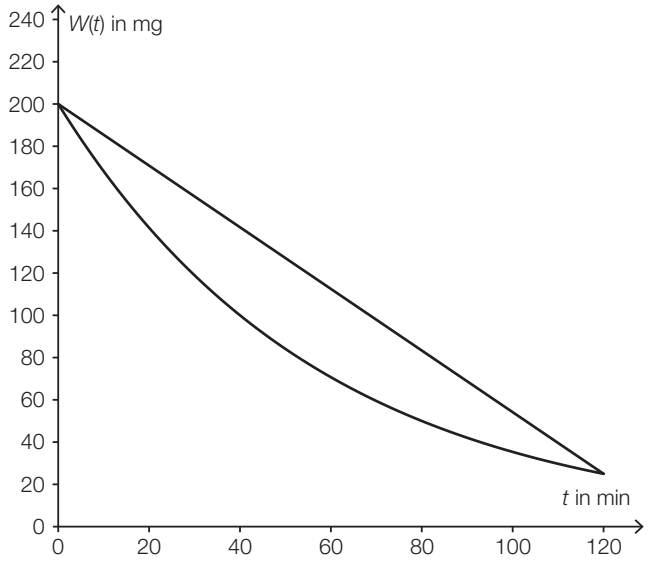
a) Lösung der Gleichung mittels Technologieeinsatz:
$m(t) = 0$
$t = 159{,}9... \approx 160$

Nach etwa 160 Minuten ist der Wirkstoff vollständig abgebaut.

$m'(t) = e^{-0{,}05 \cdot t} - 0{,}125$
Lösung der Gleichung $m'(t) = 0{,}5$ mittels Technologieeinsatz: $t = 9{,}40... \approx 9{,}4$
Nach etwa 9,4 Minuten beträgt die momentane Änderungsrate der Wirkstoffmenge im Blut 0,5 mg/min.

Da die 2. Ableitung $m''(t) = -0{,}05 \cdot e^{-0{,}05 \cdot t}$ eine Exponentialfunktion vom Typ $a \cdot e^{\lambda \cdot x}$ mit $a < 0$ ist, sind alle Funktionswerte dieser 2. Ableitung negativ. Daher ist die Funktion m im gesamten Definitionsbereich negativ gekrümmt.

b) $\frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \Rightarrow 120 = 3 \cdot T_{1/2} \Rightarrow T_{1/2} = 40$ min



Die angegebene momentane Änderungsrate ist konstant. Es handelt sich daher um das lineare Modell.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B1: für das richtige Ermitteln desjenigen Zeitpunkts, zu dem der Wirkstoff vollständig abgebaut ist
1 × B2: für die richtige Berechnung desjenigen Zeitpunkts, zu dem die momentane Änderungsrate der Wirkstoffmenge im Blut 0,5 mg/min beträgt
1 × D: für die richtige Argumentation

b) 1 × A1: für das richtige Veranschaulichen des linearen Modells
1 × B: für das richtige Ermitteln der Halbwertszeit in Minuten
1 × A2: für das richtige Veranschaulichen des exponentiellen Modells unter Verwendung der Halbwertszeit
1 × D: für die richtige Erklärung

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Wassergefäße*

Aufgabennummer: B_313

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Zur Beschreibung der Form eines Wassergefäßes kann eine Funktion f mit $f(x) = a \cdot (x - b)^4 + c$ verwendet werden.

Man kennt von dieser Funktion folgende Eigenschaften:

Der Funktionsgraph ist symmetrisch bezüglich der y-Achse und enthält die Punkte (25|60) und (0|0).

– Begründen Sie, warum $c = 0$ ist.
– Begründen Sie, warum $b = 0$ ist.
– Berechnen Sie den Koeffizienten a.

b) Die Form eines Wassergefäßes kann durch Rotation des Graphen der Funktion mit folgender Gleichung um die y-Achse beschrieben werden:

$y = 0{,}0001421 \cdot x^4$ mit $x \geq 0$

x, y ... Längen in cm

Der obere Rand des Gefäßes hat einen Radius von 30 cm.
Das Gefäß wird bis zum oberen Rand gefüllt.

– Berechnen Sie das Volumen in Litern.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

a) Da der Punkt (0|0) auf dem Funktionsgraphen liegt, ist $c = 0$. Da der Graph symmetrisch bezüglich der y-Achse ist, muss $b = 0$ sein.

$$a \cdot 25^4 = 60 \;\Rightarrow\; a = \frac{12}{78125} = 0{,}0001536$$

b) Höhe des Gefäßes: $H = 0{,}0001421 \cdot 30^4 = 115{,}101$

$$V = \int_0^H \pi \cdot x^2 \,\mathrm{d}y = \int_0^H \pi \cdot \sqrt[2]{\frac{y}{0{,}0001421}}\,\mathrm{d}y = 216960{,}\ldots$$

$V \approx 216960\ \mathrm{cm}^3 \approx 217$ Liter

Lösungsschlüssel

a) 1 × D1: für die richtige Begründung, warum $c = 0$ ist
1 × D2: für die richtige Begründung, warum $b = 0$ ist
1 × B: für die richtige Berechnung des Koeffizienten a

b) 1 × A1: für den richtigen Ansatz zur Berechnung des Volumens
1 × A2: für das richtige Angeben der Integralgrenzen
1 × B: für die richtige Berechnung des Volumens in Litern

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Volumen eines Baumes*

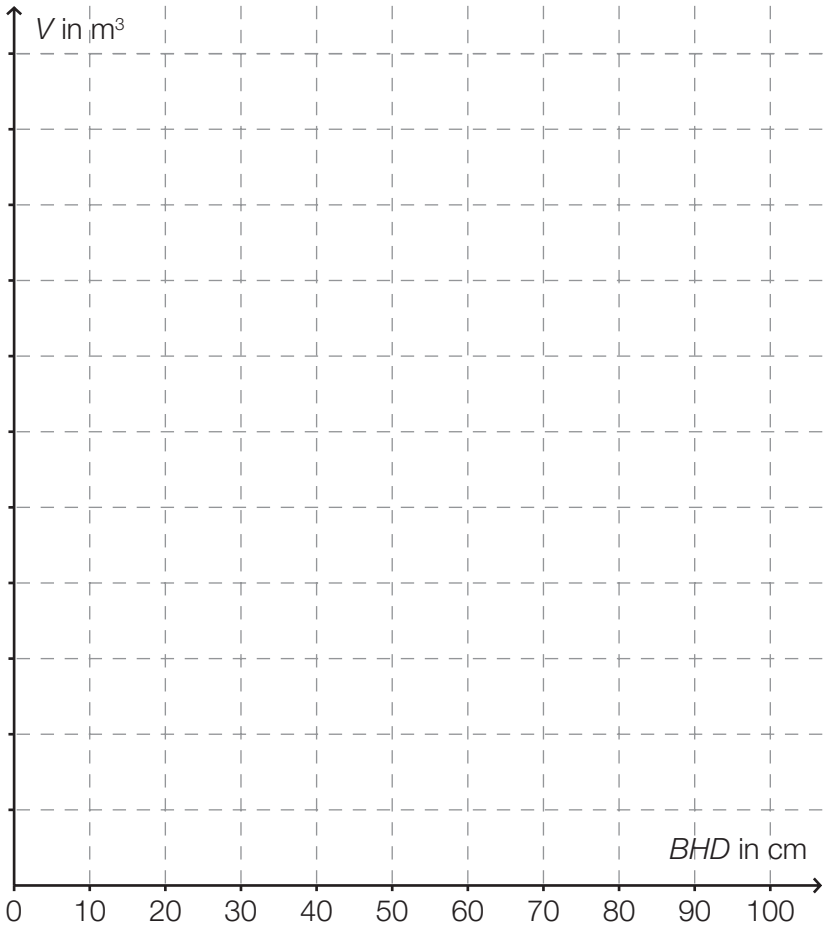
Aufgabennummer: B_310

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Die Ermittlung des Volumens eines Baumstamms kann auf verschiedene Weisen erfolgen.

a) Näherungsweise kann das Volumen eines stehenden Baums folgendermaßen ermittelt werden:
„Man misst den Brusthöhendurchmesser in cm (= Durchmesser des Baums in 1,3 m Höhe), multipliziert diese Zahl mit sich selbst und teilt das Ergebnis durch 1 000. Die Maßzahl des Ergebnisses ist die Maßzahl des Volumens eines Baums in m^3."

– Übertragen Sie diesen Zusammenhang in eine Formel. Benutzen Sie dazu die Bezeichnungen *BHD* (Brusthöhendurchmesser) und *V* (Volumen).
– Stellen Sie das Volumen *V* eines Baums in Abhängigkeit von seinem Brusthöhendurchmesser *BHD* im Intervall [0; 100] im unten stehenden Diagramm dar. Verwenden Sie eine geeignete Skalierung der senkrechten Achse.



* ehemalige Klausuraufgabe

b) Die *erweiterte Formel von Denzin* bietet eine Möglichkeit, das Volumen eines Baums näherungsweise zu berechnen. Als Formel angeschrieben lautet sie (für eine bestimmte Baumart):

$$V = \frac{BHD^2}{1\,000} \cdot \frac{3 \cdot h + 25}{100}$$

BHD ... Durchmesser in 1,3 Metern Höhe („Brusthöhendurchmesser“) in Zentimetern (cm)
h ... Höhe des Baums in Metern (m)
V ... Volumen des Baums in Kubikmetern (m^3)

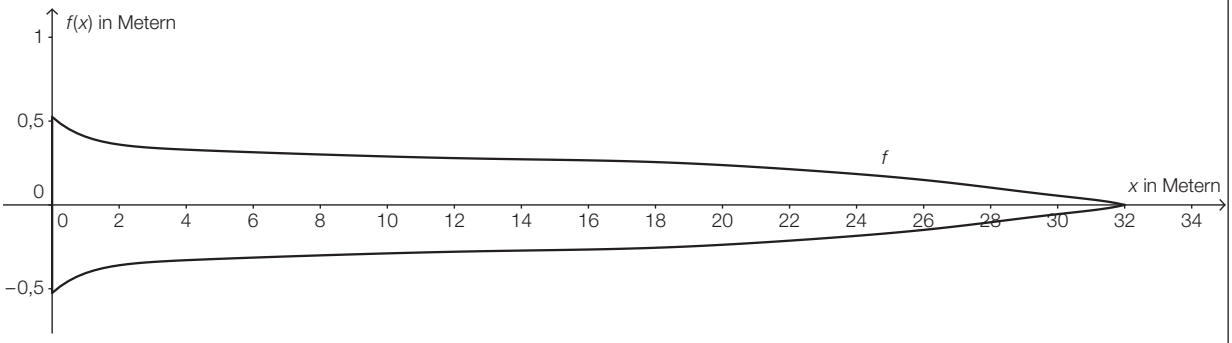
Ein 30 m hoher Baum hat einen Brusthöhendurchmesser von 50 cm. Für diesen Baum soll das Volumen mit der erweiterten Formel von Denzin ermittelt werden. Das tatsächliche Volumen dieses Baums beträgt 3,05 m^3.

– Ermitteln Sie den Betrag des relativen Fehlers, wenn man das Volumen mit der erweiterten Formel von Denzin berechnet.

c) Zur Berechnung seines Volumens kann ein Baumstamm näherungsweise als Kegel angesehen werden. Man geht in diesem Modell davon aus, dass das Verhältnis von Höhe zu Durchmesser stets gleich bleibt. Das Modell für einen bestimmten Baumstamm ist ein Drehkegel mit einem Durchmesser von 22 cm und einer Höhe von 18 m. In einem bestimmten Jahr vergrößert sich der Durchmesser um 2 mm.

– Berechnen Sie mithilfe dieses Modells das Höhenwachstum des Baums in diesem Jahr.
– Zeigen Sie, dass eine Verdoppelung des Kegeldurchmessers zu einer Verachtfachung des Volumens führt.

d) Die Form eines gefällten Baumstamms kann näherungsweise durch Rotation des Graphen einer Funktion *f* um die *x*-Achse beschrieben werden (siehe nachstehende Abbildung).



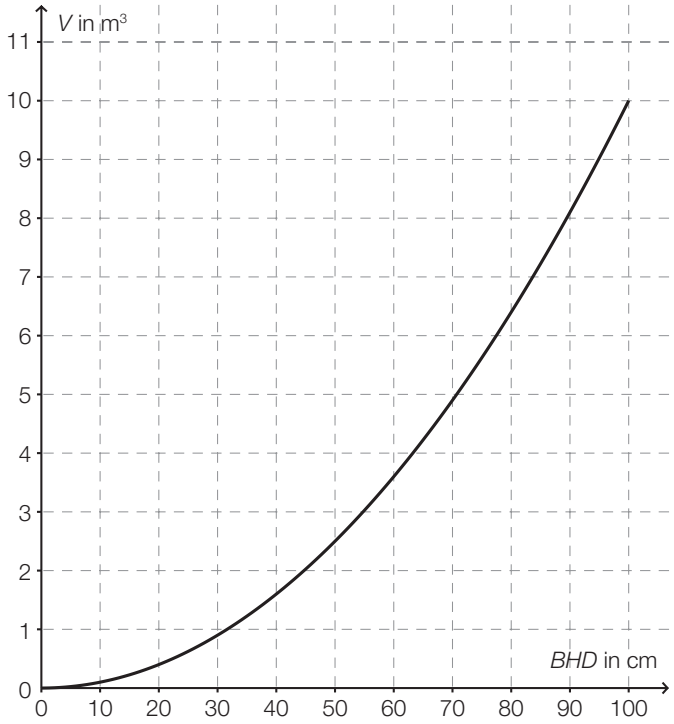
– Erstellen Sie eine Formel, mit der das Volumen *V* des Baumstamms berechnet werden kann.

V = _____

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $V = \frac{BHD^2}{1\,000}$



b) $V = \frac{50^2}{1\,000} \cdot \frac{3 \cdot 30 + 25}{100} = 2{,}875$

Betrag des relativen Fehlers: $\left| \frac{2{,}875 - 3{,}05}{3{,}05} \right| = 0{,}0573\ldots \approx 5{,}7\ \%$

c) $\frac{1\,800}{22} = \frac{x}{22{,}2} \Rightarrow x = 1\,816{,}36\ldots$

$x - 1\,800 = 16{,}36\ldots \approx 16{,}4$

Der Höhenzuwachs des Baums in diesem Jahr beträgt rund 16,4 cm.

Eine Verdoppelung des Kegeldurchmessers bringt auch eine Verdoppelung der Höhe mit sich:

$V_{neu} = \frac{1}{3} \cdot (2r)^2 \cdot \pi \cdot 2h = \frac{1}{3} \cdot 4r^2 \cdot \pi \cdot 2h = 8 \cdot \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h = 8 \cdot V_{alt}$

d) $V = \pi \cdot \int_0^{32} \left(f(x)\right)^2 \mathrm{d}x$

Lösungsschlüssel

a) 1 × A1: für das richtige Aufstellen der Formel
1 × A2: für die sinngemäß richtige Darstellung des Graphen (Parabel mit Tiefpunkt im Koordinatenursprung)
1 × A3: für eine geeignete Skalierung der vertikalen Achse

b) 1 × B1: für das richtige Ermitteln des Volumens mithilfe der erweiterten Formel von Denzin
1 × B2: für das richtige Ermitteln des Betrags des relativen Fehlers

c) 1 × B: für die richtige Berechnung des Höhenwachstums in diesem Jahr
1 × D: für einen richtigen Nachweis

d) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel

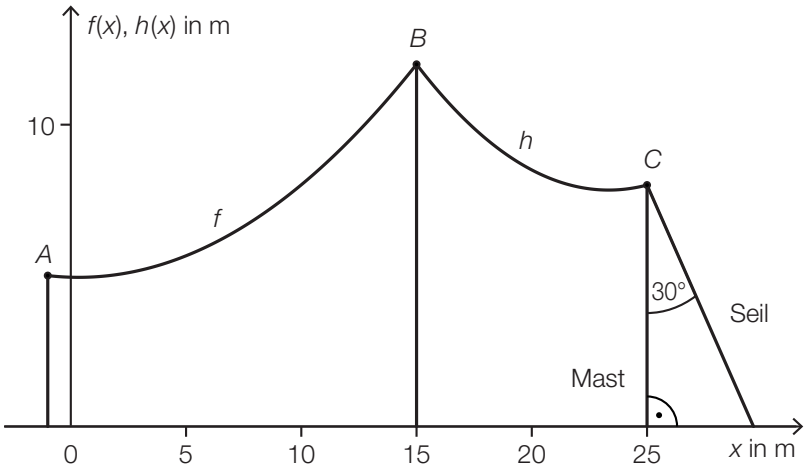
Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Stromversorgung einer Baustelle*

Aufgabennummer: B_308

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Eine Stromleitung zur Versorgung einer Baustelle soll, wie in der nachstehenden Skizze dargestellt, durch die 3 Punkte A, B und C führen. Die zwischen den einzelnen Masten liegenden Teile der Stromleitung können näherungsweise durch Graphen von Polynomfunktionen 2. Grades durch die Punkte A und B bzw. B und C beschrieben werden. Alle Längen sind in Metern angegeben.



a) Der erste Teil der Leitung verläuft zwischen den Punkten $A = (-1|5)$ und $B = (15|12)$.

Eine Gleichung der Tangente im Punkt A an den Graphen der Polynomfunktion f lautet:

$y = 4{,}913 - 0{,}0875 \cdot x$

– Stellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten dieser Polynomfunktion 2. Grades auf.
– Berechnen Sie diese Koeffizienten.

b) Zwischen den Punkten B und C kann die Stromleitung durch den Graphen der folgenden Funktion h beschrieben werden:

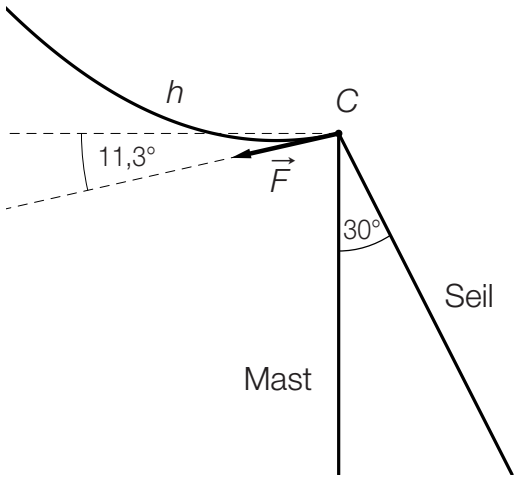
$$h(x) = \frac{3}{50} \cdot x^2 - \frac{14}{5} \cdot x + \frac{81}{2} \quad \text{mit} \quad 15 \le x \le 25$$

Die Stromleitung soll in diesem Bereich in einer Höhe von mindestens 7 m verlaufen.

– Überprüfen Sie nachweislich, ob diese Bedingung erfüllt ist.
– Berechnen Sie die Länge desjenigen Seils, das vom Punkt C zum Boden gespannt ist.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Wie in der nachstehenden nicht maßstabgetreuen Skizze dargestellt, ist im Punkt *C* ein Seil unter einem Winkel von 30° zum Mast gespannt.
Auf der anderen Seite wirkt durch die Stromleitung auf den Befestigungspunkt *C* eine Kraft $\vec{F}$ von 1 000 Newton unter einem Winkel von 11,3° zur Waagrechten. Diese Kraft kann in zwei Kräfte aufgeteilt werden, eine in Seilrichtung und eine in Mastrichtung.



– Berechnen Sie den Betrag derjenigen Kraft, die in Seilrichtung wirkt.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$
$f'(x) = 2 \cdot a \cdot x + b$

Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten:
Punkt A: $5 = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c$
Punkt B: $12 = a \cdot 15^2 + b \cdot 15 + c$
Tangentensteigung im Punkt A: $-0{,}0875 = 2 \cdot a \cdot (-1) + b$

Lösen des Gleichungssystems mittels Technologieeinsatz:

$a = \frac{21}{640} \approx 0{,}0328$

$b = -\frac{7}{320} \approx -0{,}0219$

$c = \frac{633}{128} \approx 4{,}95$

b) Berechnen des lokalen Minimums von h:

$h'(x) = \frac{3}{25} \cdot x - \frac{14}{5}$

$0 = \frac{3}{25} \cdot x - \frac{14}{5} \Rightarrow x_{min} = \frac{70}{3}$ (nach oben offene Parabel)

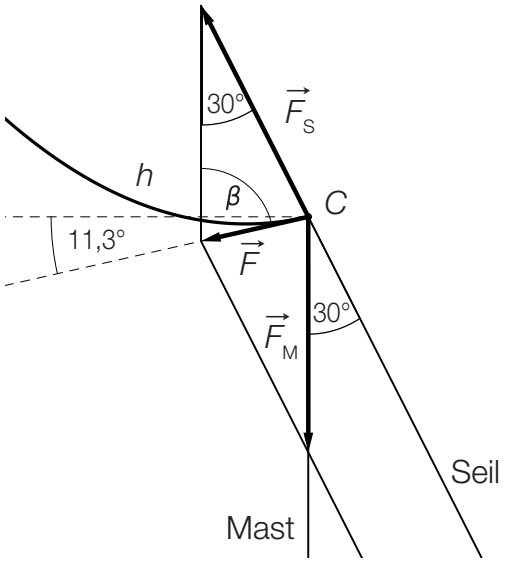
$h(x_{min}) = \frac{47}{6} \approx 7{,}83\ldots$

Die minimale Höhe ist größer als 7 m, damit ist die Bedingung erfüllt.

s ... Länge des Seils in m
$h(25) = 8$

$\cos(30°) = \frac{8}{s}$
$s = 9{,}237\ldots \text{ m} \approx 9{,}24 \text{ m}$

c) $\beta = 90° - 11{,}3° = 78{,}7°$



$$|\vec{F}_S| = \frac{1\,000 \cdot \sin(78{,}7°)}{\sin(30°)} = 1\,961{,}2\ldots$$

$|\vec{F}_S| \approx 1\,961$ N

Lösungsschlüssel

a) 1 × A1: für das richtige Aufstellen der Gleichungen mithilfe der Koordinaten der Punkte *A* und *B*
1 × A2: für das richtige Aufstellen der Gleichung unter Berücksichtigung der Tangentensteigung
1 × B: für die richtige Berechnung der Koeffizienten

b) 1 × D: für die richtige Überprüfung
1 × B: für die richtige Berechnung der Länge des Seils

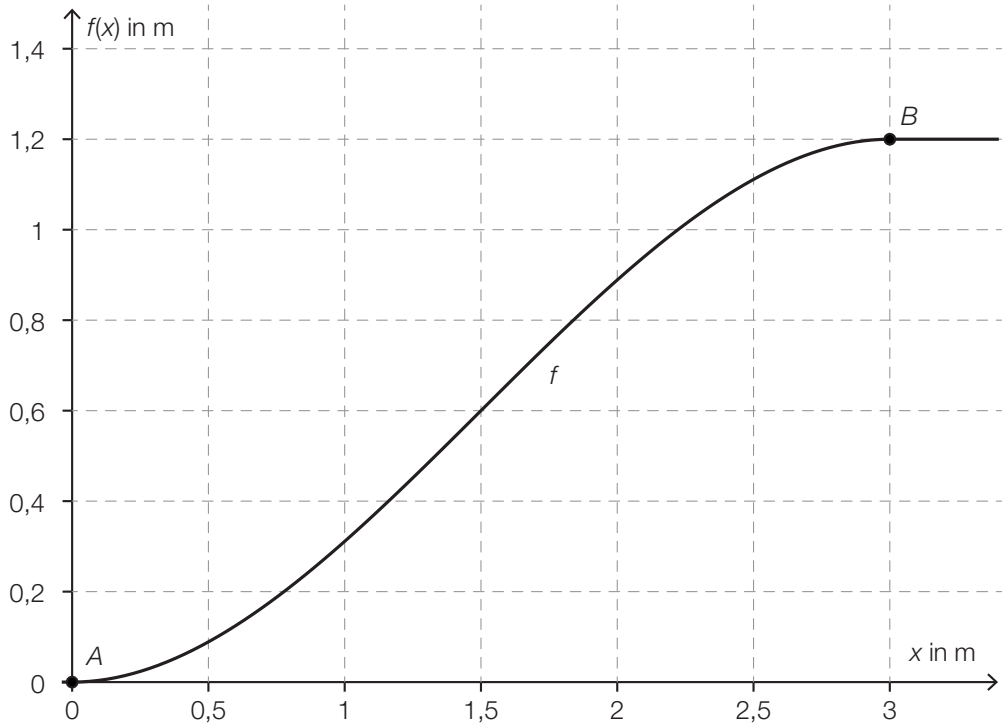
c) 1 × A: für einen richtigen Ansatz zur Zerlegung der Kraft in die beiden Richtungen Mast und Seil (Kraftdreieck oder Kräfteparallelogramm)
1 × B: für die richtige Berechnung des Betrags der Kraft, die in Seilrichtung wirkt

Minigolf*

Aufgabennummer: B_323

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Ein Minigolfball soll von der horizontalen Abschlagfläche auf eine höhergelegene horizontale Plattform gerollt werden. Der Verlauf der Bahn im Querschnitt kann näherungsweise durch den Graphen einer Polynomfunktion f mit $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ beschrieben werden. Die Bahn soll in den Punkten A und B knickfrei auf die jeweilige Ebene führen (siehe nachstehende Abbildung). Knickfrei bedeutet, dass die Funktionen an diesen Stellen den gleichen Funktionswert und die gleiche Steigung haben.



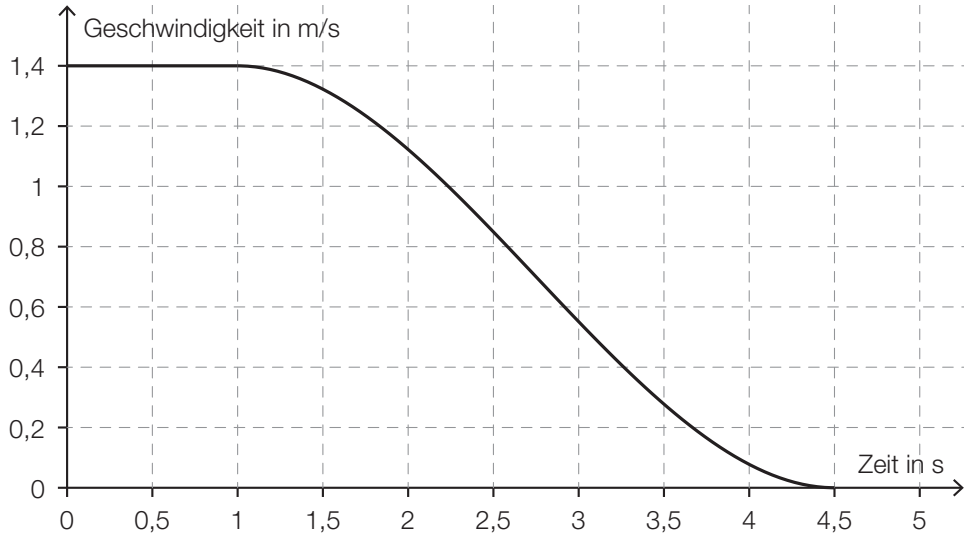
– Geben Sie an, welche Steigung die Funktion f in den Punkten A und B haben muss.
– Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten der Funktion f.
– Berechnen Sie die Koeffizienten der Funktion f.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) In der nachstehenden Abbildung ist das Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm eines Balles auf einer Minigolfbahn dargestellt. Während der ersten Sekunde hat der Ball eine konstante Geschwindigkeit. Danach kann die abnehmende Geschwindigkeit näherungsweise durch die Funktion v beschrieben werden:

$$v(t) = \frac{1}{245} \cdot (16 \cdot t^3 - 132 \cdot t^2 + 216 \cdot t + 243) \text{ mit } 1 \leq t \leq 4{,}5$$

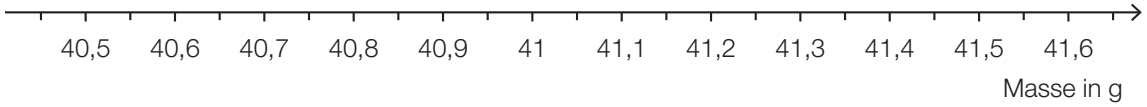
t … Zeit in Sekunden (s)
$v(t)$ … Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t in Metern pro Sekunde (m/s)



– Erklären Sie, was die momentane Änderungsrate der Funktion v zu einem bestimmten Zeitpunkt t_0 in diesem Sachzusammenhang angibt.
– Berechnen Sie den zurückgelegten Weg des Balles in den ersten 4,5 Sekunden.

c) Die Masse von Minigolfbällen eines bestimmten Typs ist normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 41$ g und der Standardabweichung $\sigma = 0{,}1$ g. Wenn ein Minigolfball mehr als 41,25 g wiegt, wird er aussortiert.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Minigolfball aussortiert wird.
– Zeichnen Sie den Graphen der Dichtefunktion dieser Normalverteilung in der nachstehenden Abbildung ein. Berücksichtigen Sie dabei den Erwartungswert und die Standardabweichung.



– Beschreiben Sie, wie sich eine kleinere Standardabweichung auf den Graphen der Dichtefunktion auswirken würde.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Die Steigung der Funktion f muss in den Punkten A und B null sein.

I. $f'(0) = 0$
II. $f'(3) = 0$
III. $f(0) = 0$
IV. $f(3) = 1{,}2$

Lösen des Gleichungssystems mittels Technologieeinsatz:

$a = -\frac{4}{45}$; $b = \frac{2}{5}$; $c = 0$; $d = 0$

b) Die momentane Änderungsrate der Funktion v zum Zeitpunkt t_0 ist die Beschleunigung des Balles zu diesem Zeitpunkt.

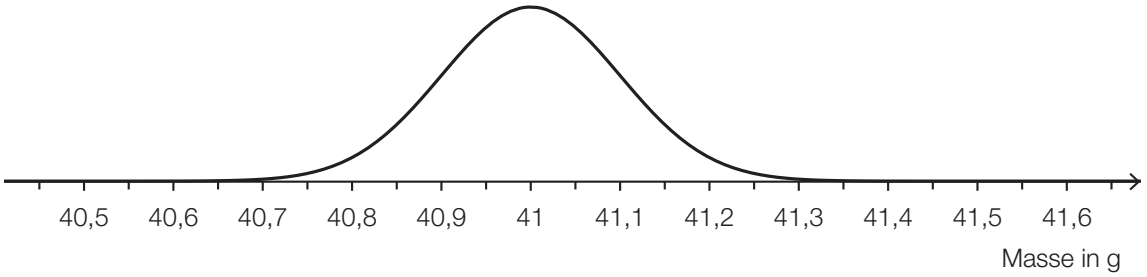
Der zurückgelegte Weg entspricht dem Flächeninhalt unter dem Graphen im Intervall [0; 4,5].
Flächeninhalt des Rechtecks: $A_1 = 1{,}4 \cdot 1 = 1{,}4$
Flächeninhalt unter dem Graphen der Polynomfunktion im Intervall [1; 4,5]:

$A_2 = \int_1^{4{,}5} v(t)\,\mathrm{d}t = 2{,}45$

$A = A_1 + A_2 = 3{,}85$

Der zurückgelegte Weg des Balles beträgt 3,85 m.

c) $P(\text{„Minigolfball wird aussortiert“}) = 1 - P(X < 41{,}25) = 0{,}0062\ldots \approx 0{,}6\ \%$



Bei einer kleineren Standardabweichung wäre die Gauß’sche Glockenkurve schmäler und höher.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A1: für die richtige Modellbildung zur Steigung der Funktion *f*
1 × A2: für das richtige Erstellen des Gleichungssystems
1 × B: für die richtige Berechnung der Koeffizienten

b) 1 × D: für die richtige Erklärung
1 × A: für einen richtigen Ansatz (Aufteilen in 2 Teilflächen)
1 × B: für die richtige Berechnung des zurückgelegten Weges

c) 1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit
1 × A: für das richtige Einzeichnen des Graphen der Dichtefunktion (Glockenkurve mit Maximum an der Stelle μ und Wendepunkten an den Stellen $\mu \pm \sigma$ erkennbar)
1 × C: für die richtige Beschreibung

Schwangerschaft*

Aufgabennummer: B_322

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Nach der Ausbildung der inneren Organe verwendet man für das ungeborene Kind den Begriff *Fötus*.

a) Bei Ultraschalluntersuchungen wird die Scheitel-Steiß-Länge (SSL) von Föten bestimmt. In der nachstehenden Tabelle sind die durchschnittlichen Längen in Zentimetern (cm) in der jeweiligen Schwangerschaftswoche angegeben:

Schwanger-schaftswoche	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
SSL in cm	4,1	5,4	7,4	8,7	10,1	11,9	13,3	14,1	14,8	16,2

– Ermitteln Sie die Gleichung der zugehörigen Regressionsgeraden. (Die Länge soll in Abhängigkeit von der Schwangerschaftswoche beschrieben werden.)
– Interpretieren Sie den Wert der Steigung der Regressionsgeraden im gegebenen Sachzusammenhang.

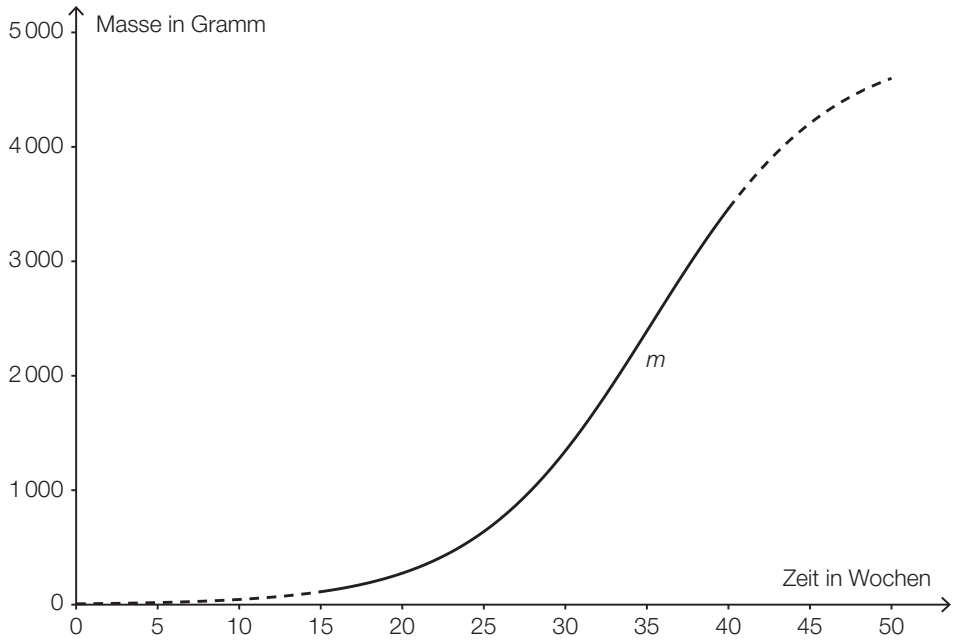
* ehemalige Klausuraufgabe

b) Die zunehmende Masse eines Fötus kann näherungsweise durch die Funktion m beschrieben werden:

$$m(t) = \frac{4\,900}{1 + 681 \cdot e^{-0{,}185 \cdot t}} \quad \text{mit} \quad 15 \le t \le 40$$

t … Zeit seit Beginn der Schwangerschaft in Wochen
$m(t)$ … Masse des Fötus zur Zeit t in Gramm (g)

Der Graph dieser Funktion ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt:



– Berechnen Sie die Masse des Fötus zum Zeitpunkt $t = 25$.
– Bestimmen Sie denjenigen Zeitpunkt, zu dem die Massezunahme des Fötus am größten ist.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Ermittlung der Gleichung der Regressionsgeraden mittels Technologieeinsatz:
$y = 1{,}36 \cdot x - 10{,}42$

Gemäß dem Modell nimmt die Scheitel-Steiß-Länge durchschnittlich rund 1,36 cm pro Woche zu.

b) $m(25) = 638{,}3\ldots \approx 638$
Die Masse des Fötus zum Zeitpunkt $t = 25$ beträgt rund 638 g.

Die stärkste Massezunahme erfolgt an der Wendestelle $m''(t) = 0$.
Lösung dieser Gleichung mittels Technologieeinsatz: $t = 35{,}26\ldots \approx 35{,}3$
Nach etwa 35,3 Wochen ist die Massezunahme am größten.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für die richtige Ermittlung der Gleichung der Regressionsgeraden
1 × C: für die richtige Interpretation der Steigung der Regressionsgeraden im gegebenen Sachzusammenhang

b) 1 × B1: für die richtige Berechnung der Masse des Fötus
1 × B2: für das richtige Bestimmen des Zeitpunktes, zu dem die Massezunahme am größten ist (In der Grafik ist klar zu erkennen, dass an der Wendestelle die größte Massezunahme vorliegt. Eine rechnerische Überprüfung des Steigungsverhaltens der Funktion an der berechneten Stelle sowie eine Überprüfung der Randstellen sind daher nicht erforderlich.)

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Segeln*

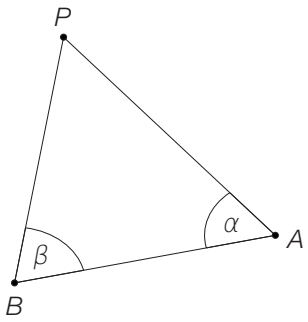
Aufgabennummer: B_321

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Die Entfernungen werden beim Segeln in nautischen Meilen (NM) angegeben. Die davon abgeleitete Geschwindigkeitseinheit nautische Meilen pro Stunde wird *Knoten* genannt.

a) Ein Segelboot fährt, nachdem es vom Punkt P gestartet ist und den Punkt A passiert hat, zum Punkt B. Von dort fährt es zum Punkt P zurück (siehe nachstehende nicht maßstabgetreue Skizze).

Die folgenden Abmessungen sind bekannt: $\alpha = 63°$, $\overline{PA} = 3{,}3$ NM und $\overline{AB} = 2{,}7$ NM.

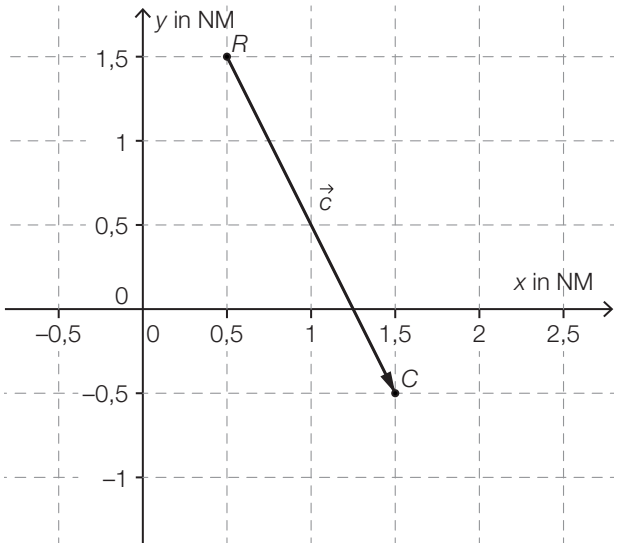


– Berechnen Sie die Entfernung $\overline{BP}$.
– Berechnen Sie die Dauer dieser Umrundung, wenn das Segelboot mit einer mittleren Geschwindigkeit von 6,8 Knoten fährt.
– Stellen Sie eine Formel zur Berechnung der Entfernung $\overline{BP}$ auf, wenn anstatt der Entfernung $\overline{AB}$ der Winkel β bekannt wäre.

$\overline{BP}$ = _____

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Ein Segelboot startet im Punkt *R* und fährt geradlinig zum Punkt *C*. Dort findet eine Kursänderung statt, um den Punkt *D* zu erreichen.



– Lesen Sie die Koordinaten des Vektors $\vec{c}$ ab.
– Zeichnen Sie den Punkt *D* ein, der ausgehend vom Punkt *C* mit dem Vektor $\vec{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}$ angefahren wird.
– Berechnen Sie das Skalarprodukt $\vec{c} \cdot \vec{d}$.
– Interpretieren Sie dieses Skalarprodukt geometrisch.

c) Die Vortriebskraft F_V beim Segeln lässt sich mit folgender Formel annähernd berechnen:

$$F_V = \frac{A \cdot \rho \cdot v_W^2}{4}$$

F_V ... Vortriebskraft in Newton (N)
A ... Segelfläche in m²
v_W ... Windgeschwindigkeit am Segel in m/s
ρ ... Dichte der Luft (ρ = 1,225 kg/m³)

– Berechnen Sie, wie groß die Segelfläche sein muss, damit bei einer Windgeschwindigkeit von 5 m/s eine Vortriebskraft von 153 N erreicht wird.
– Geben Sie an, wie sich die Vortriebskraft verändert, wenn sich die Windgeschwindigkeit verdoppelt und die anderen Parameter konstant bleiben.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $\overline{BP} = \sqrt{3{,}3^2 + 2{,}7^2 - 2 \cdot 3{,}3 \cdot 2{,}7 \cdot \cos(63°)} = 3{,}176\ldots \approx 3{,}18$

Die Entfernung zwischen dem Punkt B und dem Punkt P beträgt rund 3,18 NM.

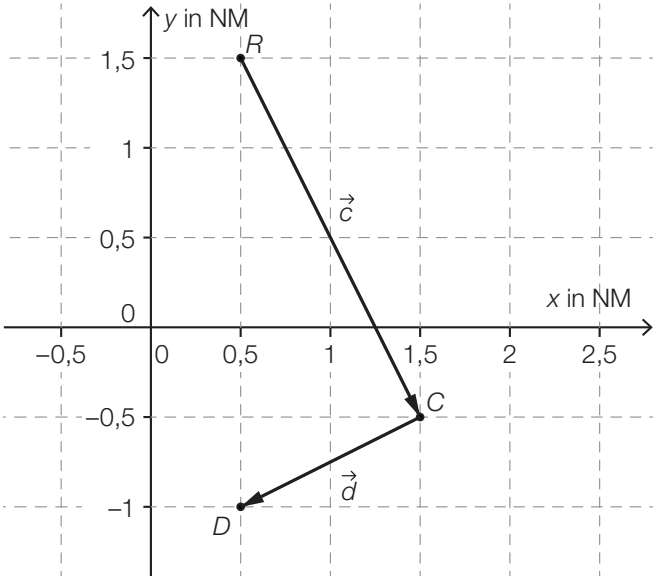
$\overline{PA} + \overline{AB} + \overline{BP} = 9{,}176\ldots$

$t = \frac{9{,}176\ldots}{6{,}8} = 1{,}349\ldots \approx 1{,}35$

Die Umrundung dauert etwa 1,35 Stunden.

Sinussatz: $\frac{\overline{PA}}{\sin(\beta)} = \frac{\overline{BP}}{\sin(\alpha)} \Rightarrow \overline{BP} = \frac{\overline{PA} \cdot \sin(\alpha)}{\sin(\beta)}$

b) $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$



$\vec{c} \cdot \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -0{,}5 \end{pmatrix} = 0$

Die beiden Vektoren $\vec{c}$ und $\vec{d}$ stehen normal aufeinander.

c) $A = \frac{4 \cdot F_V}{1{,}225 \cdot v_W^2} = \frac{4 \cdot 153}{1{,}225 \cdot 5^2} = 19{,}9\ldots \approx 20$

Die Segelfläche muss dazu rund 20 m² groß sein.

Eine Verdoppelung der Windgeschwindigkeit führt zu einer Vervierfachung der Vortriebskraft.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B1: für die richtige Berechnung der Entfernung $\overline{BP}$
1 × B2: für die richtige Berechnung der Dauer dieser Umrundung
1 × A: für das richtige Aufstellen der Formel

b) 1 × C1: für das richtige Ablesen der Koordinaten des Vektors $\vec{c}$
1 × A: für das richtige Einzeichnen des Punkts D
1 × B: für die richtige Berechnung des Skalarprodukts
1 × C2: für die richtige geometrische Interpretation des Skalarprodukts

c) 1 × B: für die richtige Berechnung des Flächeninhalts der Segelfläche
1 × C: für die richtige Beschreibung

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Leihwagen*

Aufgabennummer: B_318

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein Leihwagen-Unternehmen hat in seinem Fuhrpark 2 Modelle. Modell 1 ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,62 verliehen, Modell 2 mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,4. Die Wahrscheinlichkeit, dass beide Modelle gleichzeitig verliehen sind, beträgt 0,35.

A bezeichnet das Ereignis, dass Modell 1 verliehen ist, und *B* bezeichnet das Ereignis, dass Modell 2 verliehen ist.

a) – Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 1 Modell nicht verliehen ist.

b) – Übertragen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Angabe in die entsprechenden Felder der unten stehenden Vierfeldertafel.
– Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten in den restlichen Feldern und tragen Sie diese ein.

	A	nicht *A*	Summe
B			
nicht *B*			
Summe			

– Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass genau einer der beiden Leihwagen verliehen ist.

c) – Zeigen Sie, dass die beiden Ereignisse *A* und *B* nicht unabhängig voneinander sind.
– Beschreiben Sie in Worten, welches Ereignis durch die Wahrscheinlichkeit

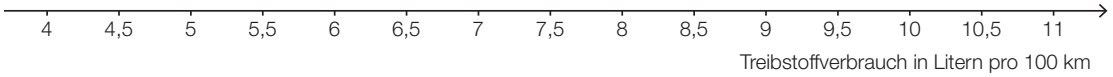
$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}35}{0{,}4} = 0{,}875$$

bestimmt wird.

* ehemalige Klausuraufgabe

d) Der Treibstoffverbrauch von Modell 1 ist annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 6{,}9$ Liter pro 100 km. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % liegt dieser Treibstoffverbrauch im Intervall [5,6; 8,2].

– Ermitteln Sie die Standardabweichung dieser Normalverteilung.
– Zeichnen Sie den Graphen der Dichtefunktion dieser Normalverteilung in die unten stehende Abbildung ein. Berücksichtigen Sie dabei den Erwartungswert und die Standardabweichung.



Treibstoffverbrauch in Litern pro 100 km

– Beschreiben Sie, wie sich eine kleinere Standardabweichung auf den Graphen der Dichtefunktion auswirken würde.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $1 - P(A \cap B) = 1 - 0{,}35 = 0{,}65$
Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Modell nicht verliehen ist, beträgt 0,65.

b)

	A	nicht A	Summe
B	0,35	0,05	0,40
nicht B	0,27	0,33	0,60
Summe	0,62	0,38	

Die hervorgehobenen Werte in der oben stehenden Tabelle sind diejenigen, die aus der Angabe übertragen wurden.

Die Wahrscheinlichkeit, dass genau einer der beiden Leihwagen verliehen ist, beträgt $0{,}27 + 0{,}05 = 0{,}32$.

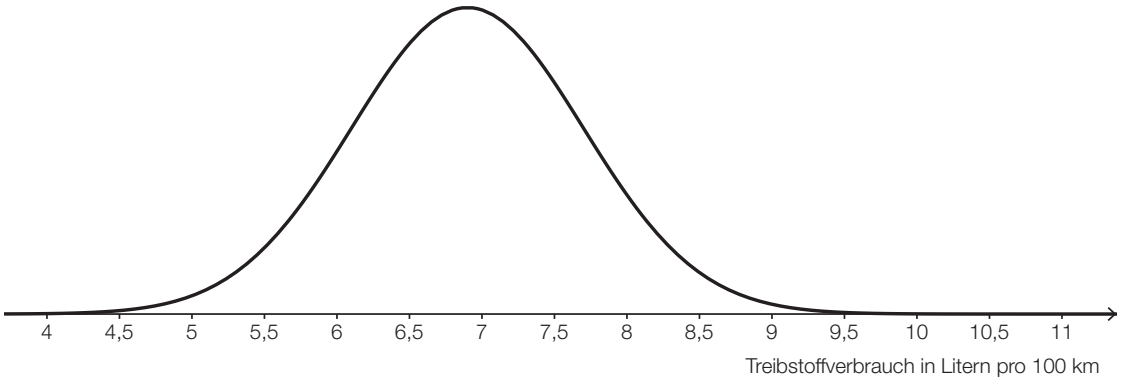
c) Sind zwei Ereignisse voneinander unabhängig, so gilt: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.
$P(A) \cdot P(B) = 0{,}62 \cdot 0{,}4 = 0{,}248$
$P(A \cap B) = 0{,}35$
Die beiden Ereignisse sind also nicht voneinander unabhängig: $0{,}35 \neq 0{,}248$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass Modell 1 verliehen ist, wenn man weiß, dass Modell 2 verliehen ist, beträgt 0,875.

d) $P(5{,}6 \leq X \leq 8{,}2) = 0{,}90$
Aufgrund der Symmetrie gilt: $P(X \leq 8{,}2) = 0{,}95$.
$\phi(z) = 0{,}95 \Rightarrow z = 1{,}644\ldots$

$$\sigma = \frac{8{,}2 - 6{,}9}{z} = 0{,}79\ldots \approx 0{,}8$$

Die Standardabweichung beträgt rund 0,8 Liter pro 100 km.



Bei einer kleineren Standardabweichung wäre die Gauß'sche Glockenkurve schmäler und höher.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit

b) 1 × A: für das richtige Übertragen der Werte in die Vierfeldertafel
1 × B1: für das richtige Ermitteln der fehlenden Werte
1 × B2: für das richtige Bestimmen der Wahrscheinlichkeit

c) 1 × D: für den richtigen Nachweis der Unabhängigkeit der Ereignisse
1 × C: für die richtige Beschreibung

d) 1 × B: für das richtige Ermitteln der Standardabweichung
1 × A: für das richtige Einzeichnen des Graphen der Dichtefunktion (Glockenkurve mit Maximum an der Stelle μ und Wendepunkten an den Stellen $\mu \pm \sigma$ erkennbar)
1 × C: für die richtige Beschreibung

Bundesinstitut
bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung
des österreichischen Schulwesens

Konditorei*

Aufgabennummer: B_317

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) In einer Konditorei können täglich höchstens 10 Sachertorten und höchstens 25 Topfentorten hergestellt werden. Es werden täglich mindestens doppelt so viele Topfentorten wie Sachertorten hergestellt.

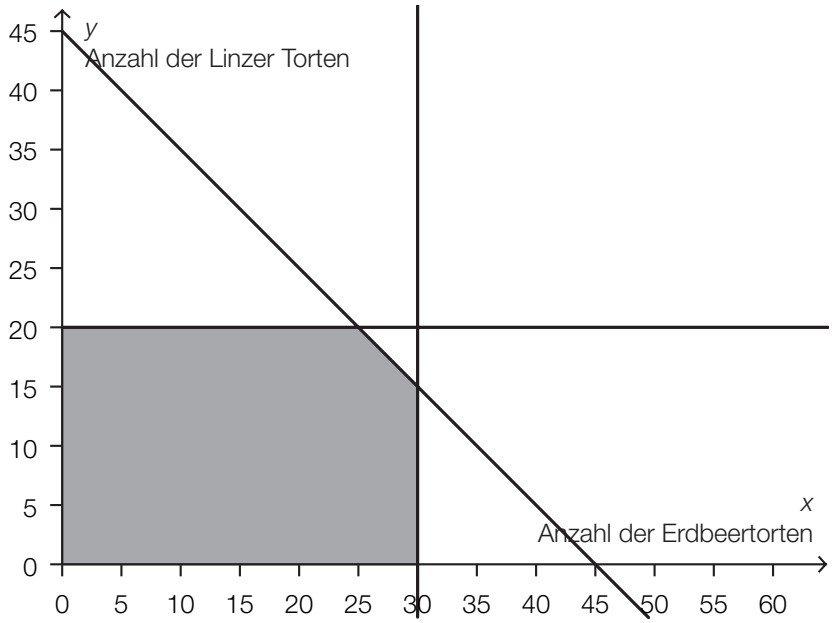
– Übertragen Sie diesen Sachverhalt in ein lineares Ungleichungssystem.

b) Die Fertigungskosten für eine Sachertorte betragen € 10,50, jene für eine Topfentorte € 8,00.
Der Verkaufspreis für eine Sachertorte beträgt € 34,00, jener für eine Topfentorte € 26,00.
Es werden x Sachertorten und y Topfentorten verkauft.

– Stellen Sie die Gleichung der Zielfunktion zur Beschreibung des Gewinns auf.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) In der nachstehenden Abbildung ist der Lösungsbereich der Produktionseinschränkungen für die tägliche Produktion von Erdbeertorten und Linzer Torten dargestellt.



– Lesen Sie aus der obigen Abbildung die 5 Ungleichungen ab, die den Lösungsbereich beschreiben.

Die Zielfunktion Z beschreibt den täglichen Gewinn beim Verkauf von x Erdbeertorten und y Linzer Torten in Euro:

$Z(x, y) = 25 \cdot x + 20 \cdot y$

x ... Anzahl der verkauften Erdbeertorten
y ... Anzahl der verkauften Linzer Torten

– Zeichnen Sie diejenige Gerade, für die der optimale Wert der Zielfunktion angenommen wird, in der obigen Abbildung ein.
– Berechnen Sie den maximalen Gewinn.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

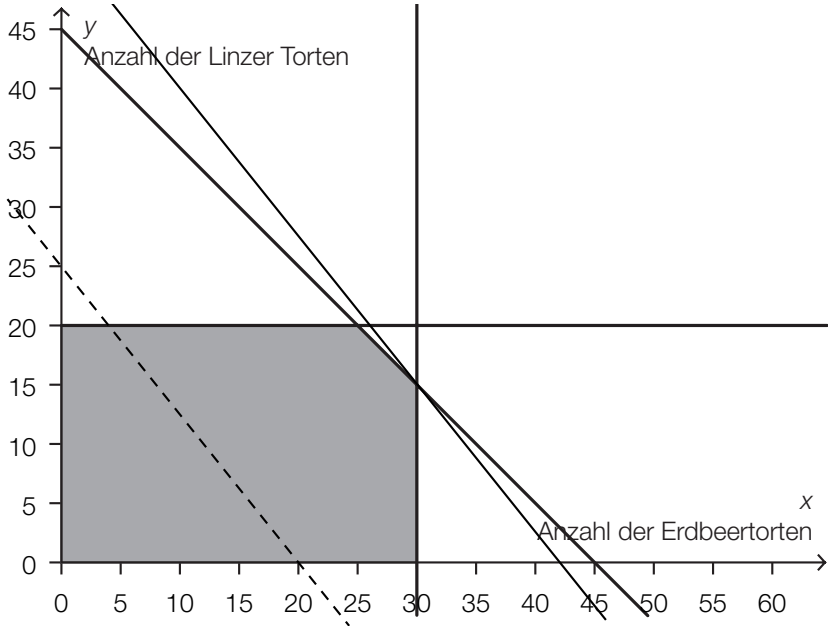
a) x … Anzahl der Sachertorten
y … Anzahl der Topfentorten

(1) $x \leq 10$
(2) $y \leq 25$
(3) $y \geq 2 \cdot x$

Nichtnegativitätsbedingungen: $x \geq 0$, $y \geq 0$
Es ist nicht gefordert, die Nichtnegativitätsbedingungen anzugeben.

b) $Z(x, y) = 23{,}5 \cdot x + 18 \cdot y$

c) (1) $x \geq 0$
(2) $y \geq 0$
(3) $x \leq 30$
(4) $y \leq 20$
(5) $x + y \leq 45$



gewinnmaximierende Menge: (30|15)

$25 \cdot 30 + 20 \cdot 15 = 1\,050$
Der maximale Gewinn beträgt € 1.050 pro Tag.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A1: für das richtige Aufstellen der beiden Ungleichungen (1) und (2)
1 × A2: für das richtige Aufstellen der Ungleichung (3)
Die Angabe der Nichtnegativitätsbedingungen ist nicht erforderlich.

b) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Gleichung der Zielfunktion zur Beschreibung des Gewinns

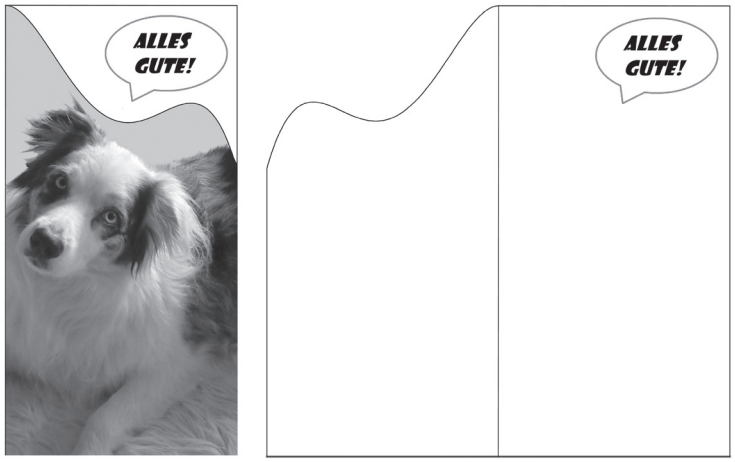
c) 1 × C1: für das richtige Ablesen der 4 Ungleichungen (1) bis (4)
1 × C2: für das richtige Ablesen von Ungleichung (5)
1 × B1: für das richtige Einzeichnen der Geraden, für die der optimale Wert der Zielfunktion angenommen wird
1 × B2: für die richtige Berechnung des maximalen Gewinns

Grußkarte*

Aufgabennummer: B_338

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

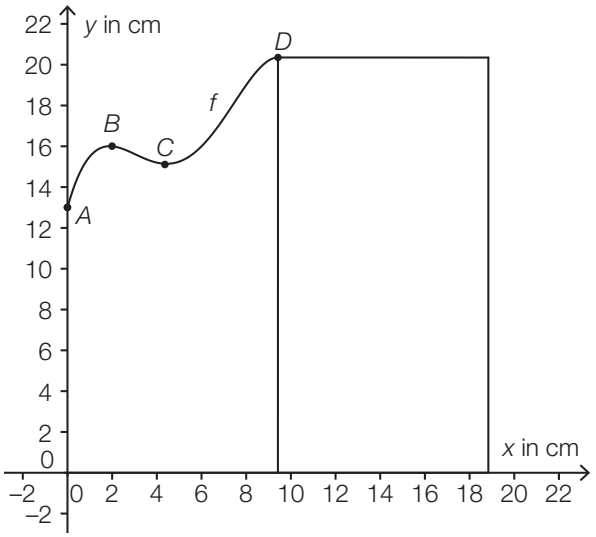
Eine Druckerei soll Grußkarten nach folgendem Entwurf herstellen:



zugeklappt aufgeklappt

* ehemalige Klausuraufgabe

a) Die Form der Grußkarte kann folgendermaßen in einem Koordinatensystem dargestellt werden:



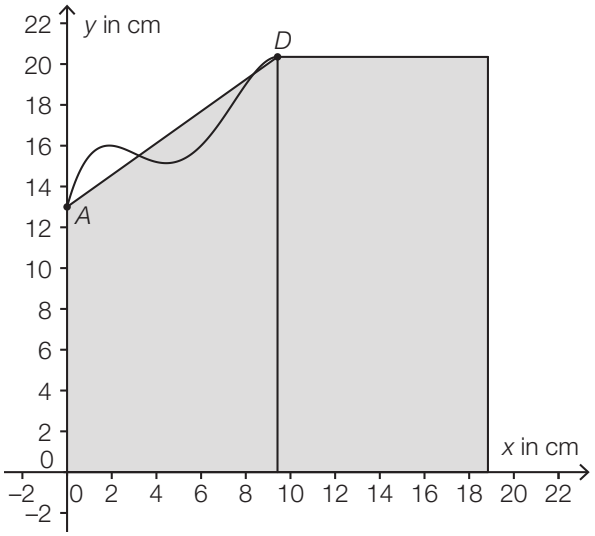
Der gewellte Teil der Begrenzungslinie der Karte kann durch den Graphen einer Polynomfunktion f mit $f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$ beschrieben werden und verläuft durch folgende Punkte:

$A = (0 \mid 13)$
$B = (2 \mid 16)$
$C = (4{,}36 \mid 15{,}1)$
$D = (9{,}42 \mid 20{,}35)$

Im Punkt D hat der Graph von f eine waagrechte Tangente.

– Stellen Sie ein Gleichungssystem auf, mit dem die Koeffizienten dieser Polynomfunktion berechnet werden können.
– Berechnen Sie die Koeffizienten dieser Polynomfunktion.

b) Der Flächeninhalt der Grußkarte beträgt 346,85 cm².
Zur näherungsweisen Berechnung ist es möglich, ein Trapez und ein Rechteck zu verwenden (siehe nachstehende Grafik).

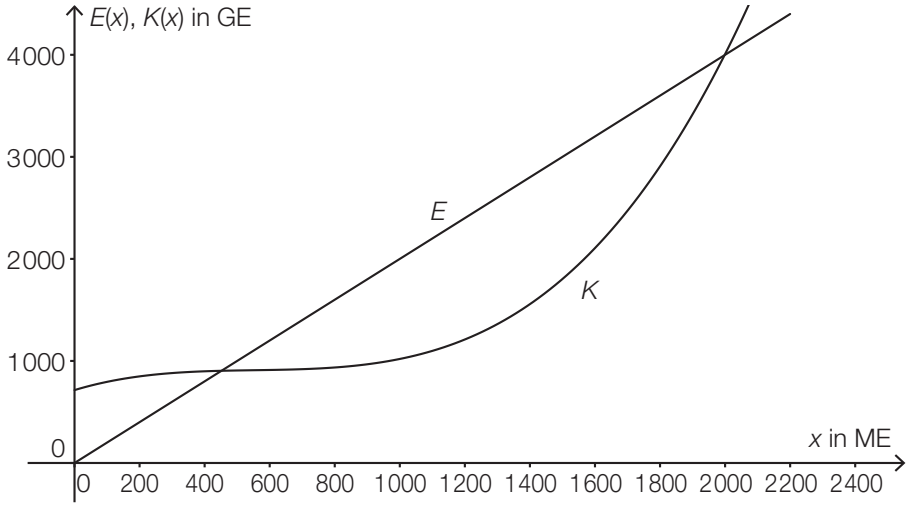


Die Koordinaten der Punkte sind: $A = (0 \mid 13)$
$D = (9{,}42 \mid 20{,}35)$

Die untere Kante der Karte liegt auf der x-Achse und ist insgesamt 18,84 cm lang.

– Berechnen Sie mithilfe der oben beschriebenen Näherung den Flächeninhalt der Grußkarte.
– Berechnen Sie den Betrag des relativen Fehlers bei der näherungsweisen Berechnung des Flächeninhalts.

c) Für die monatliche Produktion der Grußkarten können die Kostenfunktion K und die Erlösfunktion E folgendermaßen dargestellt werden:



– Lesen Sie aus der obigen Grafik den Gewinnbereich ab.
– Erklären Sie, woran man in der Grafik erkennen kann, dass der Gewinn bei einer Produktion von 1 200 ME größer als bei einer Produktion von 600 ME ist.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $f(0) = 13$
$f(2) = 16$
$f(4{,}36) = 15{,}1$
$f(9{,}42) = 20{,}35$
$f'(9{,}42) = 0$

Lösung dieses Gleichungssystems mittels Technologieeinsatz:
$a = -0{,}012... \approx -0{,}01$
$b = 0{,}266... \approx 0{,}27$
$c = -1{,}722... \approx -1{,}72$
$d = 3{,}981... \approx 3{,}98$
$e = 13$

b) $A = \frac{20{,}35 + 13}{2} \cdot 9{,}42 + 20{,}35 \cdot 9{,}42 = 348{,}7755$
Der näherungsweise berechnete Flächeninhalt der Grußkarte beträgt rund 348,78 cm^2.

$\left|\frac{348{,}7755 - 346{,}85}{346{,}85}\right| = 0{,}005551... \approx 0{,}00555$

c) Gewinnbereich in ME: [450; 2 000]
Toleranzbereich für die Intervallgrenzen: ±50 ME

Die Differenz zwischen $E(x)$ und $K(x)$ ist der jeweilige Gewinn an der Stelle x. Bei 1 200 ME ist diese Differenz wesentlich größer als bei 600 ME.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A1: für das richtige Aufstellen der Gleichungen mithilfe der Koordinaten der Punkte
1 × A2: für das richtige Aufstellen der Gleichung mithilfe der 1. Ableitung
1 × B: für die richtige Berechnung der Koeffizienten

b) 1 × B1: für die richtige näherungsweise Berechnung des Flächeninhalts der Grußkarte
1 × B2: für die richtige Berechnung des Betrags des relativen Fehlers

c) 1 × C: für das richtige Ablesen der Gewinnbereichs
(Toleranzbereich für die Intervallgrenzen: ±50 ME)
1 × D: für die richtige Erklärung

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Lieferwagen*

Aufgabennummer: B_306

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein Unternehmen will einen Lieferwagen anschaffen.

a) Für das Lieferwagen-Modell *A* betragen die Anschaffungskosten € 34.000, die Nutzungsdauer wird mit 4 Jahren veranschlagt. An Einnahmen erwartet das Unternehmen € 12.000 im ersten Jahr, dann jährlich € 2.000 mehr gegenüber dem Vorjahr. Der Liquidationserlös wird mit 20 % der Anschaffungskosten angenommen. Bei den Ausgaben kalkuliert das Unternehmen mit € 0,10 Treibstoffkosten pro km, wobei der Lieferwagen jährlich 40 000 km im Einsatz sein soll. Die jährlichen Fixkosten für Versicherung, Service und Steuern werden mit € 2.000 angesetzt.

– Übertragen Sie für den Zeitraum der Nutzungsdauer die Einnahmen und die Ausgaben in die nachstehende Tabelle.

Jahr	Einnahmen	Ausgaben
0		
1		
2		
3		
4		

b) Für das etwas teurere Lieferwagen-Modell *B* mit dem Anschaffungspreis € 42.000 ermittelt das Unternehmen folgende Rückflüsse (Einnahmen minus Ausgaben):

Jahr	Rückflüsse
1	€ 8.000
2	€ 10.000
3	€ 12.000
4	€ 22.000

Das Unternehmen kalkuliert mit einem Zinssatz von 6 % p. a.

– Berechnen Sie den Kapitalwert für das Modell *B*.
– Begründen Sie mithilfe des Kapitalwerts, warum diese Investition vorteilhaft ist.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) In einer Wirtschaftszeitschrift stoßen Sie auf folgende Aussage: „Niedrige Zinssätze führen zu hohen Kapitalwerten."

– Erklären Sie, warum diese Aussage richtig ist.

d) Für das Lieferwagen-Modell *C* mit einem Anschaffungspreis von € 45.000 ermittelt das Unternehmen folgende Rückflüsse (Einnahmen minus Ausgaben):

Jahr	Rückflüsse
1	€ 9.000
2	€ 11.000
3	€ 13.000
4	€ 15.000

Die Rückflüsse können zum Zinssatz 4,5 % p. a. wiederveranlagt werden.

– Berechnen Sie den Endwert der wiederveranlagten Rückflüsse.
– Berechnen Sie den modifizierten internen Zinssatz.
– Interpretieren Sie den modifizierten internen Zinssatz im Hinblick auf die Vorteilhaftigkeit der Investition.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a)

Jahr	Einnahmen	Ausgaben
0		€ 34.000
1	€ 12.000	€ 6.000
2	€ 14.000	€ 6.000
3	€ 16.000	€ 6.000
4	€ 24.800	€ 6.000

b) Kapitalwert: $-42\,000 + \frac{8\,000}{1{,}06} + \frac{10\,000}{1{,}06^2} + \frac{12\,000}{1{,}06^3} + \frac{22\,000}{1{,}06^4} \approx 1\,949$

Der Kapitalwert beträgt ca. € 1.949.
Die Investition ist vorteilhaft, weil der Kapitalwert positiv ist.

c) Der Kapitalwert ist gleich der Summe aus den abgezinsten Rückflüssen minus der Anschaffungskosten.
Je niedriger der Zinssatz ist, mit dem kalkuliert wird, desto höher sind die abgezinsten Rückflüsse und desto höher ist der Kapitalwert.

d) Endwert: $E = 9\,000 \cdot 1{,}045^3 + 11\,000 \cdot 1{,}045^2 + 13\,000 \cdot 1{,}045 + 15\,000 = 50\,867{,}77$

Modifizierter interner Zinssatz:

$45\,000 \cdot (1 + i_{mod})^4 = 50\,867{,}77$

$i_{mod} = \sqrt[4]{\frac{50\,867{,}77}{45\,000}} - 1 \approx 0{,}0311$

Der modifizierte interne Zinssatz beträgt ca. 3,11 % p. a.
Da der modifizierte interne Zinssatz kleiner als der Wiederveranlagungszinssatz ist, ist die Investition nicht sinnvoll.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A1: für das richtige Übertragen der Einnahmen
1 × A2: für das richtige Übertragen der Ausgaben

b) 1 × B: für die richtige Berechnung des Kapitalwerts
1 × D: für die richtige Begründung

c) 1 × D: für die richtige Erklärung

d) 1 × B1: für die richtige Berechnung des Endwerts
1 × B2: für die richtige Berechnung des modifizierten internen Zinssatzes
1 × C: für die richtige Interpretation des modifizierten internen Zinssatzes

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Marketingausgaben*

Aufgabennummer: B_304

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Die Marketingabteilung einer Handelskette möchte wissen, ob ihre Werbemaßnahmen wirken. Die Buchhaltung liefert Informationen über die monatlichen Umsätze. Die Umsätze von 10 aufeinanderfolgenden Monaten mit den entsprechenden Marketingausgaben liefern folgende Daten (Beträge in 1.000 Euro):

Monat	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Marketingausgaben	24	16	20	26	14	16	20	12	18	22
Umsatz	200	184	220	230	180	164	185	150	182	210

a) – Ermitteln Sie den Korrelationskoeffizienten zwischen Marketingausgaben und Umsatz.
– Interpretieren Sie diesen Korrelationskoeffizienten.

b) – Ermitteln Sie die Gleichung derjenigen Regressionsgeraden, die den Umsatz in Abhängigkeit von den Marketingausgaben beschreibt.
– Interpretieren Sie den Wert der Steigung der Regressionsgeraden im Hinblick auf den Umsatz und die Marketingausgaben.

c) In der nachstehenden Grafik sind die Datenpunkte und die dazugehörige Regressionsgerade dargestellt.



– Lesen Sie aus der Grafik denjenigen Umsatz ab, den die Handelskette bei Marketingausgaben von € 10.000 erwarten kann.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

a) mittels Technologieeinsatz: $r \approx 0{,}86$

Die gegebenen Daten lassen einen positiven linearen Zusammenhang zwischen Marketingausgaben und Umsatz vermuten.

b) mittels Technologieeinsatz: $y = 4{,}786 \cdot x + 100{,}523$

Steigen die Marketingausgaben um € 1.000, dann steigt der Umsatz um ca. € 4.786.

c) ca. € 150.000
Toleranzbereich: [€ 140.000; € 160.000]

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für die richtige Berechnung des Korrelationskoeffizienten
1 × C: für die richtige Interpretation des Korrelationskoeffizienten

b) 1 × B: für das richtige Ermitteln der Gleichung der Regressionsgeraden
1 × C: für die richtige Interpretation der Steigung im Sachzusammenhang

c) 1 × C: für das richtige Ablesen des Wertes

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Flächeninhalt eines Parallelogramms*

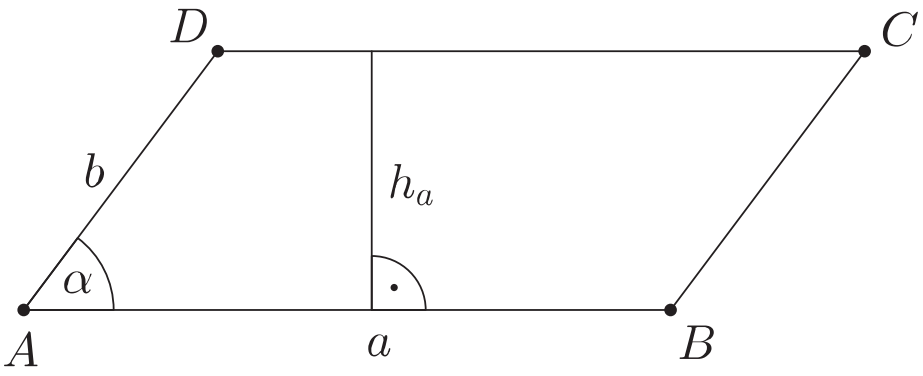
Aufgabennummer: B_259

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Ein Grundstück hat die Gestalt eines Parallelogramms *ABCD*. Zur Berechnung des Flächeninhalts dieses Grundstücks stehen folgende Formeln zur Verfügung:

(1) $A = a \cdot h_a$
(2) $A = a \cdot b \cdot \sin(\alpha)$

Entnehmen Sie die Bezeichnungen der nachstehenden, nicht maßstabgetreuen Skizze.



a) – Erklären Sie, warum diese beiden Formeln gleichwertig sind.

b) Für das Grundstück werden folgende Maße angegeben: $b = 52{,}7$ m, $\alpha = 53°$, $A = 4\,133$ m².

– Berechnen Sie die Länge der Seite *a*.
– Berechnen Sie die Länge der Diagonale *BD*.

c) Die Länge der Seite *a* wird verdreifacht und die Länge der zugehörigen Höhe h_a halbiert.

– Ermitteln Sie die Änderung des Flächeninhalts in Prozent.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

a) Zeichnet man die Höhe h_a im Eckpunkt D ein, so entsteht ein rechtwinkeliges Dreieck.
In diesem gilt: $\sin(\alpha) = \frac{h_a}{b}$.
$h_a = b \cdot \sin(\alpha)$
$A = a \cdot h_a = a \cdot b \cdot \sin(\alpha)$

b) $a = \frac{A}{b \cdot \sin(\alpha)} = 98{,}19\ldots \Rightarrow a \approx 98{,}2$ m

$\overline{BD} = \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\alpha)} = 78{,}68\ldots \Rightarrow \overline{BD} \approx 78{,}7$ m

c) $A_{neu} = 3 \cdot a \cdot \frac{h_a}{2} = 1{,}5 \cdot a \cdot h_a = 1{,}5 \cdot A_{alt}$

Der neue Flächeninhalt ist um 50 % größer als der alte.

Lösungsschlüssel

a) 1 × D: für die richtige Erklärung zur Gleichwertigkeit der Formeln
b) 1 × B1: für die richtige Berechnung der Länge der Seite a
1 × B2: für die richtige Berechnung der Länge der Diagonale $\overline{BD}$
c) 1 × B: für das richtige Ermitteln der Änderung in Prozent

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Brettspiele*

Aufgabennummer: B_257

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Beim Würfeln mit einem fairen Spielwürfel treten die Augenzahlen 1 bis 6 jeweils mit gleicher Wahrscheinlichkeit auf.



a) Bei einem Brettspiel wird zu Beginn des Spiels mit einem fairen Spielwürfel gewürfelt. Um das Spiel beginnen zu können, muss man einen Sechser würfeln. In einem Durchgang hat man maximal 3 Versuche zur Verfügung. Sobald man einen Sechser gewürfelt hat, ist die nächste Spielerin/der nächste Spieler an der Reihe.

- Stellen Sie alle möglichen Ausgänge („Sechser“ oder „kein Sechser“) für einen Durchgang für eine Spielerin/einen Spieler in einem Baumdiagramm dar.
- Tragen Sie die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten in das Baumdiagramm ein.
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine Spielerin/ein Spieler in einem Durchgang das Spiel beginnen kann.

b) Bei einem Brettspiel wird mit einem fairen Spielwürfel gewürfelt und man rückt mit der Spielfigur so viele Felder vor, wie die gewürfelte Augenzahl angibt. Würfelt man im ersten Wurf einen Sechser, so würfelt man ein zweites Mal und rückt die dabei gewürfelte Augenzahl zusätzlich vor.
Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der Felder, die man vorrücken darf.

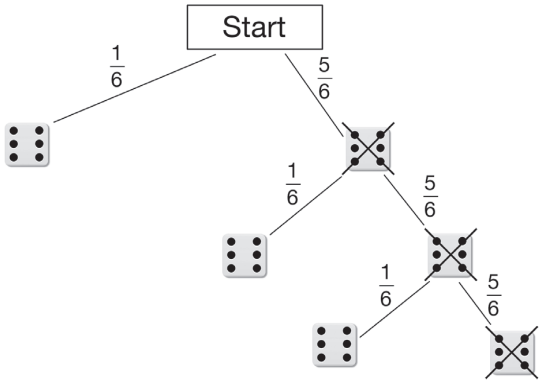
- Stellen Sie eine Tabelle auf, der man alle möglichen Werte dieser Zufallsvariablen X und die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten entnehmen kann.
- Berechnen Sie den Erwartungswert von X.
- Interpretieren Sie die Bedeutung des Erwartungswertes in diesem Sachzusammenhang.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

a)



gesuchte Wahrscheinlichkeit: $\frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{91}{216} \approx 42{,}1\ \%$

b)

x_i	1	2	3	4	5	7	8	9	10	11	12
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$

$E(X) = \frac{15}{6} + \frac{57}{36} \approx 4{,}08$

Der Erwartungswert gibt an, um wie viele Felder man im Mittel vorrücken darf, wenn man oft spielt.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A1: für die richtige Darstellung des Baumdiagramms
1 × A2: für das richtige Eintragen der Wahrscheinlichkeiten
1 × A3: für einen richtigen Ansatz zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit
1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit

b) 1 × A: für die richtige und vollständige Angabe der Werte der Zufallsvariablen
1 × B1: für die richtige und vollständige Berechnung der zugehörigen Wahrscheinlichkeiten
1 × B2: für die richtige Berechnung des Erwartungswertes
1 × C: für die richtige Interpretation des Erwartungswertes in diesem Sachzusammenhang

Lernen*

Aufgabennummer: B_256

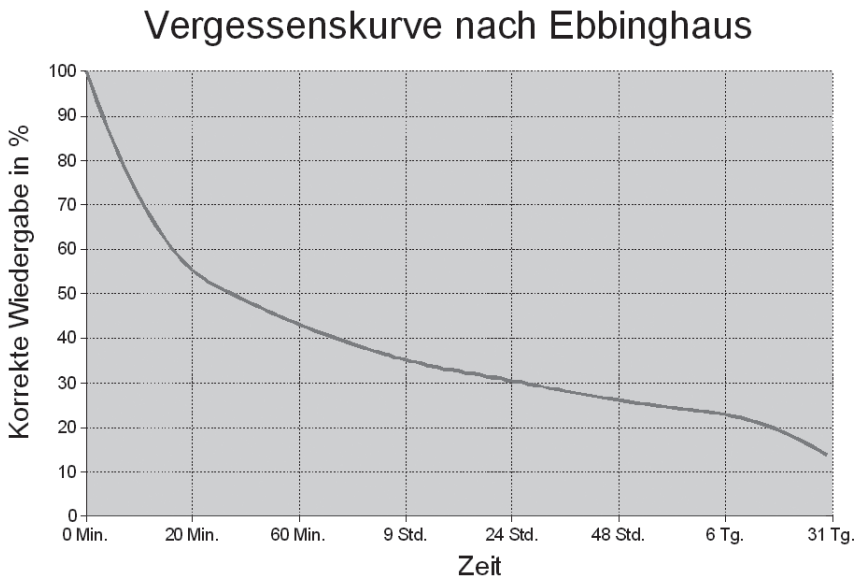
Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) In einer Schülergruppe wurden die jeweilige Lernzeit (in Minuten) und die erreichte Punktezahl bei einer Leistungsüberprüfung notiert:

Lernzeit in Minuten	20	34	27	18	16	23	32	22
erreichte Punktezahl	64	84	88	72	61	70	92	77

– Ermitteln Sie die Gleichung der zugehörigen Regressionsgeraden. (Die erreichte Punktezahl soll in Abhängigkeit von der Lernzeit beschrieben werden.)
– Interpretieren Sie die Steigung der Regressionsgeraden in diesem Sachzusammenhang.
– Berechnen Sie mithilfe dieses Modells, welche Punktezahl man erwarten kann, wenn man 30 Minuten lernt.

b) Die *Vergessenskurve nach Ebbinghaus* veranschaulicht, wie viel Wissen nach einer bestimmten Zeit noch vorhanden ist.
Im Internet findet man dazu die folgende Grafik:



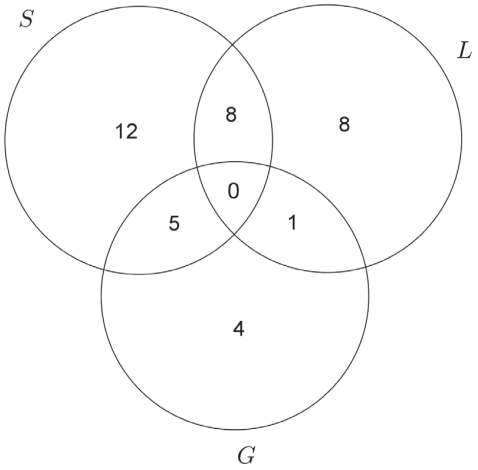
Quelle: https://commons.wikimedia.org/wiki/File%3AVergessenskurve.png
Namensnennung: Rdb [GFDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html) or CC-BY-SA-3.0 (http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/)], via Wikimedia Commons [23.12.2014]

– Lesen Sie ab, nach welcher Zeit die korrekte Wiedergabe auf 30 % gesunken ist.
– Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate der korrekten Wiedergabe im Zeitintervall von 20 Minuten bis 9 Stunden.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Jugendliche wurden befragt, in welcher Körperhaltung sie Vokabeln lernen.
Folgende Kategorien standen zur Auswahl: sitzend (*S*), liegend (*L*) oder gehend (*G*).
Mehrfachnennungen waren möglich.

Im nachstehenden Venn-Diagramm sind die vollständigen Ergebnisse dieser Erhebung dargestellt:



– Kennzeichnen Sie die Menge (S ∪ G)\L im oben stehenden Venn-Diagramm.
– Erklären Sie die Bedeutung der Null im oben stehenden Venn-Diagramm im Sachzusammenhang.
– Lesen Sie aus dem oben stehenden Venn-Diagramm ab, wie viele Jugendliche sich nur für eine Kategorie entschieden haben.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Ermitteln der Gleichung der Regressionsgeraden mittels Technologieeinsatz:
$y = 1{,}497x + 40{,}082$
Gemäß dem Modell erreicht man um rund 1,5 Punkte mehr, wenn man 1 Minute länger lernt.

Berechnung: $1{,}497 \cdot 30 + 40{,}082 = 84{,}9... \approx 85$
Gemäß dem Modell erhält man rund 85 Punkte, wenn man 30 Minuten lernt.

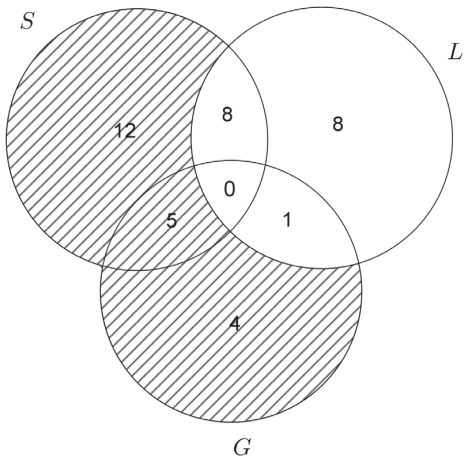
b) Die korrekte Wiedergabe sinkt nach rund 24 Stunden auf 30 %. Toleranzbereich: [24; 30].

Differenzenquotient: $\frac{35 - 55}{9 - \frac{1}{3}} \approx -2{,}3$

Toleranzbereich beim Ablesen: [54; 56] bzw. [34; 36]

Die mittlere Änderungsrate der Wiedergabe beträgt im Zeitintervall [20 min; 9 h] –2,3 % pro Stunde.

c)



Es gibt keine Jugendlichen, die alle 3 Kategorien genannt haben.
Es haben sich insgesamt 24 Jugendliche für nur eine Kategorie entschieden.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B1: für das richtige Ermitteln der Gleichung der Regressionsgeraden
1 × C: für die richtige Interpretation der Steigung in diesem Sachzusammenhang
1 × B2: für die richtige Berechnung der Punktezahl

b) 1 × C: für das richtige Ablesen im Toleranzbereich [24; 30]
1 × B: für die richtige Berechnung der mittleren Änderungsrate

c) 1 × C1: für das richtige Kennzeichnen der gesuchten Menge
1 × D: für die richtige Erklärung der Bedeutung der Null im Venn-Diagramm
1 × C2: für das richtige Ablesen, wie viele Jugendliche sich nur für eine Kategorie entschieden haben

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

E-Reader*

Aufgabennummer: B_224

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein Unternehmen bringt einen neuen E-Reader auf den Markt. Die nachstehende Tabelle beschreibt die Entwicklung der Anzahl der insgesamt (von Anfang an) verkauften E-Reader in einer bestimmten Region.

Zeit in Wochen	Anzahl der insgesamt (von Anfang an) verkauften E-Reader
1	179
2	364
3	674
4	981
5	1310
6	1700
7	2055
8	2280
9	2470
10	2500
11	2540
12	2545

a) Betrachtet man nur die 5 Zahlenpaare im Zeitintervall [3; 7], so zeigt sich ein annähernd linearer Verlauf.

– Ermitteln Sie die Regressionsgerade für das Zeitintervall [3; 7].
– Interpretieren Sie die Steigung dieser Regressionsgeraden im Sachzusammenhang.

b) Betrachtet man nur die ersten 3 Zahlenpaare, so zeigt sich ein annähernd exponentieller Verlauf. Dieser kann durch

$$V_1(t) = 93{,}7 \cdot 1{,}94^t$$

oder durch

$$V_2(t) = 93{,}7 \cdot e^{0{,}662688 \cdot t}$$

dargestellt werden.

t ... Zeit in Wochen
$V_1(t)$, $V_2(t)$ ... Anzahl der bis zur Zeit t insgesamt verkauften E-Reader

– Erklären Sie, warum beide Funktionen V_1 und V_2 annähernd denselben Wachstumsverlauf beschreiben.
– Berechnen Sie die Verdoppelungszeit in diesem exponentiellen Wachstumsmodell.

* ehemalige Klausuraufgabe

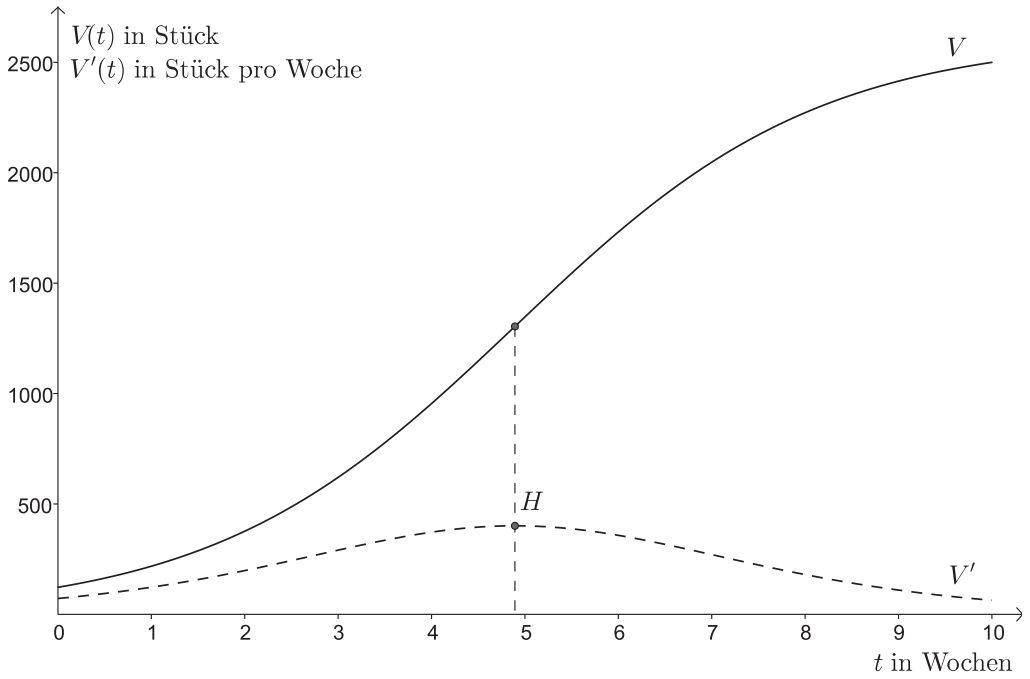
c) Betrachtet man alle 12 Zahlenpaare, so lässt sich die Entwicklung der Anzahl der insgesamt verkauften E-Reader näherungsweise durch eine logistische Funktion V beschreiben:

$$V(t) = \frac{2608}{1 + 20{,}28 \cdot e^{-0{,}6151 \cdot t}}$$

t ... Zeit in Wochen
$V(t)$ ... Anzahl der bis zur Zeit t insgesamt verkauften E-Reader

– Begründen Sie anhand der gegebenen Funktion, warum die Funktionswerte sich mit wachsendem t dem maximalen Wert 2608 annähern.
– Berechnen Sie, um wie viel der logistische Funktionswert $V(8)$ vom gegebenen Tabellenwert bei 8 Wochen abweicht.

In der nachstehenden Grafik sind die logistische Funktion V sowie deren Ableitungsfunktion V' grafisch dargestellt.



– Interpretieren Sie die Bedeutung der Koordinaten des Hochpunktes H der Ableitungsfunktion V' im Sachzusammenhang.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Ermitteln der Regressionsgerade mittels Technologieeinsatz:

$V(t) = 348{,}1 \cdot t - 396{,}5$

t ... Zeit in Wochen
$V(t)$ ... Anzahl der bis zur Zeit t insgesamt verkauften E-Reader

In diesem Zeitraum werden nach diesem Modell pro Woche rund 348 Stück verkauft.

b) Da $1{,}94 \approx e^{0{,}662688}$, beschreiben V_1 und V_2 annähernd denselben Wachstumsverlauf.

Verdoppelungszeit: $T = \frac{\ln(2)}{\ln(1{,}94)} = 1{,}045...$
Die Verdoppelungszeit beträgt rund 1,05 Wochen.

c) Da für großes t der Wert $e^{-0{,}6151 \cdot t}$ gegen null geht, nähert sich der Nenner der Zahl 1 und $V(t)$ damit 2608.

Funktionswert nach 8 Wochen: $V(8) \approx 2272$
Abweichung vom gegebenen Tabellenwert: $2280 - 2272 = 8$

Der logistische Funktionswert weicht um ca. 8 Stück vom gegebenen Tabellenwert ab.

Die 1. Koordinate von H ist nach diesem Modell derjenige Zeitpunkt, in dessen Nähe am meisten E-Reader pro Woche verkauft wurden. Die 2. Koordinate entspricht in etwa der Anzahl der verkauften E-Reader in dieser Woche.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für die richtige Ermittlung der Regressionsgeraden
1 × C: für die richtige Interpretation der Steigung im Sachzusammenhang
b) 1 × D: für die richtige Erklärung, warum V_1 und V_2 annähernd denselben Wachstumsverlauf beschreiben
1 × B: für die richtige Berechnung der Verdoppelungszeit mithilfe der Funktion V_1 oder V_2
c) 1 × D: für die richtige Begründung, warum sich die Funktionswerte mit wachsendem t dem maximalen Wert 2608 annähern
1 × B: für die richtige Berechnung der Abweichung
1 × C: für die richtige Interpretation der Koordinaten des Hochpunktes im Sachzusammenhang

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Produktion*

Aufgabennummer: B_220

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) In der nachstehenden Tabelle sind die Gesamtkosten eines Unternehmens $K(x)$ in GE für die Produktionsmenge x in ME angegeben. Die Fixkosten betragen 40 GE.

x in ME	2	5	9
$K(x)$ in GE	105	152	369

– Ermitteln Sie die Gleichung der ertragsgesetzlichen Kostenfunktion K.
– Zeichnen Sie den Graphen dieser Kostenfunktion K im Intervall $0 \leq x \leq 10$.
– Lesen Sie aus dem Graphen denjenigen Bereich ab, in dem ein progressiver Kostenverlauf vorliegt.

b) – Beschreiben Sie die notwendigen Schritte zur Berechnung der kurzfristigen Preisuntergrenze, wenn die Gesamtkostenfunktion bekannt ist.

c) Zur Gewinnermittlung für ein anderes Produkt verwendet das Unternehmen die folgende Kostenfunktion K sowie die folgende Erlösfunktion E:

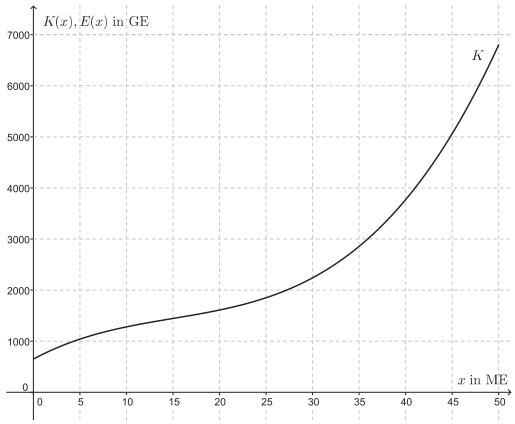
$K(x) = x^3 - 9 \cdot x^2 + 55 \cdot x + 190$
$E(x) = 90 \cdot x$

x in ME
$K(x)$, $E(x)$ in GE

– Stellen Sie Funktionsgleichung der Gewinnfunktion auf.
– Berechnen Sie die Höhe des maximalen Gewinns.

* ehemalige Klausuraufgabe

d) In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Kostenfunktion *K* eines weiteren Produktes dargestellt.

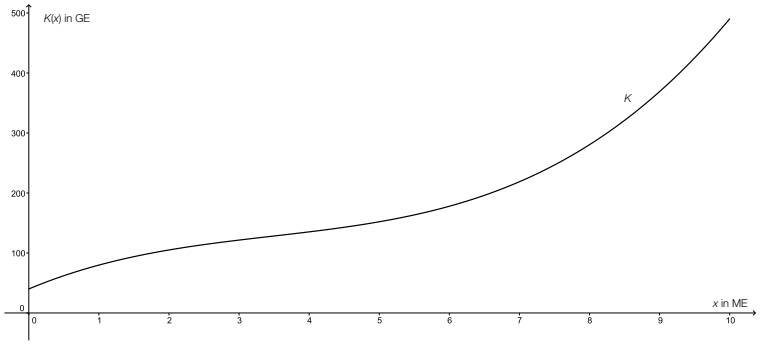


– Zeichnen Sie den Graphen der Erlösfunktion *E* bei einem Marktpreis von 100 GE/ME ein.
– Lesen Sie die beiden Gewinngrenzen ab.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $K(x) = 0{,}99 \cdot x^3 - 10{,}27 \cdot x^2 + 49{,}1 \cdot x + 40$

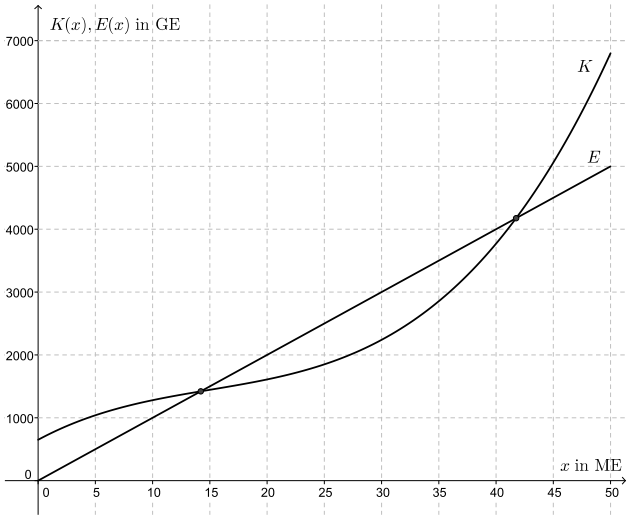


Im Bereich ab rund 3,5 ME liegt ein progressiver Kostenverlauf vor.
Für die untere Grenze gilt folgender Ablesetoleranzbereich: [3; 4].

b) Schritte zur Berechnung der kurzfristigen Preisuntergrenze:
– Bestimmung der variablen Stückkostenfunktion
– Stelle des Minimums der variablen Stückkostenfunktion berechnen (Betriebsminimum)
– Betriebsminimum in variable Stückkostenfunktion einsetzen
→ Ergebnis ist die kurzfristige Preisuntergrenze

c) $G(x) = -x^3 + 9 \cdot x^2 + 35 \cdot x - 190$
maximaler Gewinn: 156,9 GE

d)



untere Gewinngrenze: ca. 14 ME, Ablesetoleranzbereich [12; 16]
obere Gewinngrenze: ca. 42 ME, Ablesetoleranzbereich [40; 44]

Lösungsschlüssel

a) 1 × B1 für die richtige Ermittlung der Gleichung
   1 × B2 für das richtige Zeichnen des Funktionsgraphen
   1 × C für das richtige Ablesen des Intervalls
b) 1 × C für die richtige Beschreibung der Berechnungsschritte
c) 1 × A für das richtige Aufstellen der Gewinnfunktion
   1 × B für die richtige Berechnung des maximalen Gewinns
d) 1 × A für das richtige Einzeichnen des Graphen der Erlösfunktion
   1 × C für das richtige Ablesen der Gewinngrenzen

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Jungunternehmerin*

Aufgabennummer: B_207

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Eine Jungunternehmerin übernimmt einen Betrieb. Daher informiert sie sich über die Preis- und Kostensituation der Produkte.

a) Die Preisfunktionen für das Angebot p_A und für die Nachfrage p_N eines Produktes sind gegeben:

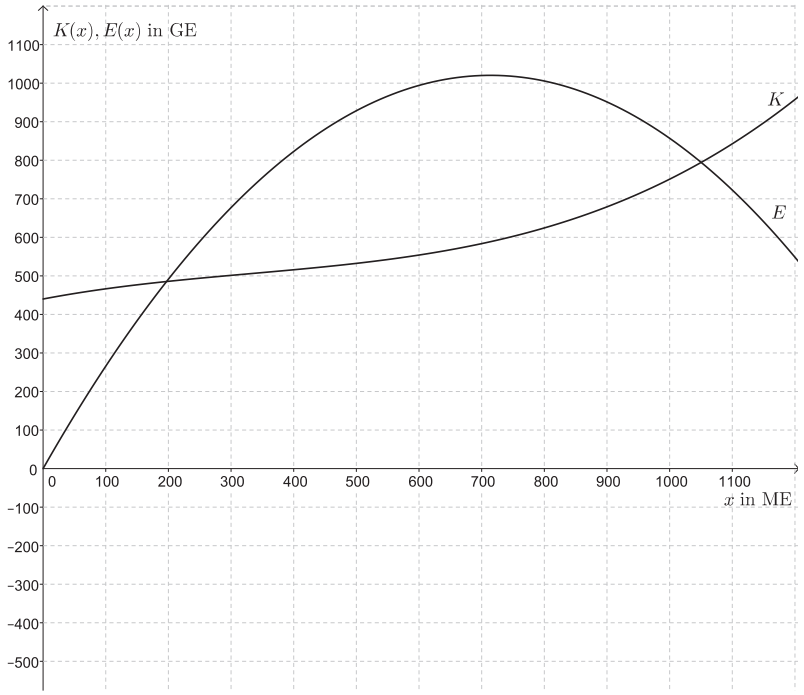
$p_A(x) = \frac{x^2}{10} + 1$
$p_N(x) = -3 \cdot x + 8$

x ... angebotene bzw. nachgefragte Menge in Mengeneinheiten (ME)
$p_A(x)$ ... Angebotspreis bei x ME in Geldeinheiten pro Mengeneinheit (GE/ME)
$p_N(x)$ ... Nachfragepreis bei x ME in GE/ME

– Zeichnen Sie die Graphen beider Funktionen im Intervall [0; 5] in ein gemeinsames Koordinatensystem.
– Markieren Sie in der Grafik die Menge, bei der der Markt gesättigt ist.
– Interpretieren Sie die Bedeutung des y-Achsenabschnitts der Preisfunktion des Angebots im Sachzusammenhang.
– Bestimmen Sie den Marktgleichgewichtspreis.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) In der nachstehenden Grafik sind Funktionsgraphen der Kostenfunktion K und der Erlösfunktion E eines Produktes dargestellt:



– Lesen Sie aus der Grafik den Gewinnbereich ab.
– Zeichnen Sie den Graphen der Gewinnfunktion in die vorgegebene Grafik ein.

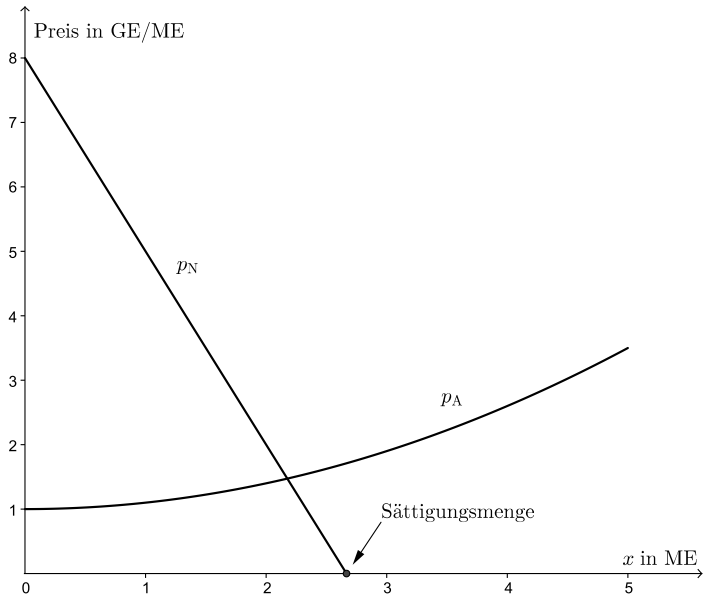
c) Die Grenzkostenfunktion eines weiteren Produktes ist gegeben: $K'(x) = 6 \cdot x^2 - 38 \cdot x + 64$.
Die Kosten für die Produktion von 2 ME betragen 72 GE.

– Stellen Sie die Funktionsgleichung der Gesamtkostenfunktion K auf.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



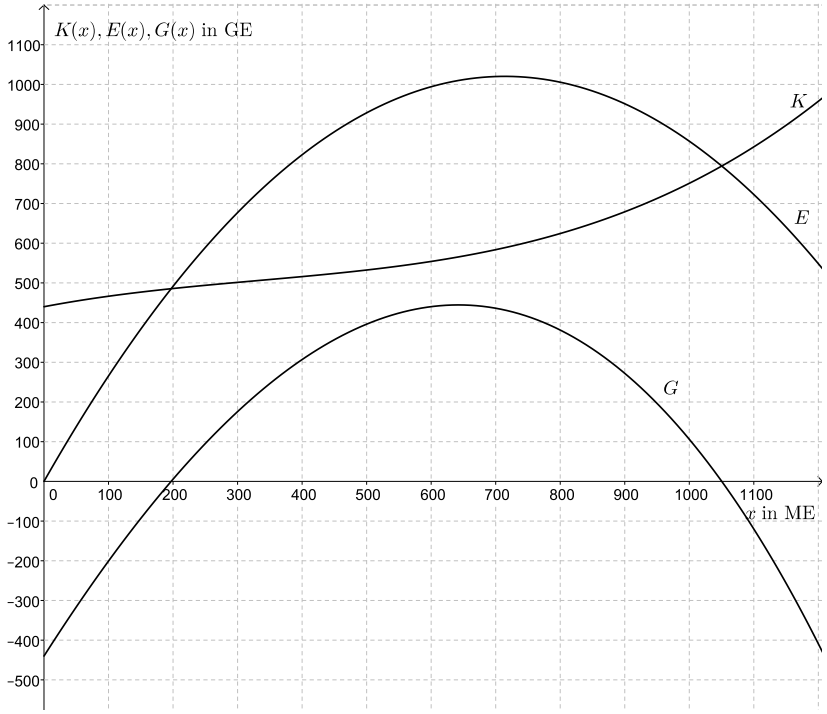
Der y-Achsenabschnitt der Preisfunktion des Angebots liegt bei 1 GE/ME. Dies ist derjenige Preis, zu dem kein Produzent bereit ist, das Produkt anzubieten.

Marktgleichgewicht:

$-3 \cdot x + 8 = \frac{x^2}{10} + 1$
$x = 2{,}175...$
$p_N(2{,}175...) = 1{,}473... \approx 1{,}47$

Der Marktgleichgewichtspreis beträgt 1,47 GE/ME.

b) Der Gewinnbereich liegt ca. zwischen 200 ME und 1 050 ME.
Ableseungenauigkeiten ± 50 ME sind zu tolerieren.



c) $K(x) = \int K'(x)\mathrm{d}x = 2 \cdot x^3 - 19 \cdot x^2 + 64 \cdot x + c$
$K(2) = 72 \rightarrow 2 \cdot 2^3 - 19 \cdot 2^2 + 64 \cdot 2 + c = 72$

$c = 4$

$K(x) = 2 \cdot x^3 - 19 \cdot x^2 + 64 \cdot x + 4$

Lösungsschlüssel

a) 1 × B1: für das richtige Zeichnen der beiden Funktionsgraphen
1 × C1: für das richtige Markieren der Sättigungsmenge
1 × C2: für die richtige Interpretation des *y*-Achsenabschnitts
1 × B2: für die richtige Bestimmung des Marktgleichgewichtspreises

b) 1 × C: für das richtige Ablesen des Gewinnbereichs mit Ableseungenauigkeiten von ± 50 ME
1 × A: für das richtige Einzeichnen des Funktionsgraphen der Gewinnfunktion (Achsenabschnitt, Nullstellen)

c) 1 × A: für den richtigen Ansatz zum Aufstellen der Funktionsgleichung der Gesamtkostenfunktion
1 × B: für die richtige Berechnung der Integrationskonstanten

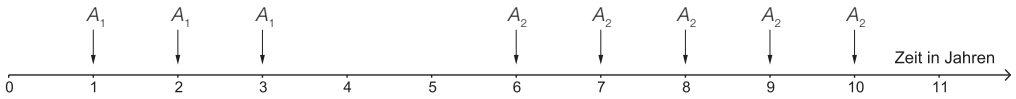
Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Kreditrückzahlung*

Aufgabennummer: B_206

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Für den Kauf eines Grundstücks nimmt Herr Maier einen Kredit auf.
Ursprünglich vereinbart er mit seiner Bank, diesen innerhalb von 10 Jahren in Form von gleich hohen, nachschüssigen, jährlichen Annuitäten A_1 zurückzuzahlen. Dieser Plan ändert sich jedoch.
Der tatsächliche Verlauf der vollständigen Rückzahlung von Herrn Maier ist auf der nachstehenden Zeitachse dargestellt.



a) In den ersten 3 Jahren läuft die Kredittilgung nach dem ursprünglichen Plan. Für das 3. Jahr der Rückzahlung ergeben sich folgende Einträge im Tilgungsplan:

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
3	€ 3.703,15	€ 13.881,45	€ 17.584,60	€ 109.556,81

– Berechnen Sie den zugrunde liegenden jährlichen Zinssatz dieser Kredittilgung.
– Berechnen Sie die ursprüngliche Kredithöhe.

b) Fassen Sie die tatsächlich erfolgten Zahlungen wie in der oben dargestellten Zeitachse als 2 nachschüssige Renten mit Annuitäten A_1 und A_2 auf.

– Übersetzen Sie den oben dargestellten Zahlungsstrom in einen passenden Text, der den Rückzahlungsverlauf beschreibt.
– Markieren Sie jeweils die Bezugszeitpunkte für die Barwerte und die Endwerte der beiden Renten in der oben dargestellten Zeitachse.

c) Nach dem Bezahlen der Annuitäten A_1 verbleibt am Ende des 3. Jahres eine Restschuld.

– Begründen Sie, warum sich die Höhe dieser Restschuld bis zum Ende des 5. Jahres ändert.

* ehemalige Klausuraufgabe

d) Am Ende des 5. Jahres beträgt die verbleibende Schuld € 116.228,82.
Eine weitere Rückzahlungsvariante, die die Laufzeit verlängert hätte, wäre gewesen:
Herr Maier zahlt weiterhin jährlich Annuitäten in Höhe von € 17.584,60.
Die Bank verlangt ab dem 6. Jahr Zinsen in Höhe von 3,5 % p. a.

Die vorletzte Zeile des sich daraus ergebenden Tilgungsplans lautet:

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
	€ 969,26	€ 16.615,34	€ 17.584,60	€ 11.077,75

– Bestimmen Sie, in welchem Jahr (vom Zeitpunkt der Aufnahme des Kredits) die Zahlung erfolgt, die in dieser Zeile des Tilgungsplans dargestellt ist.
– Ermitteln Sie die letzte Zeile dieses Tilgungsplans.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Die Höhe der ursprünglichen Schuld kann durch direktes Rückrechnen im Tilgungsplan erfolgen.

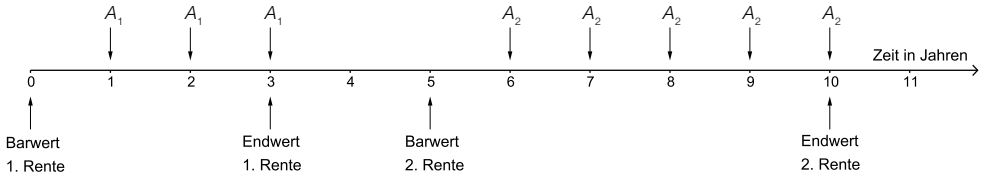
Restschuld des 2. Jahres = € 109.556,81 + € 13.881,45 = € 123.438,26

Zinssatz: $i = \frac{3\,703{,}15}{123\,438{,}26} = 0{,}030... \approx 3\ \%$

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0				€ 150.000,00
1	€ 4.500,00	€ 13.084,60	€ 17.584,60	€ 136.915,40
2	€ 4.107,46	€ 13.477,14	€ 17.584,60	€ 123.438,26
3	€ 3.703,15	€ 13.881,45	€ 17.584,60	€ 109.556,81

Die ursprüngliche Schuld kann auch direkt mithilfe der Rentenrechnung bestimmt werden.

b) Herr Maier bezahlt 3 Jahre lang nachschüssig Annuitäten in Höhe von A_1.
Im 4. und 5. Jahr leistet er keine Zahlungen, dafür bezahlt er ab dem 6. Jahr nachschüssig 5 Annuitäten in Höhe von A_2.



c) Da im 4. und 5. Jahr keine Rückzahlung erfolgt, erhöht sich die Restschuld des 3. Jahres um die Zinsen des 4. und 5. Jahres.

d) Die Rückzahlung entspricht in diesem Fall einer nachschüssigen Rente mit Annuitäten in Höhe von € 17.584,60. Der Barwert der Rente beträgt € 116.228,82.

$$116\,228{,}82 \cdot 1{,}035^n - 17\,584{,}60 \cdot \frac{1{,}035^n - 1}{0{,}035} = 11\,077{,}75$$

Lösung mittels Technologieeinsatz: $n \approx 7$

Die angegebene Zeile des Tilgungsplans ist daher jene für das Jahr 12.

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
12	€ 969,26	€ 16.615,34	€ 17.584,60	€ 11.077,75
13	€ 387,72	€ 11.077,75	€ 11.465,47	€ 0

Lösungsschlüssel

a) 1 × B1: für die richtige Berechnung des Zinssatzes
   1 × B2: für die richtige Berechnung der Anfangsschuld
b) 1 × A: für das richtige Übersetzen des dargestellten Zahlungsflusses
   1 × C1: für das richtige Markieren des Barwerts und des Endwerts der 1. Rente
   1 × C2: für das richtige Markieren des Barwerts und des Endwerts der 2. Rente
c) 1 × D: für eine richtige Begründung
d) 1 × B1: für die richtige Bestimmung des Jahres
   1 × B2: für das richtige Ermitteln der letzten Zeile des Tilgungsplans

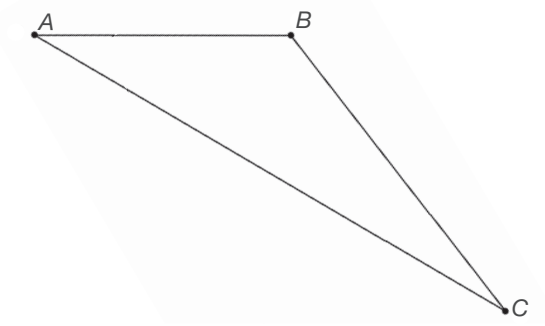
Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Rohrleitungen (2)*

Aufgabennummer: B_083

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

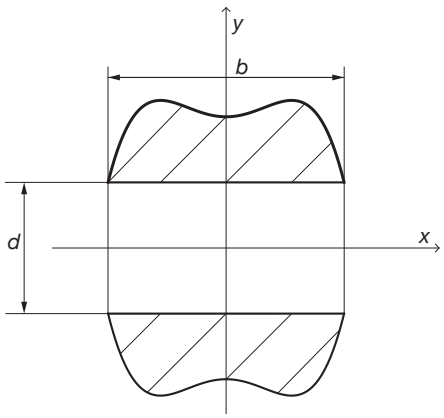
a) Rohre sollen, wie in der nachstehenden Skizze vereinfacht dargestellt, zwischen den Punkten *A*, *B* und *C* im Raum verlegt werden.



Zur Berechnung eines Winkels wird die folgende Formel verwendet: $\cos(\phi) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC}|}$

– Zeichnen Sie in der obigen Skizze den mit dieser Formel berechneten Winkel ϕ mit dem Eckpunkt *B* als Scheitel ein.
– Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung des Flächeninhalts des Dreiecks *ABC* mithilfe der Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$.

b) Ein Verbindungsstück für 2 Rohre soll untersucht werden.
Das Verbindungsstück ist rotationssymmetrisch bezüglich der *x*-Achse. Die obere Begrenzungskurve der Schnittfläche, die in der nachstehenden Grafik schraffiert dargestellt ist, wird durch die Funktionsgleichung $y = 2 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}$ beschrieben, wobei *x* und *y* Längen in Dezimetern beschreiben. Der innere Durchmesser des Verbindungsstückes ist $d = 2$ dm.



– Berechnen Sie die Breite *b* des Verbindungsstückes.
– Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung des Volumens des Verbindungsstückes mithilfe der Integralrechnung.

Das Verbindungsstück ist aus einem Material mit der Dichte $\rho = 900$ kg/m³ gefertigt.

– Berechnen Sie die Masse des Verbindungsstückes.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) In einem Rohr nimmt der Druck durch die Reibung ab. Er wird also mit zunehmender Entfernung vom Rohranfang geringer.
Entsprechend dem Gesetz von Hagen-Poiseuille kann der Druck in einem Rohr in Abhängigkeit von der Rohrlänge x durch eine lineare Funktion p beschrieben werden.

– Zeigen Sie, dass der Druckverlust Δp proportional zur Rohrlänge ist; d. h., für alle x ist $\Delta p(x) = p(0) - p(x) = c \cdot x$ mit c konstant.

Der Druck in einem Rohr wird an 2 Stellen gemessen. Die Ergebnisse sind in der nachstehenden Tabelle angegeben.

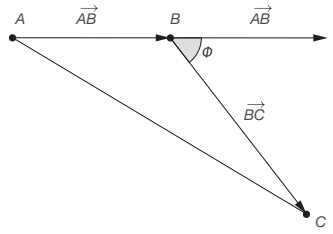
Rohrlänge in m	Druck in bar
5	3,998
33	3,901

– Bestimmen Sie mithilfe der linearen Interpolation den Druck bei einer Rohrlänge von 14 m.
– Beschreiben Sie, welche Bedeutung die Steigung der linearen Funktion p in diesem Sachzusammenhang hat.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



Fläche $= \frac{1}{2} \cdot \left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right|$

b) Berechnung der Breite b durch Lösen der Gleichung $2 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} = 1$ mittels Technologieeinsatz: $x = \pm 1{,}79...$

Die Breite des Verbindungsstückes beträgt rund 3,6 dm.

Formel zur Berechnung des Volumens:
$V = \pi \cdot \int_{-1,8}^{1,8} y^2 \mathrm{d}x - 1^2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 1{,}8$

Berechnen der Masse: $m = \rho \cdot V = 0{,}9 \cdot 35{,}4... \Rightarrow m \approx 31{,}9$ kg

c) Mit $p(x) = k \cdot x + d$ erhält man $\Delta p(x) = p(0) - p(x) = d - (k \cdot x + d) = -k \cdot x$. Also: $c = -k$.

Aus den beiden Messwerten ergibt sich die lineare Funktion p mit $p(x) = -0{,}003464 \cdot x + 4{,}015$.
$p(14) \approx 3{,}967$
Bei einer Rohrlänge von 14 m ergibt sich mithilfe der linearen Interpolation ein Druck von rund 3,967 bar.

Die Steigung gibt den Druckabfall in Bar pro Meter an.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A1: für das richtige Einzeichnen des (mit der Formel berechneten) Winkels in der Skizze
1 × A2: für das richtige Erstellen einer Formel mithilfe der Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ zur Bestimmung des Flächeninhalts

b) 1 × B1: für die richtige Berechnung der Breite des Verbindungsstückes
1 × A: für das richtige Erstellen einer Formel zur Berechnung des Volumens
1 × B2: für die richtige Berechnung der Masse

c) 1 × D: für den richtigen Nachweis der direkten Proportionalität
1 × A: für einen richtigen Ansatz (z. B. mithilfe einer linearen Funktion bzw. ähnlicher Dreiecke)
1 × B: für die richtige Bestimmung des Interpolationswertes
1 × C: für die richtige Beschreibung der Bedeutung der Steigung in diesem Sachzusammenhang

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Thermistor*

Aufgabennummer: B_050

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

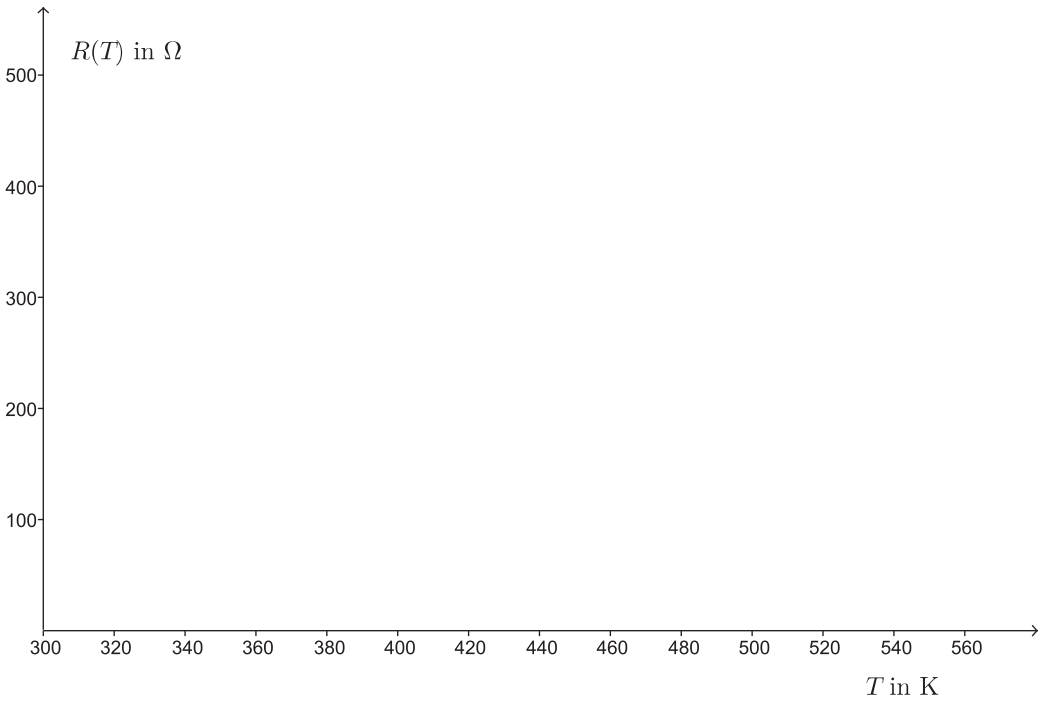
Ein *Thermistor* oder *Heißleiter* ist ein Halbleiter, dessen elektrischer Widerstand mit zunehmender Temperatur T abnimmt. Die Funktion R beschreibt diesen Zusammenhang:

$$R(T) = a \cdot e^{\frac{b}{T}}$$

T ... Temperatur in Kelvin (K)
$R(T)$ ... elektrischer Widerstand bei der Temperatur T in Ohm (Ω)
a ... Konstante in Ω ($a > 0$)
b ... Konstante in K ($b > 0$)

a) – Begründen Sie mathematisch, warum die Funktion R monoton fallend ist.

– Zeichnen Sie den Graphen der Funktion R im Bereich $300\ \text{K} \leq T \leq 550\ \text{K}$ für $a = 0{,}1\ \Omega$ und $b = 2\,500$ K im nachstehenden Koordinatensystem.



b) Verwenden Sie $a = 0{,}1\ \Omega$ und $b = 2\,500$ K.

– Linearisieren Sie die Funktion R an der Stelle $T_0 = 373{,}15$ K, d. h., bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von R im Punkt $(T_0 | R(T_0))$.
– Ermitteln Sie den Betrag des relativen Fehlers, wenn man an der Stelle $T = 390$ K den Widerstand mit der linearisierten Funktion anstatt mit der Funktion R berechnet.

* ehemalige Klausuraufgabe

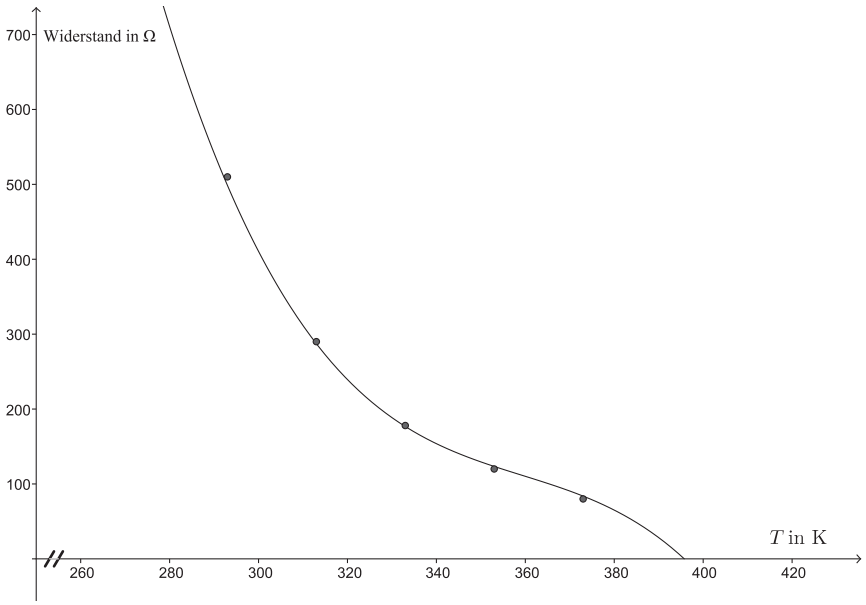
c) Für einen bestimmten Heißleiter wurden folgende Werte gemessen:

T in K	R in Ω
293	510
313	290
333	178
353	120
373	80

Zur weiteren Auswertung wird eine Polynomfunktion 3. Grades als Ausgleichsfunktion verwendet.

– Ermitteln Sie diese Ausgleichsfunktion.

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der zu ermittelnden Ausgleichsfunktion P bereits eingezeichnet.

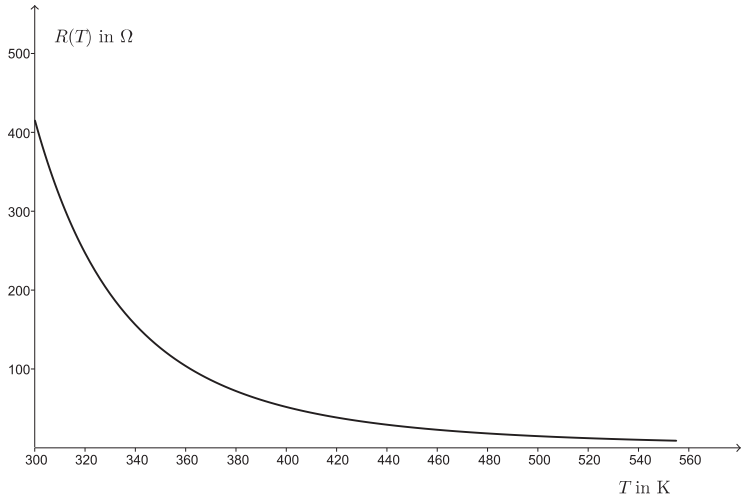


– Erklären Sie ausgehend von der obigen Abbildung, warum die 1. Ableitung dieser Polynomfunktion 3. Grades keine reellen Nullstellen hat.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Begründung für die Monotonie:
Für größer werdendes T (und $b > 0$) wird die Hochzahl $\frac{b}{T}$ immer kleiner und damit (wegen $a > 0$) auch $a \cdot e^{\frac{b}{T}}$.



b) $g(T) = k \cdot T + d$

$R'(T) = -a \cdot b \cdot \frac{1}{T^2} \cdot e^{\frac{b}{T}}$

Steigung: $k = R'(373{,}15)$ ergibt $k = -1{,}458... \approx -1{,}46$.

Achsenabschnitt: $d = R(373{,}15) - k \cdot 373{,}15$ ergibt $d = 625{,}353... \approx 625{,}35$.

Betrag des relativen Fehlers an der Stelle $T = 390$ K: $\left| \frac{R(390) - g(390)}{R(390)} \right| \approx 6{,}8\ \%$

c) Ermitteln der Ausgleichsfunktion mittels Technologieeinsatz:
$P(T) = -9{,}4 \cdot 10^{-4} \cdot T^3 + T^2 - 365 \cdot T + 4{,}4 \cdot 10^4$

Abhängig von der verwendeten Technologie kann man geringfügig abweichende Koeffizienten bei der Ermittlung der Ausgleichsfunktion erhalten.

Da in der Abbildung der Wendepunkt erkennbar ist, ist diese Polynomfunktion 3. Grades streng monoton fallend und es liegen somit keine Stellen mit horizontaler Tangentensteigung vor. Daher hat die 1. Ableitung von P keine reellen Nullstellen.

Lösungsschlüssel

a) 1 × D: für die richtige Begründung zur Monotonie (Verweis auf die Grafik ist nicht ausreichend)
1 × B: für das richtige Zeichnen des Funktionsgraphen im angegebenen Intervall

b) 1 × A: für den richtigen Ansatz zur Linearisierung der Funktion *R*
1 × B1: für die richtige Berechnung der Tangente
1 × B2: für die richtige Ermittlung des Betrags des relativen Fehlers

c) 1 × B: für die richtige Ermittlung der Ausgleichsfunktion
1 × D: für die richtige Erklärung ausgehend von der Abbildung

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Bakterienkultur*

Aufgabennummer: B_049

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Eine Bakterienkultur mit 50 Bakterien wird zu einem Zeitpunkt $t = 0$ angelegt. Nach 100 Minuten werden bereits 750 Bakterien gezählt. Die Funktion N beschreibt das Wachstum der Bakterienkultur: $N(t)$ ist die Anzahl der Bakterien nach t Minuten. Die 1. Ableitung der Funktion N ist proportional zu N. Die entsprechende Proportionalitätskonstante bezeichnet man als *Wachstumsrate*.

– Stellen Sie die zugehörige Differenzialgleichung für N auf.
– Lösen Sie die Differenzialgleichung mithilfe der Methode *Trennen der Variablen*.
– Berechnen Sie, wie viele Bakterien nach 3 Stunden vorhanden sind.
– Geben Sie an, wie sich das Wachstumsverhalten ändert, wenn die Bakterienkultur eine größere Wachstumsrate hat.

b) Die Beobachtung einer Bakterienkultur ergab folgende Daten:

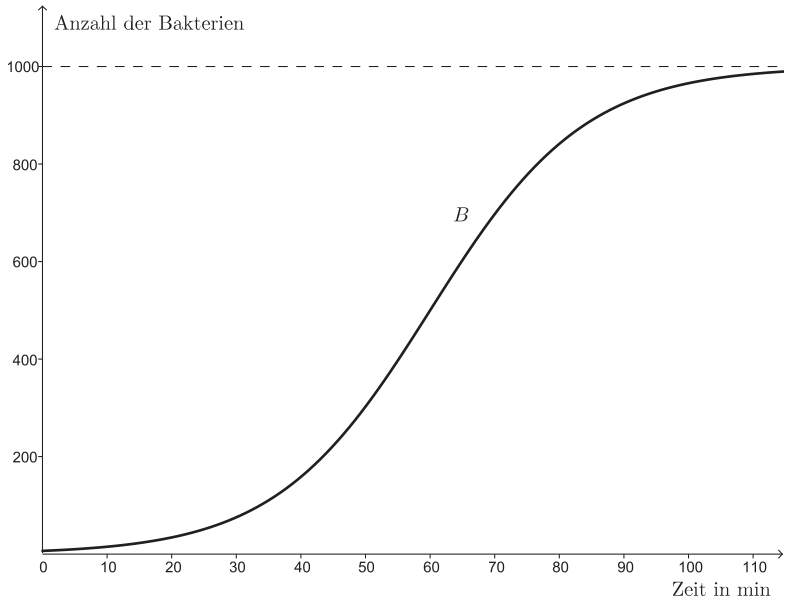
Zeit nach Beginn der Beobachtung in Minuten	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
Anzahl der Bakterien	110	120	156	185	190	245	274	340	360	430

– Ermitteln Sie die Gleichung der exponentiellen Ausgleichsfunktion, die die Bakterienanzahl in Abhängigkeit von der Zeit nach Beginn der Beobachtung näherungsweise beschreibt.
– Berechnen Sie mithilfe der Ausgleichsfunktion, wie viele Minuten nach Beginn der Beobachtung 1 000 Bakterien zu erwarten sind.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Die Funktion B beschreibt näherungsweise, wie viele Bakterien sich zu jedem Zeitpunkt in einer Petrischale befinden. Der zugehörige Funktionsgraph ist im nachstehenden Diagramm dargestellt.

t ... Zeit nach Beginn der Beobachtung in Minuten
$B(t)$ ... Anzahl der Bakterien zur Zeit t



– Lesen Sie aus dem Diagramm ab, wie viele Minuten nach Beginn der Beobachtung das Wachstum der Bakterienkultur am größten ist.

Die entsprechende Differenzialgleichung zur Beschreibung dieses Bakterienwachstums lautet:

$$\frac{dB}{dt} = 8{,}35 \cdot 10^{-5} \cdot B \cdot (1\,000 - B) \quad \text{mit} \quad B > 0$$

– Argumentieren Sie anhand der Differenzialgleichung, für welche Werte von B die Bakterienanzahl zunimmt.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $\frac{dN}{dt} = k \cdot N$

$\int \frac{1}{N} dN = \int k dt$

$\ln|N| = k \cdot t + c$

allgemeine Lösung der Differenzialgleichung: N mit $N(t) = C \cdot e^{k \cdot t}$

$N(0) = 50$ und $N(100) = 750$ liefert: $C = 50$ und $k = 0{,}0270...$

$N(180) = 6545{,}3... \approx 6545$

Nach 3 Stunden sind rund 6545 Bakterien vorhanden.

Wenn die Wachstumsrate der Bakterienkultur größer ist, dann bedeutet das, dass die Anzahl der Bakterien schneller wächst.

b) Ermittlung der exponentiellen Ausgleichsfunktion mittels Technologieeinsatz:

$f(t) = 69{,}43 \cdot e^{0{,}03065 \cdot t}$

t … Zeit nach Beginn der Beobachtung in Minuten
$f(t)$ … Bakterienanzahl zur Zeit t

Abhängig von der verwendeten Technologie kann man geringfügig abweichende Koeffizienten bei der Ermittlung der Ausgleichsfunktion erhalten.

Lösen der Gleichung $f(t) = 1000$ mittels Technologieeinsatz:
$t \approx 87{,}0$

Rund 87 Minuten nach Beginn der Beobachtung sind 1000 Bakterien zu erwarten.

c) Ablesen der Wendestelle der Funktion B: $t = 60$ min
Toleranzbereich: [55; 65]
Rund 60 Minuten nach Beginn der Beobachtung ist das Wachstum der Bakterienkultur am größten.

Für $B < 1000$ ist jeder Faktor auf der rechten Seite der Differenzialgleichung positiv, also $\frac{dB}{dt} > 0$. Daher nimmt die Bakterienzahl für diese Werte zu.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Differenzialgleichung
1 × B1: für die richtige allgemeine Lösung der Differenzialgleichung
1 × B2: für die richtige Berechnung der Bakterienanzahl nach 3 Stunden
1 × C: für die richtige Beschreibung der Veränderung des Wachstumsverhaltens

b) 1 × B1: für die richtige Ermittlung der Ausgleichsfunktion
1 × B2: für die richtige Berechnung, nach welcher Zeit 1 000 Bakterien zu erwarten sind

c) 1 × C: für das richtige Ablesen im Toleranzbereich [55; 65]
1 × D: für eine richtige Argumentation anhand der Differenzialgleichung

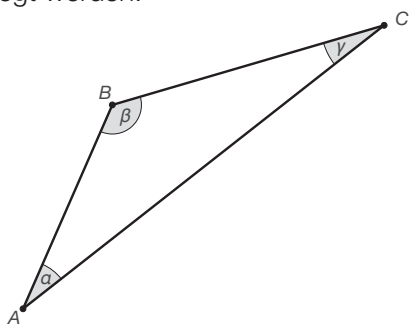
Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Rohrleitungen (1)*

Aufgabennummer: B_040

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

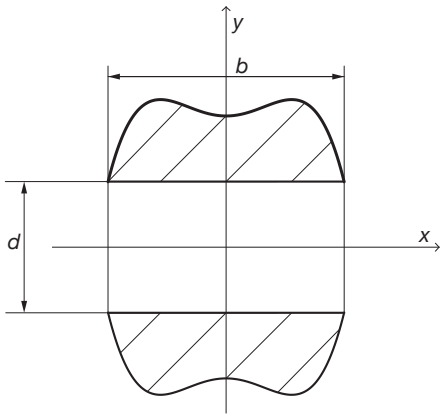
a) Rohre sollen, wie in der nachstehenden Skizze vereinfacht dargestellt, geradlinig zwischen den Punkten *A*, *B* und *C* verlegt werden.



Die folgenden Daten des Dreiecks *ABC* sind bekannt:
$\overline{AB}$ = 50 m, $\overline{AC}$ = 80 m, $\gamma = 20°$. Der Winkel β ist ein stumpfer Winkel.

– Berechnen Sie die fehlenden Bestimmungsstücke dieses Dreiecks (beide Winkel und Länge der fehlenden Seite).

b) Ein Verbindungsstück für 2 Rohre soll untersucht werden.
Das Verbindungsstück ist rotationssymmetrisch bezüglich der *x*-Achse. Die obere Begrenzungskurve der Schnittfläche, die in der nachstehenden Grafik schraffiert dargestellt ist, wird durch die Funktionsgleichung $y = 2 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}$ beschrieben, wobei *x* und *y* Längen in Dezimetern beschreiben. Der innere Durchmesser des Verbindungsstückes ist $d = 2$ dm.



– Berechnen Sie die Breite *b* des Verbindungsstückes.
– Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung des Volumens des Verbindungsstückes mithilfe der Integralrechnung.

Das Verbindungsstück ist aus einem Material mit der Dichte $\rho = 900$ kg/m^3 gefertigt.

– Berechnen Sie die Masse des Verbindungsstückes.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) In einem Rohr nimmt der Druck durch die Reibung ab. Er wird also mit zunehmender Entfernung vom Rohranfang geringer.
Entsprechend dem Gesetz von Hagen-Poiseuille kann der Druck in einem Rohr in Abhängigkeit von der Rohrlänge x durch eine lineare Funktion p beschrieben werden.

– Zeigen Sie, dass der Druckverlust Δp proportional zur Rohrlänge ist; d. h., für alle x ist $\Delta p(x) = p(0) - p(x) = c \cdot x$ mit c konstant.

Der Druck in einem Rohr wird an 2 Stellen gemessen. Die Ergebnisse sind in der nachstehenden Tabelle angegeben.

Rohrlänge in m	Druck in bar
5	3,998
33	3,901

– Bestimmen Sie mithilfe der linearen Interpolation den Druck bei einer Rohrlänge von 14 m.
– Beschreiben Sie, welche Bedeutung die Steigung der linearen Funktion p in diesem Sachzusammenhang hat.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Der Winkel β ergibt sich durch Anwendung des Sinussatzes: $\sin(\beta) = \frac{\overline{AC} \cdot \sin(\gamma)}{\overline{AB}}$.
$\beta_1 \approx 33{,}2°$ und $\beta_2 \approx 146{,}8°$
Da ein stumpfer Winkel vorliegt, gilt: $\beta = \beta_2$.
Der dritte Winkel ergibt sich über die Winkelsumme: $\alpha = 180° - \gamma - \beta \approx 13{,}2°$.
Damit ist die dritte Länge des Dreiecks: $\overline{BC} = \frac{\overline{AB} \cdot \sin(\alpha)}{\sin(\gamma)}$.
$\overline{BC} \approx 33{,}3$ m

b) Berechnung der Breite b durch Lösen der Gleichung $2 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} = 1$ mittels Technologieeinsatz: $x = \pm 1{,}79...$

Die Breite des Verbindungsstückes beträgt rund 3,6 dm.

Formel zur Berechnung des Volumens:
$V = \pi \cdot \int_{-1,8}^{1,8} y^2 \, dx - 1^2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 1{,}8$

Berechnen der Masse: $m = \rho \cdot V = 0{,}9 \cdot 35{,}4... \Rightarrow m \approx 31{,}9$ kg

c) Mit $p(x) = k \cdot x + d$ erhält man $\Delta p(x) = p(0) - p(x) = d - (k \cdot x + d) = -k \cdot x$. Also: $c = -k$.

Aus den beiden Messwerten ergibt sich die lineare Funktion p mit $p(x) = -0{,}003464 \cdot x + 4{,}015$.
$p(14) \approx 3{,}967$
Bei einer Rohrlänge von 14 m ergibt sich mithilfe der linearen Interpolation ein Druck von rund 3,967 bar.

Die Steigung gibt den Druckabfall in Bar pro Meter an.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für den richtigen Ansatz zur Berechnung des stumpfen Winkels
1 × B: für die richtige Berechnung der fehlenden Bestimmungsstücke

b) 1 × B1: für die richtige Berechnung der Breite des Verbindungsstückes
1 × A: für das richtige Erstellen einer Formel zur Berechnung des Volumens
1 × B2: für die richtige Berechnung der Masse

c) 1 × D: für den richtigen Nachweis der direkten Proportionalität
1 × A: für einen richtigen Ansatz (z. B. mithilfe einer linearen Funktion bzw. ähnlicher Dreiecke)
1 × B: für die richtige Bestimmung des Interpolationswertes
1 × C: für die richtige Beschreibung der Bedeutung der Steigung in diesem Sachzusammenhang

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

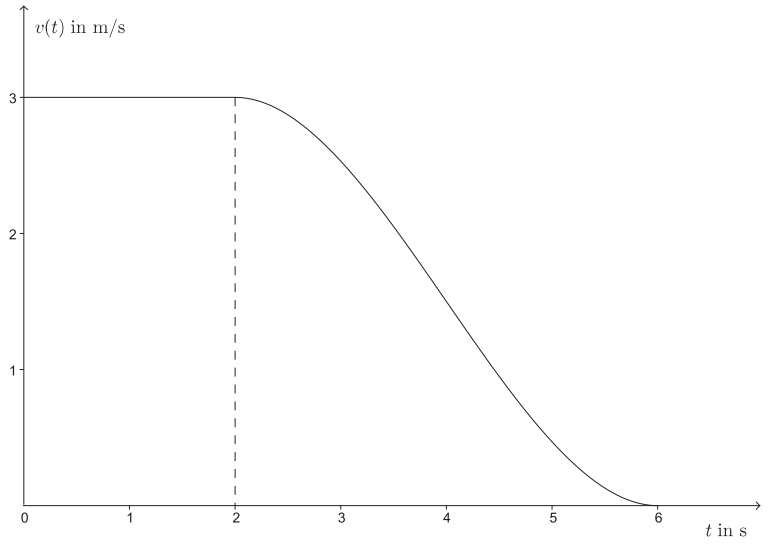
Kransteuerung*

Aufgabennummer: B_039

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Beim Transport von Lasten mittels Kränen ist die richtige Steuerung des Abbremsvorgangs wichtig.

a) Der Geschwindigkeitsverlauf beim Transport einer Last während eines Beobachtungszeitraums von 6 Sekunden ist im unten stehenden Diagramm dargestellt. Zuerst bewegt sich die Last mit konstanter Geschwindigkeit. Der Bremsvorgang beginnt nach 2 Sekunden. Die Beschleunigung zu diesem Zeitpunkt ist noch 0 m/s^2. Nach 6 Sekunden ist die Geschwindigkeit gleich 0 m/s und die Beschleunigung gleich 0 m/s^2.
Der Geschwindigkeitsverlauf soll im Intervall [2; 6] durch eine Polynomfunktion 3. Grades beschrieben werden.



– Stellen Sie die zur Ermittlung der Polynomfunktion notwendigen Gleichungen auf.
– Berechnen Sie die Koeffizienten dieser Polynomfunktion.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Der Geschwindigkeitsverlauf während eines Bremsvorganges eines Krans kann näherungsweise durch eine Funktion v beschrieben werden:

$v(t) = 0{,}08 \cdot t^3 - 0{,}6 \cdot t^2 + 5$

t ... Zeit ab Beginn des Bremsvorganges in Sekunden (s) mit $0 \leq t \leq 5$
$v(t)$ ... Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t in Metern pro Sekunde (m/s)

– Ermitteln Sie die Geschwindigkeit des Krans bei Beginn des Bremsvorganges.
– Dokumentieren Sie, wie man den Bremsweg in Metern berechnen kann.

Beim Bremsen tritt eine negative Beschleunigung auf. Den Betrag dieser negativen Beschleunigung bezeichnet man als *Bremsverzögerung*.

– Berechnen Sie die maximale Bremsverzögerung.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $v(t) = a \cdot t^3 + b \cdot t^2 + c \cdot t + d$
$v(2) = 3$
$v(6) = 0$
$v'(2) = 0$
$v'(6) = 0$

Die Lösung dieses Gleichungssystems mittels Technologieeinsatz ergibt:

$a = \frac{3}{32}$
$b = -\frac{9}{8}$
$c = \frac{27}{8}$
$d = 0$

b) $v(0) = 5$
Die Geschwindigkeit zu Beginn des Bremsvorganges ist 5 m/s.

Der Bremsweg kann als Integral der Geschwindigkeitsfunktion zwischen den Grenzen $t_1 = 0$ und $t_2 = 5$ ermittelt werden.

Ansatz:
$a' = v''$
$a'(t) = 0$
$0{,}48 \cdot t - 1{,}2 = 0$
$t = 2{,}5$
$a(2{,}5) = -1{,}5$

Die maximale Bremsverzögerung beträgt 1,5 m/s^2.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A1: für das richtige Aufstellen der Gleichungen $v(2) = 3$ und $v(6) = 0$
1 × A2: für das richtige Aufstellen der Gleichungen $v'(2) = 0$ und $v'(6) = 0$
1 × B: für das richtige Berechnen der Koeffizienten

b) 1 × B1: für die richtige Ermittlung der Geschwindigkeit zu Beginn des Bremsvorganges
1 × C: für die richtige Dokumentation zur Ermittlung des Bremsweges
1 × A: für einen richtigen Ansatz (Extremstelle der Beschleunigungsfunktion oder Wendestelle der Geschwindigkeitsfunktion)
1 × B2: für die richtige Berechnung der maximalen Bremsverzögerung

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Tagestemperatur

Aufgabennummer: B_252

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Die nachstehend angeführten 3 Messwerte wurden an einem Vormittag aufgezeichnet und sollen mithilfe einer abschnittsweise definierten linearen Funktion T in Abhängigkeit von der Zeit t beschrieben werden.

t in h	T in °C
6	8
9	10
12	16

t ... Zeit nach Mitternacht in Stunden (h)
$T(t)$ ... Temperatur nach t Stunden in Grad Celsius (°C)

Es wird angenommen, dass in den Intervallen [6; 9] und [9; 12] die Temperatur jeweils linear zunimmt.

– Stellen Sie den Temperaturverlauf im Intervall [6; 12] grafisch dar.
– Stellen Sie die Funktion T abhängig von der Zeit t im Intervall [6; 12] auf.
– Berechnen Sie mithilfe dieser Funktion T die Temperatur um 11:30 Uhr.

b) An einem Tag im Oktober hat man einen Temperaturverlauf gemessen, der durch eine Polynomfunktion 3. Grades mit $f(t) = a \cdot t^3 + b \cdot t^2 + c \cdot t + d$ angenähert werden kann.

t ... Zeit nach Mitternacht in Stunden
$f(t)$ ... Temperatur zum Zeitpunkt t in °C

t	2	5	8	11	14	17	20	23
$f(t)$	5,4	4,3	8,3	12,2	15,3	14	9,1	7,2

– Erstellen Sie mithilfe der Regressionsrechnung eine zu den angegebenen Werten passende Polynomfunktion 3. Grades. (Runden Sie dabei die Koeffizienten auf 4 Nachkommastellen.)
– Berechnen Sie den Differenzenquotient dieser Polynomfunktion für das Intervall [6; 12].
– Beschreiben Sie, was dieser Differenzenquotient für das Intervall im Sachzusammenhang aussagt.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Ansatz über $T(t) = k \cdot t + d$

$k_1 = \frac{10-8}{9-6} = \frac{2}{3} \Rightarrow$ Punkt einsetzen: $8 = \frac{2}{3} \cdot 6 + d_1$

$\Rightarrow d_1 = 4$

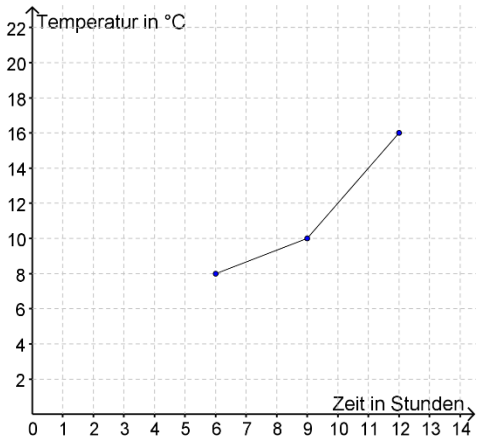
$k_2 = \frac{16-10}{12-9} = 2 \Rightarrow$ Punkt einsetzen: $10 = 2 \cdot 9 + d_2$

$\Rightarrow d_2 = -8$

$$T(t) = \begin{cases} \frac{2}{3}t + 4 \text{ für } t \in [6; 9] \\ 2t - 8 \text{ für } t \in [9; 12] \end{cases}$$

$T(11{,}5) = 2 \cdot 11{,}5 - 8 = 15$

Um 11:30 Uhr ergibt das Modell 15 °C.



b) Mittels Technologieeinsatz kommt man zur folgenden Gleichung:

$f(t) = -0{,}0057 \cdot t^3 + 0{,}1446 \cdot t^2 - 0{,}2598 \cdot t + 4{,}4186$

Der Differenzenquotient wird gebildet mit: $\frac{f(12) - f(6)}{12 - 6} = 0{,}9066 \approx 0{,}91$

Der Differenzenquotient sagt aus, dass die Temperatur im Intervall [6; 12] durchschnittlich um rund 1 °C pro Stunde zunimmt.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) C Interpretieren und Dokumentieren, B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

a) schwer
b) mittel

Punkteanzahl:

a) 3
b) 3

Thema: Sonstiges

Quellen: –

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Fahrradrennen

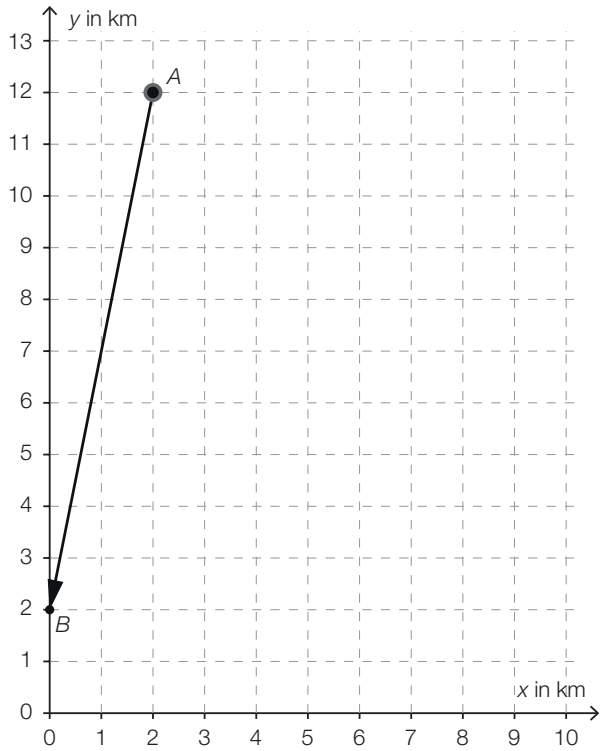
Aufgabennummer: B_251

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Es findet ein Fahrradrennen statt.

a) Die Rennstrecke führt geradlinig von A über B nach C. C hat die Koordinaten $(8|y_0)$. Die Richtung von B nach C ist durch den Vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$ gegeben.

– Berechnen Sie die Länge des Weges von A nach B.
– Zeichnen Sie den Punkt C in die nebenstehende Grafik ein.
– Beschreiben Sie, was mit dem Ausdruck $-\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)$ berechnet wird.



b) Auf der Rennstrecke befindet sich ein gerades Straßenstück mit 10 % Gefälle.

– Erklären Sie mithilfe des Steigungsbegriffes, was „10 % Gefälle“ bedeutet.
– Berechnen Sie den Neigungswinkel des Straßenstücks.

c) Der zurückgelegte Weg einer Rennfahrerin wird bei einem Bremsmanöver gemessen.

t in s	1	3	5
s in m	10,17	23,73	28,25

t ... Zeit in Sekunden (s)
$s(t)$ ... zurückgelegter Weg zum Zeitpunkt t in Metern (m)

Der zurückgelegte Weg kann durch eine quadratische Funktion s mit $s(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c$ beschrieben werden.

– Erstellen Sie mithilfe der gegebenen Messwerte ein Gleichungssystem zur Berechnung der Parameter a, b und c.
– Lösen Sie dieses Gleichungssystem.
– Berechnen Sie mithilfe der Funktion s die mittlere Geschwindigkeit im Zeitintervall [2; 4].
– Erklären Sie, welche Größe mit der 1. Ableitung der Funktion s zum Zeitpunkt $t = 3$ berechnet werden kann.

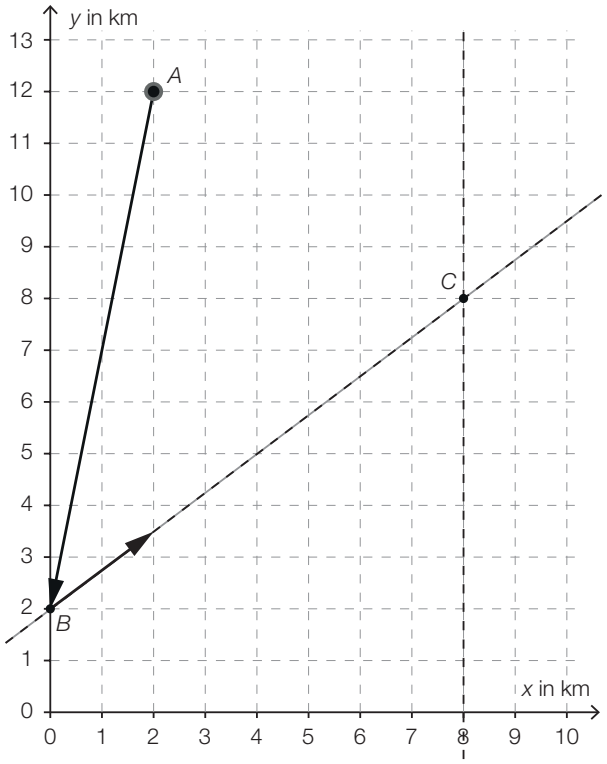
Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{2^2 + 10^2} = 10{,}20$

Die Länge der Strecke vom Punkt A zum Punkt B beträgt 10,2 km.

Man berechnet den Vektor $\overrightarrow{CA}$ (Länge und Richtung der geradlinigen Verbindung von C nach A).
Eine grafische Erklärung im Koordinatensystem ist ebenfalls zulässig.



b) Die Steigung gibt das Verhältnis der vertikalen zur horizontalen Distanz an. Ein Gefälle von 10 % bedeutet, dass pro 100 m in horizontaler Richtung die Straße um 10 Höhenmeter fällt.

arctan(0,1) ≈ 5,71
Der Neigungswinkel der Straße beträgt ca. 5,71°.

c) Das Einsetzen der Messwerte in die Funktion liefert die folgenden 3 Gleichungen:

I: $10{,}17 = a + b + c$
II: $23{,}73 = a \cdot 9 + b \cdot 3 + c$
III: $28{,}25 = a \cdot 25 + b \cdot 5 + c$

Durch Lösen mit Technologieeinsatz erhält man die folgenden Koeffizienten:
$a = -1{,}13$ $b = 11{,}3$ $c = 0$

$s(t) = -1{,}13 \cdot t^2 + 11{,}3 \cdot t$

mittlere Geschwindigkeit in m/s: $\frac{\Delta s(t)}{\Delta t} = \frac{s(4) - s(2)}{2} = 4{,}52$

Die 1. Ableitung an der Stelle $t = 3$ gibt die Momentangeschwindigkeit der Rennfahrerin zu diesem Zeitpunkt an.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 5 Stochastik

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) B Operieren und Technologieeinsatz, D Argumentieren und Kommunizieren

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) leicht
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 3
b) 2
c) 4

Thema: Sport

Quellen: –

Fernsehturm

Aufgabennummer: B_250

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

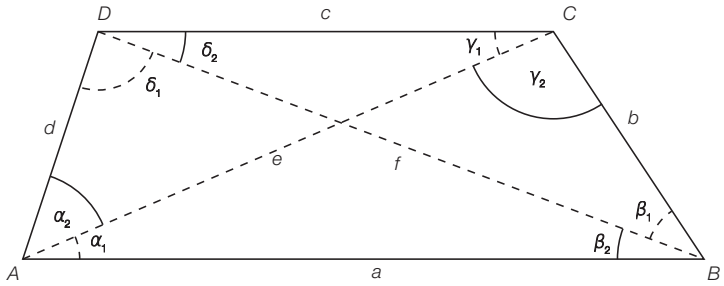
Ein Turm steht senkrecht auf einem horizontalen Platz.

a) Auf diesem Turm befindet sich eine senkrechte Antenne, deren Höhe gemessen werden soll. Von einem Messgerät, das sich auf dem horizontalen Platz *s* Meter (m) vom Turm entfernt befindet, erscheint die Antenne unter einem Sehwinkel α. Der Fußpunkt der Antenne erscheint unter einem Höhenwinkel β.



– Zeichnen Sie die angegebenen Größen in die obige Skizze ein.
– Stellen Sie eine Formel zur Berechnung der Antennenhöhe, abhängig von den Größen *s*, α und β, auf.

b) Der Platz, auf dem der Turm steht, hat die Form eines Trapezes. Die nachstehende Grafik zeigt den Platz im Maßstab 1 : 600 und die Seitenlängen sind in cm gezeichnet.

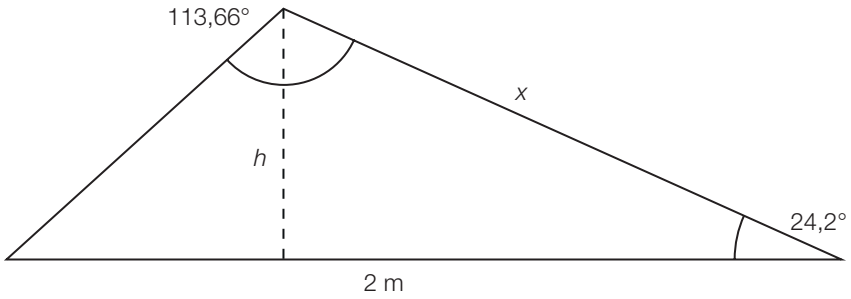


– Bestimmen Sie mithilfe der Darstellung die Länge der Seite *a* in Metern (m).
– Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung der Länge der Diagonale *f* bei gegebener Seitenlänge *d* und *a* und den Winkeln α_1 und α_2.

– Kreuzen Sie die zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]*

$\frac{\sin(\delta_1)}{e} = \frac{\sin(\gamma_1)}{d}$	☐
$\frac{\sin(\gamma_2)}{a} = \frac{\sin(\gamma_1)}{d}$	☐
$\frac{\sin(\alpha_1)}{b} = \frac{\sin(\beta_1)}{c}$	☐
$\frac{\sin(\gamma_1)}{d} = \frac{\sin(\delta_1)}{c}$	☐
$\frac{\sin(\alpha_1)}{b} = \frac{\sin(\gamma_2)}{a}$	☐

c) Für Konzerte wird der Platz vor dem Turm in Sektoren aufgeteilt. Die nachstehende Skizze veranschaulicht die Fläche eines bestimmten Sektors, wobei die Seitenlängen in Metern (m) angegeben sind.

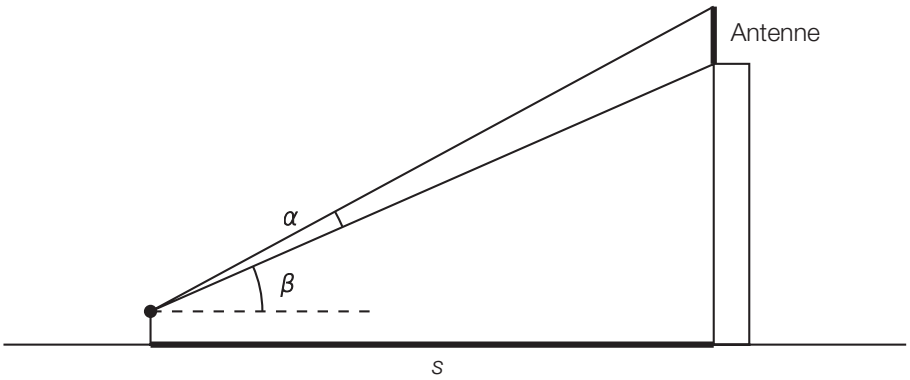


– Berechnen Sie die Seitenlänge x aus den gegebenen Größen.
– Begründen Sie mathematisch, warum die Berechnung der Länge x mit $x = \sin(24{,}2°) \cdot h$ falsch ist.
– Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a)



Höhe der Antenne = $\tan(\alpha + \beta) \cdot s - \tan(\beta) \cdot s$

b) a = 9 cm entspricht 54 m Messtoleranz: ± 0,4 cm

Abhängig von den Druckeinstellungen kann die Länge der Seite a auf dem Ausdruck geringfügig abweichen.

Die Länge der Diagonale f kann mit dem Cosinussatz berechnet werden:

$f = \sqrt{a^2 + d^2 - 2ad \cdot \cos(\alpha_1 + \alpha_2)}$

$\frac{\sin(\alpha_1)}{b} = \frac{\sin(\gamma_2)}{a}$	☒

c) $x = \frac{2}{\sin(113{,}66°)} \cdot \sin(180° - 113{,}66° - 24{,}2°) = 1{,}465\ldots$

Die Seitenlänge x beträgt rund 1,47 m.

Der Sinus von dem Winkel 24,2° entspricht dem Verhältnis von Gegenkathete zur Hypotenuse. Wenn man $x = \sin(24{,}2°) \cdot h$ umformt auf $\sin(24{,}2°) = \frac{x}{h}$, erkennt man, dass die Seiten im Verhältnis vertauscht sind.

$A = \frac{2 \cdot 1{,}47 \cdot \sin(24{,}2°)}{2} = 0{,}600\ldots$

Der Flächeninhalt beträgt rund 0,60 m².

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) A Modellieren und Transferieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) D Argumentieren und Kommunizieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 3
c) 3

Thema: Sonstiges

Quellen: –

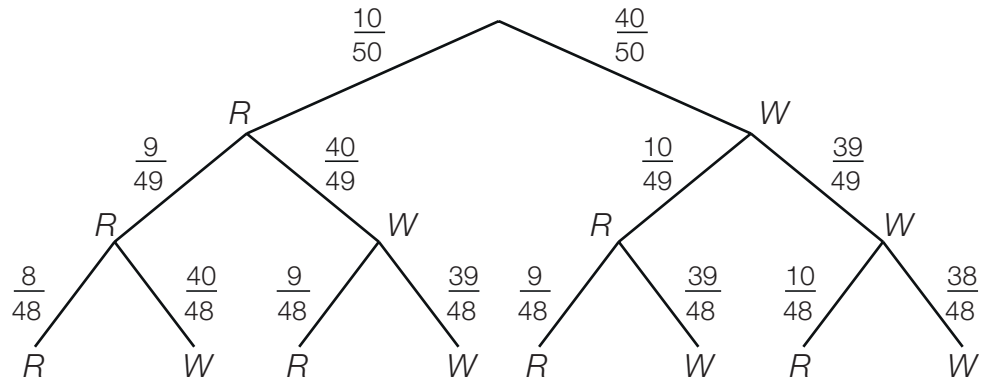
Spielefest (1)

Aufgabennummer: B_249

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Eine Praxisgruppe betreut ein Spielefest in einer Volksschulklasse, bei dem die Kinder verschiedene Spielstationen besuchen können.

a) In einer Kiste befinden sich 10 rote und 40 weiße Kugeln. Jedes Kind darf 3-mal blind hineingreifen und jeweils 1 Kugel herausholen. Dann werden die Kugeln für das nächste Kind wieder hineingelegt.
Das nachstehende Baumdiagramm stellt diesen Sachverhalt für ein Kind dar.



– Kennzeichnen Sie im Baumdiagramm alle Möglichkeiten, 2 rote Kugeln (*R*) und 1 weiße Kugel (*W*) zu ziehen.
– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kind 3 rote Kugeln zieht.

b) Bei einer Station werfen die Kinder aus einer bestimmten Entfernung 5 Tennisbälle in einen Kübel. Peter hat eine Trefferquote von 80 % pro Wurf.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Peter höchstens 4-mal trifft.

c) Beim Kirschkernweitspucken bekommt jedes Kind 2 Kirschen, deren Kerne es möglichst weit spucken soll. Die Flugbahn eines Kirschkerns kann modellhaft mit einer Polynomfunktion 2. Grades angenommen werden.
Thomas spuckt einen Kern aus einer Höhe von 1 m in einem Winkel von 45° nach oben weg. Der Kern fällt nach 8 m zu Boden.

– Erstellen Sie eine Skizze der Flugbahn.
– Stellen Sie mithilfe der gegebenen Bedingungen ein Gleichungssystem auf, mit dem die Funktionsgleichung für die Flugbahn berechnet werden kann.
– Ermitteln Sie die Funktionsgleichung.

d) Beim Spielefest haben 24 Kinder mitgemacht. Insgesamt waren 18 Kinder beim Ballwerfen (Menge *BW*). Beim Kirschkernspucken (Menge *KS*) waren insgesamt 14 Kinder. 10 Kinder waren sowohl beim Ballwerfen als auch beim Kirschkernspucken.

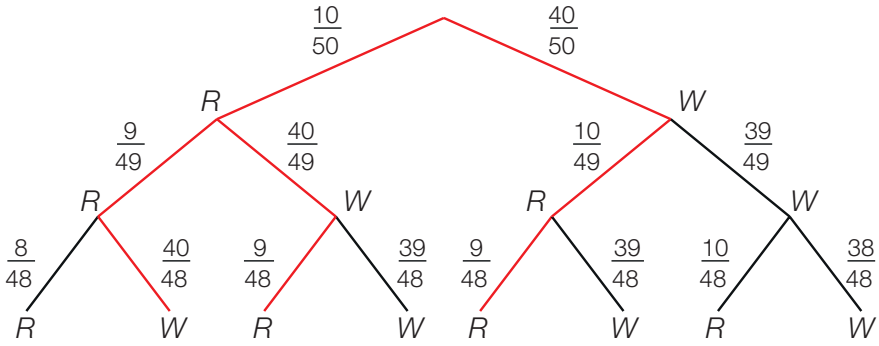
– Erstellen Sie ein Venn-Diagramm, das diesen Sachverhalt beschreibt.
– Lesen Sie aus diesem Diagramm ab, wie viele Kinder keine dieser beiden Spielstationen besucht haben.
– Beschreiben Sie, was diese Mengenverknüpfungen im Sachzusammenhang aussagen:

(1) $M_1 = KS \setminus BW$
(2) $M_2 = KS \cap BW$

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



Es gibt 3 Möglichkeiten, 1 weiße Kugel und 2 rote Kugeln zu ziehen.

X … Anzahl der roten Kugeln

$P(X = 3) = \frac{10}{50} \cdot \frac{9}{49} \cdot \frac{8}{48} = 0{,}006\ldots$

Die Wahrscheinlichkeit, 3 rote Kugeln zu ziehen, liegt bei etwa 0,6 %.

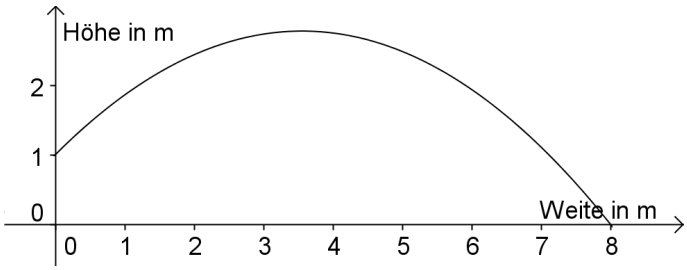
b) X … Treffer
$p = 0{,}8$; $n = 5$

$P(X \leq 4) = 1 - P(X = 5) = 1 - \binom{5}{5} \cdot 0{,}8^5 \cdot 0{,}2^0 = 1 - 0{,}32768 = 0{,}67232$

Peter trifft mit einer Wahrscheinlichkeit von 67,2 % höchstens 4-mal.

Auch eine Berechnung ohne Gegenwahrscheinlichkeit ist zulässig.

c)

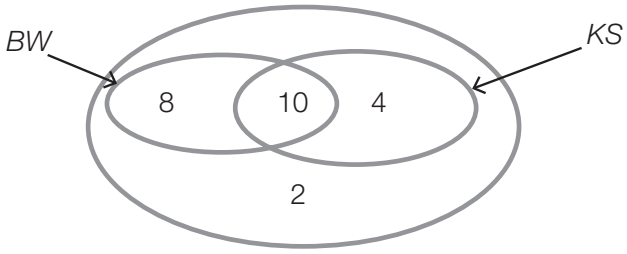


allgemeine Form der Parabelgleichung: $y = ax^2 + bx + c$ $\quad y' = 2ax + b$
Man braucht 3 Gleichungen für die unbekannten Koeffizienten a, b und c.

Punkt (0|1) (1) $c = 1$
Punkt (8|0) (2) $64a + 8b + c = 0$
$\tan(45°) = 1$ (3) $b = 1$

$f(x) = -\frac{9}{64}x^2 + x + 1$

d)



2 Kinder haben keine der beiden Stationen besucht.

(1) $M_1 = KS \setminus BW$ … Menge der Kinder, die beim Kirschkernspucken, aber nicht beim Ballwerfen mitgemacht haben

(2) $M_2 = KS \cap BW$ … Menge der Kinder, die sowohl beim Kirschkernspucken als auch beim Ballwerfen teilgenommen haben

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 5 Stochastik
c) 4 Analysis
d) 1 Zahlen und Maße

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) 3 Funktionale Zusammenhänge
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) A Modellieren und Transferieren
c) A Modellieren und Transferieren
d) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) mittel
d) leicht

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2
c) 3
d) 4

Thema: Sonstiges

Quellen: —

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Spracherwerb

Aufgabennummer: B_248

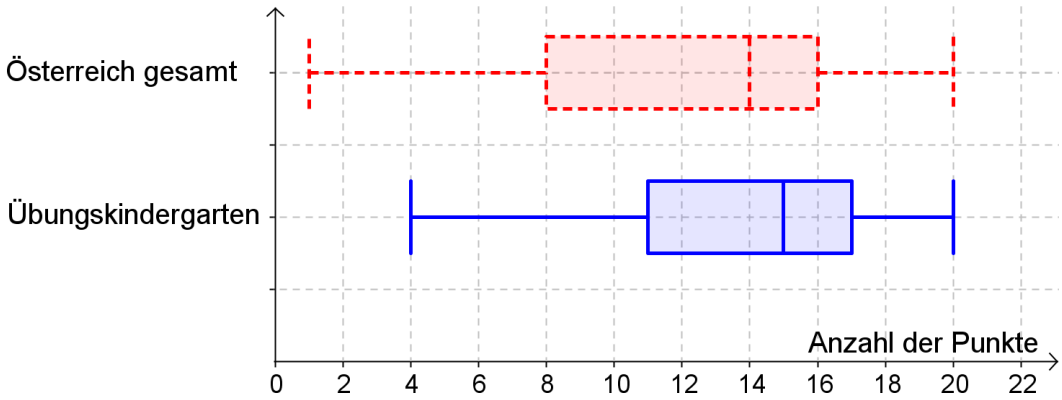
Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Die Früh- und Kindergartenpädagogik beschäftigt sich mit der Sprachentwicklung von Kindern im Vorschulalter.

a) In einem Kindergarten mit 220 Kindern wird die Verwendung der Sprachen Deutsch, Englisch und Türkisch erhoben. 35 Kinder sprechen ausschließlich Deutsch. 76 Kinder sprechen nur Deutsch und Englisch, 48 Kinder sprechen alle 3 Sprachen. Es gibt kein Kind, das als einzige Sprache Englisch spricht. Insgesamt sprechen 95 Kinder Türkisch, 174 Kinder Deutsch und 155 Kinder Englisch.

– Veranschaulichen Sie die Verteilung der Sprachen mithilfe eines vollständig ausgefüllten Venn-Diagramms.
– Ermitteln Sie, wie viele Kinder keine der 3 Sprachen sprechen.

b) In der nachstehenden Abbildung werden sowohl die österreichweiten Ergebnisse einer Sprachtestung an Vorschulkindern als auch die Ergebnisse eines Übungskindergartens dargestellt.
Ist die beim Test erreichte Punktezahl kleiner als 10, besteht sonderpädagogischer Förderbedarf.

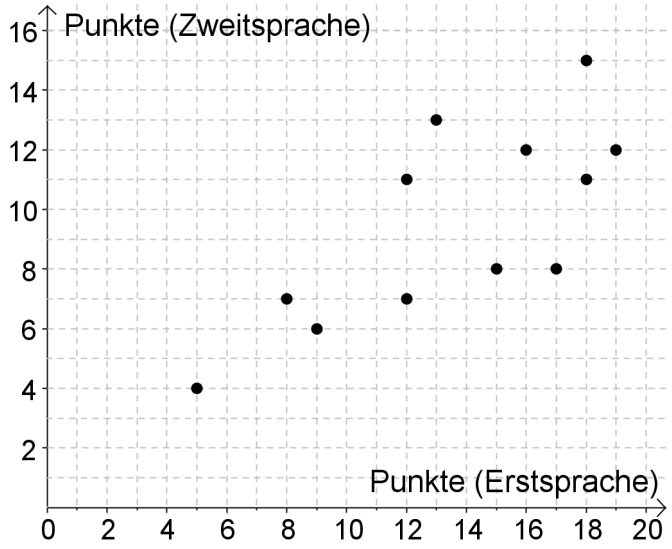


– Lesen Sie den Median für die österreichweiten Ergebnisse ab.
– Ermitteln Sie die Spannweite für die österreichweiten Ergebnisse.
– Begründen Sie, warum die folgende Aussage in einer Zeitung nicht aus dem Boxplot der gesamtösterreichischen Ergebnisse geschlossen werden kann: „In Österreich haben nur 20 % aller Vorschulkinder sprachlichen Förderbedarf.“
– Vergleichen Sie die österreichweiten Ergebnisse mit jenen des Übungskindergartens bezüglich des Anteils der Kinder mit Förderbedarf.

c) Es wird vermutet, dass der Zweitspracherwerb beim Kind umso erfolgreicher verläuft, je besser das Kind seine Erstsprache (Muttersprache) beherrscht.

In einer Vorschulgruppe wurden dazu 12 zweisprachige Kinder in ihrer Muttersprache und ihrer Zweitsprache getestet. Bei den Tests waren jeweils 20 Punkte maximal erreichbar. Das Ergebnis der beiden Tests ist in der nachstehenden Tabelle und in der unten stehenden Abbildung dargestellt:

Punkte Erstsprache	5	8	9	12	12	13	15	16	17	18	18	19
Punkte Zweitsprache	4	7	6	7	11	13	8	12	8	11	15	12

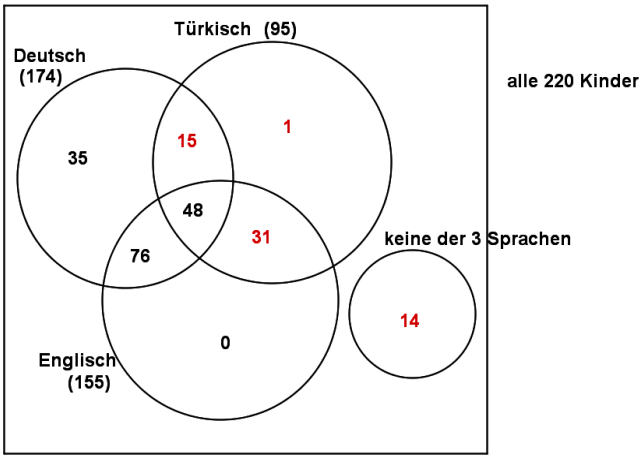


– Bestimmen Sie die Regressionsgerade.
– Zeichnen Sie die Regressionsgerade im obigen Koordinatensystem ein, sodass die Erstsprache die unabhängige und die Zweitsprache die abhängige Variable ist.
– Beurteilen Sie den Wert des Korrelationskoeffizienten im Sachzusammenhang.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Venn-Diagramm:



keine der 3 Sprachen: 14 Kinder

b) Median = 14 Punkte

Spannweite = 19 Punkte

Zwischen dem Minimum = 1 Punkt und dem 1. Quartil (= 8 Punkte) liegen bereits 25 % aller Testergebnisse und damit mehr als 20 %.

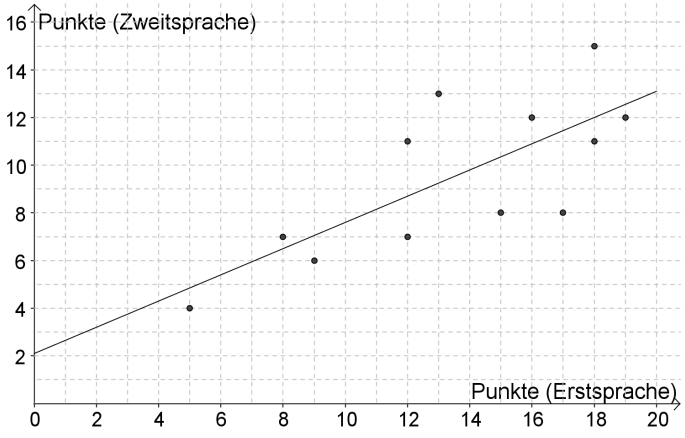
Im Übungskindergarten ist der Anteil an Kindern mit Förderbedarf niedriger als 25 % (1. Quartil = 11 Punkte) und damit niedriger als bei der österreichweiten Untersuchung.

c) Regressionsgerade: $y = 0{,}55 \cdot x + 2{,}1$

r berechnen $\Rightarrow$ $r = 0{,}74$

$\Rightarrow$ positiver Zusammenhang

In diesem Test hat sich gezeigt, dass gute Kenntnisse der Erstsprache das Erlernen der Zweitsprache begünstigen.
Die Streuung der Werte ist allerdings relativ groß.



Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 1 Zahlen und Maße
b) 5 Stochastik
c) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) D Argumentieren und Kommunizieren, B Operieren und Technologieeinsatz
c) D Argumentieren und Kommunizieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) leicht
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 4
c) 3

Thema: Psychologie

Quellen: —

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

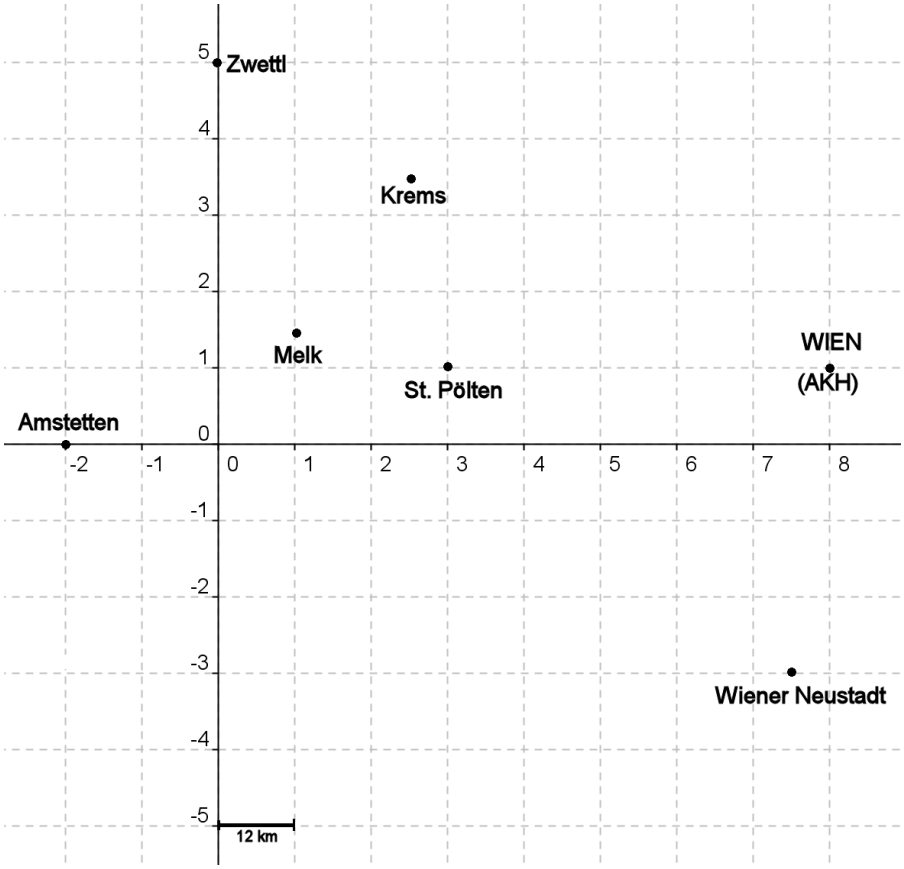
Rettungshubschrauber

Aufgabennummer: B_246

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Der Einsatz von Hubschraubern ermöglicht schnelle und sichere Krankentransporte.

Im nachstehenden Koordinatensystem sind Krankenhäuser eingezeichnet, die über einen Hubschrauberlandeplatz verfügen. Bei der Darstellung entspricht eine Einheit im Koordinatensystem einer Strecke von 12 km.



a) – Lesen Sie aus der obigen Abbildung die Koordinaten des Krankenhauses Krems ab.
– Stellen Sie denjenigen Vektor auf, der den geradlinigen Flug eines Hubschraubers vom Krankenhaus Krems zum AKH Wien beschreibt.

b) Ein Hubschrauber startet beim Krankenhaus Wiener Neustadt. Der Flug wird durch die folgenden Vektoren beschrieben:

Zuerst $\begin{pmatrix} -3{,}5 \\ -2 \end{pmatrix}$, dann $\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ und schließlich $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

– Zeichnen Sie den Hubschrauberflug in der obigen Abbildung ein.

c) Der Vektor $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ beschreibt den Hubschrauberflug vom Krankenhaus St. Pölten zum Krankenhaus Zwettl.

– Berechnen Sie die Länge dieses Hubschrauberflugs in Kilometern.

d) Ein Hubschrauber fliegt vom Krankenhaus Melk Richtung Krankenhaus Krems.

– Zeichnen Sie den entsprechenden Einheitsvektor dieser Richtung ausgehend vom Krankenhaus Melk in die obige Abbildung ein.
– Dokumentieren Sie, wie man diesen Einheitsvektor berechnen kann.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

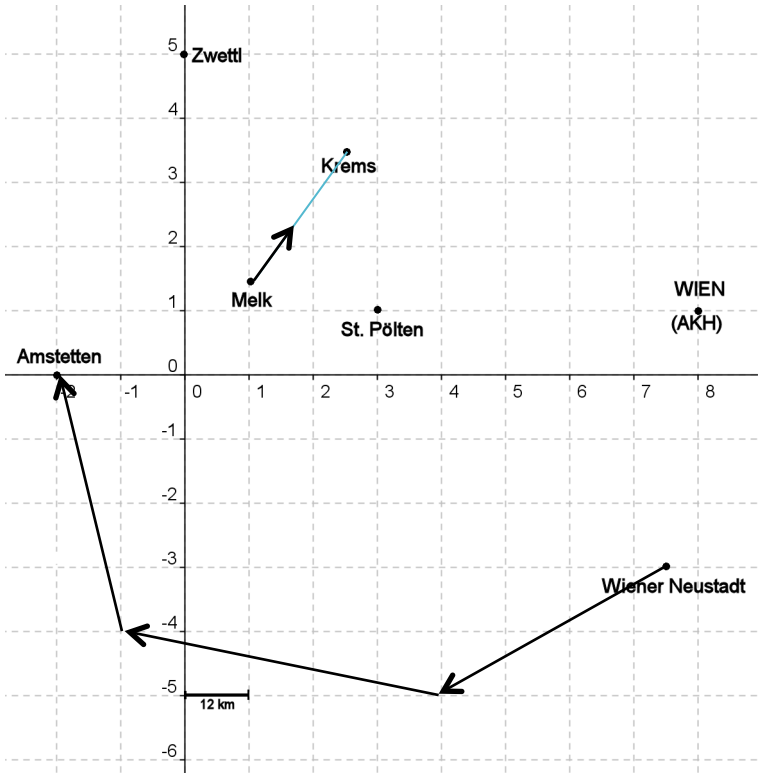
Möglicher Lösungsweg

a) Krems (2,5 | 3,5) *Ablesetoleranz: ± 0,1 Einheiten*

Krems – Wien: $\begin{pmatrix}8\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2{,}5\\3{,}5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5{,}5\\-2{,}5\end{pmatrix}$

Lösung auch grafisch möglich.

b)



c) St. Pölten – Zwettl = $\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$

Länge (Betrag) = 5 Einheiten, das entspricht einer Entfernung von 60 km Luftlinie.

d) Die Koordinaten des Vektors Melk – Krems werden durch den Betrag dieses Vektors dividiert.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 2 Algebra und Geometrie
d) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) —
c) —
d) C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) leicht
c) leicht
d) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 1
c) 1
d) 2

Thema: Verkehr

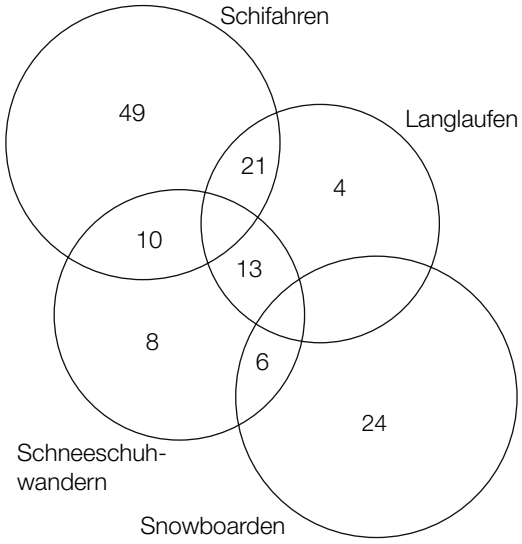
Quellen: —

Wintersportwoche

Aufgabennummer: B_243

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Die Teilnehmer/innen einer Wintersportwoche können sich für eine oder zwei Sportarten entscheiden.
Vier Sportarten stehen zur Auswahl.
Im nebenstehenden Venn-Diagramm ist dargestellt, wie sich die Schüler/innen einer Schule entschieden haben.



– Lesen Sie aus dem Diagramm ab, wie viele Schüler/innen insgesamt an der Sportwoche teilnehmen.
– Lesen Sie ab, wie viele Schüler/innen Schifahren gewählt haben.
– Kennzeichnen Sie die Menge aller Schüler/innen, die Schifahren oder Snowboarden, aber nicht Langlaufen gewählt haben.

b) Sabine wartet an der Talstation einer 6er-Sesselbahn auf ihre Gruppe. Sie beobachtet, wie viele Personen jeweils auf einem Sessel sitzen.
Die Beobachtung der Belegung von 100 aufeinanderfolgenden 6er-Sesseln einer Sesselbahn ist in der nachstehenden Tabelle zusammengefasst:

Anzahl der Sessel	1	3	7	11	29	34	15
Personenbelegung pro 6er-Sessel	0	1	2	3	4	5	6

– Erstellen Sie ein Säulen- oder Balkendiagramm zur Darstellung der erfassten Daten.

c) Die fortgeschrittenen Snowboarder/innen vergnügen sich in einem Obstacle-Course.
Der Querschnitt eines Hindernisses wird durch die Funktion h modelliert.

$h(x) = (5{,}69 \cdot 10^{-4}) \cdot x^4 - (9{,}1 \cdot 10^{-3}) \cdot x^2$ mit $-9 \le x \le 9$

x … Koordinate der Querschnittsgrundlinie in Metern (m)
$h(x)$ … Höhe an der Stelle x in Metern (m)

– Zeichnen Sie den Funktionsgraphen der Funktion h.
– Berechnen Sie die Steigung an der Stelle $x = 8$.

d) Eine schwarze Piste für geübte Schifahrer/innen hat ein durchschnittliches Gefälle von 60 %.

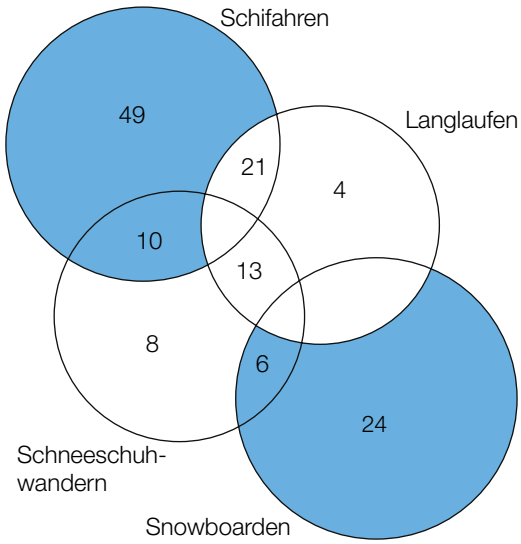
– Erklären Sie anhand einer Skizze, was dieser Wert bedeutet.
– Berechnen Sie den durchschnittlichen Steigungswinkel dieser Piste.
– Überprüfen Sie anhand eines selbst gewählten Beispiels, ob ein doppelt so großes Gefälle auch einen doppelt so großen Steigungswinkel bedeutet.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

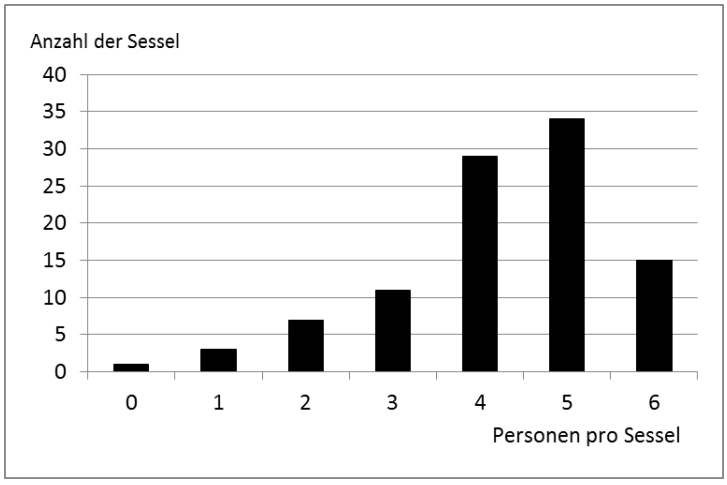
Möglicher Lösungsweg

a) 85 Schüler/innen haben nur eine Sportart gewählt.
50 Schüler/innen haben zwei Sportarten gewählt.
Summe: 135
Insgesamt nehmen 135 Schüler/innen teil.

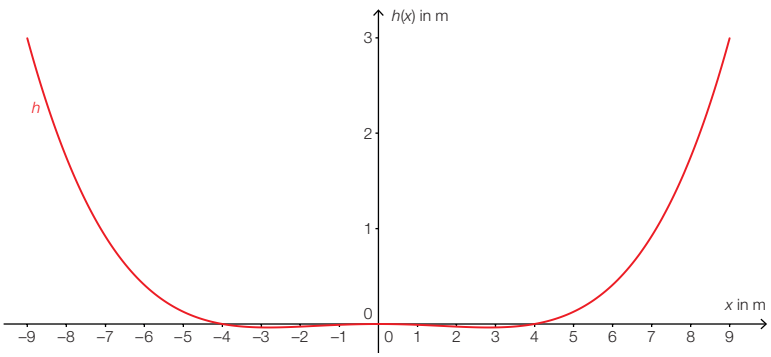
80 Schüler/innen haben Schifahren gewählt.



b) z. B. Säulendiagramm



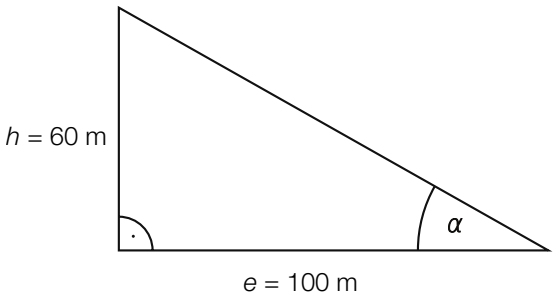
c) $h(x) = (5{,}69 \cdot 10^{-4}) \cdot x^4 - (9{,}1 \cdot 10^{-3}) \cdot x^2$



$h'(x) = (2{,}276 \cdot 10^{-3}) \cdot x^3 - (1{,}82 \cdot 10^{-2}) \cdot x$

$h'(8) = 1{,}019\ldots \approx 1{,}02$

d) Ein Gefälle von 60 % bedeutet bei einer waagrechten Entfernung e = 100 m einen Höhenunterschied h von 60 m.



Der Steigungswinkel α wird mit dem Tangens berechnet:

$k = \tan(\alpha) = \frac{h}{e}$

k = 60 % = 0,6
$\alpha = \arctan(0{,}6) = 30{,}9\ldots$
$\alpha \approx 31°$

z. B. Steigung verdoppeln: k = 1,2
Steigungswinkel: $\beta = \arctan(1{,}2) \approx 50{,}2° \neq 62°$

Auch andere schlüssige Argumentationen sind zulässig.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 1 Zahlen und Maße
b) 5 Stochastik
c) 4 Analysis
d) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) 3 Funktionale Zusammenhänge
d) 1 Zahlen und Maße

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) A Modellieren und Transferieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) D Argumentieren und Kommunizieren

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) —
c) —
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) leicht
c) mittel
d) mittel

Punkteanzahl:

a) 3
b) 1
c) 2
d) 3

Thema: Sport

Quellen: —

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Kängurusprünge

Aufgabennummer: B_240

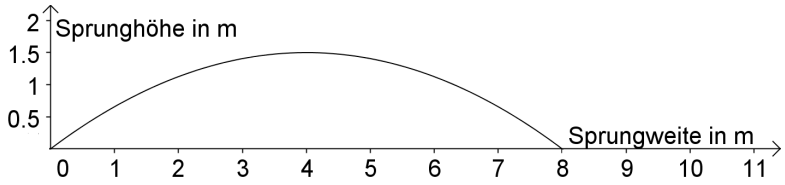
Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) In Australien leben heute ca. 60 Känguruarten, die sich bei höheren Geschwindigkeiten meist springend fortbewegen. Die kleinste Art ist das Zottelige Hasenkänguru mit ca. 35 cm Körpergröße, die größte das Rote Riesenkänguru mit ca. 1,8 m Körpergröße.

Bei allen Känguruarten ist die maximale Sprungweite etwa das 7-Fache ihrer Körpergröße.

– Erstellen Sie eine Funktion, die die ungefähre maximale Sprunglänge in Abhängigkeit von der Körpergröße angibt.
– Stellen Sie diese Funktion von der kleinsten bis zur größten Känguruart grafisch dar.

b) Der nachstehende Graph zeigt den Sprung eines Kängurus.



Der Sprung kann mit einer Polynomfunktion 2. Grades im angegebenen Definitionsbereich beschrieben werden.

– Berechnen Sie die Funktionsgleichung mithilfe quadratischer Regression. Runden Sie die Koeffizienten auf Hundertstel.
– Lesen Sie die benötigten Werte aus dem Graphen ab.

c) In einem Volksschulhort gibt es das Brettspiel *Känguruhüpfen* zum spielerischen Addieren im Zahlenraum 12.
Am Start stehen maximal 11 Kängurus, die mit den Nummern von 2 bis 12 beschriftet sind. Jede/r Spieler/in sucht sich ein Känguru aus. Es wird reihum mit 2 sechsseitigen Würfeln gewürfelt. Nach jedem Wurf werden die Augenzahlen addiert und das Känguru, dessen Nummer mit der Augensumme der beiden Würfel übereinstimmt, darf ein Feld vorhüpfen.

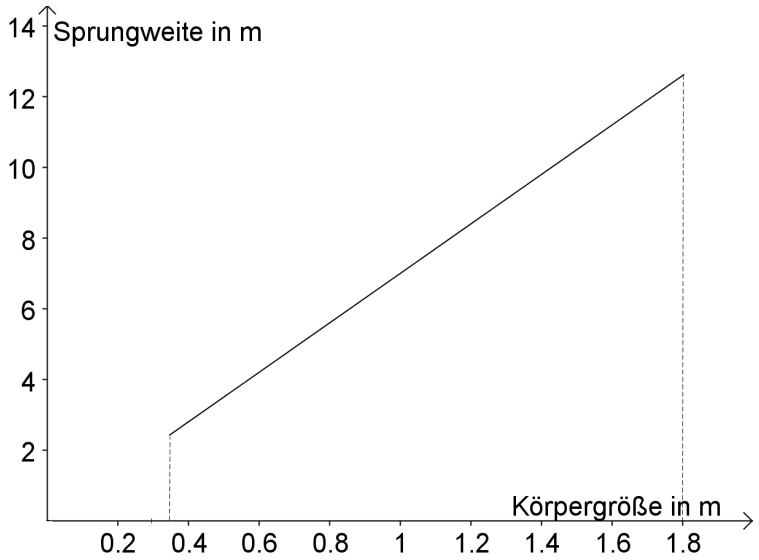
– Überprüfen Sie nachweislich, ob die Chance, ein Feld vorzurücken, für alle Kängurus gleich groß ist.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) lineare Funktion: $f(x) = 7x$

x … Körpergröße in m
$f(x)$ … Sprungweite in m



b) Koordinaten der Nullstellen und des Hochpunktes ablesen:
$N_1 = (0|0)$, $N_2 = (8|0)$, $H = (4|1{,}5)$

Lösung mittels Technologieeinsatz:
$a = -0{,}093\ldots$
$b = 0{,}75$
$c = 0$

Funktionsgleichung: $y = -0{,}09 \cdot x^2 + 0{,}75 \cdot x$

(Da die Koordinaten der Punkte, vor allem des Hochpunkts, abgelesen werden, ist eine angemessene Ungenauigkeit zu tolerieren.)

c) Es genügt, exemplarisch zu zeigen, dass die Anzahl der Möglichkeiten für 2 Zahlen unterschiedlich groß und damit die Wahrscheinlichkeit für ihr Auftreten unterschiedlich hoch ist.

Zum Beispiel:
2 = 1 + 1
3 = 1 + 2 oder 2 + 1
4 = 1 + 3 oder 3 + 1 oder 2 + 2
usw.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 5 Stochastik
c) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) D Argumentieren und Kommunizieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) –

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) leicht

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2
c) 1

Thema: Sonstiges

Quellen: –

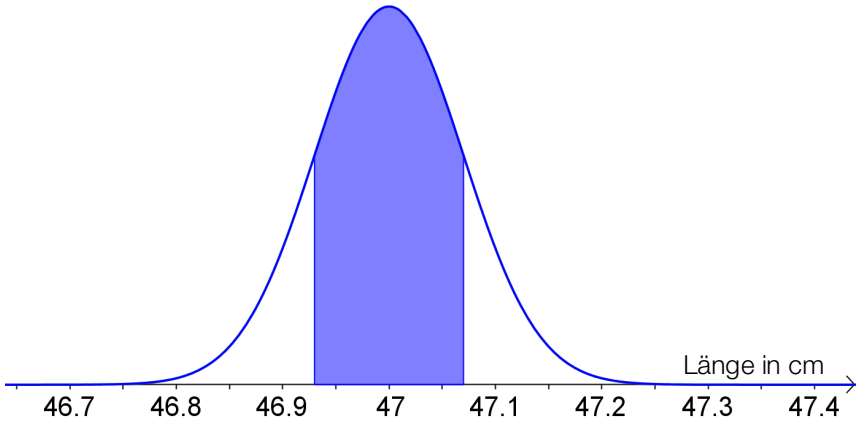
Blockflöte

Aufgabennummer: B_239

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Die Blockflöte ist ein Holzblasinstrument.

a) Für die Qualität des Klanges ist die Länge einer Blockflöte sehr wichtig. Die Längen der produzierten Blockflöten können annähernd als normalverteilt angenommen werden. Die unten blau dargestellte Fläche entspricht der Wahrscheinlichkeit der Sigmaumgebung um den Erwartungswert ($\mu \pm \sigma$).



– Lesen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung aus der Grafik ab.
– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Länge einer Blockflöte kleiner als 46,9 cm ist.

b) Die Tonhöhe eines Tones, der mit einer Holzblockflöte erzeugt wird, ändert sich mit der Temperatur. Die Tonhöhenänderung wird in Cent angegeben.
Eine Messung hat folgende Werte ergeben:

Temperatur in °C	19	21	24	25	29	31
Tonhöhenänderung in Cent	0	6	15	18	30	36

Der Zusammenhang zwischen Temperatur und Tonhöhenänderung soll mithilfe einer Funktion modelliert werden.

T … Temperatur in °C
$f(T)$ … Tonhöhenänderung in Cent bei der Temperatur T in °C

– Zeichnen Sie die in der Tabelle gegebenen Datenpunkte in ein geeignetes Koordinatensystem.

– Kreuzen Sie diejenige Funktion an, die den Zusammenhang korrekt beschreibt. *[1 aus 5]*

$f(T) = 3T - 57$	☐
$f(T) = -3T + 19$	☐
$f(T) = 6T + 19$	☐
$f(T) = 6T + 57$	☐
$f(T) = 3T + 19$	☐

– Erklären Sie, warum die Messdaten durch ein lineares und nicht durch ein exponentielles Modell beschrieben werden können.

c) Die Schallgeschwindigkeit beeinflusst die Tonhöhe der Blockflöte. Der Zusammenhang zwischen der Schallgeschwindigkeit und der Temperatur kann durch die folgende Funktion c dargestellt werden:

$$c(T) = 331{,}5 \cdot \sqrt{1 + \frac{T}{273{,}15}}$$

T ... Temperatur in °C
$c(T)$ ... Schallgeschwindigkeit in Metern pro Sekunde (m/s) bei einer Temperatur T in °C

– Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate der Schallgeschwindigkeit von 19 °C bis 35 °C.
– Dokumentieren Sie, wie man die Steigung der Tangente an die Funktion c an der Stelle $T = 20$ °C berechnen kann.

d) In einer Schulklasse von 31 Schülerinnen/Schülern spielen 15 Blockflöte, 12 Querflöte und 14 Gitarre. 6 Schüler/innen spielen Blockflöte und Querflöte, 7 spielen Querflöte und Gitarre, 5 spielen Blockflöte und Gitarre. 4 Schüler/innen spielen sowohl Blockflöte als auch Querflöte und Gitarre.

B ... Menge der Schüler/innen, die Blockflöte spielen
Q ... Menge der Schüler/innen, die Querflöte spielen
G ... Menge der Schüler/innen, die Gitarre spielen

– Zeichnen Sie ein Venn-Diagramm, das den beschriebenen Sachverhalt darstellt.

– Ordnen Sie den beiden angegebenen Mengen jeweils die zutreffende Aussage aus A bis D zu. *[2 zu 4]*

$B \setminus (Q \cup G)$	
$(B \cap Q) \setminus G$	

A	die Menge der Schüler/innen, die Gitarre oder Querflöte, aber nicht Blockflöte spielen
B	die Menge der Schüler/innen, die Querflöte und Blockflöte, aber nicht Gitarre spielen
C	die Menge der Schüler/innen, die Querflöte, aber nicht Gitarre und nicht Blockflöte spielen
D	die Menge der Schüler/innen, die Blockflöte, aber nicht Querflöte und nicht Gitarre spielen

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

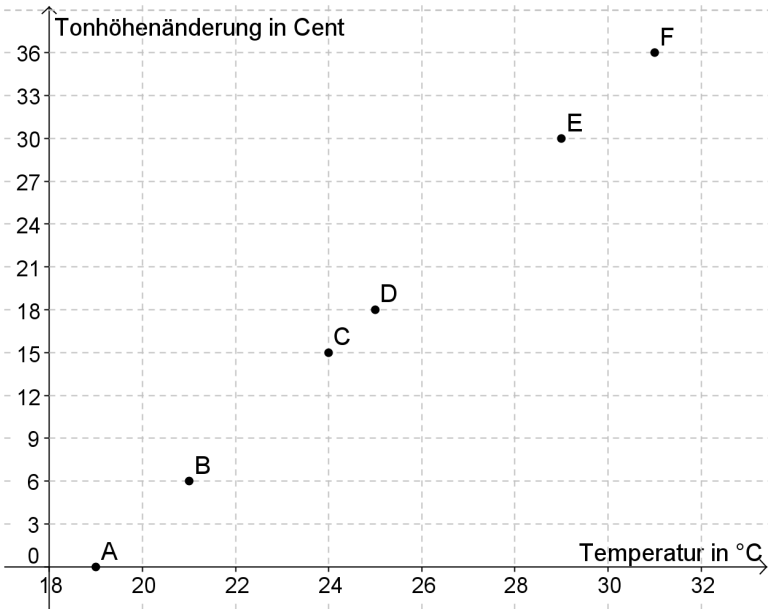
Möglicher Lösungsweg

a) $\mu = 47$ cm Toleranz für μ: ± 0,01 cm
$\sigma = 0{,}075$ cm Toleranz für σ: ± 0,01 cm

$P(X \leq 46{,}9) \approx 0{,}0912$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 9,12 % wird eine Blockflöte, die kleiner als 46,9 cm ist, produziert.

b)



$f(T) = 3T - 57$	☒

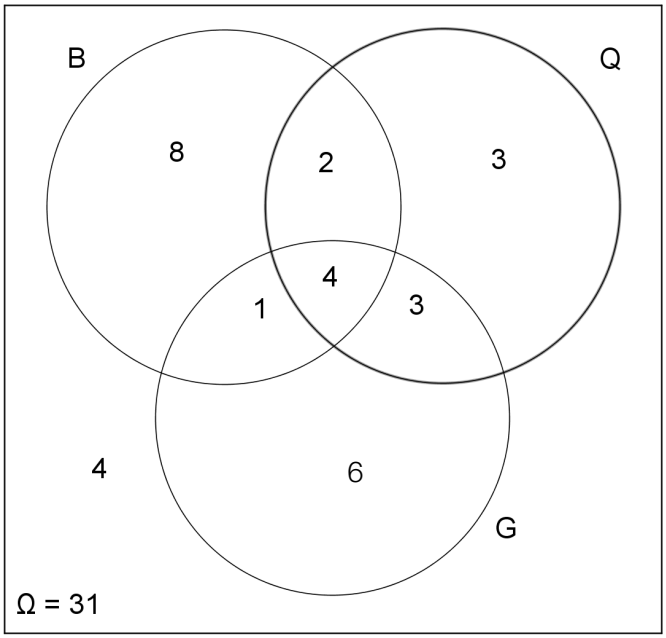
Die Tonhöhe steigt konstant um 3 Cent pro Grad. Bei einer Exponentialfunktion würde pro Grad die gleiche relative Änderung stattfinden.

c) $\frac{c(35)-c(19)}{35-19} \approx 0{,}579$

Die Schallgeschwindigkeit ändert sich um rund 0,579 m/s pro Grad Celsius.

Die Steigung der Tangente der Stelle $T = 20$ entspricht der 1. Ableitung der Funktion an dieser Stelle. Durch Einsetzen der Temperatur 20 °C in die 1. Ableitung erhält man die Steigung der Tangente.

d)



Am Venn-Diagramm erkennt man, dass es insgesamt 27 Schüler/innen gibt, die ein oder mehrere Instrumente spielen. Also gibt es 4 Schüler/innen, die keines dieser Instrumente spielen.

$B \setminus (Q \cup G)$	D
$(B \cap Q) \setminus G$	B

A	die Menge der Schüler/innen, die Gitarre oder Querflöte, aber nicht Blockflöte spielen
B	die Menge der Schüler/innen, die Querflöte und Blockflöte, aber nicht Gitarre spielen
C	die Menge der Schüler/innen, die Querflöte, aber nicht Gitarre und nicht Blockflöte spielen
D	die Menge der Schüler/innen, die Blockflöte, aber nicht Querflöte und nicht Gitarre spielen

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 4 Analysis
d) 1 Zahlen und Maße

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) D Argumentieren und Kommunizieren, B Operieren und Technologieeinsatz
c) C Interpretieren und Dokumentieren
d) C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) schwer
d) schwer

Punkteanzahl:

a) 2
b) 3
c) 2
d) 2

Thema: Musik

Quellen: http://de.wikipedia.org/wiki/Blockfl%C3%B6te
http://www.sengpielaudio.com/Rechner-tonhoehenaenderung.htm

Eignungsprüfung

Aufgabennummer: B_238

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

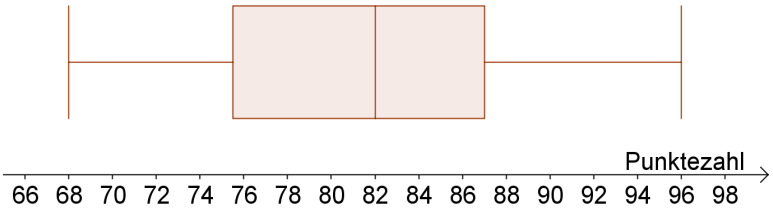
Um eine Bildungsanstalt besuchen zu können, muss eine Eignungsprüfung positiv abgelegt werden.

a) Die Schüler/innen einer ersten Klasse erzielten bei der Eignungsprüfung folgende Punktezahlen:

70, 73, 73, 74, 74, 75, 76, 76, 77, 81, 82, 83, 85, 85, 86, 87, 87, 87, 88, 89, 90, 90, 90, 91, 92, 95, 95, 96, 97

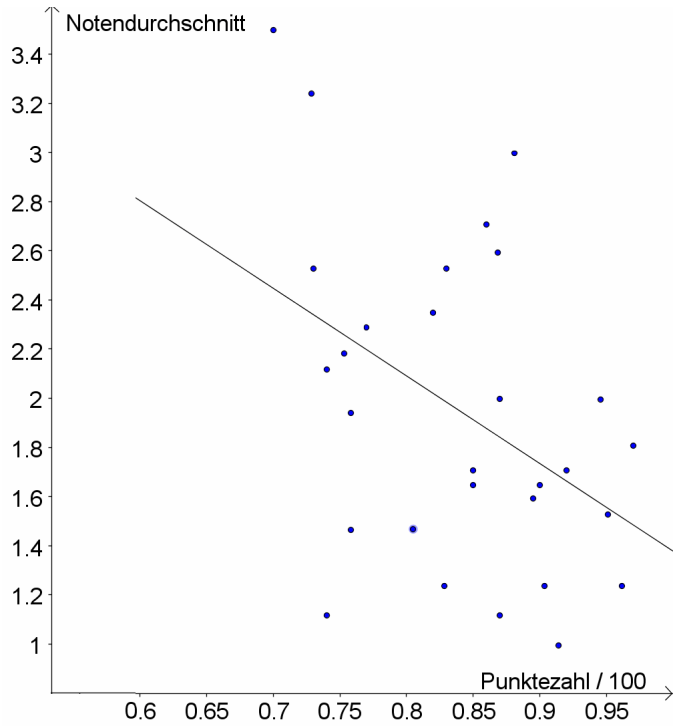
– Berechnen Sie das arithmetische Mittel $\bar{x}$ und die Standardabweichung σ.

b) Das Ergebnis einer anderen Klasse ist in einem Boxplot dargestellt.



– Lesen Sie die statistischen Kennzahlen *Median* und *Quartilsabstand* für diese Klasse ab.
– Interpretieren Sie den Boxplot hinsichtlich der prozentuellen Verteilung der Punkte.

c) Ein gutes Abschneiden bei der Eignungsprüfung ist keine Garantie für eine erfolgreiche Schullaufbahn.
Der Zusammenhang zwischen den Ergebnissen der Eignungsprüfung einer Klasse und dem jeweiligen Notendurchschnitt am Ende des 2. Jahrgangs wurde in einem Punktwolken-Diagramm mit Regressionsgerade dargestellt:



– Kreuzen Sie den zu dieser Regression passenden Korrelationskoeffizienten an. *[1 aus 5]*

$r \approx -1,4$	☐
$r \approx -0,9$	☐
$r \approx -0,4$	☐
$r \approx 0,5$	☐
$r \approx 0,9$	☐

– Beurteilen Sie den Schulerfolg von Schülerinnen/Schülern, die bei der Eignungsprüfung zwischen 70 und 75 Punkte erreichten, und von Schülerinnen/Schülern, die dabei mehr als 90 Punkte erreichten.
– Geben Sie für jene Schüler/innen, die einen Notendurchschnitt ≤ 1,5 hatten, die Spannweite der Ergebnisse der Eignungsprüfung an.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) mittels Technologieeinsatz:
– arithmetisches Mittel $\bar{x} = 84{,}28$ Punkte
– Standardabweichung $\sigma = 7{,}79$ Punkte

b) Median: 82 Punkte
1. Quartil: ca. 76 Punkte
3. Quartil: 87 Punkte
Quartilsabstand: ca. 11 Punkte

25 % der Schüler/innen erreichten Ergebnisse zwischen 68 und 76 Punkten, 25 % zwischen 76 und 82 Punkten, 25 % zwischen 82 und 87 Punkten und 25 % zwischen 87 und 96 Punkten.

c)

$r \approx -0{,}4$	☒

Der Notendurchschnitt der Schüler/innen, die zwischen 70 und 75 Punkte erreichten, ist breit gestreut – von ausgezeichnet bis sehr schwach.
Die Schüler/innen, die mehr als 90 Punkte erreichten, haben einen Notendurchschnitt von maximal 2,0.

Schüler/innen mit Notendurchschnitt ≤ 1,5:
– schlechtestes Ergebnis: 73 Punkte
– bestes Ergebnis: 97 Punkte
– Spannweite: 24 Punkte

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 5 Stochastik
c) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) —
c) D Argumentieren und Kommunizieren

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) leicht
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 1
b) 2
c) 3

Thema: Sonstiges

Quelle: anonymisierte Daten der BAKIP/BASOP St. Pölten

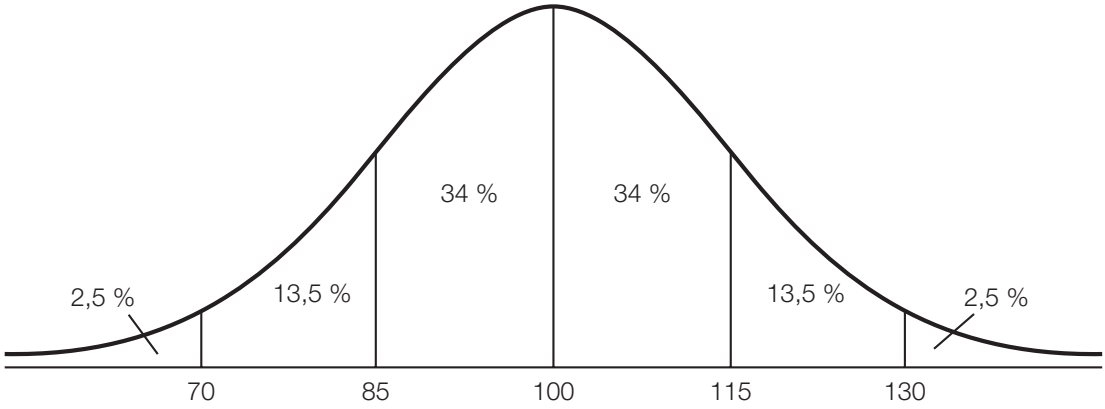
Intelligenzquotient

Aufgabennummer: B_236

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Der Intelligenzquotient (IQ) ist eine Kenngröße zur Bewertung des allgemeinen intellektuellen Leistungsvermögens (Intelligenz) eines Menschen. Er vergleicht die Intelligenz eines Menschen mit der mittleren Intelligenz der Gesamtbevölkerung im selben Zeitraum und im vergleichbaren Alter.

a) Interpretieren Sie den IQ als normalverteilte Zufallsgröße mit Erwartungswert $\mu = 100$:
- Lesen Sie den ungefähren Wert der Standardabweichung aus der unten stehenden Grafik ab.
- Lesen Sie die IQ-Untergrenze der intelligentesten 16 % ab.
- Schätzen Sie aus der Grafik ab, wie viel Prozent der Personen einen höheren IQ als 90 haben.



b) Bei einem IQ-Test erreichte eine Gruppe von 5 Schülerinnen und Schülern Werte von 90, 95, 100, 105 und 110 IQ-Punkten, eine andere Gruppe 85, 90, 95, 105 und 125 IQ-Punkte.

- Berechnen Sie die arithmetischen Mittel sowie die Streuungsmaße *Spannweite* und *Standardabweichung* (auf eine Dezimalstelle gerundet) der beiden Stichproben.
- Interpretieren Sie die Unterschiede.

c) Eine Gruppe von 10 Schülerinnen und Schülern machte einen Intelligenztest. Dieselben Schüler/innen füllten einen Fragebogen aus, der Aufschluss über das Selbstbewusstsein gibt (je höher die Punktezahl, desto größer das Selbstbewusstsein). Die Ergebnisse sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst:

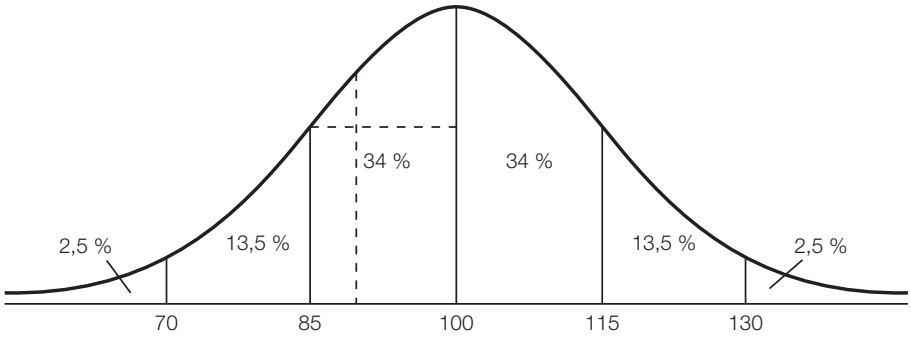
IQ-Punkte x	101	96	120	105	103	90	107	98	110	103
Selbstbewusstsein y	3	1	4	3	4	2	5	2	4	2

– Ermitteln Sie die Gleichung der Regressionsgeraden.
– Stellen Sie die Punktwolke und die Regressionsgerade grafisch dar.
– Berechnen Sie mithilfe dieses Modells das Selbstbewusstsein eines Schülers oder einer Schülerin mit einem IQ von 110.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Standardabweichung $\sigma \approx 15$ IQ-Punkte
Die IQ-Untergrenze der intelligentesten 16 % liegt bei 115 IQ-Punkten.



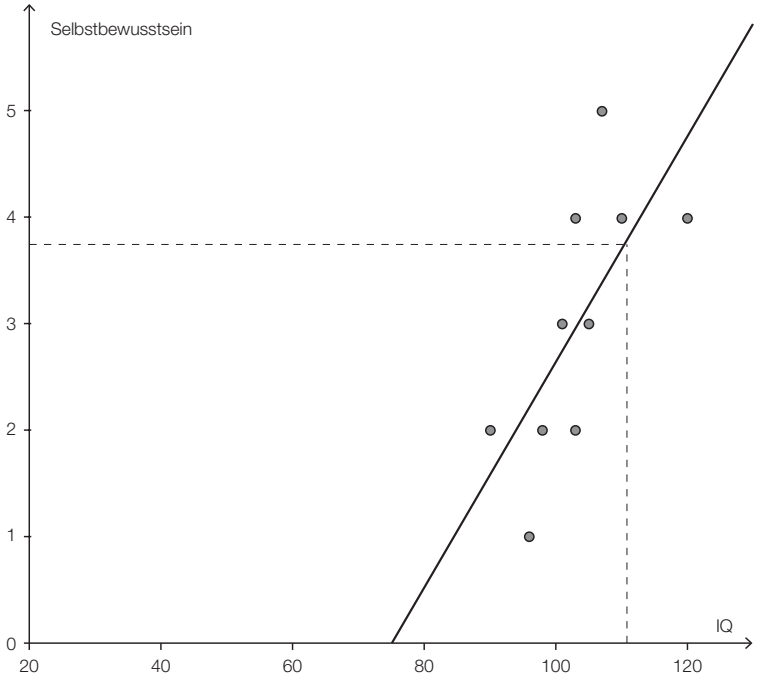
Abschätzen z. B. durch Aufteilen der Fläche unterhalb der Kurve:
Ca. $\frac{1}{4}$ der Fläche zwischen den Grenzen 85 und 100 liegt links von der strichlierten Linie.
$\frac{3}{4}$ von 34 % $\approx$ 25 %
Etwa 75 % haben einen höheren IQ als 90.

b)

	Gruppe 1	Gruppe 2
arithmetisches Mittel in IQ-Punkten	100	100
Spannweite in IQ-Punkten	20	40
Standardabweichung in IQ-Punkten	7,905… $\approx$ 7,9	15,811… $\approx$ 15,8

Das arithmetische Mittel ist bei beiden Gruppen gleich.
Die Spannweite und die Standardabweichung sind bei Gruppe 2 doppelt so groß wie bei Gruppe 1.
Die Testergebnisse der Gruppe 2 (2. Stichprobe) sind um das arithmetische Mittel breiter gestreut. Sie liegen weniger dicht beisammen.

c) Gleichung der Regressionsgeraden:
$-640x + 6\,041y = -47$
bzw. $y = 0{,}106x - 7{,}944$ (auf 3 Dezimalstellen gerundet)
(mit GeoGebra ermittelt – kann bei anderer Technologie geringfügig abweichen)



Bei Verwendung eines grafikfähigen Taschenrechners reicht eine Handskizze.

Ein Schüler oder eine Schülerin mit einem IQ von 110 erreicht auf der Skala für das Selbstbewusstsein einen Wert von etwa 3,8.

Ableseungenauigkeiten (vor allem bei Handzeichnung) sind zu tolerieren.
Auch eine Berechnung mithilfe der Gleichung ist möglich.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 5 Stochastik
c) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) —

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) leicht
c) leicht

Punkteanzahl:

a) 3
b) 2
c) 3

Thema: Psychologie

Quelle: http://www.dezimmer.net/HTML/1974iq5-korrelation.htm

Saftpackung

Aufgabennummer: B_232

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Eine Saftpackung hat eine quadratische Grundfläche mit der Seitenlänge a und der Füllhöhe h (Abb. 1). Sie enthält 1 Liter Saft.

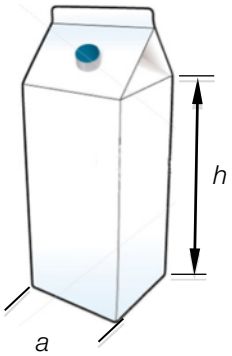


Abb. 1

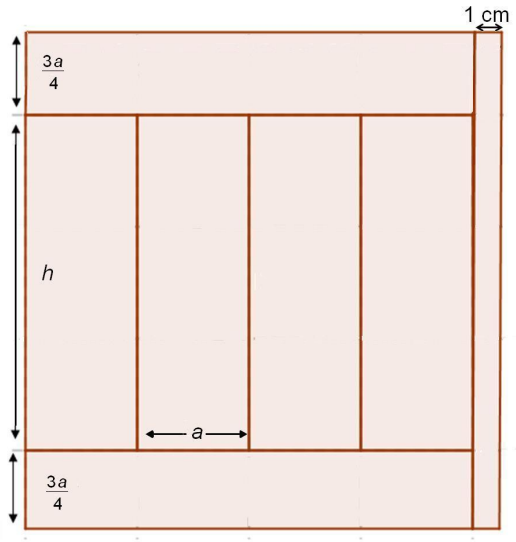


Abb. 2

Die Packung wird aus einem beschichteten Karton in Rechteckform gefertigt (Abb. 2), dessen Fläche sich mit der folgenden Formel berechnen lässt:

$$A = 6a^2 + \frac{3a}{20} + \frac{4}{a} + \frac{1}{10a^2}$$

A … Flächeninhalt in dm²
a … Länge der Seitenkante in dm

a) – Zeigen Sie die Richtigkeit der angegebenen Formel für A. Verwenden Sie dazu die Angaben aus Abb. 2 und die Formel $V = a^2 \cdot h$ für das Volumen V der eingefüllten Flüssigkeit bei einer Füllmenge von $V = 1$ Liter.

b) Die Abb. 3 zeigt die Abhängigkeit der für die 1-Liter-Packung benötigten Kartonfläche A von der Seitenkante a.

– Interpretieren Sie den Verlauf der Funktion in einer sinnvollen Definitionsmenge.

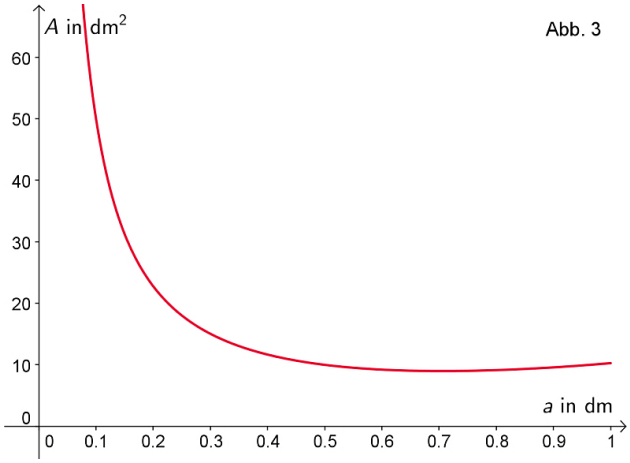
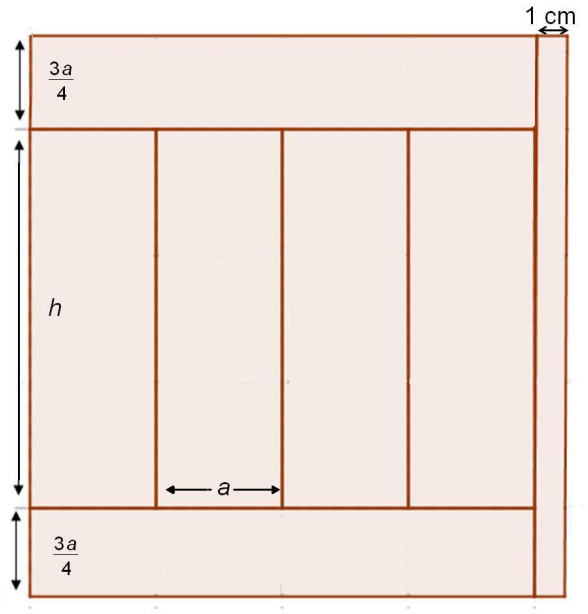


Abb. 3

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a)



Die Fläche des Materials, aus dem die Packung hergestellt wird, setzt sich aus Rechtecken zusammen.

Beachtung von $a^2 \cdot h = 1 \rightarrow h = \frac{1}{a^2}$

$A = 4a \cdot h + \frac{6a}{4} \cdot 4a + 0{,}1\,(\frac{6a}{4} + h)$

Das Ausmultiplizieren und Vereinfachen liefert:

$$A = 6a^2 + 0{,}15a + \frac{4}{a} + \frac{0{,}1}{a^2}$$

In Bruchform:

$$A = 6a^2 + \frac{3a}{20} + \frac{4}{a} + \frac{1}{10a^2}$$

b) Die Funktion A ist für $a = 0$ nicht definiert: Die Seitenkante a der Saftpackung kann nicht null sein. Der Definitionsbereich von A enthält daher reelle Zahlen $a > 0$.

Sehr kleine Werte von a bedeuten, dass die Füllhöhe groß sein muss, die Packung ist hoch und schmal.
Je größer a wird, desto kleiner wird die Füllhöhe der 1-Liter-Packung. Die Packung wird breiter und niedriger. Theoretisch könnte a beliebig groß werden, allerdings strebt h dann gegen null.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) —

Schwierigkeitsgrad:

a) schwer
b) mittel

Punkteanzahl:

a) 3
b) 3

Thema: Alltag

Quelle: Daten und Bildidee von http://www.tetrapak.com/at/

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Beleuchtungskörper

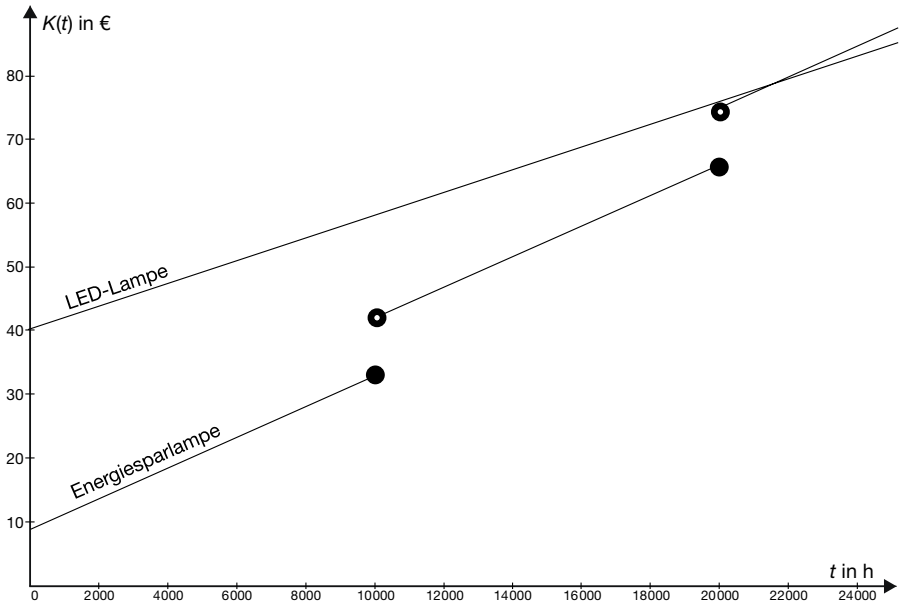
Aufgabennummer: B_226

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Aus Gründen des Klimaschutzes ist man bemüht, energiesparende Beleuchtungskörper zu verwenden. Um unterschiedliche Lichtquellen vergleichen zu können, muss man nicht nur ihre Leistung in Watt (W), sondern auch ihren abgestrahlten Lichtstrom in Lumen (lm) kennen.

a) Eine 12-Watt-Energiesparlampe und eine 9-Watt-LED-Lampe haben den gleichen Lichtstrom.
Die Graphen stellen die Kosten für diese beiden Lampen abhängig von der Betriebsdauer dar.
– Vergleichen Sie die Graphen hinsichtlich Anschaffungskosten, durchschnittlicher Lebensdauer und Betriebskosten.
– Lesen Sie aus der Grafik ab, ab welcher Betriebsdauer sich die Anschaffung einer LED-Lampe auszahlt.

$K(t)$ … Kosten in Euro (€) nach t Betriebsstunden
t … Betriebsdauer in Stunden (h)



b) Für Kindergarten-Gruppenräume schreibt die europäische Beleuchtungsnorm als Mindest-Beleuchtungsstärke 300 Lumen pro Quadratmeter (lm/m²) vor.
Ein Kindergarten mit einer auszuleuchtenden Fläche von 740 m² soll mit einer neuen Beleuchtung ausgestattet werden.
Gehen Sie bei den folgenden Berechnungen von einem Strompreis von € 0,18 pro Kilowattstunde aus und nehmen Sie an, dass in 1 Jahr 1 200 Betriebsstunden anfallen. (Hinweis: Energie = Leistung × Zeit.)

Es stehen 2 Systeme zur Wahl:

	Anschaffungspreis	angegebene Leistung	Lichtstrom
Gehäuse mit 4 Leuchtstoffröhren	€ 80,50	56 W	4 800 lm
LED-Lichtpaneel	€ 275,00	45 W	4 500 lm

– Berechnen Sie für beide Varianten die Anschaffungskosten und die Energiekosten für 1 Jahr.

Hinweis zur Aufgabe:
Geben Sie die Ergebnisse so an, dass sie klar nachvollziehbar sind und der Aufgabenstellung entsprechen.

Möglicher Lösungsweg

a) LED-Lampe:
Anschaffungskosten: ca. € 40
lange Lebensdauer – mehr als 24 000 Betriebsstunden
Betriebskosten: geringer als Energiesparlampe, weil Steigung kleiner

Energiesparlampe:
Anschaffungskosten: ca. € 10
Lebensdauer ca. 10 000 Betriebsstunden, dann muss eine neue gekauft werden (→ Sprungstelle)
Betriebskosten: größer als LED-Lampe

Bis ca. 22 000 Betriebsstunden ist die Energiesparlampe billiger, darüber lohnt sich die Anschaffung einer LED-Lampe.

Es sind auch andere Lösungen richtig, z. B.:

Anschaffungskosten: Eine LED-Lampe ist etwa 4-mal so teuer wie eine Energiesparlampe.
Lebensdauer: Eine LED-Lampe hält ca. 2,5-mal so lange wie eine Energiesparlampe.
Betriebskosten: LED: ca. € 17/10 000 h; Energiesparlampe: ca. € 22/10 000 h
Ab ca. 22 000 h zahlt sich die Anschaffung einer LED-Lampe aus.

b) Vorgabe: mindestens 300 lm/m²
bei 740 m² Fläche: 300 · 740 = 222 000 lm

Leuchtstoffröhren:
Ein Gehäuse mit 4 Leuchtstoffröhren hat 4 800 lm, daher werden 222 000 : 4 800 = 47 Stück (aufgerundet auf Ganze) gebraucht.

Anschaffungskosten:	47 · 80,50 = € 3.783,50
Leistung:	47 · 56 W = 2 632 W = 2,632 kW
Energie:	2,632 kW · 1 200 h = 3 158,4 kWh
Energiekosten:	3 158,4 · 0,18 = € 568,51

LED-Lichtpaneele:
Ein Lichtpaneel hat 4 500 lm, daher werden 222 000 : 4 500 = 50 Stück (aufgerundet auf Ganze) gebraucht.

Anschaffungskosten:	50 · 275 = € 13.750,00
Leistung:	50 · 45 W = 2 250 W = 2,25 kW
Energie:	2,25 kW · 1 200 h = 2 700 kWh
Energiekosten:	2 700 · 0,18 = € 486,00

Leuchtstoffröhren haben Anschaffungskosten von € 3.783,50 und jährliche Energiekosten von € 568,51.
LED-Paneele haben Anschaffungskosten von € 13.750,00 und jährliche Energiekosten von € 486,00.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 1 Zahlen und Maße

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) –
b) –

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 4

Thema: Alltag

Quellen: –

Computerspiele (2)

Aufgabennummer: B_151

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Ein Unternehmen produziert Computerspiele.

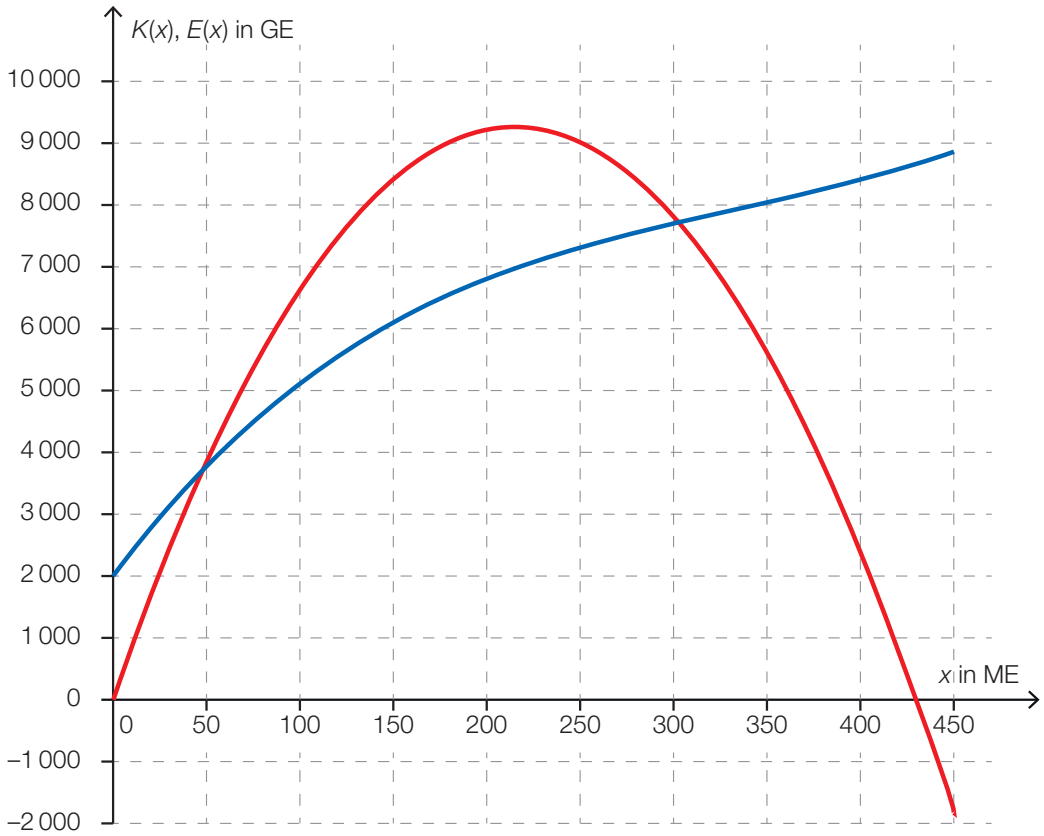
a) Für ein bestimmtes Verkaufsgebiet kann die Abhängigkeit des Verkaufspreises p in GE/ME und der nachgefragten Menge x in ME durch die Funktion p mit $p(x) = -0{,}2x + 86$ beschrieben werden.

– Erstellen Sie die Gleichung der Erlösfunktion.
– Berechnen Sie diejenige Verkaufsmenge, bei der der erzielbare Erlös maximal ist.
– Bestimmen Sie die Höhe des maximalen Erlöses.

b) Für die Produktion des Spiels *Super Maxi* wird der Verlauf der Grenzkosten durch die Funktion K' mit $K'(x) = 0{,}0003x^2 - 0{,}2x + 40$ beschrieben.

– Stellen Sie die Gleichung der Kostenfunktion K auf, wenn die Fixkosten 2 000 GE betragen.
– Erklären Sie die Bedeutung der Kostenkehre in Bezug auf die Zunahme der Kosten pro zusätzlich produzierter ME.

c) In der nachstehenden Grafik sind die Graphen der Kostenfunktion und der Erlösfunktion des Spiels *Super Mizzi* dargestellt.



– Beschriften Sie die Graphen.
– Zeichnen Sie den Graphen der Gewinnfunktion möglichst genau in die Grafik ein.
– Lesen Sie die Grenzen der Gewinnzone ab.
– Lesen Sie den maximalen Gewinn ab.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

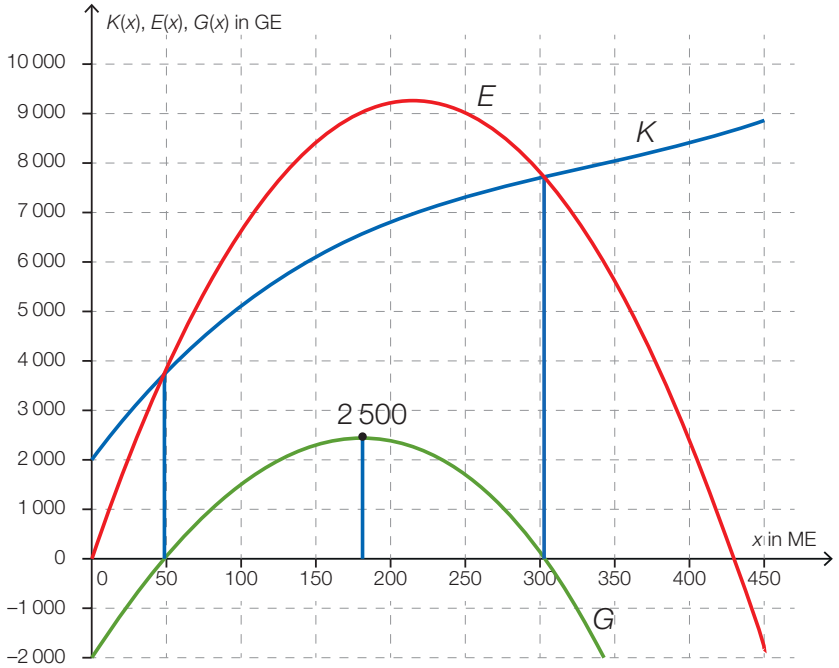
a) $E(x) = p(x) \cdot x = -0{,}2x^2 + 86x$
$E'(x) = -0{,}4x + 86 = 0$
$x = 215$

Das Erlösmaximum wird bei 215 ME erzielt. Der Erlös beträgt dort 9 245 GE.

b) $\int K'(x)\mathrm{d}x = 0{,}0001x^3 - 0{,}1x^2 + 40x + F$ mit $F = 2\,000$
$K(x) = 0{,}0001x^3 - 0{,}1x^2 + 40x + 2\,000$

Die Zunahme der Kosten wird mit der Grenzfunktion $K'(x)$ beschrieben. In der Kostenkehre ist $K''(x) = 0$. Die Grenzkostenfunktion hat an dieser Stelle ein Minimum. Die Zunahme der Kosten ist an dieser Stelle minimal.

c) Die Gewinnfunktion ergibt sich durch grafische Subtraktion der Kostenfunktion von der Erlösfunktion.



Das Gewinnintervall liegt zwischen ca. 50 ME und 300 ME. *Ableseungenauigkeiten ± 20 sind zu tolerieren.*
Der maximale Gewinn beträgt rund. 2 500 GE. *Ableseungenauigkeiten ± 200 sind zu tolerieren.*

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 4 Analysis
c) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) A Modellieren und Transferieren
c) A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2
c) 4

Thema: Wirtschaft

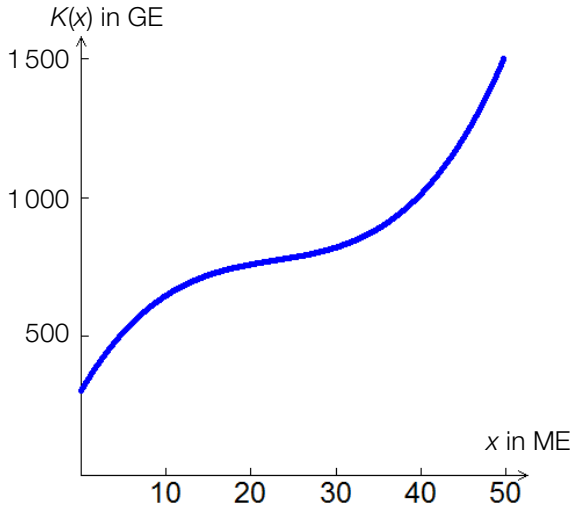
Quellen: –

Spielzeugautos (1)

Aufgabennummer: B_200

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

In der nachstehenden Grafik ist eine Kostenfunktion für die Produktion eines Spielzeugautos dargestellt.



a) – Zeichnen Sie in der Grafik das Betriebsoptimum ein.
– Begründen Sie Ihre Vorgangsweise.

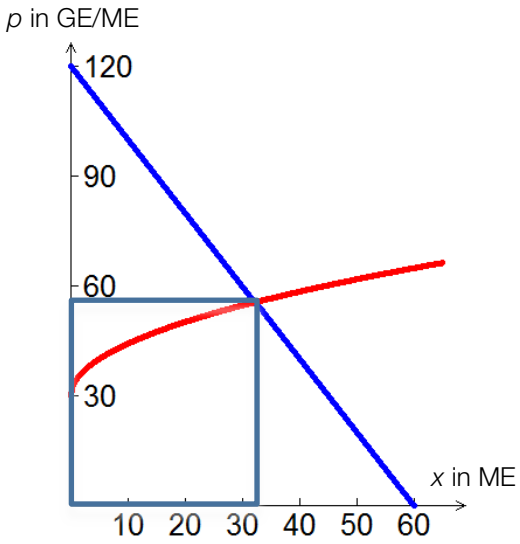
b) Analysen der anfallenden Produktionskosten haben ergeben, dass die mittlere Kostenänderung bei einer Erhöhung der Produktionsmenge von 10 ME auf 12 ME 17,5 GE/ME beträgt. Die Grenzkosten bei einer Produktion von 10 ME betragen 19,7 GE/ME.

– Erklären Sie, warum sich die mittlere Kostenänderung und die Grenzkosten unterscheiden.

c) Die Gleichung der Kostenfunktion K lautet $K(x) = 0{,}03x^3 - 2{,}05x^2 + 51{,}7x + 305$, wobei x in Mengeneinheiten (ME) und $K(x)$ in Geldeinheiten (GE) gegeben ist.
Das Produkt kann zum Preis von 35,2 GE/ME verkauft werden.

– Berechnen Sie die Verkaufsmenge x, ab der das Unternehmen mit diesem Produkt einen Gewinn erzielen kann.

d) In der nachstehenden Grafik sind die Angebots- und die Nachfragefunktion für das Produkt, die am Markt ermittelt wurden, dargestellt.

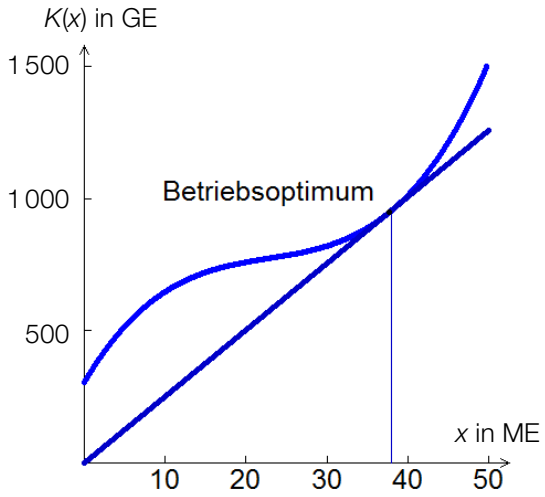


– Interpretieren Sie den Flächeninhalt des dargestellten Rechtecks.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



Die Steigung einer Geraden durch den Ursprung entspricht in den Schnittpunkten mit dem Graphen der Kostenfunktion den jeweiligen Stückkosten.
Von allen möglichen Geraden hat diejenige die geringste Steigung, die die Kostenfunktion in nur einem Punkt berührt (Tangente). Ihre Steigung entspricht den geringsten Stückkosten. Sie berührt daher im Betriebsoptimum.

b) 17,5 GE/ME ist die durchschnittliche Kostenänderung zwischen 10 ME und 12 ME.
Es handelt sich um einen Differenzenquotienten.
Die Grenzkosten entsprechen dem Differenzialquotienten.
Grafisch entsprechen die Grenzkosten der Steigung der Tangente an die Kostenfunktion bei der Produktionsmenge 10.

c) $K(x) = 0{,}03x^3 - 2{,}05x^2 + 51{,}7x + 305$
$E(x) = 35{,}2x$
$G(x) = E(x) - K(x) = -0{,}03x^3 + 2{,}05x^2 - 16{,}5x - 305$
$G(x) = 0$

mittels Technologieeinsatz: $x_1 = 21{,}84$ ME, $x_2 = 54{,}96$ ME

Ab ca. 21,84 ME kann ein Gewinn erwirtschaftet werden.

d) Das Produkt aus Menge und Preis ist der Erlös. Der Flächeninhalt entspricht dem Produkt von Marktpreis und Gleichgewichtsmenge.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 4 Analysis
c) 4 Analysis
d) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —
d) 3 Funktionale Zusammenhänge

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren, D Argumentieren und Kommunizieren
b) —
c) A Modellieren und Transferieren, C Interpretieren und Dokumentieren
d) —

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) leicht
d) mittel

Punkteanzahl:

a) 4
b) 2
c) 3
d) 2

Thema: Wirtschaft

Quellen: —

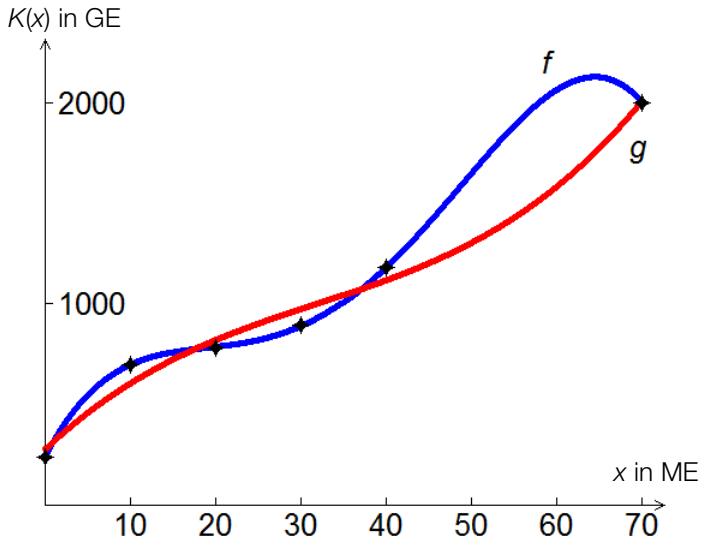
Produktionskosten

Aufgabennummer: B_199

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

In einem Betrieb werden verschiedene Bauteile für die Autoindustrie gefertigt. Die produzierte Menge wird in Mengeneinheiten (ME) und Geldbeträge werden in Geldeinheiten (GE) angegeben.

a) Für eine Produktionsreihe konnten die in der untenstehenden Grafik eingezeichneten Kostenwerte ermittelt werden. Es wurden eine Polynomfunktion 4. Grades f und eine Polynomfunktion 3. Grades g bestimmt.

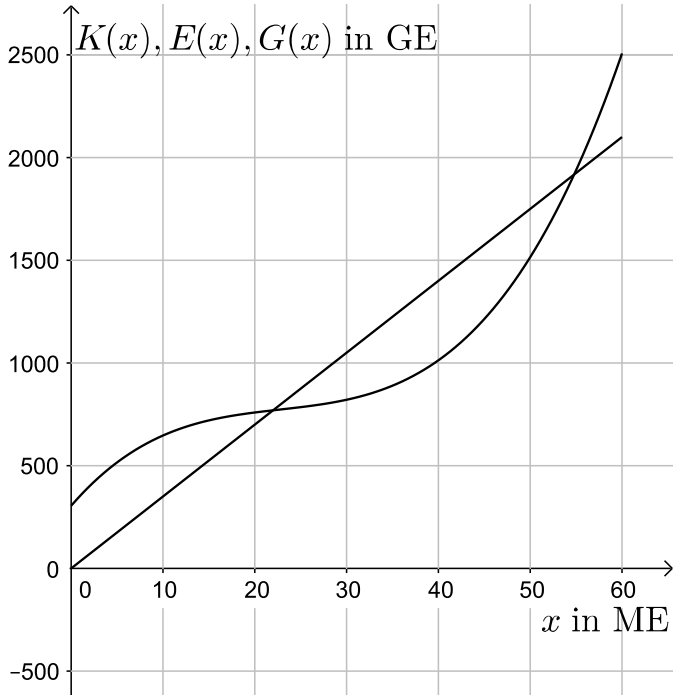


– Erklären Sie, welche der Funktionen als Kostenfunktion geeignet ist.

b) Für die Produktion eines bestimmten Bauteils ergibt sich die Kostenfunktion K mit $K(x) = 0{,}03x^3 - 2{,}05x^2 + 51{,}7x + 305$.

– Berechnen Sie das Betriebsoptimum und die langfristige Preisuntergrenze dieser Kostenfunktion.

c) In der nachstehenden Abbildung sind die Graphen einer Kostenfunktion *K* und einer Erlösfunktion *E* dargestellt.



– Lesen Sie den ungefähren Preis pro ME aus der Grafik ab.
– Lesen Sie die ungefähren Gewinngrenzen aus der Grafik ab.
– Zeichnen Sie den Graphen der Gewinnfunktion im Intervall [0; 60] in die oben stehende Abbildung ein.
– Lesen Sie die ungefähre maximale Gewinnhöhe ab.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Es ist nur die Funktion g als Kostenfunktion geeignet, da f zwischen 65 und 70 ME fallend ist.

Auch andere richtige Argumentationen sind möglich.

b) $K(x) = 0{,}03x^3 - 2{,}05x^2 + 51{,}7x + 305$
Stückkosten: $\overline{K}(x) = 0{,}03x^2 - 2{,}05x + 51{,}7 + \frac{305}{x}$
Ableitung der Stückkosten: $\overline{K}'(x) = 0{,}06x - 2{,}05 - \frac{305}{x^2}$

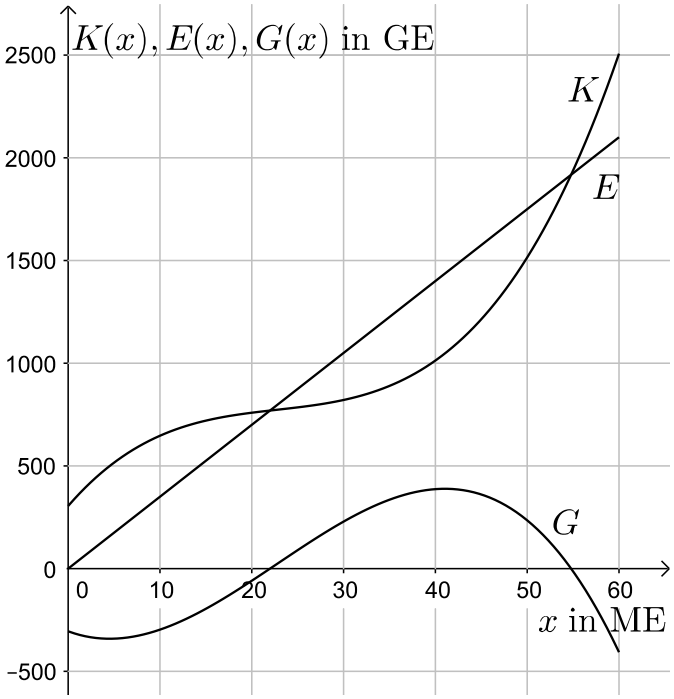
Die Stelle des Minimums der Stückkostenfunktion ergibt sich durch Lösen der Gleichung $0{,}06x - 2{,}05 - \frac{305}{x^2} = 0$.

$x_{min} = 37{,}73... \approx 37{,}7$
Das Betriebsoptimum liegt bei einer Produktionsmenge von rund 37,7 ME.

$\overline{K}(x_{min}) = 25{,}14...$
Die langfristige Preisuntergrenze liegt bei rund 25,1 GE/ME.

c) Preis pro ME: 35 GE

untere Gewinngrenze: ca. 22 ME
obere Gewinngrenze: ca. 55 ME



maximaler Gewinn: ca. 390 GE

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 4 Analysis
c) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) –
b) A Modellieren und Transferieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) leicht
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 1
b) 4
c) 4

Thema: Wirtschaft

Quellen: –

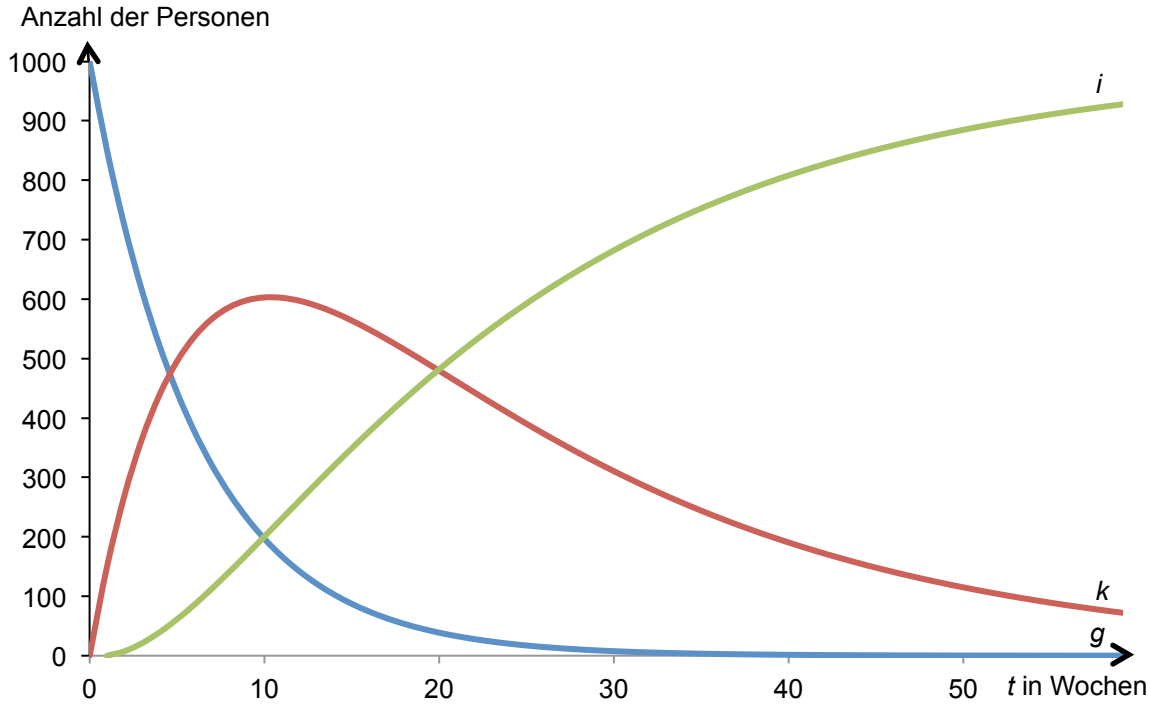
Viruserkrankung

Aufgabennummer: B_198

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

In einem kleinen Ort verbreitet sich eine neuartige Virusinfektion.

a) Ein Arzt beobachtet, dass einmal erkrankte Personen nach Abklingen der Symptome gegen das Virus immun sind. In der folgenden Abbildung ist der zeitliche Verlauf der Anzahl der kranken (k), der noch gesunden (g) und der bereits immunen (i) Personen dargestellt:



– Entnehmen Sie der Grafik, wann ca. gleich viele Personen bereits immun bzw. noch gesund sind.
– Lesen Sie ab, wie viele Personen zu diesem Zeitpunkt krank sind.

b) Ein neues Medikament soll bei der Bekämpfung des Virus helfen. Leider hat es auch Nebenwirkungen. 2 % der erkrankten Personen leiden an Kopfschmerzen, 1 % an Schwindelanfällen. 0,2 % weisen beide Symptome auf.
In der folgenden Rechnung wurde die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine der Nebenwirkungen auftritt, ermittelt:

$$P(\text{„mindestens 1 Nebenwirkung“}) = 0{,}02 + 0{,}01 = 0{,}03$$

– Erklären Sie, welcher Fehler dabei gemacht wurde.
– Stellen Sie die Berechnung richtig.

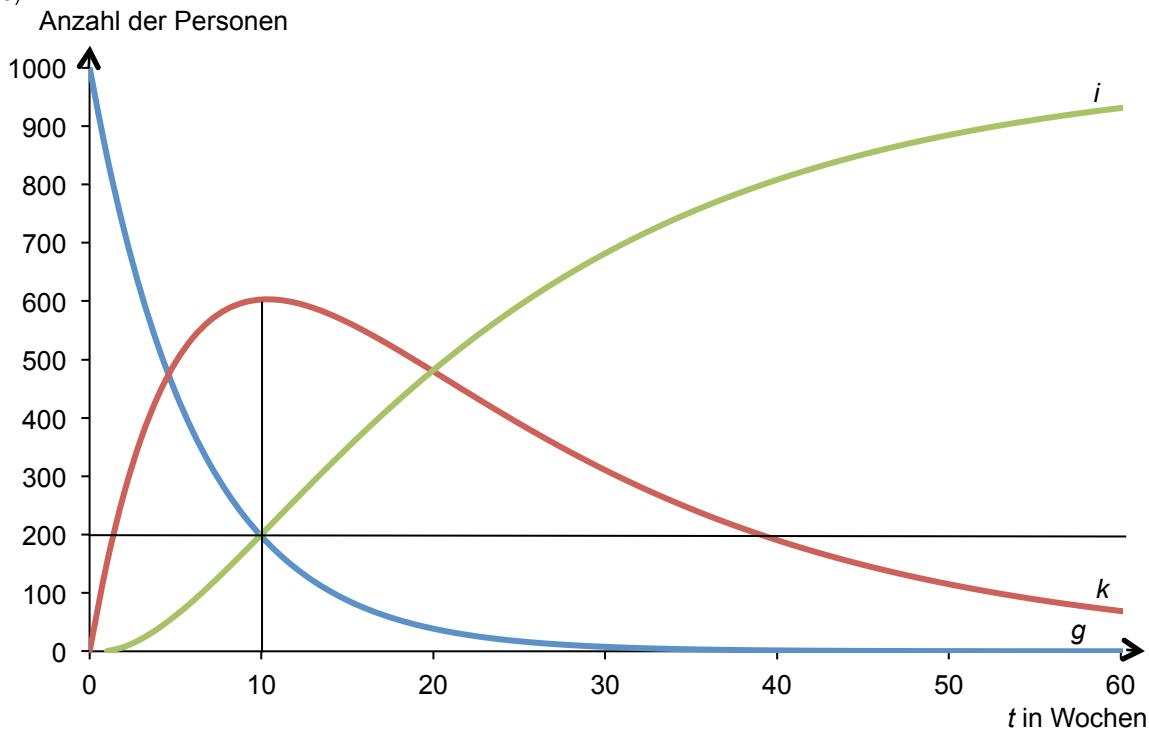
c) Bei einer Gesundenuntersuchung wird ein Virustest durchgeführt. Damit können 99 % der Virusträger/innen erkannt werden, noch bevor die Krankheit ausbricht. 10 % der Untersuchten sind tatsächlich Virusträger/innen. Leider zeigt der Test auch bei 2 % der gesunden Personen eine Infektion an.

– Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person gesund ist, unter der Voraussetzung, dass eine Virusinfektion diagnostiziert wurde.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a)



Nach ca. 10 Wochen gibt es gleich viel noch gesunde und bereits immune Personen.
Zu diesem Zeitpunkt sind ca. 600 Personen krank.

Eine angemessene Ungenauigkeit beim Ablesen des Wertes wird toleriert.

b) In der Formel wurde nicht berücksichtigt, dass es auch erkrankte Personen gibt, bei denen beide Nebenwirkungen gleichzeitig eintreten. Die richtige Formel lautet:

P(„mindestens 1 Nebenwirkung“) =
P(„Kopfschmerzen“) + P(„Schwindelanfälle“) – P(„beide Nebenwirkungen“) =
0,02 + 0,01 – 0,002 = 0,03 – 0,002 = 0,028

Auch andere Herleitungen der Formel sind möglich.

c) $P(\text{„gesund}\,|\,\text{positiver Test“}) = \frac{P(\text{„gesund und positiver Test“})}{P(\text{„positiver Test“})} = \frac{0{,}9 \cdot 0{,}02}{0{,}9 \cdot 0{,}02 + 0{,}1 \cdot 0{,}99} = 0{,}1538$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt 15,4 %.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 5 Stochastik
c) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) –
b) A Modellieren und Transferieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) schwer

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2
c) 2

Thema: Medizin

Quellen: –

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Marktanalyse

Aufgabennummer: B_190

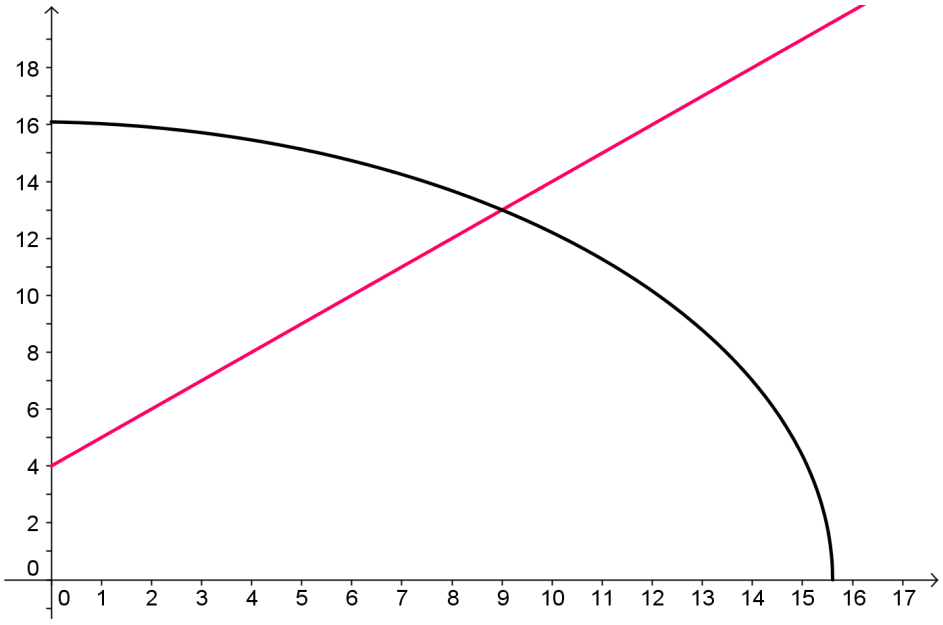
Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Für einen Artikel kennt man die Angebots- und die Nachfragefunktion:

$$p_A(x) = 4 + x \quad \text{und} \quad p_N(x) = \sqrt{259 - x - x^2}$$

$p_A(x)$ … Angebotspreis bei x Mengeneinheiten in Geldeinheiten (GE) bezogen auf 1 Mengeneinheit (ME)
$p_N(x)$ … Nachfragepreis bei x Mengeneinheiten in Geldeinheiten (GE) bezogen auf 1 Mengeneinheit (ME)
x … nachgefragte Menge in Mengeneinheiten (ME)

a) Interpretieren und beschriften Sie die grafische Darstellung der beiden Funktionen nach folgenden Gesichtspunkten:
– Achsenbeschriftung
– Angebotsfunktion
– Nachfragefunktion
– Gleichgewichtspreis (Marktpreis)



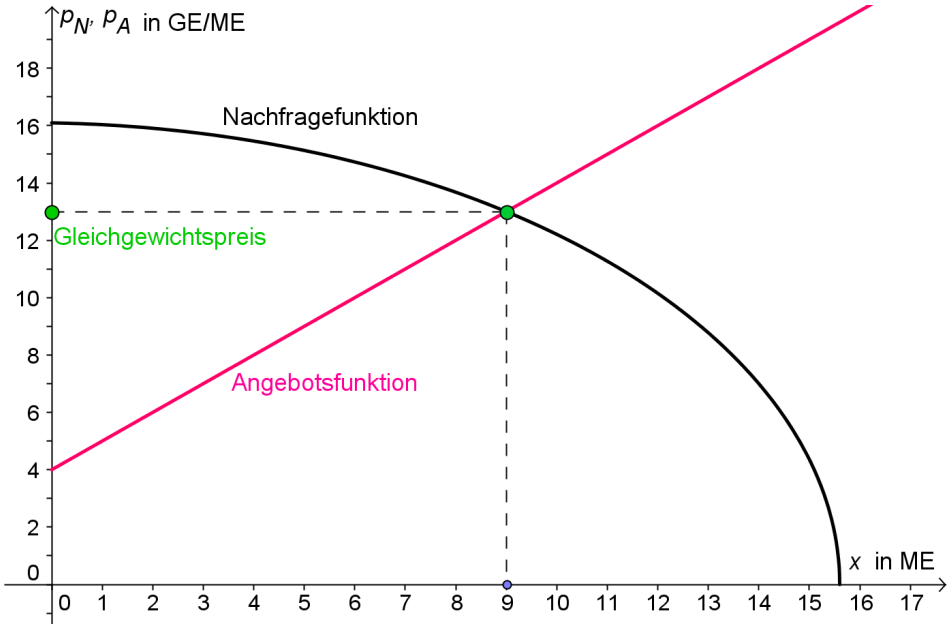
b) Bestimmen Sie eine sinnvolle Definitionsmenge für die nachgefragte Menge. Berechnen Sie die Menge x und den Preis p im Marktgleichgewicht.

c) Ein Produzent hält sich nicht an den gegebenen Marktpreis und bestimmt seinen möglichen Erlös nur mithilfe der Nachfragefunktion p_N. Stellen Sie die Erlösfunktion $E(x) = p_N(x) \cdot x$ grafisch dar und entnehmen Sie der Grafik die ungefähren Werte für die sich ergebenden Erlösgrenzen und das Erlösmaximum.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



b) Marktgleichgewicht
Berechnungen sind mit Technologieeinsatz möglich ...
... oder durch schrittweises Auflösen:
Bestimmen der Definitionsmenge D: $259 - x - x^2 \geq 0 \rightarrow D = [0;15,6]$

$4 + x = \sqrt{259 - x - x^2}$ | Gleichung quadrieren

$16 + 8x + x^2 = 259 - x - x^2$

$2x^2 + 9x - 243 = 0$ … Einsatz der „großen“ Lösungsformel,

$x_{1,2} = \frac{-9 \pm \sqrt{81 + 3\,888}}{4}$

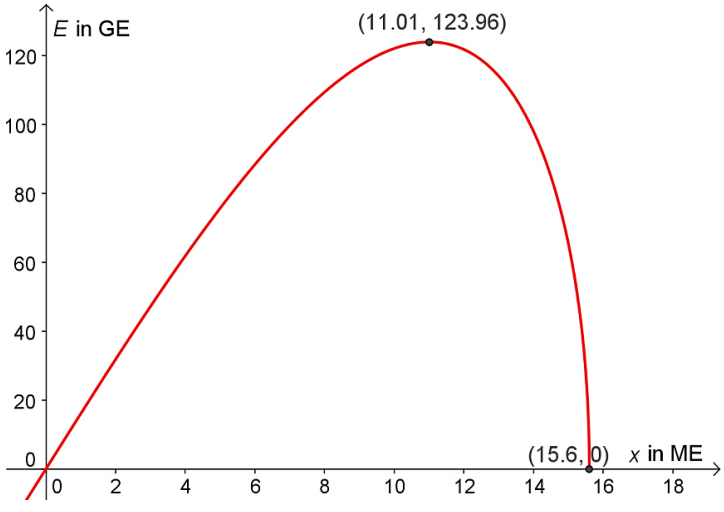
Nur die positive Lösung ist sinnvoll.

$\rightarrow x = 9$ ME

Das Marktgleichgewicht stellt sich bei 9 ME und einem Preis von 13 GE/ME ein.

c) Die Erlösgrenzen sind bei einem Absatz von
$x_1 = 0$ und
$x_2 \approx 15,6$ ME.

Das Maximum des Erlöses wird bei einem Absatz von ungefähr 11 ME erreicht und beträgt rund 124 GE.



Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) –
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2
c) 2

Thema: Wirtschaft

Quellen: –

Bakterien

Aufgabennummer: B_172

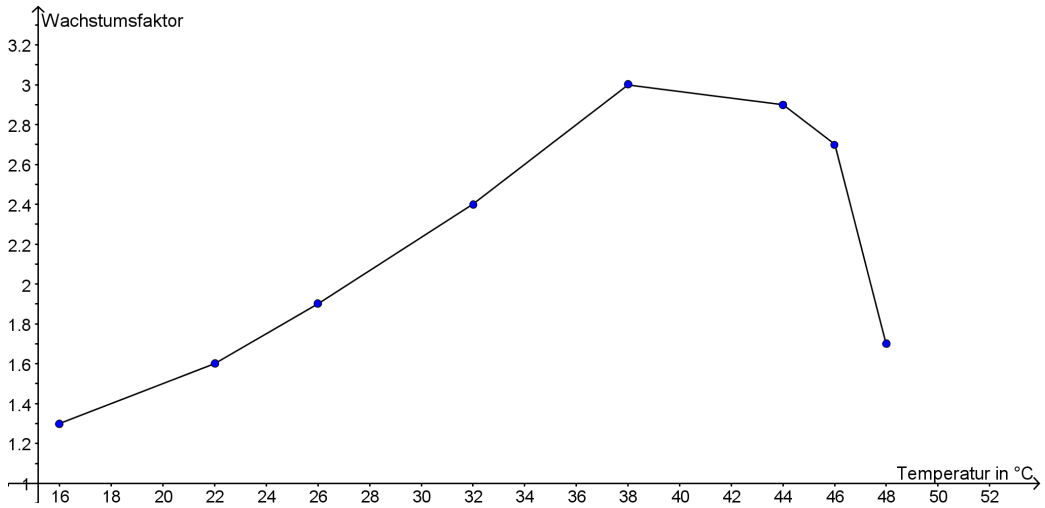
Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Milchsäurebakterien haben Stäbchenform (sie sind also annähernd zylindrisch) und vermehren sich durch Zellteilung. Sie haben eine Länge von ca. 2 Mikrometern (µm) und einen Durchmesser von ca. 0,9 µm.

In sauer gewordener Milch wurden in 1 Milliliter (ml) Milch ca. 1 Million Bakterien gemessen.

– Berechnen Sie, wie viel Prozent des Gesamtvolumens der Milch die Bakterien einnehmen.

b) *Escherichia-coli*-Bakterien im Wasser sind gefährlich für die Gesundheit.
In einem Labor wird deren Anzahl stündlich gemessen. Die Bakterien vermehren sich exponentiell, wobei der Wachstumsfaktor temperaturabhängig ist.
In der nachstehenden Grafik ist der Wachstumsfaktor in Abhängigkeit von der Temperatur dargestellt.

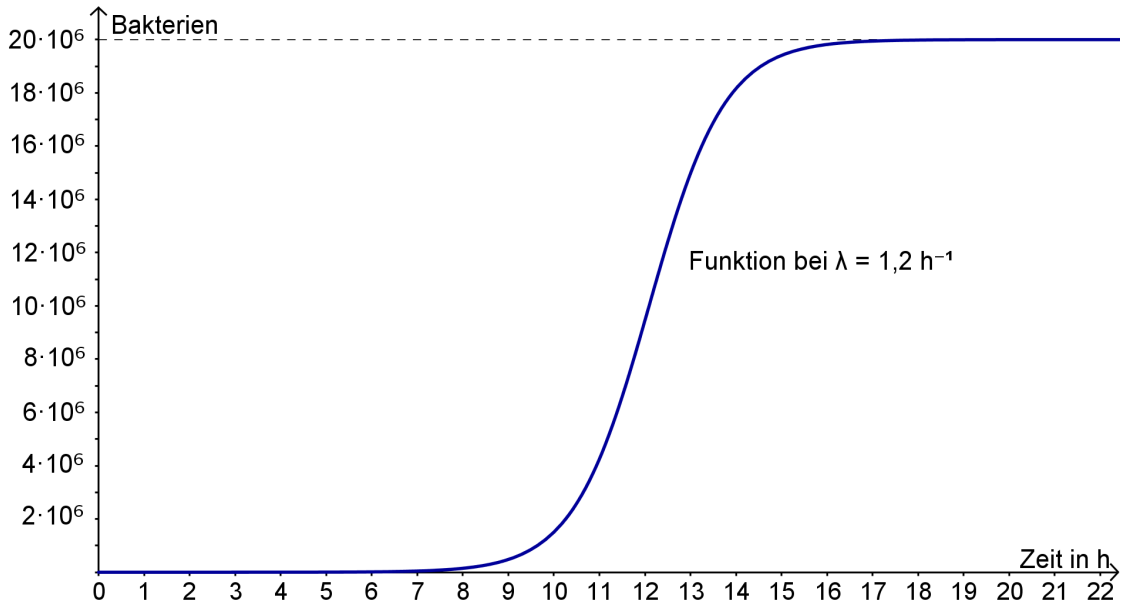


– Lesen Sie den Wachstumsfaktor bei 32 °C warmem Wasser ab.
– Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung der Anzahl von Stunden t, die es dauert, bis sich die *Escherichia-coli*-Bakterien in 32 °C warmem Wasser von einer ursprünglichen Anzahl N_0 auf eine kritische Anzahl K vermehren.

N_0 … ursprüngliche Anzahl der Bakterien vor dem Vermehrungsprozess
K … kritische Anzahl an Bakterien
t … Anzahl der Stunden des Vermehrungsprozesses

– Lösen Sie die erstellte Formel nach t auf.

c) Ein Bakterienwachstum verläuft nicht unbeschränkt exponentiell, sondern erreicht wegen der begrenzten Ressourcen eine Sättigungsmenge.



Die obenstehende Grafik zeigt das Wachstum einer Bakterienpopulation mit folgender Funktion *N*:

$$N(t) = \frac{20 \cdot 10^6}{1 + 20 \cdot 10^5 \cdot e^{-\lambda \cdot t}} \quad \text{mit} \quad \lambda = 1{,}2\ \text{h}^{-1}$$

t … Zeit in Stunden (h)
N(*t*) … Anzahl der Bakterien nach *t* Stunden
λ … Wachstumsparameter in h^{-1}

– Skizzieren Sie in der Grafik den Verlauf der Kurve für $\lambda = 1{,}5\ \text{h}^{-1}$.

Betrachten Sie den Teilausdruck $e^{-\lambda \cdot t}$ des Nenners der Funktion *N*.

– Erklären Sie, welchen Einfluss eine Veränderung von $\lambda = 1{,}2\ \text{h}^{-1}$ auf $\lambda = 1{,}5\ \text{h}^{-1}$ auf den Teilausdruck $e^{-\lambda \cdot t}$ hat.
– Erklären Sie, welchen Einfluss die Veränderung im Teilausdruck $e^{-\lambda \cdot t}$ auf die gesamte Funktion *N* hat.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $1\ \text{ml} = 10^{-3}\ \text{L} = 10^{-3}\ \text{dm}^3 = 1\ \text{cm}^3$
$2 \cdot 0{,}45^2 \cdot \pi \approx 1{,}27$
Das Volumen eines Bakteriums beträgt ungefähr $1{,}27\ \mu\text{m}^3$.
$1{,}27\ \mu\text{m}^3 = 1{,}27 \cdot 10^{-12}\ \text{cm}^3$
1 Million Bakterien haben ein Volumen von $1{,}27 \cdot 10^{-12} \cdot 10^6\ \text{cm}^3 = 1{,}27 \cdot 10^{-6}\ \text{cm}^3$
$1\ \text{cm}^3$ sind 100 %. → $1{,}27 \cdot 10^{-6}\ \text{cm}^3$ sind $\underline{1{,}27 \cdot 10^{-4}\ \%}$.
Die Bakterien nehmen ca. $1{,}27 \cdot 10^{-4}$ % des Gesamtvolumens ein.

(Umrechnungen mit anderen korrekten Maßeinheiten sind ebenfalls zu akzeptieren.)

b) Bei 32 °C vermehren sich die Bakterien pro Stunde mit einem Wachstumsfaktor von 2,4.

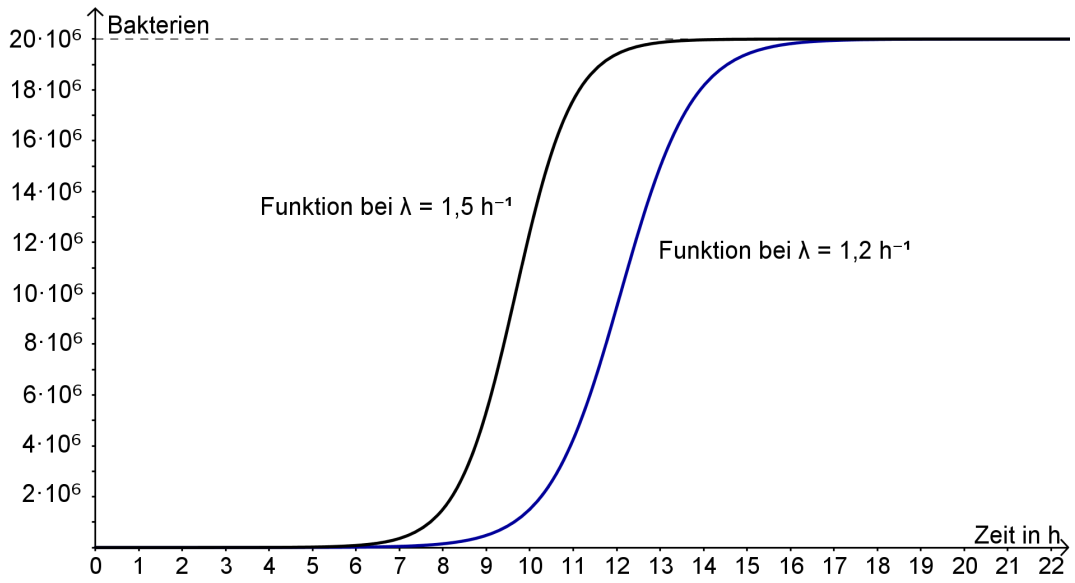
$K = N_0 \cdot 2{,}4^t$

$\frac{K}{N_0} = 2{,}4^t$

$t = \frac{\log\left(\frac{K}{N_0}\right)}{\log(2{,}4)}$

(*Welcher Logarithmus verwendet wird, ist gleichgültig.*)

c)



Die Exponentialfunktion $e^{-\lambda \cdot t}$ fällt für $\lambda = 1{,}5\ \text{h}^{-1}$ schneller als für $\lambda = 1{,}2\ \text{h}^{-1}$. Ihr Wert nähert sich schneller null.
Fällt die Exponentialfunktion $e^{-\lambda \cdot t}$ schneller, nähert sich der Wert des Nenners schneller dem Wert 1.
Wird der Nenner kleiner, wird der gesamte Bruch größer.
Der Grenzwert von $20 \cdot 10^6$ Bakterien wird bei $\lambda = 1{,}5\ \text{h}^{-1}$ daher schneller angenähert.

(Alle richtigen Erklärungen sind zu akzeptieren.)

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 1 Zahlen und Maße
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) 2 Algebra und Geometrie
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) A Modellieren und Transferieren
c) D Argumentieren und Kommunizieren

Nebenhandlungsdimension:

a) –
b) B Operieren und Technologieeinsatz, C Interpretieren und Dokumentieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) schwer

Punkteanzahl:

a) 3
b) 3
c) 3

Thema: Sonstiges

Quellen: –

Grönlandwale

Aufgabennummer: B_195

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

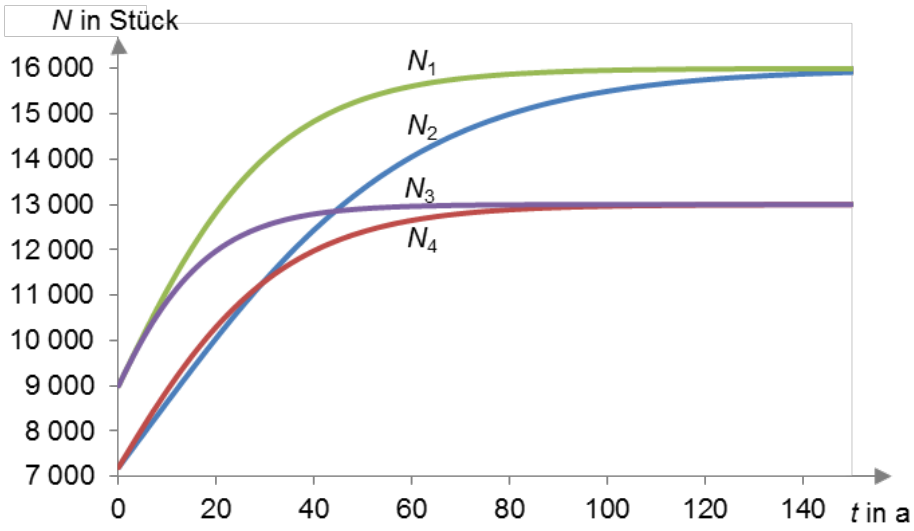
Grönlandwale sind eine vom Aussterben bedrohte Tierart. Noch existierende Populationen stehen unter strengstem Schutz. Das Wachstum der Populationen wird genau beobachtet.

Aus langjährigen Beobachtungen der größten heute lebenden Population kann für deren zukünftiges Wachstum unter gleichbleibenden Umweltbedingungen die folgende Funktion angegeben werden:

$$N(t) = \frac{16\,000}{1 + \frac{11}{9} \cdot e^{-0{,}0363 \cdot t}}$$

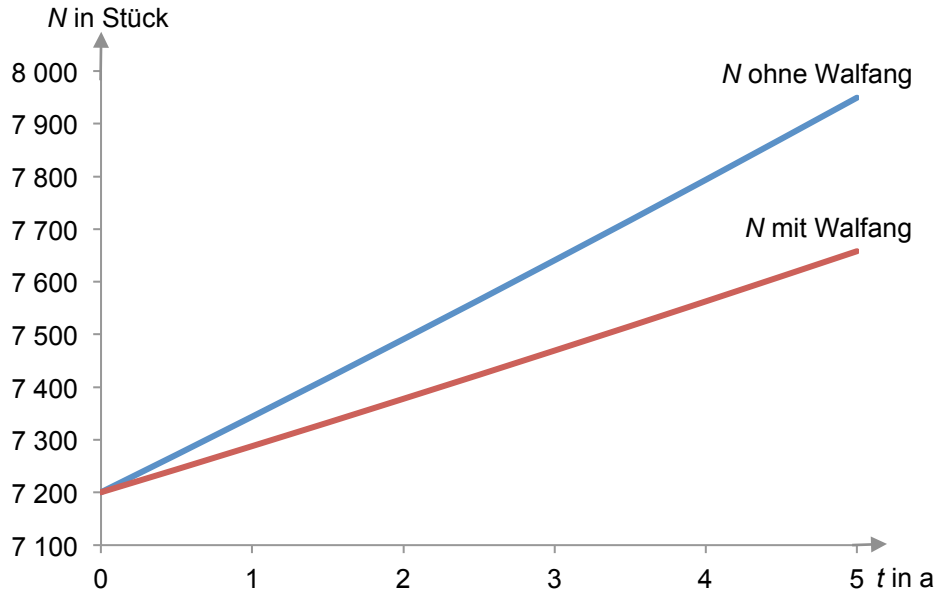
t … Zeit in Jahren (a) mit $t = 0$ im Jahr 2007
$N(t)$ … Anzahl der Wale in Stück nach t Jahren

a) – Lesen Sie ab, welcher der folgenden Funktionsgraphen zur angegebenen Funktion passt.
– Begründen Sie Ihre Auswahl.



b) – Stellen Sie die Wachstumsgeschwindigkeit der Walpopulation in Abhängigkeit von der Zeit t grafisch dar.
– Berechnen Sie, zu welcher Zeit die Walpopulation am stärksten zunimmt.

c) Trotz Naturschutz gesteht die Internationale Walfangkommission IWC den Inuit (Volksgruppe in Grönland) Fangquoten für den Eigenbedarf für bestimmte Grönlandwalbestände zu. So wurde von 2008 bis 2012 der Fang einer genau bestimmten Anzahl an Tieren für die oben beschriebene Walpopulation erlaubt. In der nachstehenden Grafik ist die voraussichtliche Entwicklung der Walpopulation ohne und mit jährlichem Abfischen dargestellt.



– Argumentieren Sie mathematisch, warum sich der Abstand der beiden Exponentialfunktionen mit jedem Jahr vergrößert.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Der Zähler der Formel gibt die maximal erreichbare Anzahl von Walen an. Es kommen also nur die Graphen N_1 und N_2 in Frage, da diese bis zu 16 000 Tiere erlauben.
Die Zahl der Tiere zum Zeitpunkt null kann mithilfe der Konstante $\frac{11}{9}$ bestimmt werden. Diese gibt das Verhältnis von maximal erreichbarem Wert und Anfangswert der logistischen Funktion wieder.

$$\frac{11}{9} = \frac{16\,000}{N_0} - 1$$

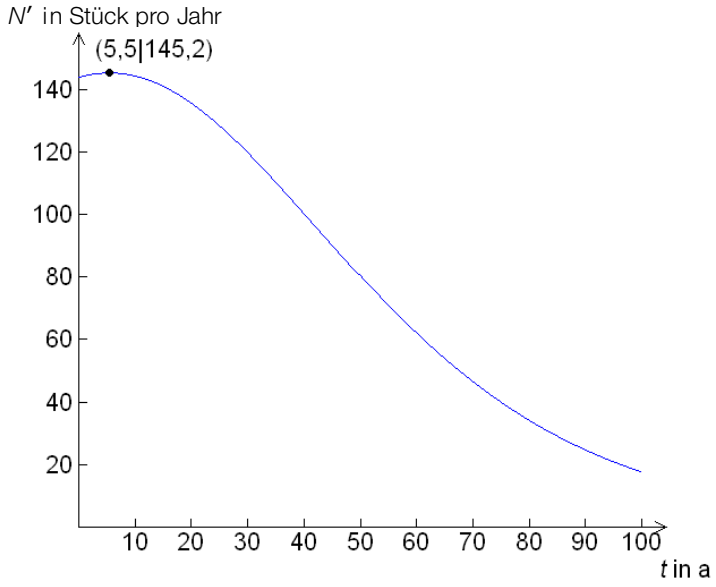
$$\frac{20}{9} = \frac{16\,000}{N_0}$$

$$N_0 = \frac{16\,000 \cdot 9}{20} = 7\,200$$

Der passende Graph ist daher N_2.

Auch andere passende Argumentationen bzgl. des Anfangswerts sind als richtig zu werten.

b) Die Wachstumsgeschwindigkeit der Walpopulation wird durch die 1. Ableitung der Funktion N beschrieben.
N' wird mithilfe von Technologie berechnet und deren Maximum bestimmt. Es ergibt sich, dass nach ca. 5,5 Jahren die größte Zunahme an Walen erfolgt.



c) Der Abstand der Funktionsgraphen wird immer größer, da durch das jährliche Abfischen auch die Basis für den prozentuellen jährlichen Zuwachs verkleinert wird. Bei gleichbleibender prozentueller Zuwachsrate ergibt sich bei einer größeren Ausgangsmenge eine größere Anzahl hinzukommender Wale als bei einer kleineren Ausgangsmenge.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 4 Analysis
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 1 Zahlen und Maße

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) D Argumentieren und Kommunizieren

Nebenhandlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) —
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 3
c) 2

Thema: Umwelt

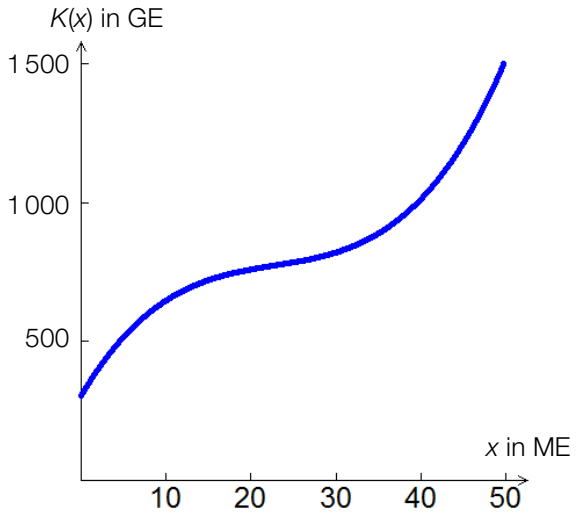
Quelle: www.wwf.at/files/downloads/groenlandwal.pdf

Spielzeugautos (2)

Aufgabennummer: B_150

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

In der nachstehenden Grafik ist eine Kostenfunktion für die Produktion eines Spielzeugautos dargestellt.



a) – Zeichnen Sie in der Grafik eine Tangente an die Kostenfunktion durch den Koordinatenursprung ein.

Interpretieren Sie diese Tangente als lineare Erlösfunktion.

– Beschreiben Sie die Bedeutung der Steigung dieser Tangente und der x-Koordinate des Berührpunkts im Sachzusammenhang.

b) Analysen der anfallenden Produktionskosten haben ergeben, dass die mittlere Kostenänderung bei einer Erhöhung der Produktionsmenge von 10 ME auf 12 ME 17,5 GE/ME beträgt. Die Grenzkosten bei einer Produktion von 10 ME betragen 19,7 GE/ME.

– Erklären Sie, warum sich die mittlere Kostenänderung und die Grenzkosten unterscheiden.

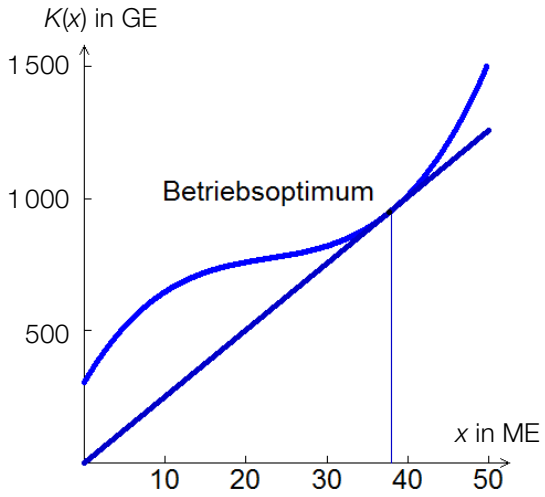
c) Die Gleichung der Kostenfunktion K lautet $K(x) = 0{,}03x^3 - 2{,}05x^2 + 51{,}7x + 305$, wobei x in Mengeneinheiten (ME) und $K(x)$ in Geldeinheiten (GE) gegeben ist.
Das Produkt kann zum Preis von 35,2 GE/ME verkauft werden.

– Berechnen Sie die Verkaufsmenge x, ab der das Unternehmen mit diesem Produkt einen Gewinn erzielen kann.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



Die Steigung der Erlösfunktion ist der Verkaufspreis in GE/ME.

Die x-Koordinate des Berührpunkts gibt diejenige Verkaufsmenge (in ME) an, bei der gerade noch kostendeckend produziert wird, also das Betriebsoptimum.

b) 17,5 GE/ME ist die durchschnittliche Kostenänderung zwischen 10 ME und 12 ME.
Es handelt sich um einen Differenzenquotienten.
Die Grenzkosten entsprechen dem Differenzialquotienten.
Grafisch entsprechen die Grenzkosten der Steigung der Tangente an die Kostenfunktion bei der Produktionsmenge 10.

c) $K(x) = 0{,}03x^3 - 2{,}05x^2 + 51{,}7x + 305$
$E(x) = 35{,}2x$
$G(x) = E(x) - K(x) = -0{,}03x^3 + 2{,}05x^2 - 16{,}5x - 305$
$G(x) = 0$

mittels Technologieeinsatz: $x_1 = 21{,}84$ ME, $x_2 = 54{,}96$ ME

Ab ca. 21,84 ME kann ein Gewinn erwirtschaftet werden.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 4 Analysis
c) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) —
c) A Modellieren und Transferieren, C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) leicht

Punkteanzahl:

a) 3
b) 2
c) 3

Thema: Wirtschaft

Quellen: —

Monopolistischer Betrieb

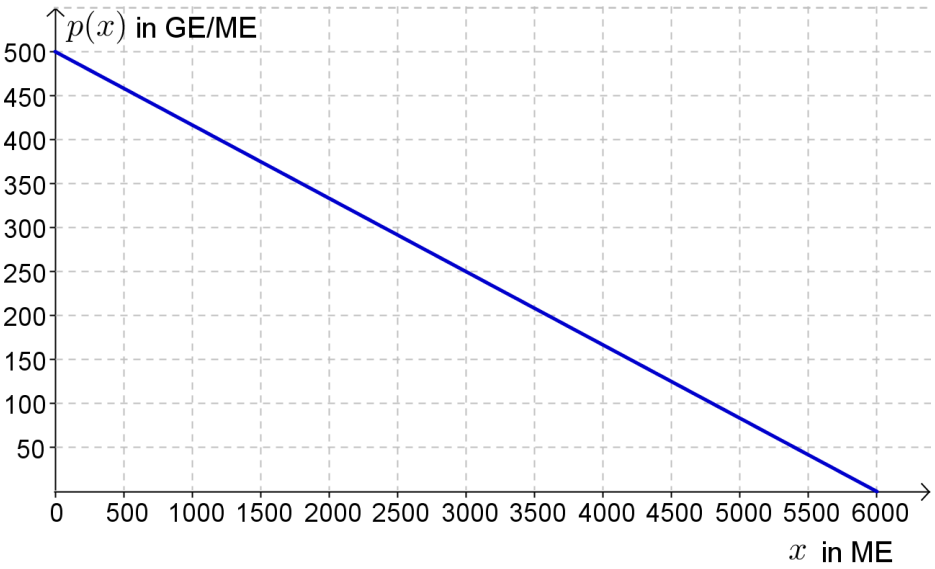
Aufgabennummer: B_148

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Die Produktion und der Verkauf einiger Produkte eines monopolistischen Betriebes werden untersucht.

a) Die lineare Preisfunktion der Nachfrage p für das Produkt A kann annähernd durch die nachstehende Grafik dargestellt werden.

x … nachgefragte Menge in Mengeneinheiten (ME)
$p(x)$ … Preis in Geldeinheiten pro Mengeneinheit (GE/ME) bei x ME



– Stellen Sie die Gleichung der in der obigen Grafik dargestellten Preisfunktion der Nachfrage auf.
– Interpretieren Sie die Nullstelle des dargestellten Funktionsgraphen im Sachzusammenhang.
– Argumentieren Sie, wie sich bei einem bestimmten Preis p_0 eine Preissenkung um 1 GE/ME auf den Absatz auswirkt.

b) Für das Produkt B gilt folgender Zusammenhang zwischen der nachgefragten Menge x und dem Erlös E:

$E(x) = -15 \cdot x^2 + 3\,000 \cdot x$

x … nachgefragte Menge in Mengeneinheiten (ME)
$E(x)$ … Erlös in Geldeinheiten (GE) bei einer nachgefragten Menge von x ME

– Berechnen Sie den maximalen Erlös mithilfe der Differenzialrechnung.
– Stellen Sie die Erlösfunktion grafisch für eine passende Definitionsmenge dar.
– Lesen Sie die mittlere Änderungsrate des Erlöses im Intervall [0 ME; 80 ME] ab.
– Erklären Sie die Bedeutung der mittleren Änderungsrate des Erlöses im Sachzusammenhang.

c) In der nachstehenden Tabelle sind für das Produkt *C* die Gesamtkosten *K* in Geldeinheiten (GE) in Abhängigkeit von der Produktionsmenge *x* in Mengeneinheiten (ME) angegeben:

x	0	6	15	23,5	30,3	40	60
$K(x)$	35	110	198	283	359	498	1 091

– Zeichnen Sie einen Streckenzug durch die gegebenen Punkte $(x|K(x))$ in ein Koordinatensystem.
– Beurteilen Sie, ob durch den Streckenzug $(x|K(x))$ eine zu einer Kostenfunktion passende Monotonie erkennbar ist.
– Bestimmen Sie mithilfe der Regressionsrechnung eine kubische Kostenfunktion für dieses Produkt.
– Berechnen Sie die Kostenkehre dieser kubischen Funktion.

d) Der Gewinn für das Produkt *D* kann annähernd durch die folgende Funktion *G* beschrieben werden:

$G(x) = -0{,}14 \cdot x^3 + 1{,}21 \cdot x^2 + 6{,}63 \cdot x - 16{,}98$

x … verkaufte Menge in Mengeneinheiten (ME)
$G(x)$ … erzielter Gewinn in Geldeinheiten (GE) bei x ME

– Kreuzen Sie die zutreffende Aussage zur Gewinnfunktion an. *[1 aus 5]*

Bei einer Verkaufsmenge von 2 ME wird ein Verlust erzielt.	☐
Die gewinnmaximierende Menge liegt bei einer Verkaufsmenge von 2 ME.	☐
Der Break-even-Point liegt bei einer Verkaufsmenge von 2 ME.	☐
Bei einer Verkaufsmenge von 2 ME wird die obere Gewinngrenze erreicht.	☐
Das Betriebsoptimum liegt bei einer Verkaufsmenge von 2 ME.	☐

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

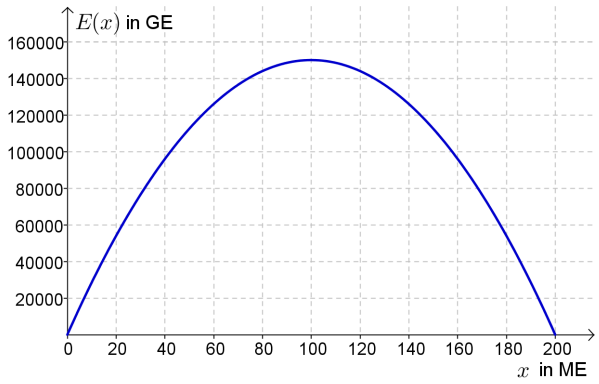
Möglicher Lösungsweg

a) $p(x) = 500 - \frac{x}{12}$

Die Nullstelle befindet sich bei $x = 6\,000$ ME. Es handelt sich um die Sättigungsmenge für dieses Produkt.

Wenn man den Preis p_0 um $\Delta p = 1$ senkt, dann bedeutet dies eine Zunahme des Absatzes um 12 Mengeneinheiten.
Begründung: $x = 6\,000 - 12\,p \;\Rightarrow\; \Delta x = -12 \cdot \Delta p$

b) $E'(x) = 0$: $-30 \cdot x + 3\,000 = 0$
$x = 100$ ME
Der maximale Erlös $E(100)$ beträgt 150 000 GE.

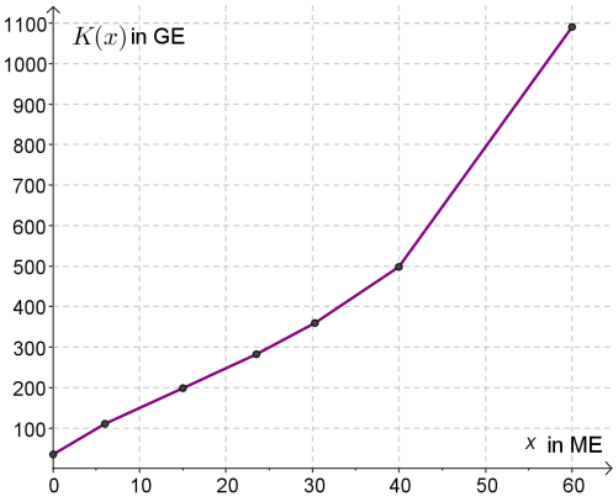


Der Graph darf keine negativen Funktionswerte aufweisen.

Die mittlere Änderungsrate zwischen 0 ME und 80 ME beträgt rund 1 800 GE/ME.

Die mittlere Änderungsrate gibt an, wie groß im Mittel pro zusätzliche ME ein Zuwachs des Erlöses im vorgegebenen Intervall ist.

c) Streckenzug:



Da alle Teilstrecken einen positiven Anstieg aufweisen, könnten die gegebenen Wertepaare Elemente einer streng monoton steigenden Funktion sein.
Dies ist u. a. eine Bedingung für ein passendes Modell einer Kostenfunktion.

Regressionsfunktion mittels Technologieeinsatz:
$K(x) = 0{,}0061 \cdot x^3 - 0{,}3152 \cdot x^2 + 14{,}5417 \cdot x + 33{,}7192$

Kostenkehre aus $K''(x) = 0$: $0{,}0366 \cdot x - 0{,}6304 = 0$
Die Kostenkehre liegt bei $x_K \approx 17{,}21$ ME.

d)

Der Break-even-Point liegt bei einer Verkaufsmenge von 2 ME.	☒

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 4 Analysis
c) 4 Analysis
d) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) —
c) —
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren, D Argumentieren und Kommunizieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren, D Argumentieren und Kommunizieren
c) A Modellieren und Transferieren, D Argumentieren und Kommunizieren
d) —

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel
d) mittel

Punkteanzahl:

a) 3
b) 4
c) 4
d) 1

Thema: Wirtschaft

Quelle: Itemwriterkurs OÖ3 2014

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Kostenanalyse

Aufgabennummer: B_141

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein Betrieb stellt im Wesentlichen 2 verschiedene Produkte her. Um gewinnbringend zu produzieren, wurden jeweils die bei der Produktion anfallenden Kosten in Abhängigkeit von der produzierten Menge untersucht. Dabei werden folgende Bezeichnungen verwendet:

x … erzeugte Menge in Mengeneinheiten (ME)
$K(x)$ … Gesamtkosten bei x erzeugten ME in Geldeinheiten (GE)

a) In der nachstehenden Tabelle sind die Gesamtkosten des 1. Produkts bei unterschiedlichen Produktionsmengen aufgelistet.

x	0	10	20	30	40	50	60
$K(x)$	49	58	74	100	132	173	222

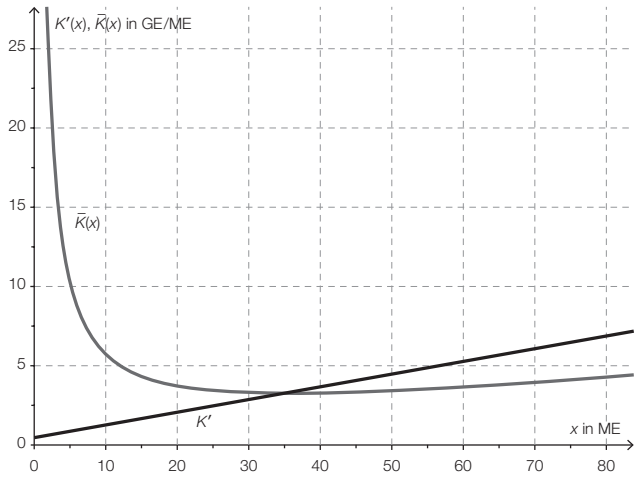
– Stellen Sie die Wertepaare in einem Koordinatensystem dar.

Die Abhängigkeit der Kosten von der Produktionsmenge soll durch eine Polynomfunktion beschrieben werden.

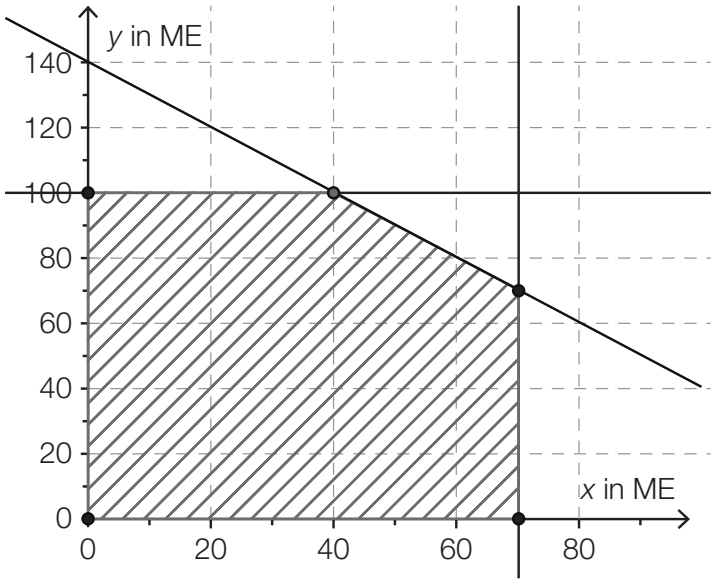
– Ermitteln Sie die Gleichung der quadratischen Kostenfunktion mittels Regression.

b) Die nebenstehende Grafik stellt die Stückkosten $\overline{K}$ und die Grenzkosten K' im Herstellungsprozess des 2. Produkts in Abhängigkeit von der Produktionsmenge dar.

– Interpretieren Sie die Bedeutung der x-Koordinate des Schnittpunkts dieser Funktionsgraphen im Sachzusammenhang.
– Lesen Sie die langfristige Preisuntergrenze aus der Grafik ab.
– Dokumentieren Sie in Worten, wie man das Betriebsoptimum und die langfristige Preisuntergrenze mithilfe der Differenzialrechnung berechnen kann.



c) Der Betrieb kann täglich die in der nachstehenden Grafik im schraffierten Lösungsbereich angezeigten Mengen *x* des 1. Produkts und *y* des 2. Produkts herstellen. Die Mengen sind in Mengeneinheiten (ME) angegeben.
Die Herstellungskosten für 1 ME des 1. Produkts betragen 21 GE/ME, jene für das 2. Produkt 15 GE/ME.
Die Verkaufspreise betragen für 1 ME des 1. Produkts 51 GE/ME und für das 2. Produkt 39 GE/ME.
Die Produktionsmengen der beiden Produkte sollen so gewählt werden, dass insgesamt ein möglichst hoher Gewinn erwirtschaftet wird.



– Stellen Sie die zugehörige Zielfunktion zur Berechnung des maximalen Gewinns auf.
– Zeichnen Sie die zur Zielfunktion passende Gerade durch den Koordinatenursprung in die obige Grafik ein.
– Ermitteln Sie, wie viel von jedem Produkt gefertigt werden soll, damit der Gewinn maximal ist.

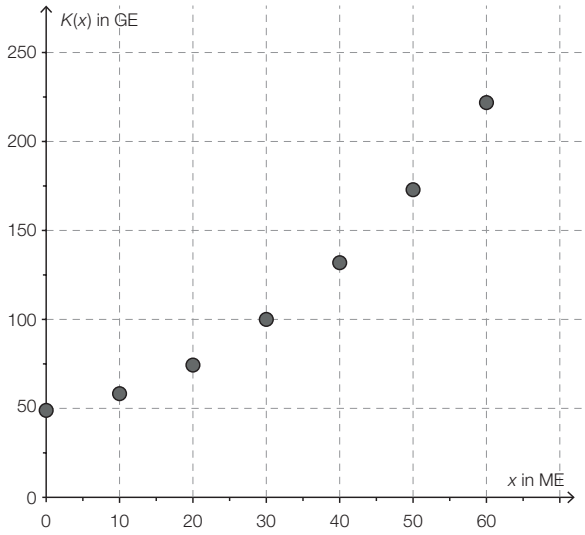
Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $K(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

Mittels Technologieeinsatz kann man die Regressionsfunktion berechnen:

$K(x) = 0{,}04x^2 + 0{,}475x + 49{,}02$



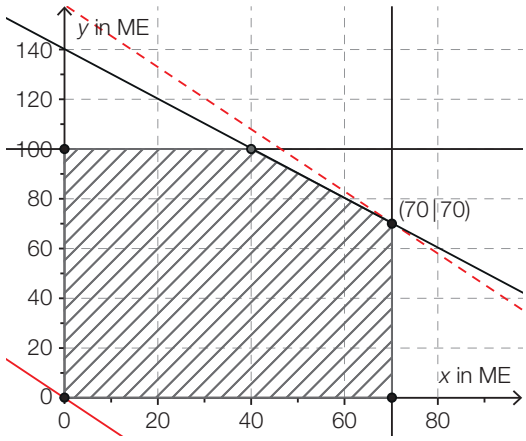
b) Die x-Koordinate des Schnittpunkts der beiden Kurven ist die Minimumstelle der Stückkostenfunktion, also das Betriebsoptimum.
Die langfristige Preisuntergrenze liegt bei etwa 3,5 GE/ME (Toleranzintervall: [3; 4]).
Mithilfe der Differenzialrechnung löst man die Gleichung $\overline{K}'(x) = 0$.
Die Lösung der Gleichung liefert das Betriebsoptimum x_O und das Einsetzen von x_O in $\overline{K}(x)$ die Höhe der langfristigen Preisuntergrenze.

c) x … Menge von Produkt 1 in ME
y … Menge von Produkt 2 in ME

$z(x, y) = 30 \cdot x + 24 \cdot y$

Gerade durch den Koordinatenursprung:
$y = -\frac{30x}{24}$

Es sollen täglich 70 ME des 1. Produkts und 70 ME des 2. Produkts gefertigt werden.



Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 4 Analysis
c) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) –
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) –
b) –
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) leicht

Punkteanzahl:

a) 2
b) 3
c) 3

Thema: Wirtschaft

Quellen: –

Elektronikhersteller

Aufgabennummer: B_140

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein Elektronikhersteller erzeugt Spielkonsolen und Gamecontroller.

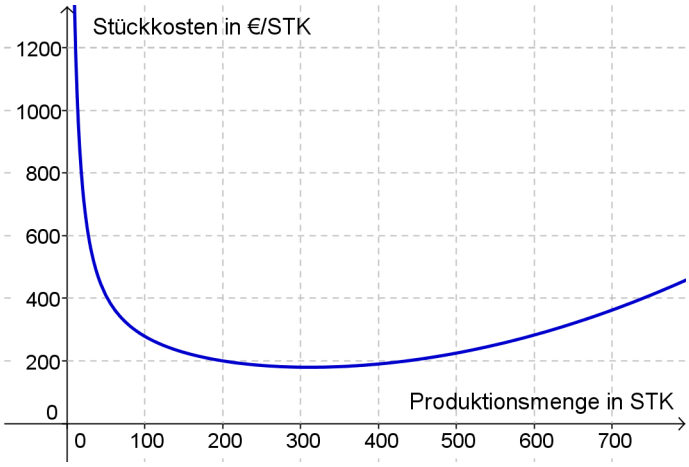
a) Die folgende Tabelle gibt die Grenzkosten $K'(x)$ in Abhängigkeit von der Produktionsmenge x von Spielkonsolen an:

x	100	150	200	250	300	350	400
$K'(x)$	125	105	102	114	141	184	242

x … Produktionsmenge in Stück (STK)
$K'(x)$ … Grenzkosten in Euro pro Stück (€/STK)

– Erstellen Sie mithilfe einer Regression eine passende quadratische Grenzkostenfunktion.
– Erklären Sie, wie man hier die Kostenkehre berechnet.
– Erklären Sie die Bedeutung der Kostenkehre.
– Berechnen Sie die Gleichung der Gesamtkostenfunktion bei Fixkosten von € 11.200.

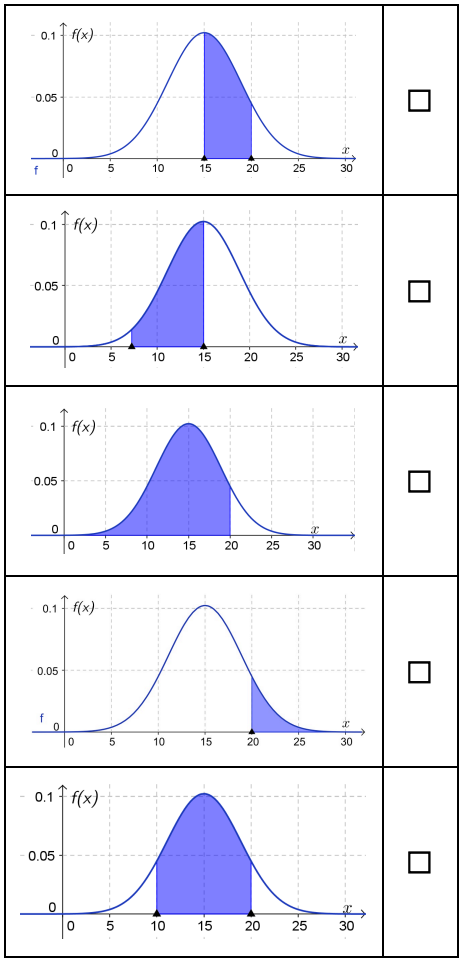
b) Die nachstehende Grafik zeigt die Stückkosten in Abhängigkeit von der erzeugten Menge an Spielkonsolen.



– Lesen Sie die langfristige Preisuntergrenze ab.
– Erklären Sie, welcher Erlös zu erwarten ist, wenn man die dem Betriebsoptimum entsprechende Menge an Spielkonsolen produziert und alle zum Preis der langfristigen Preisuntergrenze verkauft.
– Lesen Sie aus der Grafik die Stückkosten bei der Herstellung von 450 Konsolen ab.
– Ermitteln Sie den Marktpreis, mit dem eine Konsole verkauft werden muss, wenn 450 Konsolen hergestellt und mit einen Gewinn von € 20.000 verkauft werden sollen.

c) Die umfangreiche Produktion der Gamecontroller weist eine annähernd normalverteilte Menge von defekten Geräten auf. Pro Tag beträgt der Erwartungswert in der gesamten Großproduktion 15 Mengeneinheiten (ME) defekter Controller mit einer Standardabweichung von 3, 9 ME. Der Geschäftsführer möchte wissen, mit welcher Wahrscheinlichkeit höchstens 20 ME einer Tagesproduktion defekt sind.

– Kreuzen Sie diejenige Skizze an, deren farbig unterlegter Bereich diesen Sachverhalt darstellt. *[1 aus 5]*
– Berechnen Sie diese Wahrscheinlichkeit.



☐
☐
☐
☐
☐

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Werte eingeben und mittels Technologieeinsatz die quadratische Regression bestimmen:
$K'(x) = 0{,}0031x^2 - 1{,}1562x + 209{,}36$

Zur Berechnung der Kostenkehre leitet man die Grenzkostenfunktion nochmals ab und setzt die so erhaltene Gleichung null.
Löst man die Gleichung auf, erhält man die Kostenkehre.

Die Kostenkehre ist diejenige Stelle, bei der der degressive Kostenverlauf in den progressiven Kostenverlauf wechselt. (Der Betrieb hat bei dieser Produktionsmenge minimale Grenzkosten.)

$K(x)$ erhält man durch unbestimmtes Integrieren. Die Fixkosten ergeben die Integrationskonstante:
$K(x) = 0{,}00103x^3 - 0{,}578x^2 + 209{,}36\ x + 11\,200$

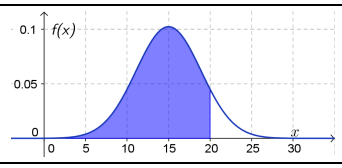
b) Die langfristige Preisuntergrenze beträgt ca. € 180/Stück.
Ablesetoleranz: Optimum: [290; 330], Preisuntergrenze [170; 190]

Verkauft man die Konsolen um diesen Stückpreis, so entspricht der Erlös genau den Herstellungskosten, der Betrieb arbeitet kostendeckend.

Ablesen der Stückkosten bei 450 ME: ca. € 200/Stück
Ablesetoleranz: ± € 10/Stück

Gewinn: € 20.000
$20\,000 = (p - 200) \cdot 450 \Rightarrow p = €\ 244{,}44/\text{Stück}$

c)

[...]	
[...]	
	☒
[...]	
[...]	

[Die Begründung ist nicht verlangt, Folgendes sollte beim Ankreuzen aber bewusst sein:
Die Gauß'sche Glockenkurve hat ihr Maximum beim Erwartungswert der Normalverteilung (15 ME).
Die Fläche unterhalb der Kurve in $[a; b]$ entspricht der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\{a \le X \le b\}$. In der Fragestellung wird nach $P(X \le 20)$ gesucht, die entsprechende Fläche ist in Grafik 3 dargestellt.]

$P(X \le 20) = 0{,}900... \approx 90\ \%$

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 4 Analysis
c) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) —

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) schwer
c) leicht

Punkteanzahl:

a) 4
b) 4
c) 2

Thema: Wirtschaft

Quellen: —

Jahresumsatz

Aufgabennummer: B_135

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

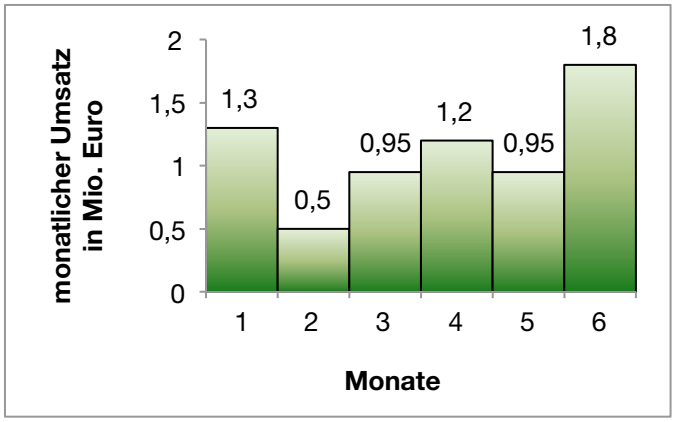
a) Ein Unternehmen erzielt in den Jahren nach seiner Gründung Jahresumsätze, die in der nachstehenden Tabelle aufgelistet sind.

t … Jahre (a) nach der Gründung
$E(t)$ … Erlös t Jahre nach der Gründung in Millionen Euro (Mio. €)

t in a	1	5	9	13	17	21
$E(t)$ in Mio. €	14	12,5	13,9	14,7	16	18,2

– Stellen Sie die Wertepaare der Tabelle in einem Koordinatensystem dar.
– Ermitteln Sie mithilfe der Regression eine Polynomfunktion 2. Grades durch die gegebene Punktewolke.

b) Die nachstehende Grafik zeigt die monatliche Umsatzverteilung im 1. Halbjahr des 5. Jahres.



– Berechnen Sie das arithmetische Mittel und die Standardabweichung der monatlichen Umsätze.

In einem Geschäftsbericht werden nur das arithmetische Mittel und die Standardabweichung veröffentlicht.

– Erklären Sie, welche Informationen zur Umsatzentwicklung dadurch verloren gehen.

c) Der Jahresumsatz für ein bestimmtes Produkt dieses Unternehmens beträgt 2,4 Millionen Euro bei 20 000 verkauften Stück. Die Sättigungsmenge liegt bei 30 000 Stück. Die Preisfunktion der Nachfrage p ist linear:

$p(x) = k \cdot x + d$

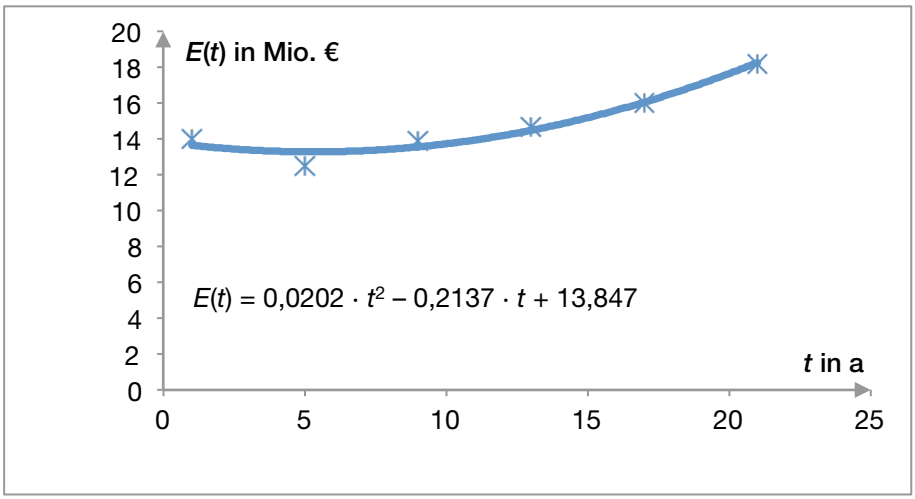
x … Verkaufsmenge in Stück
$p(x)$ … Preis pro Stück bei einer Verkaufsmenge von x Stück

– Stellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten k und d auf.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



Regressionsfunktion:
$E(t) = 0{,}0202 \cdot t^2 - 0{,}2137 \cdot t + 13{,}8471$

b) Im Mittel nimmt das Unternehmen im diesem Halbjahr monatlich jeweils rund € 1,1167 Mio. ein. Die Standardabweichung beträgt rund € 0,3965 Mio.

Das arithmetische Mittel lässt keinen Rückschluss auf die Entwicklung des Umsatzes während des Halbjahres zu. Die tatsächlichen Schwankungen des Umsatzes von Monat zu Monat werden durch die Angabe der Standardabweichung nicht erfasst.

c) Preis pro Stück bei einer Verkaufsmenge von 20 000 Stück: $\frac{2\,400\,000\ €}{20\,000\ \text{Stk.}} = 120\ €/\text{Stk.}$

$p(20\,000) = 120$: $20\,000 \cdot k + d = 120$
$p(30\,000) = 0$: $30\,000 \cdot k + d = 0$

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 5 Stochastik
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) –
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) –

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) leicht
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2
c) 2

Thema: Wirtschaft

Quellen: –

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Grenzkosten und Stückkosten

Aufgabennummer: B_130

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Als Grenzkostenfunktion K' bezeichnet man die 1. Ableitung der Gesamtkostenfunktion K.
Bei der Herstellung eines bestimmten Produkts während zweier aufeinanderfolgender Herstellungsperioden können die Grenzkosten durch eine lineare Grenzkostenfunktion K_1' (Abb. 1) und eine quadratische Grenzkostenfunktion K_2' (Abb. 2) beschrieben werden.

x … Produktionsmenge in Stück (Stk.)
$K_1'(x)$, $K_2'(x)$ … Grenzkosten in Euro pro Stück (€/Stk.) bei x erzeugten Stk.

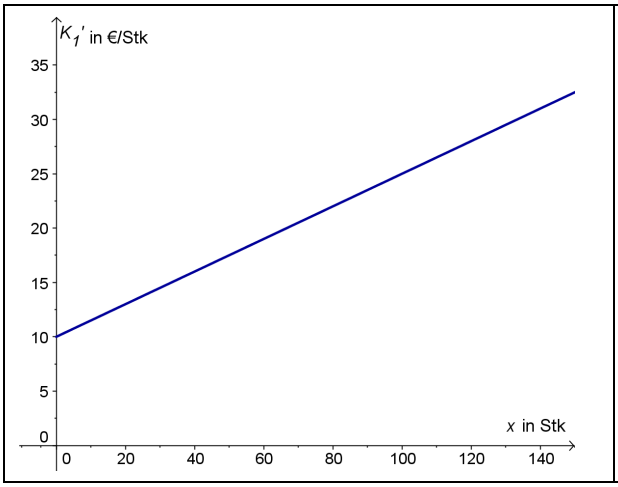


Abb. 1

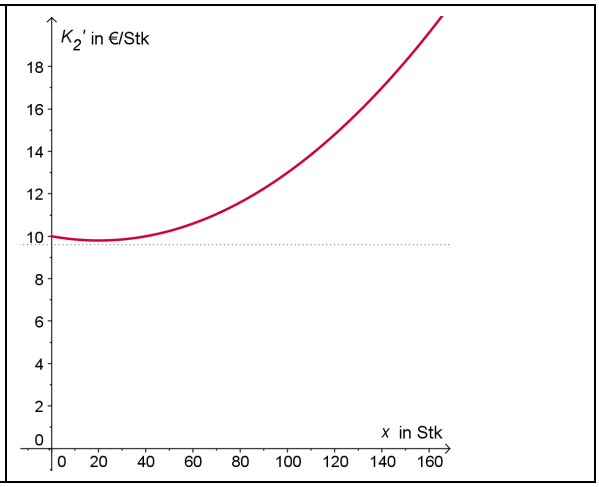


Abb. 2

a) – Ermitteln Sie die Gleichung der Grenzkostenfunktion K_1' aus dem Graphen der Abb. 1.
– Berechnen Sie mithilfe der Grenzkostenfunktion K_1' die Gesamtkostenfunktion K_1, wenn die Fixkosten € 260 betragen.

b) Die Kostenkehre ist die Herstellungsmenge, bei der der Graph der Kostenfunktion ihren Wendepunkt hat.

– Erklären Sie, wie Sie aus dem Graphen einer Grenzkostenfunktion die Kostenkehre ablesen können.
– Begründen Sie, warum der Verlauf von einer der beiden Grenzkostenfunktionen (Abb. 1 oder Abb. 2) auf eine Kostenkehre schließen lässt und dies für die andere nicht gilt.

c) Die Kostenfunktion für die Herstellung eines anderen Produkts lautet:

$$K(x) = 0{,}0006x^3 + 0{,}02x^2 + 10x + 250$$

x … Produktionsmenge in Stück (Stk.)
$K(x)$ … Gesamtkosten in Euro (€) bei Erzeugung von x Stk.

– Ermitteln Sie die Gleichungen der Grenzkostenfunktion K' und der Stückkostenfunktion $\overline{K} = \frac{K}{x}$.
– Zeichnen Sie im Definitionsbereich [0;250] die Graphen der beiden Funktionen K' und $\overline{K}$ in ein Koordinatensystem.
– Interpretieren Sie den Schnittpunkt der beiden Kurven im Zusammenhang mit dem Betriebsoptimum und den minimalen Stückkosten.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $k = \frac{\Delta K'}{\Delta x} = \frac{3}{20} = 0{,}15;\ d = 10$

Falls die Ablesung falsch war, so ist der Folgefehler nicht zu berücksichtigen.
Eine ungenaue Ablesung ist zu tolerieren.

$K_1'(x) = 0{,}15x + 10$

$K_1(x) = \int (0{,}15x + 10)\mathrm{d}x$

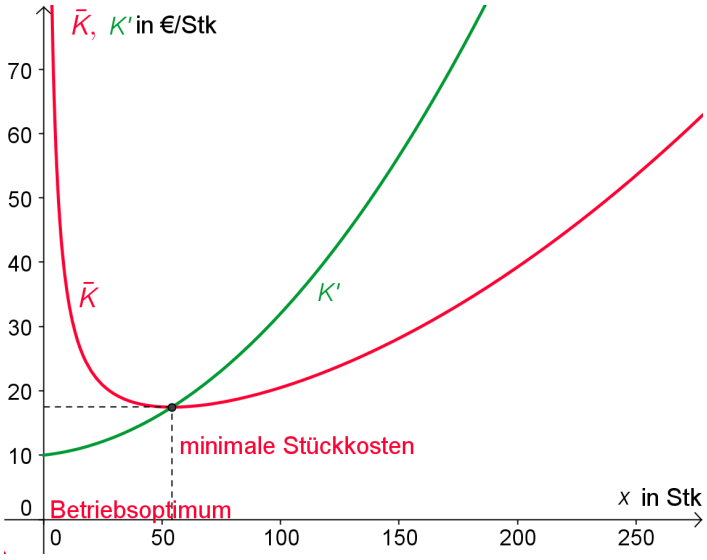
$K_1(x) = 0{,}075x^2 + 10x + 260$

b) Die Grenzkostenfunktion bildet die 1. Ableitung der Kostenfunktion. An der Kostenkehre hätte die 2. Ableitung den Wert null. Man erkennt sie daher an einem Extremwert der Grenzkostenfunktion.

Abb. 1 stellt eine lineare Grenzkostenfunktion dar. Sie hat keinen Extremwert, daher liegt auch kein Wendepunkt vor.

Abb. 2 stellt eine quadratische Funktion dar, bei der der x-Wert des Minimums der Kostenkehre entspricht.

c) $K'(x) = 0{,}0018\,x^2 + 0{,}04x + 10$
$\overline{K}(x) = 0{,}0006x^2 + 0{,}02x + 10 + \frac{250}{x}$



Die x-Koordinate des Schnittpunkts der beiden Kurven ergibt das Betriebsoptimum und dessen y-Koordinate ergibt die minimalen Stückkosten.

Die Grenzkosten im Betriebsoptimum entsprechen den minimalen Stückkosten.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 4 Analysis
c) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) —
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren; B Operieren und Technologieeinsatz
b) —
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 3
b) 3
c) 4

Thema: Wirtschaft

Quellen: —

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Digitalkameras

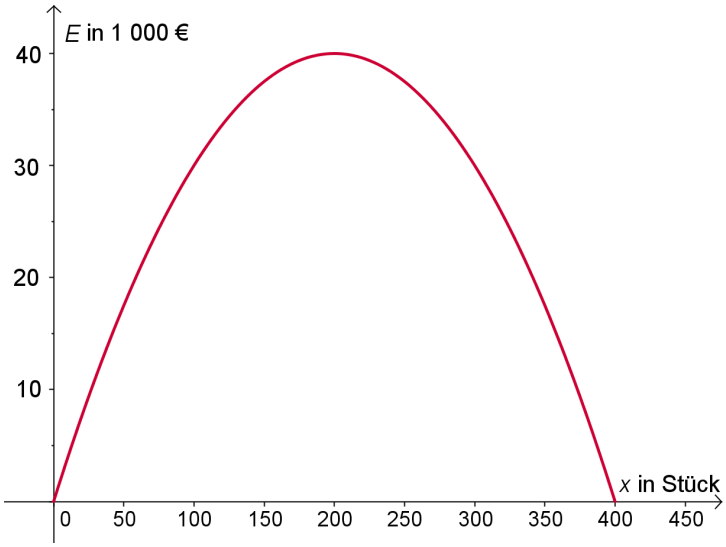
Aufgabennummer: B_126

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Eine spezielle Ausgabe von Digitalkameras wird verkauft.

a) – Erklären Sie, wie die langfristige Preisuntergrenze aus den Produktionskosten *K,* die bei der Erzeugung der Kameras anfallen, ermittelt werden kann.
– Argumentieren Sie, welche Bedeutung die langfristige Preisuntergrenze für den Betrieb hat.

b) Die Erlösfunktion *E* wird durch die nachstehende Grafik dargestellt.



– Lesen Sie aus dem Graphen die Erlösgrenzen, die Verkaufsmenge für das Erlösmaximum sowie das Erlösmaximum ab.
– Begründen Sie, warum der Erlös trotz steigendem Absatz *x* nach Erreichen eines Maximums sinkt und sogar null werden kann.

c) Der Gewinn *G* kann in Abhängigkeit von der Anzahl verkaufter Kameras *x* näherungsweise durch die folgende Funktion beschrieben werden:

$$G(x) = -x^2 + 370x - 2\,896$$

x … Anzahl der verkauften Kameras in Stück
G(*x*) … Gewinn bei *x* Stück in Euro (€)

– Berechnen Sie die Gewinngrenzen (Break-even-Point und die obere Gewinngrenze) sowie das Gewinnmaximum.
– Interpretieren Sie die auftretenden Verlustzonen.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Aus den gesamten Kosten K kann man die Stückkosten $\overline{K}$ ermitteln, die bei der Erzeugung einer einzelnen Kamera anfallen, indem man durch die produzierte Stückzahl x dividiert.

Die langfristige Preisuntergrenze entspricht den minimalen Stückkosten, die man mithilfe der Differenzialrechnung bestimmen kann.
Aus der Gleichung $\overline{K}(x)' = 0$ berechnet man die Menge x_{opt}, bei der die Stückkosten minimal werden.
Diese Menge setzt man in den Term für die Stückkosten ein und erhält so die langfristige Preisuntergrenze.

Produziert der Betrieb die Menge x_{opt} und kann die gesamte Produktion zu einem Preis verkauft werden, der der langfristigen Preisuntergrenze entspricht, dann arbeitet der Betrieb kostendeckend. Er macht weder einen Gewinn noch einen Verlust.

b) Die Erlösgrenzen sind die Nullstellen der Funktion:
$x_1 = 0$ und $x_2 = 400$ Stück.
Das Erlösmaximum liegt bei 200 Stück und beträgt ungefähr € 40.000.

Verkauft man mehr als 200 Stück, so wird der Erlös laufend geringer. Ein Grund dafür kann der geringer werdende Verkaufspreis sein.
Der Erlös wird bei Erreichen der sogenannten Marktsättigung null. Das ist bei 400 Stück der Fall. Der Preis wird null.

Ableseungenauigkeiten werden toleriert.

c) Gewinngrenzen: $G(x) = 0$
$-x^2 + 370x - 2\,896 = 0$

Technologieeinsatz:
$x_1 = 8$ Stück und $x_2 = 362$ Stück
Bei $x < 8$ Stück ist die Verkaufsmenge zu gering, um die Kosten zu decken, bei $x > 362$ Stück wird die Verkaufsmenge zu groß, die Herstellungskosten sind zu hoch oder der Verkaufspreis zu gering. In beiden Fällen wird ein Verlust zu erwarten sein.

Maximaler Gewinn:

$G'(x) = 0$
$-2x + 370 = 0$
$x = 185$
$G(185) = 31\,329$

Maximalen Gewinn erzielt man bei einem Verkauf von 185 Kameras.
Der maximale Gewinn beträgt € 31.329.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) 4 Analysis
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) –
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 3
c) 4

Thema: Wirtschaft

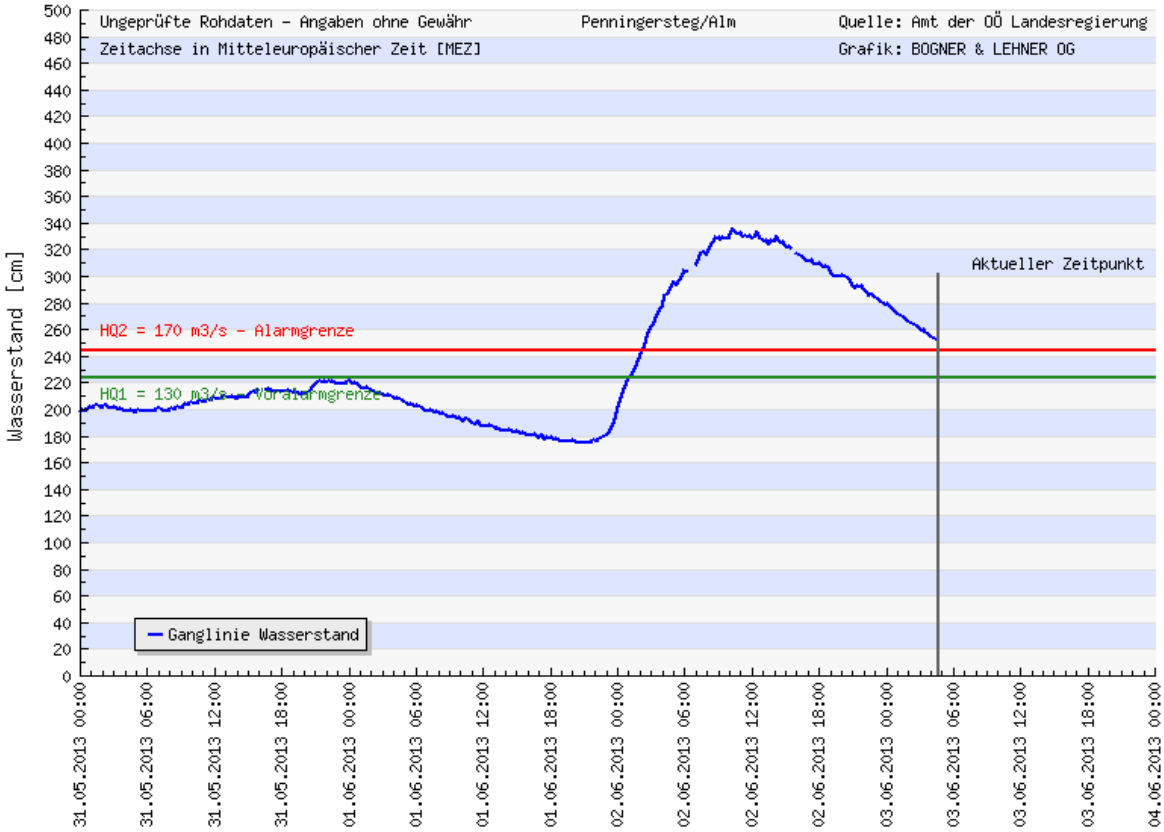
Quellen: –

Hochwasser im Almtal

Aufgabennummer: B_109

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Während des Hochwassers im Mai–Juni 2013 wurden an der Messstelle Penningersteg des Almflusses folgende Wasserstände grafisch festgehalten:



a) – Lesen Sie aus der Grafik die Wasserstände vom 02.06.2013 um 18:00 Uhr und vom 03.06.2013 um 0:00 Uhr ab.
– Berechnen Sie mithilfe der beiden abgelesenen Werte, zu welchem Zeitpunkt voraussichtlich mit einer Entwarnung (Wasserstand = 245 cm) gerechnet werden kann, wenn der Wasserstand gleichmäßig sinkt.

b) Bei einem Wasserstand des Almflusses von 225 cm beträgt der Durchfluss 130 m^3/s. Wenn sich der Wasserstand um 1 cm erhöht, so erhöht sich der Durchfluss ungefähr um 2 m^3/s.

– Stellen Sie eine Polynomfunktion 3. Grades auf, die näherungsweise den Durchfluss in Abhängigkeit von der Zeit für den 02.06.2013 angibt. Verwenden Sie dazu die aus der Grafik abgelesenen Daten vom 02.06.2013 für die Zeitpunkte 1:00 Uhr, 8:00 Uhr, 16:00 Uhr und 24:00 Uhr.
– Dokumentieren Sie in Worten, wie man mithilfe der ermittelten Polynomfunktion das Gesamtvolumen des durch den Penningersteg transportierten Wassers in m^3 an diesem Tag berechnen kann.

c) Der Almfluss hat ein Einzugsgebiet von 436,8 km^2. Es wird angenommen, dass etwa 70 % des gesamten Niederschlags durch den Almfluss abtransportiert werden. Nehmen Sie an, dass im gesamten Einzugsgebiet eine Niederschlagsmenge von x mm fällt.

– Stellen Sie eine Formel auf, die abhängig von der Niederschlagsmenge x in mm die Gesamtmenge des abtransportierten Wassers V in m^3 für dieses Gebiet angibt.

d) Die Tageshöchstwerte der Messstelle wurden über ein Jahr hinweg aufgezeichnet und statistisch ausgewertet.

– Kreuzen Sie die richtige Aussage an. *[1 aus 5]*

Innerhalb des Interquartilsabstands um den Median in einem Boxplot befinden sich 75 % aller aufgezeichneten Daten.	☐
Am Interquartilsabstand des Boxplots lässt sich die Standardabweichung der Daten vom Median ablesen.	☐
Eine Zusammenfassung der Daten durch die Kennzahlen *Median* und *Standardabweichung* liefert Informationen über das Auftreten extremer Wasserstände.	☐
Die Darstellung der Daten durch einen Boxplot liefert Informationen über den Median der Wasserstände im beobachteten Zeitraum.	☐
Die Darstellung der Daten durch einen Boxplot liefert Informationen über das Auftreten der Häufigkeit eines Messwerts.	☐

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Ablesen der Wasserstände:
02.06.2013, 18:00 Uhr: 310 cm
03.06.2013, 0:00 Uhr: 280 cm

In diesem Fall ist ein lineares Modell geeignet. Pro Stunde ist also mit einer Verminderung des Wasserstandes um 5 cm zu rechnen.
$245 = 280 - 5 \cdot t$
Mit einem Erreichen der Alarmgrenze (= 245 cm) ist also um 7:00 Uhr des 03.06.2013 zu rechnen.

b) Aus der Grafik erhält man folgende Daten:

Uhrzeit	Wasserstand	Durchfluss [m^3/s]
1:00	225	130
8:00	320	320
16:00	310	300
24:00	280	240

Mittels Technologieeinsatz erhält man:
$f(x) = 0{,}07 \cdot x^3 - 3{,}78 \cdot x^2 + 55{,}92 \cdot x + 77{,}79$

Ableseungenauigkeiten werden toleriert, wodurch sich leicht abweichende Funktionsgleichungen ergeben können.

Das Gesamtvolumen des Wassers lässt sich durch Integration von $f(x)$ über das Zeitintervall [0 h; 24 h] berechnen. Da die Daten des Durchflusses in Kubikmetern pro Sekunde angegeben sind, muss das Ergebnis noch mit dem Faktor 3 600 multipliziert werden.

$V = 3\,600 \cdot \int_0^{24} f(x)\mathrm{d}x$

c) *Niederschlag* $= x \cdot 10^{-3}$ m
Einzugsgebiet $= 436{,}8 \cdot (10^3\ \mathrm{m})^2$
$V = 0{,}7 \cdot x \cdot 10^{-3} \cdot 436{,}8 \cdot 10^6\ \mathrm{m}^3$
$V = 0{,}7 \cdot x \cdot 436{,}8 \cdot 10^3\ \mathrm{m}^3$
$V = 305\,760 \cdot x\ \mathrm{m}^3$

d)

[...]	
[...]	
[...]	
Die Darstellung der Daten durch einen Boxplot liefert Informationen über den Median der Wasserstände im beobachteten Zeitraum.	☒
[...]	

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 2 Algebra und Geometrie
d) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) 4 Analysis
c) 1 Zahlen und Maße
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) A Modellieren und Transferieren
d) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz, A Modellieren und Transferieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) —

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) schwer
c) leicht
d) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 4
c) 2
d) 1

Thema: Umwelt

Quelle: Amt der oberösterreichischen Landesregierung

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Ammonium im Fluss

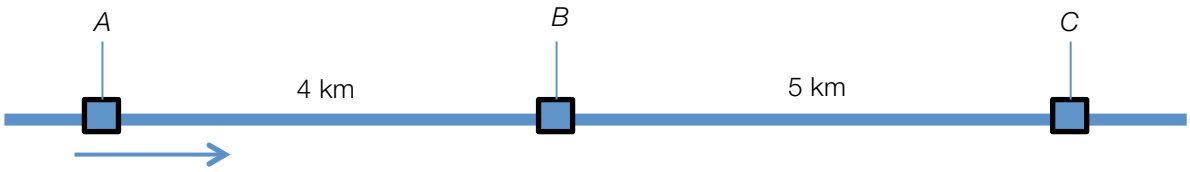
Aufgabennummer: B_105

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Die Selbstreinigungskraft eines fließenden Gewässers hängt von dessen Sauerstoffgehalt ab. Bleibt der Sauerstoffgehalt konstant, erfolgt der Abbau von Ammonium exponentiell.

a) Bei konstanter Fließgeschwindigkeit baut ein bestimmter Fluss nach jeweils 2 Kilometern (km) 50 % des Ammoniums ab. Am Punkt *A* beträgt der Ammoniumgehalt 1 Milligramm pro Liter (mg/L). Durch Einleitung von Abwasser erhöht sich der Ammoniumgehalt am Punkt *B* um 0,4 mg/L und am Punkt *C* um 0,5 mg/L.

Die nachstehende Grafik zeigt schematisch den Verlauf dieses Flusses.



– Übertragen Sie den Ammoniumgehalt in Milligramm pro Liter (mg/L) während der ersten 6 Kilometer in ein Koordinatensystem. Wählen Sie Punkt *A* als Startpunkt.

Bei konstanter Fließgeschwindigkeit lässt sich der Abbau von Ammonium durch folgende Funktion *N* beschreiben:

$$N(s) = N_0 \cdot e^{-0{,}3466 \cdot s}$$

s … Fließstrecke in km
$N(s)$ … Ammoniumgehalt nach der Fließstrecke *s* in mg/L
N_0 … Anfangsgehalt an Ammonium in mg/L

– Berechnen Sie, wie hoch der Ammoniumgehalt in mg/L unmittelbar nach dem Punkt *C* ist.

b) Durch den Einbau von Wehrstufen soll der Sauerstoffeintrag in den Fluss und damit dessen Selbstreinigungskraft erhöht werden. Der Fluss sollte danach imstande sein, schon nach 1 km die Hälfte des eingetragenen Ammoniums abzubauen.

– Stellen Sie eine Formel auf, die – abhängig von der Flussstrecke und dem Anfangsgehalt – den Ammoniumgehalt in mg/L beschreibt.

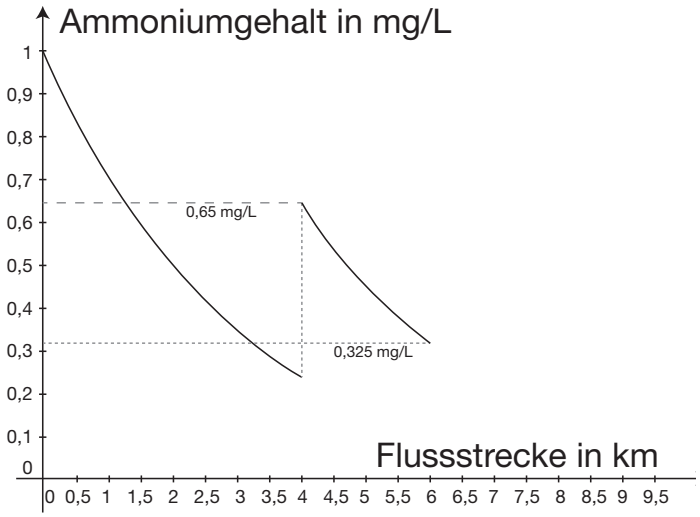
c) An einer bestimmten Stelle des Flusses beträgt der Durchfluss 1 390 m^3/s. Der mittlere Ammoniumgehalt beträgt 0,13 mg/L.

– Berechnen Sie die Menge an Ammonium (in Tonnen), die pro Tag an dieser Stelle durchfließt.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Die Skizze kann auch durch Kenntnis der *Halbwertsstrecke* konstruiert werden.



Eintrag von *A*

$$N_A(9) = 1 \cdot e^{-0{,}3466 \cdot 9} \approx 0{,}044 \text{ mg/L}$$

Eintrag von *B*

$$N_B(5) = 0{,}4 \cdot e^{-0{,}3466 \cdot 5} \approx 0{,}071 \text{ mg/L}$$

Eintrag von *C*

$$N_C = 0{,}5 \text{ mg/L}$$

Gesamtgehalt an Ammonium $\approx 0{,}044 + 0{,}071 + 0{,}5 = 0{,}615$ mg/L

Es sind auch andere Lösungswege möglich (z. B. Berechnung von Abschnitt zu Abschnitt).

b) $N(1) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot 1}$

$0{,}5 = e^{-\lambda}$

$\ln(0{,}5) = -\lambda$

$\lambda \approx 0{,}6931$

$N(s) = N_0 \cdot e^{-0{,}6931 \cdot s}$

c) $1390 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} = 1390 \cdot \frac{1000}{\frac{1}{86400}} \frac{\text{L}}{\text{Tag}} = 1{,}20096 \cdot 10^{11} \frac{\text{L}}{\text{Tag}}$

Transportiertes Ammonium:

$= 1{,}20096 \cdot 10^{11} \frac{\text{L}}{\text{Tag}} \cdot 0{,}13 \frac{\text{mg}}{\text{L}} = 1{,}561248 \cdot 10^{10} \frac{\text{mg}}{\text{Tag}} = 1{,}561248 \cdot 10^{10} \cdot 10^{-9} \frac{\text{t}}{\text{Tag}} \approx 15{,}61 \frac{\text{t}}{\text{Tag}}$

Pro Tag transportiert der Fluss an dieser Stelle rund 15,61 Tonnen Ammonium.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 1 Zahlen und Maße

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) A Modellieren und Transferieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) –

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) leicht
c) leicht

Punkteanzahl:

a) 4
b) 2
c) 2

Thema: Umwelt

Quellen: –

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

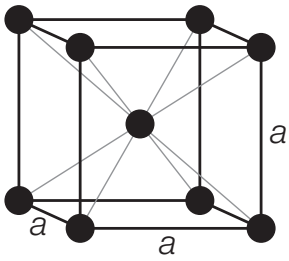
Wolfram

Aufgabennummer: B_104

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Wolfram ist ein wegen seines hohen Schmelzpunktes und seiner technisch interessanten Verbindungen zu einem unverzichtbaren Teil unseres Alltags geworden.

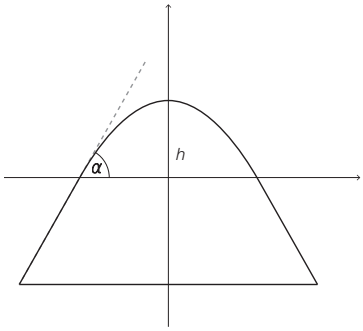
a) Das Metall Wolfram kristallisiert in einem kubisch raumzentrierten Kristallgitter. Die Atommasse beträgt 183,85 Units (u). Der Atomradius r beträgt 137 Pikometer (pm = 10^{-12} m).
Hinweis: Beachten Sie, dass die Atome an den Ecken der Elementarzelle nicht voll zu dieser Elementarzelle zählen.



– Berechnen Sie die Kantenlänge a der abgebildeten Elementarzelle. Gehen Sie davon aus, dass die Atome – anders als im abgebildeten Modell – einander entlang der Diagonale berühren.

– Berechnen Sie die Dichte von Wolfram in g/cm^3 auf 2 Kommastellen genau (1 u … 1,661 · 10^{-27} kg).

b) Bei einem Stanzwerkzeug besteht der vordere Teil, ein abgerundeter Kegelstumpf, aus Wolframcarbid (siehe nachstehende Skizze).



– Erstellen Sie anhand des Steigungswinkels α und der Höhe h des Drehparaboloids eine Funktionsgleichung für die erzeugende quadratische Parabel des Drehparaboloids. Legen Sie den Koordinatenursprung so wie in der Skizze abgebildet.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Die Raumdiagonale d des Würfels entspricht $4r$ und es gilt:

$$d = a \cdot \sqrt{3}$$

$$a = \frac{4r}{\sqrt{3}} = \frac{548 \cdot 10^{-12}}{\sqrt{3}}\ \text{m}$$

In einer Elementarzelle befinden sich umgerechnet 2 Wolframatome $(1 + 8 \cdot \frac{1}{8})$.
Die Masse m_E einer Elementarzelle beträgt $m_E = 367{,}68\ \text{u} = 6{,}107 \cdot 10^{-25}\ \text{kg} = 6{,}107 \cdot 10^{-22}\ \text{g}$.
Das Volumen V_E einer Elementarzelle in Kubikzentimetern beträgt:

$$V_E = \left(\frac{548 \cdot 10^{-10}}{\sqrt{3}}\ \text{cm}\right)^3 \approx 3{,}167 \cdot 10^{-23}\ \text{cm}^3$$

Dichte $\rho = \frac{m}{V} = \frac{m_E}{V_E} \approx 19{,}28\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$

b) Die allgemeine Gleichung für eine nach unten offene Parabel durch den Ursprung lautet $f(x) = -a \cdot x^2 + h$ für $a > 0$.

Die Nullstellen von f ergeben sich aus $-a \cdot x^2 + h = 0$ mit $x_1 = \sqrt{\frac{h}{a}}$ und $x_2 = -\sqrt{\frac{h}{a}}$.

Für die Steigung an der Stelle x_2 gilt: $f'(x_2) = \tan(\alpha)$.

$$f'(x) = -2ax$$

$$f'\left(-\sqrt{\frac{h}{a}}\right) = 2a\sqrt{\frac{h}{a}} = \tan(\alpha) \leftrightarrow 4ah = \tan^2(\alpha) \leftrightarrow a = \frac{\tan^2(\alpha)}{4h}$$

$$f(x) = -\frac{\tan^2(\alpha)}{4h} \cdot x^2 + h$$

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 1 Zahlen und Maße
b) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) 4 Analysis

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) schwer

Punkteanzahl:

a) 3
b) 4

Thema: Chemie

Quellen: –

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Fließgeschwindigkeiten

Aufgabennummer: B_103

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Die Fließgeschwindigkeit in offenen oder geschlossenen Gerinnen (Fluss, Kanal usw.) hängt von der Querschnittsform des Gerinnes, vom Fließgefälle sowie vom Material des Gerinnes (Beton, Sand, Holz usw.) ab. Sie variiert innerhalb des Querschnitts, daher gibt man sie als Durchschnittswert an.
Für die rechnerische Ermittlung der mittleren Fließgeschwindigkeit von Gerinnen eignet sich die Formel nach Manning-Strickler:

$$v_m = k_{st} \cdot R^{\frac{2}{3}} \cdot I^{\frac{1}{2}}$$

v_m … mittlere Fließgeschwindigkeit in Metern pro Sekunde (m/s)

k_{st} … Proportionalitätskonstante $\left(\frac{m^{\frac{1}{3}}}{s}\right)$ (berücksichtigt die Gerinnerauheit)

R … hydraulischer Radius (m) = $\frac{\text{vom Wasser durchflossener Querschnitt in Quadratmetern } (m^2)}{\text{benetzter Umfang in Metern (m)}}$

I ... Fließgefälle = $\frac{\text{Höhe in Metern (m)}}{\text{Länge in Metern (m)}}$

a) – Erläutern Sie anhand der Formel für v_m, wie der hydraulische Radius die Fließgeschwindigkeit beeinflusst.

b) Ein Abflusskanal hat näherungsweise einen Querschnitt in Form eines Halbkreises mit aufgesetztem Quadrat. Das Gerinne hat eine Breite von 80 cm und ein Gefälle von 5 m Höhe auf 1 Kilometer (km) Länge.



$k_{st} = 100 \left(\frac{m^{\frac{1}{3}}}{s}\right)$

– Berechnen Sie die mittlere Fließgeschwindigkeit, wenn sich die Wasseroberfläche 40 cm unter dem Kanalrand befindet. Runden Sie dabei auf 2 Stellen.

c) Ein Wasserversorgungsunternehmen zeichnet in einem Intervall von 900 Sekunden (s) die durch unterschiedliche Durchflussmengen schwankende Fließgeschwindigkeit v_m in einem Wasserzuleitungsrohr (Durchmesser d = 0,6 m) auf.

Zeit ab Beginn des Beobachtungszeitraums in s	Fließgeschwindigkeit in m/s
0	1,2
180	3,4
360	4,3
540	4,1
720	3,0
900	1,8

– Ermitteln Sie mithilfe der Daten der Tabelle eine Ausgleichsfunktion 2. Grades, die den Verlauf der Fließgeschwindigkeit in diesem Zeitintervall beschreibt.

– Berechnen Sie mit dieser Polynomfunktion und mithilfe der Integralrechnung das während des Beobachtungszeitraums fließende Wasservolumen.
Runden Sie auf Kubikmeter genau.
Hinweis: $V = A \cdot v_m(t) \cdot t$

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Die Größe R, die das Verhältnis von durchflossenem Querschnitt zu benetztem Umfang wiedergibt, hat eine positive Hochzahl, d. h.: je größer der hydraulische Radius, desto höher die Fließgeschwindigkeit.

b) $A = \frac{0{,}8^2}{2} + \frac{0{,}4^2}{2} \cdot \pi \approx 0{,}57\ \text{m}^2$

$U_{\text{benetzt}} = 2 \cdot 0{,}4 + 0{,}4 \cdot \pi \approx 2{,}06\ \text{m}$

$R = 0{,}28\ \text{m}$

$I = \frac{5}{1000} = 0{,}005$

$v_m = k_{st} \cdot R^{\frac{2}{3}} \cdot I^{\frac{1}{2}} = 100 \cdot 0{,}28^{\frac{2}{3}} \cdot 0{,}005^{\frac{1}{2}} \approx 3{,}01\ \text{m/s}$

Die zu erwartende mittlere Fließgeschwindigkeit liegt bei ca. 3,01 m/s.

Das Ergebnis kann aufgrund von Zwischenrundungen leicht vom angegebenen Ergebnis abweichen.

c) Berechnung der Ausgleichsparabel durch Technologieeinsatz:

$v_m(t) = -1{,}38 \cdot 10^{-5} \cdot t^2 + 1{,}266 \cdot 10^{-2} \cdot t + 1{,}36429$

Querschnittsfläche $A = 0{,}3^2 \cdot \pi \approx 0{,}283\ \text{m}^2$

$$V = A \int_0^{900} v_m(t)\,dt \approx 0{,}283 \cdot 3004{,}8$$

$$V \approx 850\ \text{m}^3$$

Während des Beobachtungsintervalls fließt ein Volumen von 850 m^3 durch das Zuleitungsrohr.

Abweichungen vom Ergebnis aufgrund von Rundung sind zu tolerieren.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) 1 Zahlen und Maße
c) 4 Analysis

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) –
b) –
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) leicht
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 1
b) 3
c) 3

Thema: Physik

Quellen: –

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Desinfektion mit UV-Licht

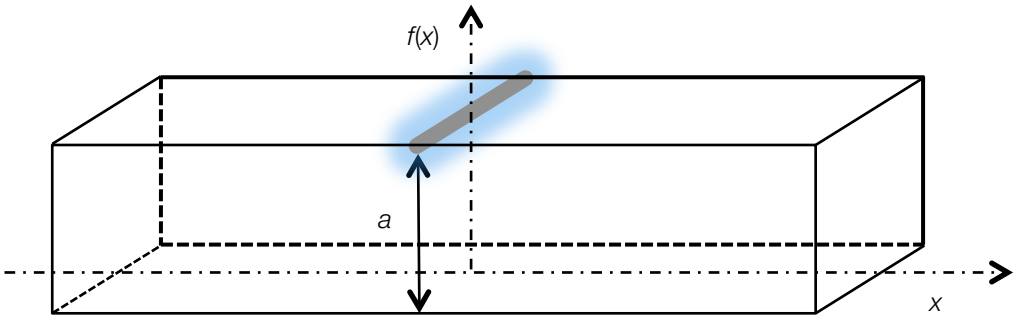
Aufgabennummer: B_098

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Eine zum Verkauf von Lebensmitteln verwendete Vitrine ist 2 Meter (m) lang. Sie wird zur Desinfektion einmal am Tag nach Verkaufsschluss mit einer eingebauten UV-Lampe bestrahlt.
Die Funktion f gibt an, wie sich die Beleuchtungsstärke auf einer geraden Fläche verteilt, wenn sich die Lampe im Abstand a von der Fläche befindet.

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{a}{a^2 + x^2}$$

Die Lampe befindet sich in der Mitte der Vitrine genau 0,70 m über der Präsentationsfläche.
Die Grafik zeigt die Vitrine inklusive gedachtem Koordinatensystem für die Verteilungsfunktion.



a … Normalabstand der Lampe über der Präsentationsfläche in Metern (m)
x … Abstand vom Fußpunkt des Lots der Lampe auf die Präsentationsfläche in Metern (m)

a) – Zeichnen Sie die Funktion f im Bereich $[-1; 1]$.
– Zeigen Sie mithilfe der Differenzialrechnung, dass sich das Maximum der Strahlungsintensität direkt unter der Lampe befindet.

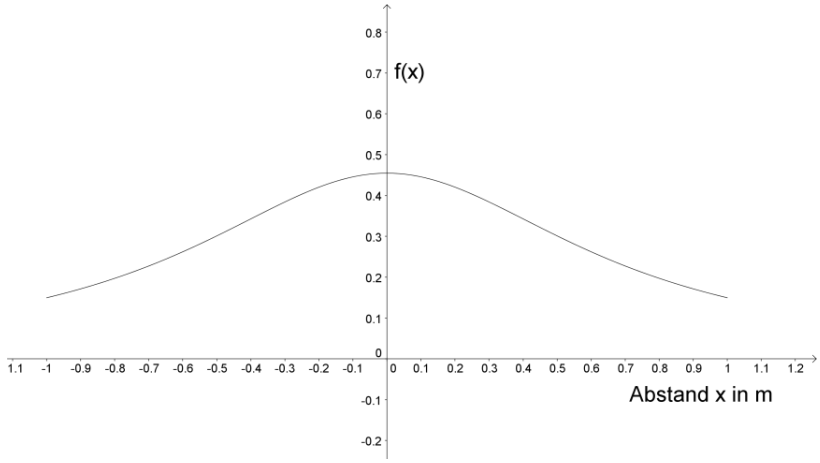
b) Die Funktion f entspricht der Dichtefunktion der Beleuchtungsstärke. Die Fläche unter dem Graphen der Funktion f in einem bestimmten Intervall ist daher proportional zu der in diesem Bereich auftreffenden Strahlungsmenge.
– Berechnen Sie den prozentuellen Anteil der Strahlung, die auf die Präsentationsfläche trifft.

c) Nach einer Versuchsreihe stellt sich heraus, dass für die Abtötung der Keime am Rand der Vitrine, also für $x = 1$ m, die Beleuchtungsstärke nicht ausreicht.
– Ermitteln Sie die Funktion für f in Abhängigkeit von a, die die Beleuchtungsstärke für $x = 1$ bei veränderlicher Lampenhöhe a beschreibt.
– Stellen Sie die Funktion grafisch dar und schätzen Sie ab, bei welcher Höhe a die beste keimtötende Wirkung an der Stelle $x = 1$ vorhanden wäre.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Die Grafik zeigt die Funktion f im Bereich [–1; 1].



Ermittlung des Maximums $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = -\frac{a}{\pi} \cdot \frac{2x}{(a^2 + x^2)^2}$$

$$0 = -\frac{a}{\pi} \cdot \frac{2x}{(a^2 + x^2)^2}$$

$$x = 0$$

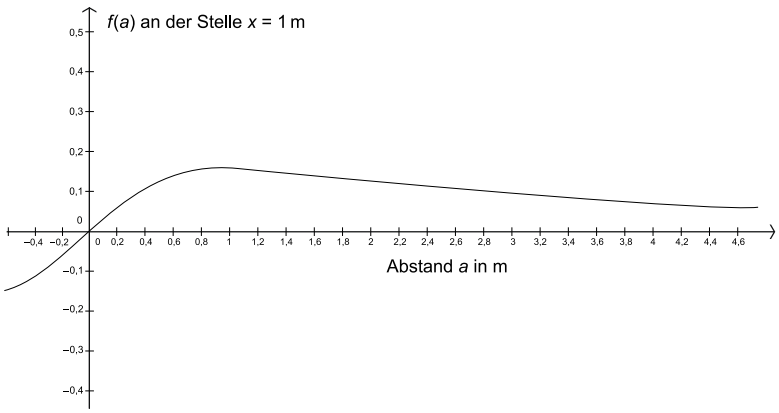
b) Der Flächeninhalt unter der Kurve wird mithilfe des bestimmten Integrals ermittelt. Die Gesamtfläche unter der Dichtefunktion beträgt 1.

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{a}{a^2 + x^2} \mathrm{d}x = 0{,}611$$

61,1 % der Strahlung treffen auf die Präsentationsfläche auf.

c) Für x = 1 m und a als Variable erhält man die Funktion $f(a)$.

$$f(a) = \frac{a}{\pi \cdot (a^2 + 1)}$$



Eine grafische Darstellung der Funktion im Bereich [0; 1] zeigt, dass die Strahlungsintensität an der Stelle a = 1 m ein Maximum hat.
Die maximale Strahlungsintensität am Rand der Vitrine erhält man für eine Lampenhöhe von 1 m.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 4 Analysis
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 5 Stochastik
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) –
b) –
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) schwer

Punkteanzahl:

a) 3
b) 2
c) 3

Thema: Physik

Quellen: –

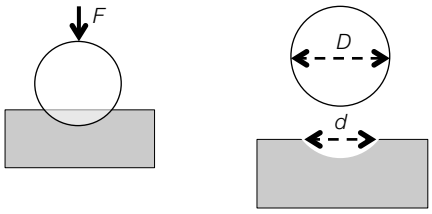
Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Härte nach Brinell

Aufgabennummer: B_101

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Bei der Härtemessung von Metallen nach Brinell wird eine Hartmetallkugel mit dem Durchmesser *D* mit einer bestimmten Kraft in das Metall eingedrückt.



a) Der Durchmesser des Abdrucks *d* wird gemessen und die Oberfläche des Abdrucks (eine Kugelkalotte) mittels Rechnung bestimmt. Die Angabe der Härte erfolgt durch das Verhältnis der eingesetzten Kraft zur Oberfläche der Kugelkalotte:

$$f(F, D, d) = \frac{0{,}102 \cdot F}{\frac{\pi \cdot D \cdot (D - \sqrt{D^2 - d^2})}{2}}$$

$f(F, D, d)$ … Härte in HBW (Härte nach Brinell mit Wolframkarbidkugel)
F … Kraft in Newton (N)
D … Durchmesser der Kugel in Millimetern (mm)
d … Durchmesser des abschließenden Kreises des Abdrucks in mm

– Zeigen Sie, dass der Nenner der obigen Formel der Fläche einer Kugelkalotte mit der Formel

$$A = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot h$$

R … Radius der Kugel in mm
h … Tiefe des Abdrucks oder Höhe der Kugelkalotte in mm

entspricht.

b) Nach der Messung hinterlässt die Kugel mit dem Radius R einen Abdruck in Form einer Kugelkalotte mit der Tiefe h.

– Erstellen Sie mithilfe der Integralrechnung eine Formel für das Volumen des verdrängten Metalls in Abhängigkeit von R und h.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Einsetzen mit: $D = 2R$ und $d = 2r$

$$A = \frac{\pi \cdot D \cdot (D - \sqrt{D^2 - d^2})}{2} = \frac{\pi \cdot 2R \cdot (2R - \sqrt{4R^2 - 4r^2})}{2}$$
$$= \frac{\pi \cdot 2R \cdot (2R - 2\sqrt{R^2 - r^2})}{2}$$

Mit $\sqrt{R^2 - r^2} = R - h$ folgt

$$A = \pi \cdot R \cdot (2R - 2R + 2h)$$

$$A = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot h$$

Die Gleichheit kann auch ausgehend von der Formel $A = D \cdot \pi \cdot h$ mit anschließender Berechnung von h gezeigt werden.

b) Berechnung des Volumens durch Rotation eines Kreises um die vertikale Achse zwischen den Grenzen $y_1 = R - h$ und $y_2 = R$:

$x^2 + y^2 = R^2$
$x^2 = R^2 - y^2$

$$V = \pi \cdot \int_{R-h}^{R} (R^2 - y^2)\mathrm{d}y = \pi \cdot (R^2 y - \frac{y^3}{3}) \Big|_{R-h}^{R}$$

$$V = \pi \cdot (R \cdot h^2 - \frac{h^3}{3})$$

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:

a) schwer
b) mittel

Punkteanzahl:

a) 3
b) 3

Thema: Chemie

Quellen: –

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Wasserstand in einem Hafenbecken

Aufgabennummer: B_085

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Die Höhe des Wasserstandes in einem Hafenbecken an der Ostsee lässt sich aufgrund der Gezeiten annähernd durch folgende Funktion H beschreiben:

$$H(t) = 4 + 1{,}5 \cdot \cos(0{,}507 \cdot t)$$

$H(t)$ … Höhe des Wasserstandes in Metern (m) zum Zeitpunkt t
t … Zeit in Stunden (h) nach Mitternacht am 12. März, $0\text{ h} \leq t \leq 24\text{ h}$

a) – Berechnen Sie die Wassertiefe im Hafenbecken am Morgen des 12. März um 8:15 Uhr.

b) – Zeichnen Sie den Graphen der Funktion H.
– Ermitteln Sie aus der Grafik, zu welchen Zeitpunkten am 12. März der Wasserstand am höchsten und wann er am niedrigsten ist.
– Geben Sie jeweils die Höhe des Wasserstandes zu diesen Zeitpunkten an.

c) Die Funktion für die Höhe des Wasserstandes in Abhängigkeit von der Zeit t lautet allgemein:

$$H(t) = d + a \cdot \cos(b \cdot t)$$

– Interpretieren Sie die Bedeutung der einzelnen Parameter im angegebenen Zusammenhang.

d) An einem bestimmten Tag beträgt der Wasserstand im Hafenbecken um 3:06 Uhr 9,5 m und jener um 9:18 Uhr 2,5 m.
– Berechnen Sie die Größe der Parameter a und b, wenn der Wasserstand durch folgende Funktion beschrieben wird:

$$H_1(t) = a + b \cdot \sin(0{,}507 \cdot t)$$

$H_1(t)$ … Höhe des Wasserstandes in Metern (m) zum Zeitpunkt t
t … Zeit in Stunden (h) nach Mitternacht, $0\text{ h} \leq t \leq 24\text{ h}$

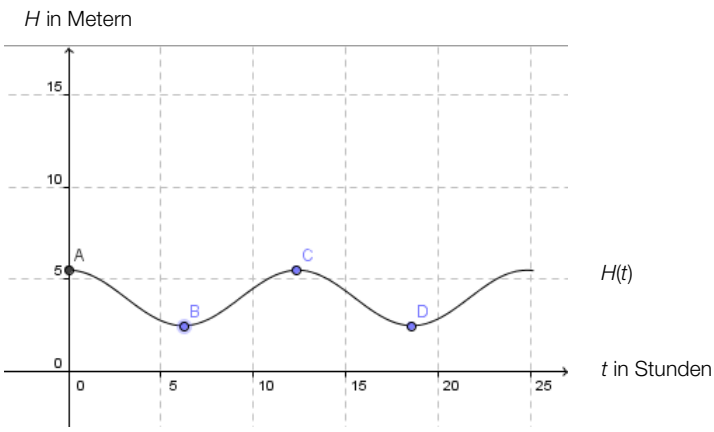
– Ermitteln Sie, ob ein Schiff mit einem Tiefgang (Distanz von der Wasserlinie bis zum tiefsten Punkt eines Schiffs) von 5,5 m um 18:00 Uhr noch im Hafen anlegen kann.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Umrechnung der Uhrzeit: 8:15 Uhr entspricht 8,25 Stunden.
$H(8{,}25) = 4 + 1{,}5 \cdot \cos(0{,}507 \cdot 8{,}25)$
$H(8{,}25) = 3{,}24$
Die Wassertiefe beträgt um 8:15 Uhr 3,24 m.

b)



Mit Technologieeinsatz: Um Mitternacht und um 12:24 Uhr ist das Maximum von 5,5 m Wasserhöhe erreicht. Um 6:12 Uhr und um 18:36 Uhr ist der Wasserstand minimal und erreicht eine Höhe von 2,5 m.

c) Funktion: $H(t) = d + a \cdot \cos(b \cdot t)$
a … gibt die Amplitude der Cosinusfunktion (maximale Höhe des Wasserstandes relativ zu d) an
b … gibt die Frequenz an
d … verschiebt die Cosinusfunktion entlang der y-Achse und beschreibt die mittlere Wasserstandshöhe

Alle anderen richtigen Interpretationen aus der Physik sind zulässig.

d) $H_1(t) = a + b \cdot \sin(0{,}507 \cdot t)$

Einsetzen der angegebenen Werte und vereinfachen liefert folgende Gleichungen:
I: $9{,}5 = a + b \cdot \sin(0{,}507 \cdot 3{,}1)$
II: $2{,}5 = a + b \cdot \sin(0{,}507 \cdot 9{,}3)$

I: $9{,}5 = a + b \cdot 0{,}999999591687397$
II: $2{,}5 = a - b \cdot 0{,}999996325188573 \Rightarrow a \approx 6, b \approx 3{,}5$

$H_1(t) = 6 + 3{,}5 \cdot \sin(0{,}507 \cdot t)$

$H_1(18) = 6 + 3{,}5 \cdot \sin(0{,}507 \cdot 18)$
$H_1(18) = 7{,}03$

Ja, ein Schiff mit einem Tiefgang von 5,5 m kann noch in diesem Hafen anlegen, da der Wasserstand um 18:00 Uhr 7,03 m beträgt.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 3 Funktionale Zusammenhänge
d) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) D Argumentieren und Kommunizieren
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) —
c) —
d) A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) schwer
d) mittel

Punkteanzahl:

a) 1
b) 3
c) 4
d) 3

Thema: Physik

Quellen: —

Der Schall

Aufgabennummer: B_067

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

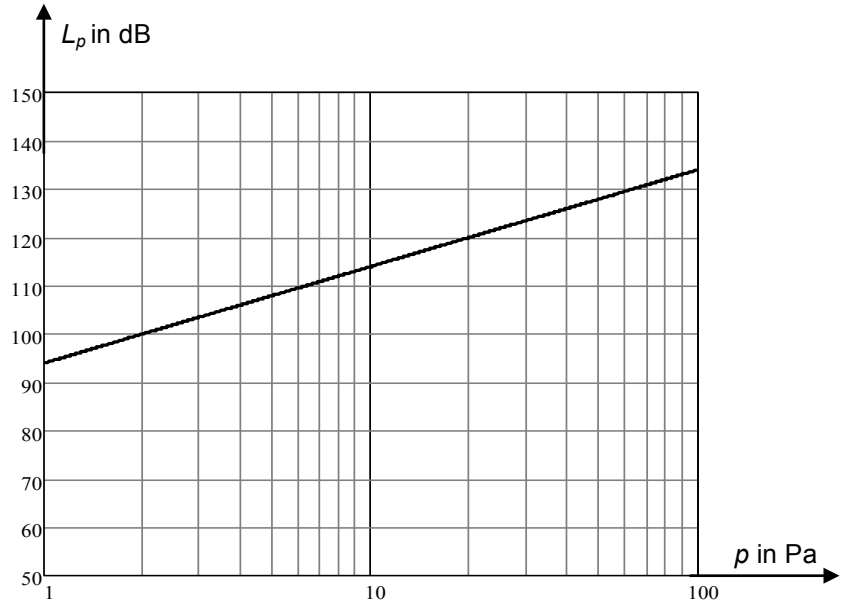
Als Schalldruck p werden die Druckschwankungen eines kompressiblen Schallübertragungsmediums (üblicherweise Luft) bezeichnet, die bei der Ausbreitung von Schall auftreten. Eine für das Hörempfinden relevante Größe ist der Schalldruckpegel L_p.

$$L_p = 20 \cdot \lg\left(\frac{p}{p_0}\right)$$

L_p … Schalldruckpegel in Dezibel (dB)
p … Schalldruck in Pascal (Pa)
p_0 ... Bezugswert für Luftschall (p_0 = 20 μPa)

a) – Stellen Sie den Schalldruckpegel L_p in Abhängigkeit vom Schalldruck p für das Intervall [p_0; 0,1 Pa] grafisch dar.
– Zeigen Sie mithilfe der Rechenregeln für Logarithmen und der angegebenen Formel, dass eine Verdoppelung des Schalldrucks p eine Erhöhung des Schalldruckpegels L_p um etwa 6 dB bewirkt.

b) Das nachstehende Diagramm zeigt die Abhängigkeit des Schalldruckpegels vom Schalldruck nach obiger Formel. Ab einem Schalldruck p von etwa 20 Pa können bereits bei kurzfristiger Einwirkung Gehörschäden auftreten.



– Ermitteln Sie aus der Grafik den Schalldruckpegel L_p für diesen Schalldruck.

In der Grafik ist der Abstand zwischen 1 Pa und 10 Pa auf der horizontalen Achse 5 cm.

– Berechnen Sie den Abstand zwischen 10 Pa und 50 Pa in cm auf der logarithmisch skalierten horizontalen Achse.

c) Ein einzelner Ton kann durch eine Sinusschwingung dargestellt werden. Die Hörbarkeit eines Tones für den Menschen hängt von der Lautstärke (Amplitude A) und von der Tonhöhe (Frequenz f) ab. Je größer die Amplitude ist, desto lauter ist der Ton. Je höher die Frequenz ist, desto höher ist der Ton.

Die folgende Funktion gibt die Schwingung einer Schallwelle für den Kammerton a mit einer Frequenz $f = 440$ Hz wieder:

$$y(t) = A \cdot \sin(2\pi \cdot 440\, t)$$

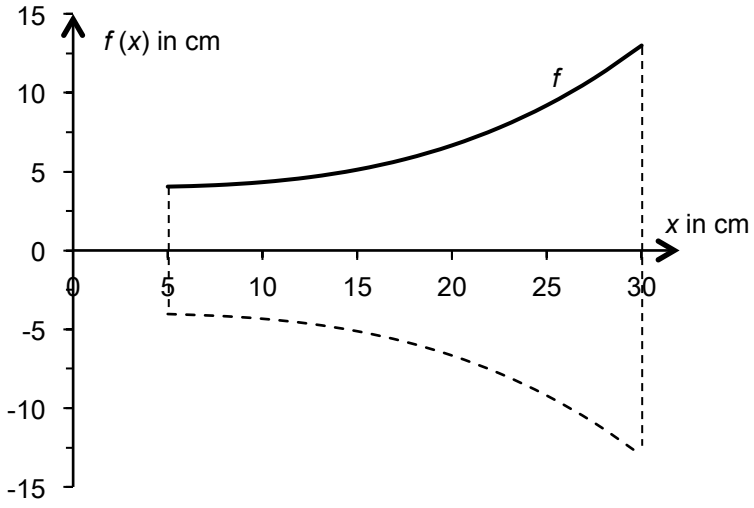
$y(t)$ … Auslenkung in Längeneinheiten zum Zeitpunkt t
t … Zeit in Sekunden (s)
A … Amplitude in Längeneinheiten

– Stellen Sie eine Funktionsgleichung der Schwingung für den Kammerton a mit doppelter Lautstärke auf.

Als *Hörgrenze* bezeichnet man diejenige Frequenz, bei der ein Ton einer bestimmten Lautstärke gerade noch hörbar ist. Die Hörgrenze bei einem Menschen im Alter von 35 Jahren beträgt etwa 15 kHz.

– Stellen Sie eine Funktionsgleichung der Schwingung für diese Frequenz auf.

d) Ein Megafon ist ein trichterförmiges Gerät, das die Ausbreitung von Schall beeinflusst und die Verständlichkeit und Reichweite von Sprache verbessert.
Die nachstehende Abbildung stellt näherungsweise den inneren Querschnitt eines Megafons dar.



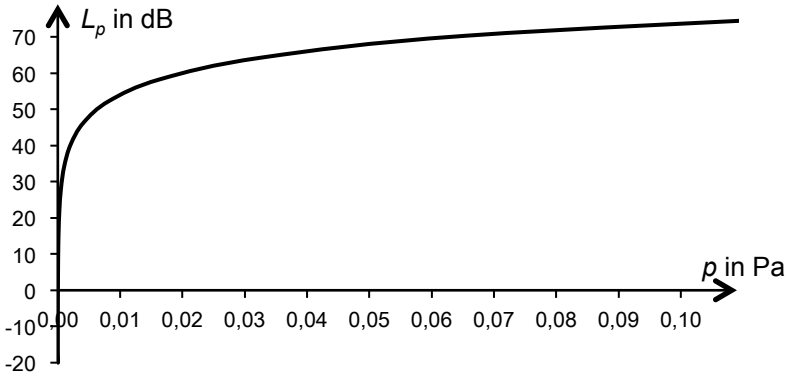
Die Begrenzungslinie der Querschnittsfläche wird im relevanten Intervall durch die Funktion f beschrieben: $f(x) = \frac{x^3}{3\,000} + 4$.

– Berechnen Sie das Innenvolumen des Megafons.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



$$L_{p,2} = 20 \cdot \lg\left(\frac{2p}{p_0}\right) = 20 \cdot \lg(2) + 20 \cdot \lg\left(\frac{p}{p_0}\right) \approx 6{,}02\ \text{dB} + L_p$$

b) Ablesen von L_p bei $p = 20$ Pa: $L_p \approx 120$ dB

Berechnen des Abstands: $\lg(50) \cdot 5$ cm $- \lg(10) \cdot 5$ cm $\approx 3{,}495$ cm

c) $y(t) = 2A \cdot \sin(2\pi \cdot 440\, t)$
$y(t) = \sin(30\,000\,\pi \cdot t)$

Schwingungen mit anderer Amplitude sind ebenfalls korrekt.

d) $V_x = \pi \cdot \int_5^{30} f^2(x)\mathrm{d}x$

$V_x = \pi \cdot \int_5^{30} \left(\frac{x^3}{3\,000} + 4\right)^2 \mathrm{d}x$

$V_x \approx 4\,042\ \text{cm}^3$

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 3 Funktionale Zusammenhänge
d) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) 2 Algebra und Geometrie
c) –
d) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) A Modellieren und Transferieren
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) –
d) A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) leicht
d) leicht

Punkteanzahl:

a) 3
b) 3
c) 2
d) 2

Thema: Physik

Quellen: –

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Sonneneinstrahlung am Hafelekar (1)

Aufgabennummer: B_066

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Die Intensität der Sonneneinstrahlung am Hafelekar in Innsbruck kann näherungsweise durch die folgenden Funktionen f_1 und f_2 beschrieben werden, wobei gilt:

$f_1(t) = -\frac{7}{1\,152} \cdot t^2 + \frac{2\,555}{288} \cdot t - \frac{811\,615}{288}$, $490 \le t \le 970$ für den 19. Jänner

$f_2(t) = -\frac{81}{18\,490} \cdot t^2 + \frac{11\,826}{1\,849} \cdot t - \frac{2\,726\,350}{1\,849}$, $300 \le t \le 1\,160$ für den 3. Mai

t … Ortszeit in Minuten (min)

$f_1(t)$, $f_2(t)$ … Intensität der Sonneneinstrahlung zum Zeitpunkt t in Watt pro Quadratmeter $\left(\frac{\text{W}}{\text{m}^2}\right)$

a) – Ermitteln Sie denjenigen Zeitpunkt, zu dem die Intensität der Sonneneinstrahlung am 3. Mai maximal ist.

Mithilfe des Integrals $\int_{t_1}^{t_2} f_2(t)\,\mathrm{d}t$ berechnet man den Energieeintrag im Zeitintervall t_1 bis t_2.

– Berechnen Sie ein symmetrisches Zeitintervall um diesen Zeitpunkt so, dass der Energieeintrag 100 $\frac{\text{kW} \cdot \text{min}}{\text{m}^2}$ beträgt.

b) – Zeichnen Sie den Graphen, der die momentane Änderungsrate der Intensität der Sonneneinstrahlung für den 3. Mai in Abhängigkeit von der Ortszeit im Intervall [300 min; 1160 min] darstellt.

c) – Dokumentieren Sie die erforderlichen Lösungsschritte zur Ermittlung der mittleren Intensität der Sonneneinstrahlung für den 3. Mai zwischen den Zeitpunkten a und b, ohne die Berechnung auszuführen.

d) In der nachstehenden Tabelle sind die theoretisch möglichen Energieeinträge pro Stunde für den 19. Jänner und den 3. Mai in Millionen Joule pro Quadratmeter $\left(\frac{\text{J}}{\text{m}^2}\right)$ angegeben.

Ortszeit in min	19. Jänner	3. Mai
540 – 600	0,945	2,688
600 – 660	1,287	2,934
660 – 720	1,47	3,066
720 – 780	1,497	3,085
780 – 840	1,365	2,990
840 – 900	1,077	2,782

– Erstellen Sie ein Stabdiagramm mithilfe der Daten in der Tabelle.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Berechnung des Hochpunkts der Funktion f_2:

$f'_2(t) = 0 \Rightarrow t_{\text{Hochpunkt}} = 730 \text{ min}$

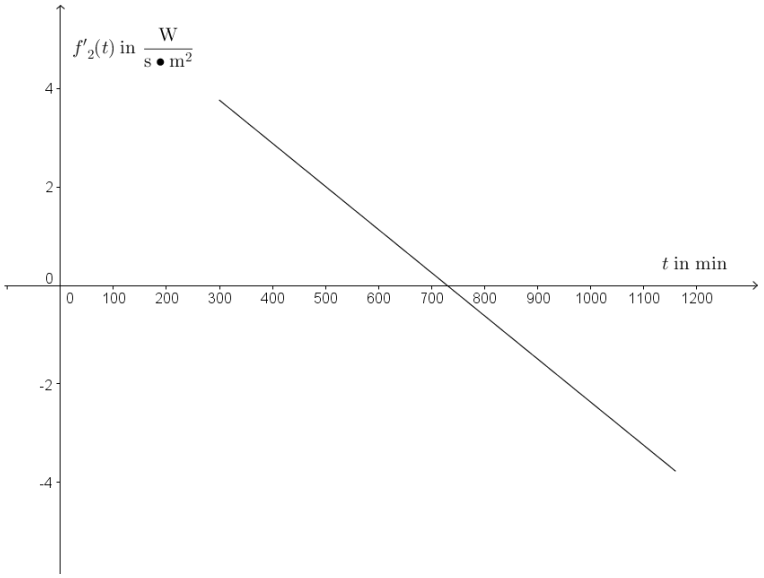
Berechnung des symmetrischen Zeitintervalls um den Hochpunkt:

$$10^5 = \int_{730-a}^{730+a} f_2(t)\,dt$$

$\Rightarrow a \approx 58{,}5 \text{ min}$

Die Intensität der Sonneneinstrahlung am 3. Mai ist zum Zeitpunkt 730 min maximal.
Im Zeitintervall [671,5 min; 788,5 min] beträgt der Energieeintrag 100 $\frac{\text{kW} \cdot \text{min}}{\text{m}^2}$.

b) $f'_2(t) = -\frac{81}{9\,245} \cdot t + \frac{11\,826}{1\,849}$



c) Um die mittlere Sonneneinstrahlung im Mai von einem Zeitpunkt a zu einem Zeitpunkt b zu ermitteln, sind folgende Schritte notwendig:

1. gesamten Energieeintrag über das bestimmte Integral ermitteln

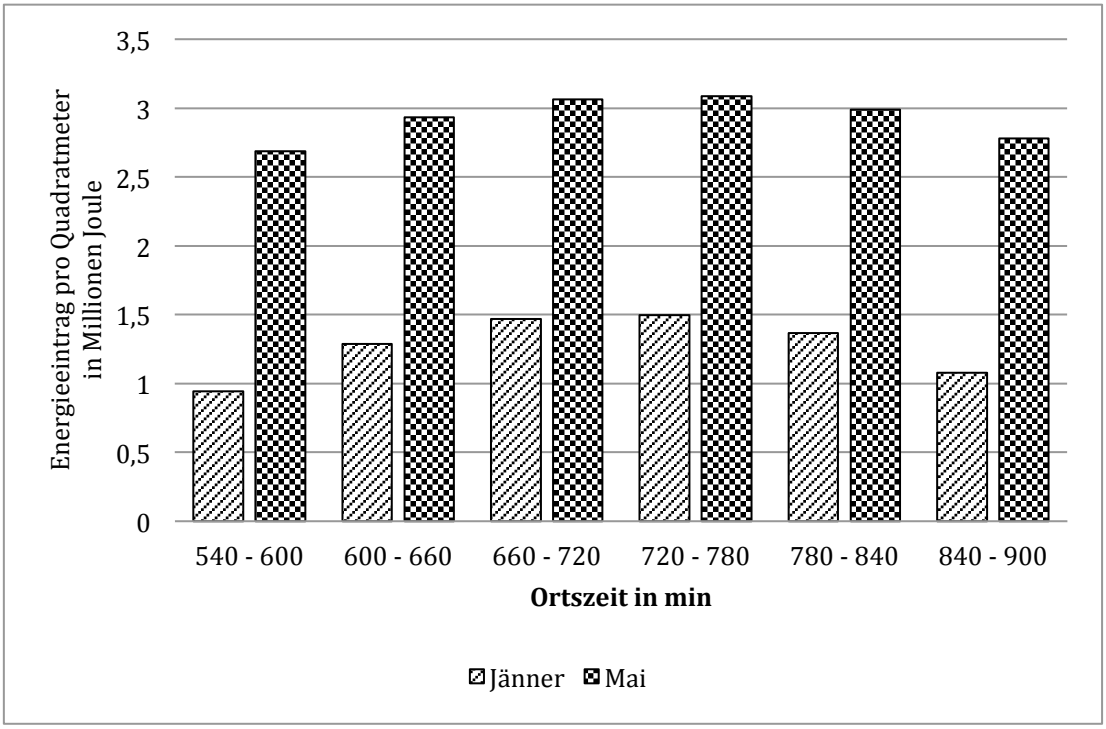
$$\int_a^b f_2(t)\,dt$$

2. Zeitdauer ermitteln

Zeitdauer = b min – a min

3. den Wert des bestimmten Integrals durch die Zeitdauer dividieren

d)


3,5
3
2,5
2
1,5
1
0,5
0
Energieeintrag pro Quadratmeter in Millionen Joule
540 - 600
600 - 660
660 - 720
720 - 780
780 - 840
840 - 900
Ortszeit in min
Jänner
Mai

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 4 Analysis
c) 4 Analysis
d) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) —
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) C Interpretieren und Dokumentieren
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) A Modellieren und Transferieren
c) A Modellieren und Transferieren
d) —

Schwierigkeitsgrad:

a) schwer
b) mittel
c) schwer
d) leicht

Punkteanzahl:

a) 4
b) 2
c) 3
d) 1

Thema: Geografie

Quelle: eigene Messung

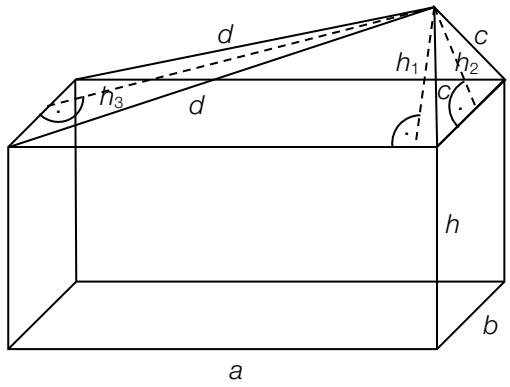
Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Gewächshaus

Aufgabennummer: B_058

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Für die Anzucht von Paradeisern wird ein Gewächshaus aus Glas gebaut (siehe Abbildung).



a) – Zeigen Sie, wie man die gegebene Formel für die Berechnung des Materialbedarfs an Glas für alle 4 Seitenwände und das aus 4 Glasplatten bestehende Dach erhält.

$$O = b \cdot \left(2 \cdot h + \frac{h_2}{2} + \frac{h_3}{2}\right) + a \cdot (2 \cdot h + h_1)$$

b) – Berechnen Sie denjenigen Winkel, den die lange schräge Kante *d* des Dachs mit der waagrechten Kante *a* einschließt. Maße: $a = 3{,}8$ m, $d = 3{,}2$ m, $c = 1{,}3$ m.

c) Von der in einer Paradeiserpflanze vorhandenen Flüssigkeitsmenge verdunsten täglich 45 %. Über das Erdreich nimmt die Pflanze im gleichen Zeitraum 12 Milliliter (ml) Flüssigkeit auf. Zu Beginn des Beobachtungszeitraumes enthält die Pflanze 15 ml Flüssigkeit. Die Zunahme der Flüssigkeitsmenge in der Paradeiserpflanze kann durch folgende Funktion *y* beschrieben werden:

$$y(t) = a \cdot (1 - e^{b \cdot t}) + c$$

t ... Zeit in Tagen
$y(t)$ ... Flüssigkeitsmenge in der Pflanze zum Zeitpunkt *t* in ml

– Erstellen Sie (ohne Verwendung der Funktionsgleichung) eine Tabelle und eine Grafik, die die tägliche Flüssigkeitsmenge in der Paradeiserpflanze für 15 Tage angeben.
– Ermitteln Sie die Parameter *a*, *b* und *c*. Verwenden Sie dazu die Daten der zuvor erstellten Tabelle.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Die Oberfläche des Glashauses setzt sich aus 4 Rechtecken und 4 Dreiecken zusammen:

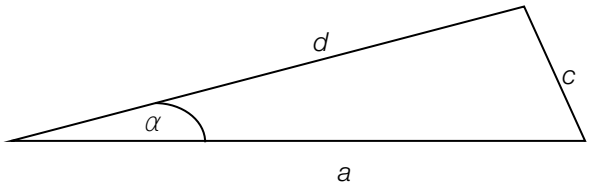
$$O = 2 \cdot \left(a \cdot h + b \cdot h + \frac{a \cdot h_1}{2}\right) + \frac{b \cdot h_2}{2} + \frac{b \cdot h_3}{2}$$

Durch Umformung erhält man:

$$O = 2 \cdot a \cdot h + 2 \cdot b \cdot h + a \cdot h_1 + \frac{b \cdot h_2}{2} + \frac{b \cdot h_3}{2}$$

$$O = b \cdot \left(2 \cdot h + \frac{h_2}{2} + \frac{h_3}{2}\right) + a \cdot (2 \cdot h + h_1)$$

b) (Skizze nicht explizit verlangt.)



$$c^2 = a^2 + d^2 - 2 \cdot a \cdot d \cdot \cos(\alpha)$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{c^2 - a^2 - d^2}{-2 \cdot a \cdot d}\right)$$

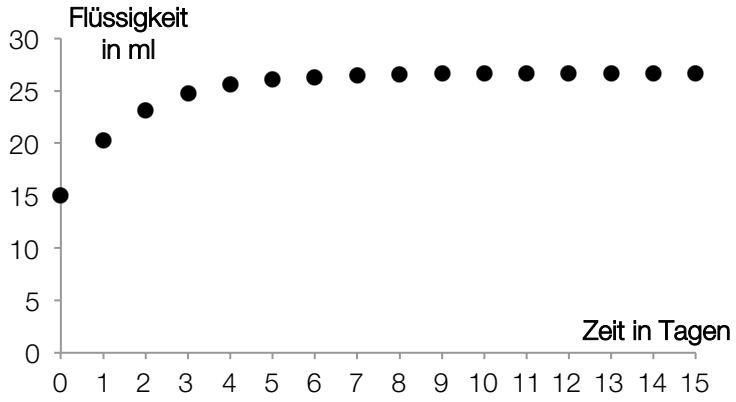
$$\alpha = 19{,}0362...° \approx 19°$$

Der Winkel beträgt etwa 19°.

c) Die Tabelle wird z. B. in Excel iterativ erstellt: ($x_{n+1} = 0{,}55 \cdot x_n + 12$).

Aus der Tabelle wird anschließend die Grafik erstellt.

Tag	Flüssigkeit in der Pflanze in ml
0	15,00
1	20,25
2	23,14
3	24,73
4	25,60
5	26,08
6	26,34
7	26,49
8	26,57
9	26,61
10	26,64
11	26,65
12	26,66
13	26,66
14	26,66
15	26,67



Für die Ermittlung der Parameter *a*, *b* und *c* wird aus der Tabelle abgelesen:

$t = 0$, $y = 15$ ⇒ $\underline{c = 15}$

Der Grenzwert der Funktion für $t \to \infty$ ist ca. 26,67. ⇒ $a = 26{,}67 - 15$

$\underline{a \approx 11{,}67}$

Die Ermittlung von *b* erfolgt durch Einsetzen eines Punktes, z. B. (1|20,25), und Lösen der Exponentialgleichung:

$20{,}25 = 11{,}67 \cdot (1 - e^{b \cdot 1}) + 15$ ⇒ $\underline{b \approx -0{,}6}$

$y(t) = 11{,}67 \cdot (1 - e^{-0{,}6 \cdot t}) + 15$

Auch andere korrekte Lösungswege sind zulässig.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) 2 Algebra und Geometrie

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) A Modellieren und Transferieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz, C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) leicht
c) schwer

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2
c) 4

Themen: Architektur, Biologie

Quellen: –

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Raketenstart

Aufgabennummer: B_054

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Trägerraketen ermöglichen es, schwere Nutzlasten in die Erdumlaufbahn zu befördern. Ariane 5 ist die leistungsfähigste europäische Trägerrakete.
Beim Start der Ariane 5 lässt sich der senkrecht nach oben zurückgelegte Weg s in Abhängigkeit von der Zeit t modellhaft annähernd durch eine quadratische Funktion beschreiben.

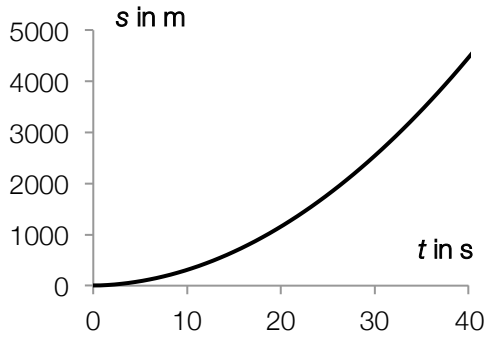
a)

t in s	$s(t)$ in m
0	0
2	16,1
4	53,8

t … Zeit in Sekunden (s)
$s(t)$ … zurückgelegter Weg in Metern (m) zum Zeitpunkt t

– Stellen Sie die allgemeine Funktion s für den gegebenen Zusammenhang auf.
– Ermitteln Sie mithilfe der Werte aus der Tabelle die entsprechenden Parameter der Funktion s.

b) Folgender Graph beschreibt modellhaft den zurückgelegten Weg s in Abhängigkeit von der Zeit t in der Startphase der Rakete:

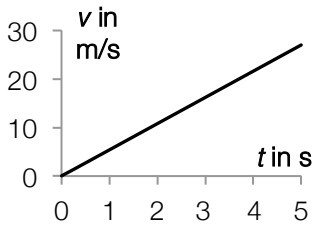


– Erklären Sie den Unterschied zwischen der Momentangeschwindigkeit v für den Zeitpunkt $t_0 = 30$ s und der Durchschnittsgeschwindigkeit $\bar{v}$ für $\Delta t = 30\text{ s} - 0\text{ s}$ mithilfe der Begriffe *Differenzenquotient* und *Differenzialquotient*.
– Veranschaulichen Sie diese in obiger Grafik.

c) Die Beschleunigung der Ariane 5 in der Startphase beträgt etwa 5,4 m/s².

– Stellen Sie die Funktionen für die Beschleunigung, die Geschwindigkeit und den Weg in Abhängigkeit von der Zeit auf.

d) Der Graph stellt die Geschwindigkeit-Zeit-Funktion *v* der Rakete in den ersten 5 Sekunden des Starts dar.



– Veranschaulichen Sie die Abhängigkeit der Beschleunigung-Zeit-Funktion *a* und der Weg-Zeit-Funktion *s* von der gegebenen Funktion *v*, indem Sie *a* und *s* zeichnen.
– Erklären Sie, was man aus der Kenntnis der Eigenschaften des Graphen von *v* über die Graphen von *a* und *s* aussagen kann.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Aufstellen der allgemeinen Gleichung einer quadratischen Funktion:
$s(t) = at^2 + bt + c$

Aufstellen eines Gleichungssystems:

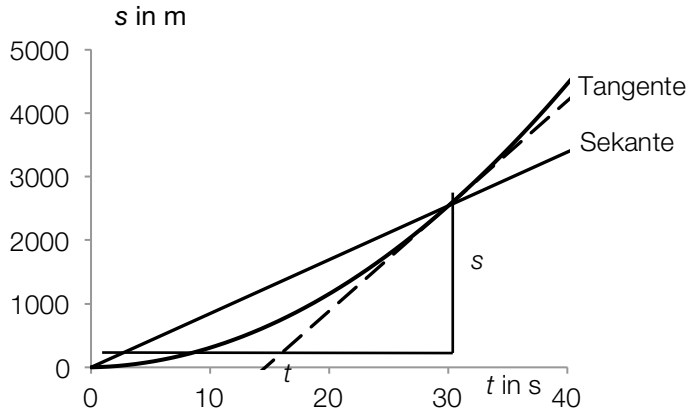
I: $c = 0$
II: $4a + 2b = 16{,}1$
III: $16a + 4b = 53{,}8$

Lösen des linearen Gleichungssystems:

$a = 2{,}7$, $b = 2{,}65$, $c = 0$
$s(t) = 2{,}7t^2 + 2{,}65t$

Alternative Lösungen über Datenfit-Routine sind auch zulässig,
z. B. mit GeoGebra: TrendPoly {Liste von Punkten; Grad der Funktion}.

b)



$\overline{v}(t) = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ ... Steigung der Sekante, Differenzenquotient

Die Durchschnittsgeschwindigkeit ist der Differenzenquotient aus Wegdifferenz durch Zeitdifferenz. (In diesem Fall ist $\Delta t = 30$ s, Δs errechnet man aus der Funktionsgleichung.)

$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = s'(t)$ … Steigung der Tangente, Differenzialquotient

Die Momentangeschwindigkeit erhält man durch die Bildung des Grenzwerts des Differenzenquotienten, wobei man Δt gegen 0 streben lässt. Der Differenzialquotient ist die erste Ableitung des Weges nach der Zeit und die Steigung der Tangente an der Stelle $t = 30$ s.

c) $a(t) = 5{,}4$

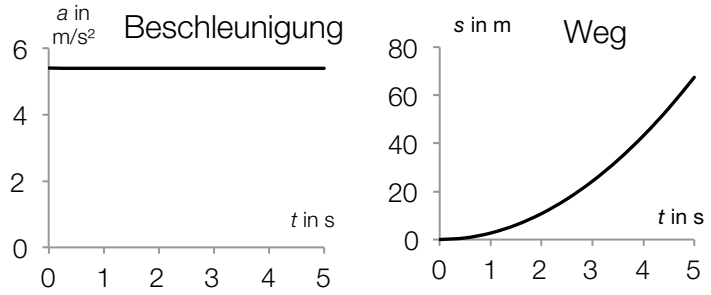
$v(t) = \int 5{,}4\,dt = 5{,}4t + C_1$

$s(t) = \int (5{,}4t + C_1)\,dt = 2{,}7t^2 + C_1t + C_2$

$C_2 = 0$, da der zurückgelegte Weg zum Zeitpunkt $t = 0$ gleich 0 ist.
$C_1 = 0$, da die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$ gleich 0 ist.

$v(t) = 5{,}4t$
$s(t) = 2{,}7t^2$

d)



a ist die Steigungsfunktion von v. Da die Geschwindigkeit linear steigt, ist die Beschleunigung konstant, und der Graph von a ist eine waagrechte Gerade.

v ist die Steigungsfunktion von s. Da die Geschwindigkeit linear zunimmt, steigt der Weg mit dem Quadrat der Zeit, und s ist eine quadratische Funktion.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 4 Analysis
c) 4 Analysis
d) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —
d) 3 Funktionale Zusammenhänge

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) —
c) A Modellieren und Transferieren
d) D Argumentieren und Kommunizieren

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) leicht
c) mittel
d) schwer

Punkteanzahl:

a) 3
b) 4
c) 4
d) 4

Thema: Physik

Quellen: http://www.raumfahrer.net, http://www.esa.int

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Luftdruck (2)

Aufgabennummer: B_052

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Die Beziehung zwischen Luftdruck p und Höhe h lässt sich bei konstanter Temperatur mit der folgenden Gleichung beschreiben:

$$\frac{dp}{dh} = -k \cdot p, \quad k > 0$$

p … Luftdruck in Hektopascal (hPa)
h … Höhe in Metern (m)

a) – Erklären Sie, wie man diese Differenzialgleichung mithilfe der Methode *Trennung der Variablen* zur allgemeinen Lösung $p(h) = C \cdot e^{-k \cdot h}$ führt.

b) Der Luftdruck wird am selben Tag zur selben Zeit an 2 verschiedenen Stationen gemessen:
- in Villach (500 m über dem Meeresspiegel) wird ein Druck p = 962 hPa gemessen,
- auf dem Dobratsch, einem Berg nahe Villach (2 167 m über dem Meeresspiegel), ergibt die Messung p = 790 hPa.

– Berechnen Sie mit diesen Angaben und anhand der in Teilaufgabe a angegebenen allgemeinen Lösung die spezielle Lösung für die Differenzialgleichung.

c) Messungen in der Atmosphäre haben ergeben, dass der Luftdruck bei einer Höhenzunahme von 5 500 m ziemlich genau auf jeweils den halben Wert sinkt.
– Geben Sie, ausgehend von $p(500)$ = 962 hPa, den Luftdruck für 6 000 m und für 11 500 m an.
– Erstellen Sie eine quadratische Funktion durch diese 3 Wertepaare.
– Vergleichen Sie den berechneten Wert der quadratischen Näherungsfunktion für h = 2 167 m mit dem Messwert für den Dobratsch.
– Geben Sie ungefähr an, in welchem Bereich die quadratische Näherung für die Beschreibung der Druckabhängigkeit von der Höhe sinnvoll ist.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $\frac{dp}{dh} = -k \cdot p$

Die Variablen p und h werden getrennt:

$\frac{dp}{p} = -k \cdot dh$

Beide Seiten werden integriert:

$\ln(p) = -k \cdot h + c$, c ist die Integrationskonstante des unbestimmten Integrals.

Man erhält mit der Definition der Konstanten $C = e^c$ die angegebene allgemeine Lösung der Differenzialgleichung:

$p(h) = C \cdot e^{-k \cdot h}$

b) $p(h) = C \cdot e^{-k \cdot h}$

$p(500) = 962$
$p(2\,167) = 790$

$962 = C \cdot e^{-500 \cdot k}$
$\underline{790 = C \cdot e^{-k \cdot 2\,167}}$

Lösung mittels Technologieeinsatz:

$k \approx 1{,}18 \cdot 10^{-4}$
$C \approx 1\,020{,}55$ (mit genauem Wert von k weitergerechnet, gerundet auf 2 Dezimalen)

$p(h) = 1\,020{,}55 \cdot e^{-0{,}000118 \cdot h}$

c)

h (m)	p (hPa)
500	962
6 000	481
11 500	240,5

$962 = 500^2 \cdot a + 500 \cdot b + c$
$481 = 6\,000^2 \cdot a + 6\,000 \cdot b + c$
$\underline{240{,}5 = 11\,500^2 \cdot a + 11\,500 \cdot b + c}$
Technologieeinsatz
$a = 4 \cdot 10^{-6}$ $b = -0{,}11329$ $c = 1\,017{,}65$

$p(h) = 4 \cdot 10^{-6} \cdot h^2 - 0{,}11329 \cdot h + 1\,017{,}65$

Vergleich mit dem Messwert auf dem Dobratsch:
$h = 2\,167$ m – berechneter Wert: $p = 790{,}93$ hPa; gemessen: 790 hPa. Die Näherung passt hier gut.

Die Näherungsfunktion versagt auf jeden Fall ab dem lokalen Minimum der quadratischen Funktion. Bei Höhenwerten, die größer als das Minimum (ab $h \approx 14\,230$ m) sind, würde der Druck mit zunehmender Höhe ansteigen.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) –
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 4
b) 3
c) 4

Thema: Physik

Quellen: –

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Halterungen für Glasfassaden

Aufgabennummer: B_024

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein Betrieb erzeugt Halterungen für Glasfassaden. Die monatlichen Produktionskosten für die Herstellung der Halterungen bis zu einer Grenze von $x = 5\,000$ Stück können durch folgende Funktion K beschrieben werden:

$K(x) = 0{,}00001 \cdot x^3 - 0{,}025 \cdot x^2 + 24 \cdot x + 3\,500$

x … Stückzahl mit $0 \le x \le 5\,000$
$K(x)$ ... Produktionskosten in € für x Stück

a) Der Betrieb möchte die Produktionskosten pro Stück möglichst gering halten. Die Produktionskosten pro Stück bezeichnet man als Stückkosten.

– Stellen Sie die Stückkostenfunktion $\overline{K}$ auf.
– Bestimmen Sie den lokalen Extremwert der Stückkostenfunktion $\overline{K}$.
– Zeigen Sie mithilfe der Differenzialrechnung, dass es sich bei diesem Extremum um ein lokales Minimum handelt.

b) Die Halterungen werden zu einem Preis von € 20 pro Stück verkauft.

– Stellen Sie die Gewinnfunktion G auf.
– Ermitteln Sie den Gewinnbereich.

c) Die Produktionskosten für ein anderes Produkt werden mit der Funktion K_1 beschrieben:

$K_1(x) = 0{,}00001 \cdot x^3 - 0{,}055 \cdot x^2 + 24 \cdot x + 3\,500$ mit $0 \le x \le 1\,000$

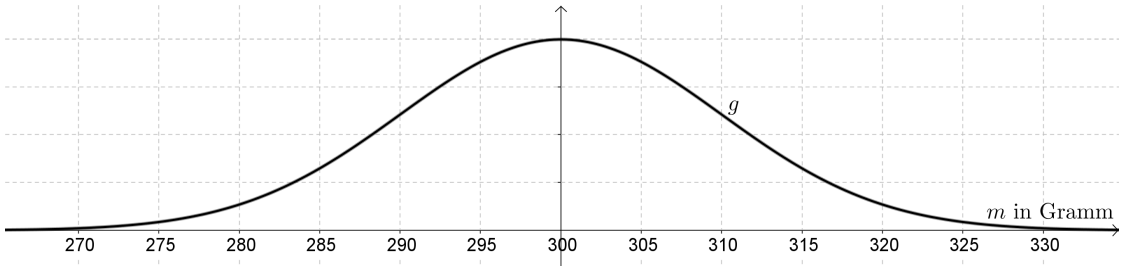
x … Stückzahl
$K_1(x)$ ... Produktionskosten in € für x Stück

– Zeichnen Sie den Graphen der Funktion K_1.
– Argumentieren Sie, warum die Funktion K_1 als Kostenfunktion nicht in Frage kommt.

d) Ein Abnehmer bezieht die Halterung in sehr großer Stückzahl. Er nimmt die Lieferung an, wenn er bei einer Zufallsstichprobe von 50 Stück höchstens eine fehlerhafte Halterung findet. Die Wahrscheinlichkeit für eine fehlerhafte Halterung in der gesamten Lieferung beträgt erfahrungsgemäß 2 %.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für die Annahme der Lieferung.
– Begründen Sie die Verwendung der von Ihnen gewählten Wahrscheinlichkeitsverteilung.

e) Die Masse *m* der Halterung in Gramm ist annähernd normalverteilt. Die nachstehende Grafik stellt die Dichtefunktion *g* dar.



– Lesen Sie die Parameter μ und σ aus der gegebenen Grafik ab.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Kostenfunktion: $K(x) = 0{,}00001 \cdot x^3 - 0{,}025 \cdot x^2 + 24 \cdot x + 3\,500$

Stückkostenfunktion: $\overline{K}(x) = \frac{K(x)}{x} = 0{,}00001 \cdot x^2 - 0{,}025 \cdot x + 24 + \frac{3\,500}{x}$

Ableitung: $\overline{K}'(x) = 0{,}00002 \cdot x - 0{,}025 - \frac{3\,500}{x^2}$

$\overline{K}'(x) = 0$ ergibt $x \approx 1\,346{,}519$.

Stückkosten: $\overline{K}(1\,347) \approx$ € 11,067

2. Ableitung: $\overline{K}''(x) = 0{,}00002 + \frac{7\,000}{x^3}$ und damit $\overline{K}''(1\,346{,}519) \approx 0{,}000023$

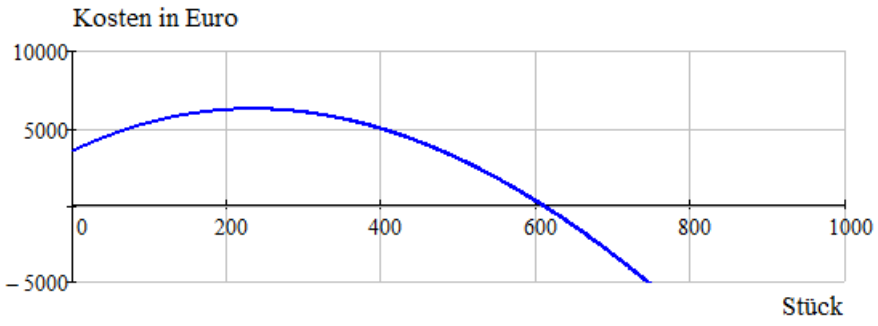
Die Stückkosten sind bei einer Produktionsmenge von 1 347 Stück am geringsten.
Die 2. Ableitung der Stückkosten ist positiv, daher liegt ein Minimum vor.

b) Gewinnfunktion: $G(x) = 20 \cdot x - K(x) = -0{,}00001 \cdot x^3 + 0{,}025 \cdot x^2 - 4 \cdot x - 3\,500$, $x \geq 0$

$G(x) = 0$ ergibt $x \approx 536{,}1$ und $x \approx 2\,253{,}6$.

Das ergibt einen Gewinnbereich von 537 Stück bis 2 253 Stück.

c)



Die Funktion kommt als Kostenfunktion nicht in Frage, weil ab etwa 600 Stück die Kosten negativ wären.

d) Unter der Annahme einer Binomialverteilung ist $P(X \leq 1) = 0{,}7357\ldots$
Die Wahrscheinlichkeit beträgt rund 73,6 %.
Gleichwertige Lösungen mit entsprechender Begründung werden anerkannt.

– Es gibt genau zwei Möglichkeiten für den Ausgang des Zufallsexperiments: Eine Halterung ist entweder fehlerfrei oder fehlerhaft.
– Die Ereignisse sind voneinander unabhängig: Zufallsstichprobe.
– Die Wahrscheinlichkeit p bleibt konstant: p = 2 %.

e) abgelesene Werte: $\mu = 300$ g, $\sigma = 10$ g
Ablesetoleranz für σ: [7; 13]

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 3 Funktionale Zusammenhänge
d) 5 Stochastik
e) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 2 Algebra und Geometrie
c) —
d) —
e) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) A Modellieren und Transferieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) B Operieren und Technologieeinsatz
e) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren, D Argumentieren und Kommunizieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz, D Argumentieren und Kommunizieren
c) D Argumentieren und Kommunizieren
d) D Argumentieren und Kommunizieren
e) —

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) leicht
c) leicht
d) mittel
e) leicht

Punkteanzahl:

a) 3
b) 3
c) 2
d) 2
e) 1

Thema: Wirtschaft

Quellen: —

Infrarotheizung

Aufgabennummer: B_030

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

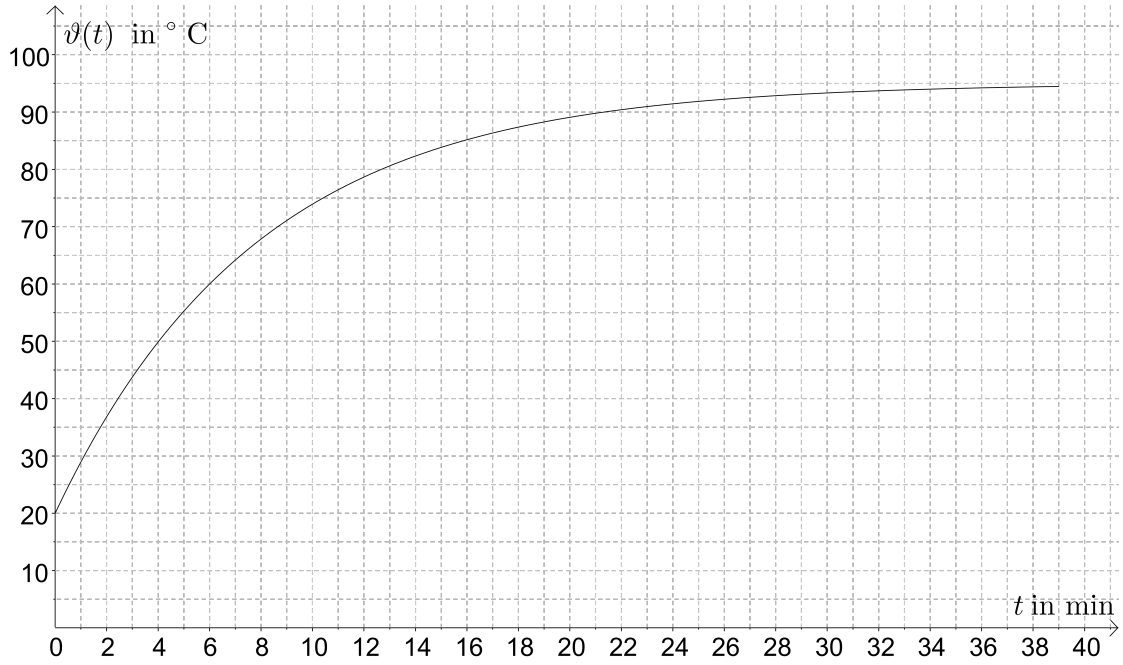
Heutzutage werden immer häufiger Infrarotheizungen in Wohnräumen eingesetzt.

a) Der Erwärmungsvorgang des Heizleiters der Infrarotheizung lässt sich durch die Funktion ϑ näherungsweise beschreiben:

$$\vartheta(t) = c \cdot (1 - e^{-\lambda \cdot t}) + b$$

t … Zeit nach Beobachtungsbeginn in Minuten (min)
λ … Zeitkonstante der Infrarotheizung in min^{-1}
$\vartheta(t)$ … Temperatur des Heizleiters der Infrarotheizung zur Zeit t in °C

– Ermitteln Sie mithilfe der nachstehenden Grafik die Parameter b, c und λ der Funktion ϑ.



– Begründen Sie anhand der Funktion ϑ, warum die Temperatur nie über $(c + b)$ °C ansteigen kann.

b) Der Erwärmungsvorgang der Vorderwand der Infrarotheizung lässt sich durch folgende Funktion ϑ_1 beschreiben:

$$\vartheta_1(t) = 20 \cdot (1 - e^{-0{,}07 \cdot t}) + 20$$

t … Zeit nach Beobachtungsbeginn in min
λ … Zeitkonstante der Infrarotheizung in min^{-1}
$\vartheta(t)$ … Temperatur des Heizleiters der Infrarotheizung zur Zeit t in °C

– Argumentieren Sie, warum die momentane Erwärmungsgeschwindigkeit theoretisch nie null wird.
– Berechnen Sie den Zeitpunkt nach Beobachtungsbeginn, zu dem die momentane Erwärmungsgeschwindigkeit 0,35 $\frac{°C}{min}$ beträgt.

c) Der Zusammenhang zwischen Temperatur und mittlerer Geschwindigkeit der Luftteilchen wird durch folgende Formel beschrieben:

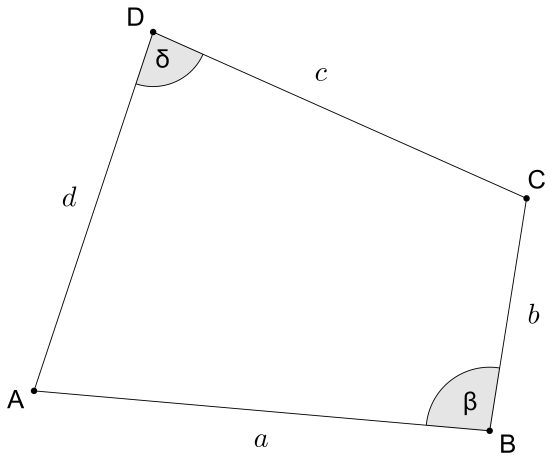
$$T = \frac{m \cdot \overline{v}^2}{3 \cdot k_B}$$

m … Masse der Luftteilchen in Kilogramm (kg)
$\overline{v}$ … mittlere Geschwindigkeit der Luftteilchen in Metern pro Sekunde (m/s)
k_B … Boltzmann-Konstante in Joule/Kelvin (J/K)
T … Temperatur in Kelvin (K)

– Erläutern Sie anhand der Formel für T, welche Änderung der Teilchengeschwindigkeit einer Verdoppelung der Temperatur entspricht.

d) Die Fläche an der Vorderseite der Infrarotheizung hat die Form eines Vierecks mit den Seitenlängen a = 71,4 cm, b = 36,9 cm und d = 59,1 cm. Die Winkel sind β = 94° und δ = 84,3°.

– Berechnen Sie mithilfe der nebenstehenden Skizze den Flächeninhalt des Vierecks.
– Berechnen Sie mithilfe der Skizze den Umfang des Vierecks.



Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) aus der Grafik ablesen:

$P_1 = (0|20) \Rightarrow b = 20$

Grenzwert der Funktion ϑ für $t \to \infty$ ist 95 $\Rightarrow$ $c = 95 - 20 = 75$

$P_2 = (6|60) \Rightarrow 60 = 75 \cdot (1 - e^{-\lambda \cdot 6}) + 20$
$\lambda = 0{,}127...$

$\vartheta(t) = 75 \cdot (1 - e^{-0{,}127 \cdot t}) + 20$

Wenn $t \to \infty$, geht $e^{-\lambda \cdot t} \to 0$. $\Rightarrow$ Die theoretisch maximal erreichbare Temperatur beträgt $(c + b)$ °C.

Auch andere, gleichwertige Argumentationen sind zulässig.

b) Die 1. Ableitung beschreibt die momentane Erwärmungsgeschwindigkeit:
$\vartheta_1'(t) = 1{,}4 \cdot e^{-0{,}07 \cdot t}$
$1{,}4 \cdot e^{-0{,}07 \cdot t} = 0$

Da die Funktionswerte einer Exponentialfunktion immer positiv sind, kann der Term $1{,}4 \cdot e^{-0{,}07 \cdot t}$ nie null werden.

Auch andere, gleichwertige Argumentationen sind zulässig.

$\vartheta_1'(t) = 1{,}4 \cdot e^{-0{,}07 \cdot t}$
$1{,}4 \cdot e^{-0{,}07 \cdot t} = 0{,}35$
$t = 19{,}804\ldots$

Die momentane Erwärmungsgeschwindigkeit ist nach etwa 19,8 min 0,35 $\frac{°C}{min}$.

c) $T = \frac{m \cdot \bar{v}^2}{3 \cdot k_B}$
$\sqrt{\frac{T \cdot 3 \cdot k_B}{m}} = \bar{v}$

Eine Verdopplung der Temperatur erhöht die Geschwindigkeit der Luftteilchen um den Faktor $\sqrt{2} \approx 1{,}4142\ldots$

d) $e = \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\beta)}$

$e = 82{,}626\ldots$ cm

$\gamma_1 = \arcsin\left(\frac{\sin(\delta) \cdot d}{e}\right)$

$\gamma_1 = 45{,}375\ldots°$

$\alpha_1 = 180° - (\gamma_1 + \delta)$

$\alpha_1 = 50{,}324\ldots°$

$A_1 = \frac{a \cdot b \cdot \sin(\beta)}{2}$

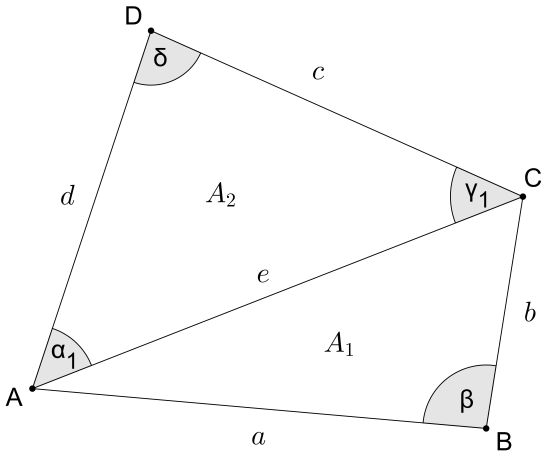
$A_1 = 1\,314{,}121\ldots$ cm^2

$A_2 = \frac{d \cdot e \cdot \sin(\alpha_1)}{2}$

$A_2 = 1\,879{,}232\ldots$ cm^2

$A = A_1 + A_2$

$A \approx 3\,193{,}35$ cm^2



Die Oberfläche der Vorderwand der Infrarotheizung beträgt ca. 3 193,35 cm^2.

$c = \frac{d \cdot \sin(\alpha_1)}{\sin(\gamma_1)}$

$c = 63{,}911\ldots$ cm

$U = a + b + c + d$

$U \approx 231{,}3$ cm

Der Umfang der Vorderwand der Infrarotheizung beträgt ca. 231,3 cm.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 4 Analysis
c) 2 Algebra und Geometrie
d) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) 2 Algebra und Geometrie
c) —
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) D Argumentieren und Kommunizieren
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) B Operieren und Technologieeinsatz, C Interpretieren und Dokumentieren
c) —
d) A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) leicht
d) mittel

Punkteanzahl:

a) 4
b) 3
c) 1
d) 3

Thema: Physik

Quelle: http://de.wikipedia.org/wiki/Temperatur

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Herstellungskosten (2)

Aufgabennummer: B_016

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Für ein Produkt lautet die quadratische Kostenfunktion wie folgt:

$$K(x) = 0{,}1x^2 + 6x + 40$$

$K(x)$ … Gesamtkosten von x Mengeneinheiten in Geldeinheiten (GE)
x … erzeugte Menge in Mengeneinheiten (ME)

Der Betrieb erzeugt pro Tag höchstens 30 ME dieses Produkts.

a) – Interpretieren Sie die gegebene Kostenfunktion hinsichtlich der folgenden mathematischen Eigenschaften:
- sinnvoller Definitionsbereich
- Monotonie und Krümmungsverhalten
- Fixkosten

b) – Ermitteln Sie aus der gegebenen Gleichung, wie viele ME produziert wurden, wenn Kosten von 150 GE angefallen sind.
– Ermitteln Sie, wie hoch die Kosten für die Produktion von 10 ME sind.
– Stellen Sie die Kostenfunktion grafisch dar und zeichnen Sie die beiden berechneten Wertepaare ein.

c) – Stellen Sie die Stückkostenfunktion (= Durchschnittskostenfunktion) auf.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

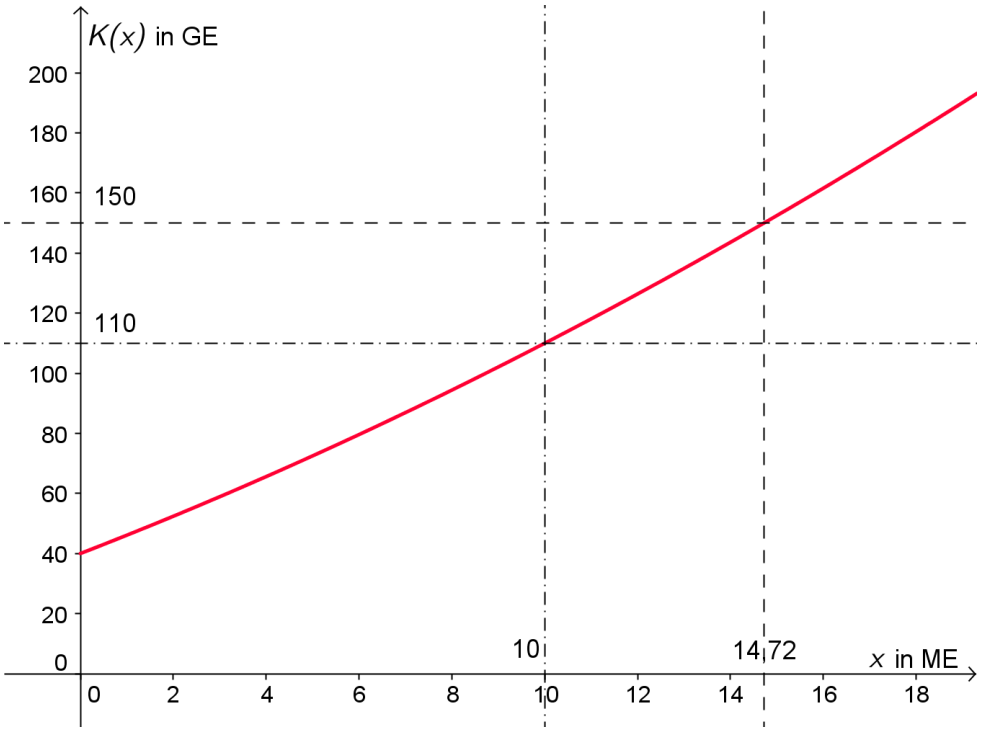
Möglicher Lösungsweg

a) Der Definitionsbereich ist [0;30].

Die Kostenfunktion ist im angegebenen Definitionsbereich streng monoton steigend.
Die Kosten steigen progressiv, der Graph der Kostenfunktion hat im betrachteten Bereich eine positive Krümmung.

Die Fixkosten betragen $K(0) = 40$ GE.

b) Bei Kosten von 150 GE werden rund 14,72 ME erzeugt.
Die Herstellung von 10 ME kostet 110 GE.



c) $\frac{K(x)}{x} = \overline{K}(x) = 0{,}1x + 6 + \frac{40}{x}$

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) 4 Analysis

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) –

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) leicht
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 3
b) 3
c) 1

Thema: Wirtschaft

Quellen: –

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Verkehrsunfall

Aufgabennummer: B_002

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Auf der Autobahn bei Imst ereignete sich ein Verkehrsunfall. Ein Motorradfahrer prallte nach einer 30 Meter (m) langen Bremsung mit einer Geschwindigkeit von 80 Kilometern/Stunde (km/h) in ein stehendes Auto. Eine konstante Verzögerung von 5 Metern/Sekunde^2 (m/s^2) wird angenommen.

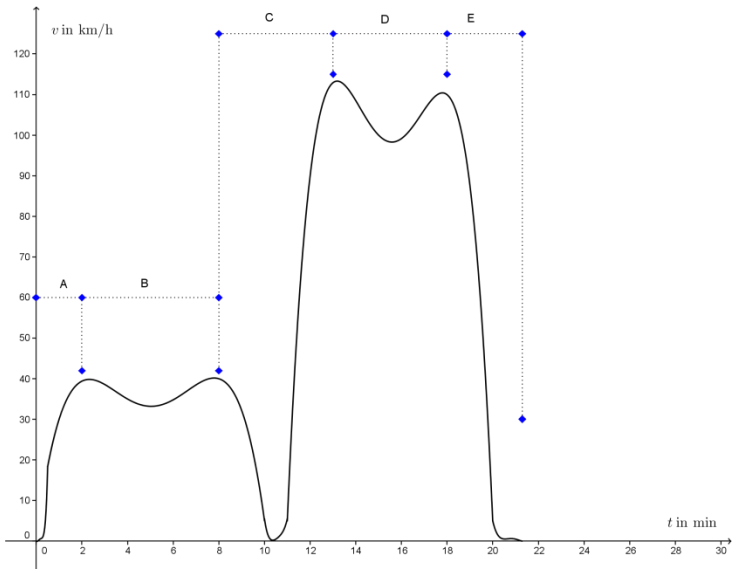
$$s(t) = v_0 \cdot t - \frac{a}{2} \cdot t^2$$

t ... Zeit in Sekunden (s)
$s(t)$ ... zurückgelegter Bremsweg zum Zeitpunkt t

a) Berechnen Sie die Geschwindigkeit v_0 in km/h zu Beginn der Bremsung und die Zeitdauer der Bremsung t in s.

b) Ein anderer Bremsvorgang mit gleicher Verzögerung startet zum Zeitpunkt $t = 0$ s mit einer Geschwindigkeit von $v_0 = 29$ m/s zu Beginn der Bremsung und $t = 2$ s für die Zeitdauer der Bremsung.
– Zeichnen Sie die Graphen der jeweiligen Funktionen im Weg-Zeit-Diagramm, im Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm und im Beschleunigung-Zeit-Diagramm.
– Geben Sie die mittlere Änderungsrate des Weges während der ersten Sekunde an.
– Erklären Sie deren physikalische Bedeutung.

c) Der Rettungswagen, der zum Unfallort gerufen wird, fährt zu einem Zeitpunkt $t_1 = 0$ min vom Krankenhaus in Zams ab und kommt zu einem Zeitpunkt $t_2 = 21{,}3$ min zum Unfallort. Das nebenstehende Diagramm stellt die geglättete Geschwindigkeit des Krankenwagens v in km/h in Abhängigkeit von der Zeit t in min dar.



– Beschreiben Sie das Diagramm in den angegebenen Abschnitten A bis E hinsichtlich der Geschwindigkeitsänderung.
– Zeichnen Sie für den Abschnitt A skizzenhaft in einem Weg-Zeit-Diagramm den Graphen, der den zurückgelegten Weg s in km in Abhängigkeit von der Zeit t in min des Krankenwagens angibt.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)

$s(t) = v_0 \cdot t - \frac{a}{2} \cdot t^2$

$s'(t) = v(t) = v_0 - a \cdot t$

Einsetzen der gegebenen Werte in die Geschwindigkeitsfunktion:

$\frac{200}{9} = v_0 - 5 \cdot t$; 80 km/h = $\frac{200}{9}$ m/s = $22{,}\overline{2}$ m/s

umformen:

$v_0 = \frac{200}{9} + 5 \cdot t$

in die Ortsfunktion einsetzen:

$30 = \left(\frac{200}{9} + 5 \cdot t\right) \cdot t - 2{,}5 \cdot t^2$

Daraus folgt eine quadratische Gleichung:

$30 = \frac{200}{9} \cdot t + 2{,}5 \cdot t^2$

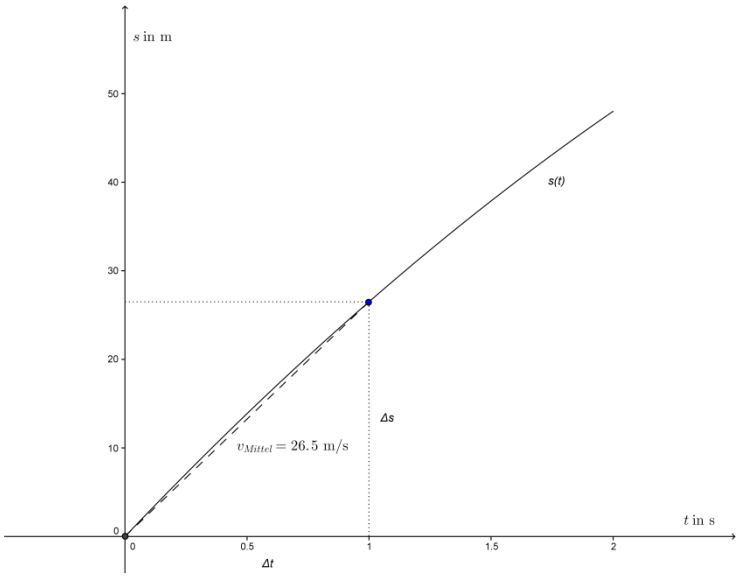
Durch Lösen dieser ergibt sich:

t = 1,19… s ≈ 1,2 s

v_0 = 28,174… m/s ≈ 101,4 km/h

Der Motorradfahrer war zu Beginn der Bremsung mit einer Geschwindigkeit von 101,4 km/h unterwegs. Die Bremsung dauerte 1,2 s.

b) Weg-Zeit-Diagramm



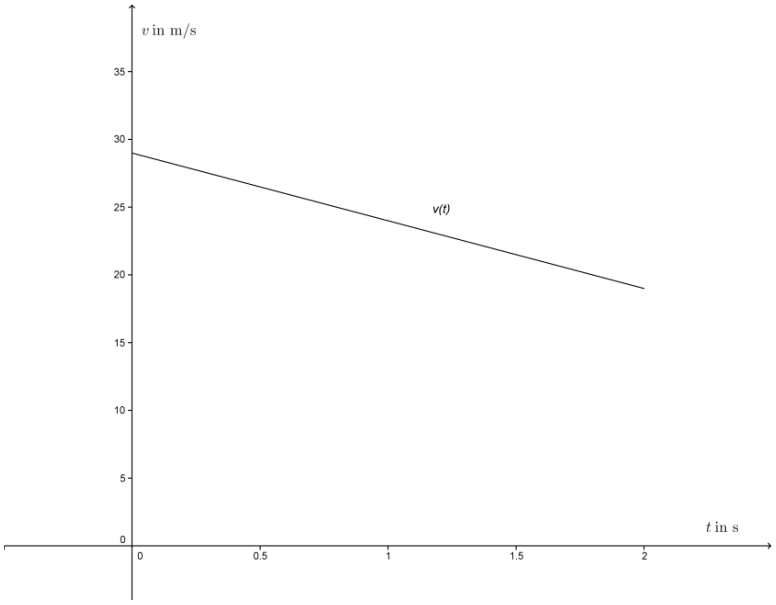
Die mittlere Änderungsrate des Weges während der ersten Sekunde entspricht der eingezeichneten Sekantensteigung und gibt die mittlere Geschwindigkeit während der ersten Sekunde an.
Die mittlere Geschwindigkeit wird mithilfe des Differenzenquotienten aus dem Streckenabschnitt Δs durch die Zeitdifferenz Δt berechnet.

Δs = 26,5 m (Ablesung nicht ganz genau möglich; Toleranz 1 m)

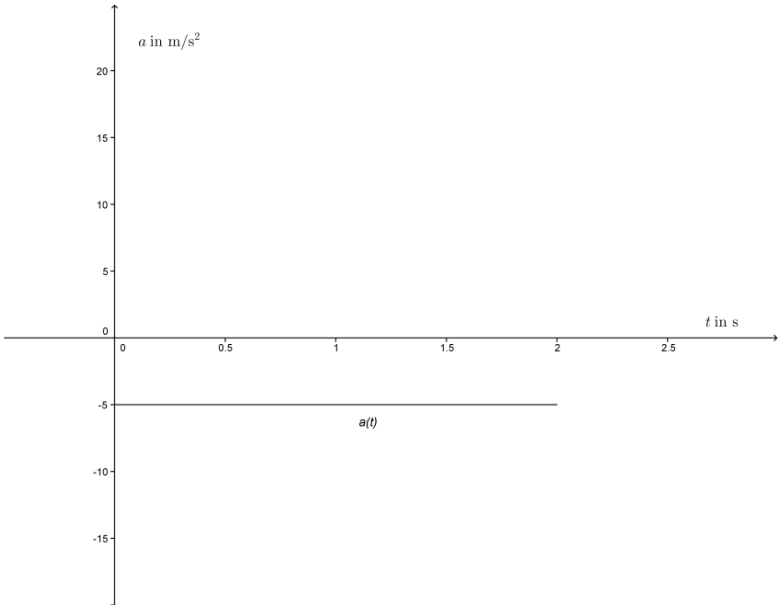
Δt = 1 s

$v_{\text{mittel}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{26{,}5\text{ m}}{1\text{ s}}$ = 26,5 m/s

Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm



Beschleunigung-Zeit-Diagramm



c) Abschnitte *A* bis *E*

A: Die Geschwindigkeit nimmt in den ersten beiden Minuten auf ca. 40 km/h zu.

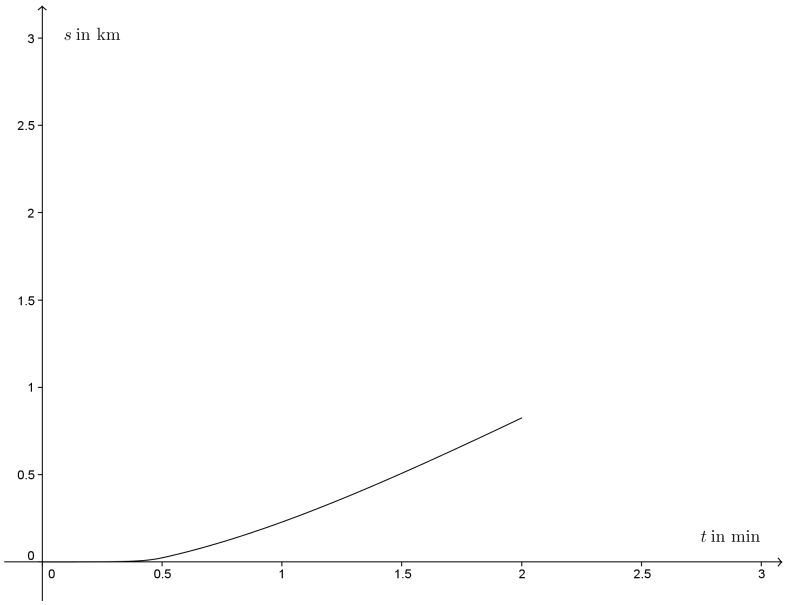
B: Die anfängliche Geschwindigkeit beträgt ca. 40 km/h, nimmt anschließend auf ca. 35 km/h ab und kann wieder auf ca. 40 km/h erhöht werden.

C: Der Rettungswagen verringert in ca. 2 Minuten die Geschwindigkeit, dann bleibt er für ca. 30 Sekunden stehen. Danach beschleunigt der Rettungswagen, die Geschwindigkeit nimmt in ca. 1,5 Minuten auf ca. 115 km/h zu.

D: Die anfängliche Geschwindigkeit beträgt ca. 115 km/h, nimmt anschließend auf ca. 100 km/h ab und kann wieder auf 110 km/h erhöht werden.

E: Vor dem Unfallort verringert der Rettungswagen in ca. 1,5 Minuten seine Geschwindigkeit auf Schritttempo. Nach 1 Minute Fahrt in Schritttempo kommt der Rettungswagen am Unfallort zum Stillstand.

Weg-Zeit-Diagramm



(Hinweis: Eine angemessene Ungenauigkeit beim Ablesen der Werte wird toleriert.)

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 4 Analysis
c) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:

a) schwer
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 4
b) 4
c) 4

Thema: Physik

Quellen: –

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Regentage in Gmunden

Aufgabennummer: B_253

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

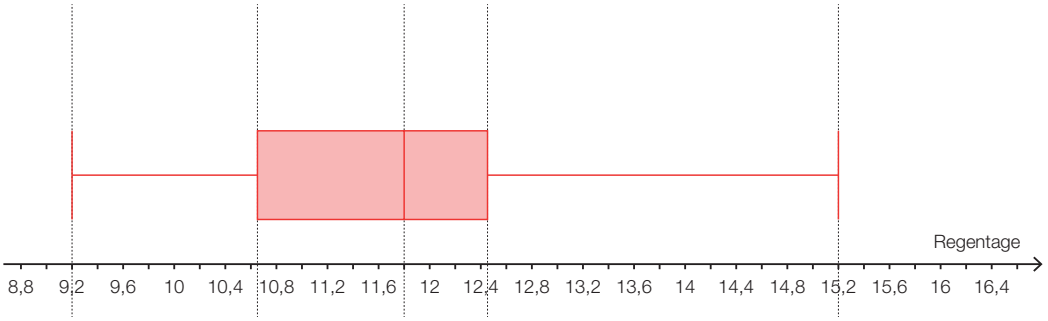
Die angeführte Tabelle zeigt die durchschnittliche Anzahl der Regentage in Gmunden (Oberösterreich) für die Monate Juni bis September.

Monat	durchschnittliche Anzahl der Regentage
Juni	15,2
Juli	13,8
August	12,3
September	11,0

a) Eine Familie macht im Juli Sommerurlaub in Gmunden und bleibt 5 Tage.
– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass während ihrer Urlaubstage nicht mehr als ein Regentag vorkommt. Vorausgesetzt wird dabei eine annähernde Unabhängigkeit der Regentage.

b) In einem Hotel kostet eine bestimmte Zimmerkategorie € 75 pro Übernachtung. Der Hotelier hat für den Monat August nun folgende Idee:
Hotelgäste sollen für jeden Regentag nur mehr die Hälfte bezahlen. Damit der durchschnittliche Zimmerpreis von € 75 erhalten bleibt, erhöht der Hotelier den offiziellen Zimmerpreis.
– Berechnen Sie, wie hoch er den neuen Zimmerpreis ansetzen muss.

c) Die untenstehende Grafik zeigt einen Boxplot über die durchschnittliche Anzahl von Regentagen pro Monat während eines Jahres in Gmunden.



– Lesen Sie aus dem Boxplot folgende Kenngrößen ab: Spannweite, Median, unteres Quartil, oberes Quartil.
– Interpretieren Sie die Lage des Medians in Bezug auf die Verteilung der Daten.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein.

Möglicher Lösungsweg

a) Die Anzahl der Regentage ist 0 oder 1.
$P(0 \text{ oder } 1) = P(X = 0) + P(X = 1)$.
Die Wahrscheinlichkeiten können mit der Formel für die Binomialverteilung ausgerechnet werden.
Wahrscheinlichkeit für einen Regentag: $p_R = \frac{13{,}8}{31} = 0{,}445$
$P(X = 0) = P(\text{„nur regenfreie Tage“}) = (1 - 0{,}445)^5 = 0{,}053$
$P(X = 1) = 5 \cdot 0{,}445 \cdot (1 - 0{,}445)^4 = 0{,}211$
$P(X = 0) + P(X = 1) = 0{,}264$
Mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,264 (bzw. 26,4 %) wird die Familie nicht mehr als einen Regentag in ihrem Urlaub haben.
(Eine Lösung auf der Basis 1 Monat = 30 Tage kann auch akzeptiert werden.)

b) Formel für den Erwartungswert: $E(X) = \sum x_i \cdot p_i$
A … Preis des Angebots
Wahrscheinlichkeit für einen Regentag im August: $p_R = \frac{12{,}3}{31} = 0{,}397$
$75 = 0{,}397 \cdot A \cdot 0{,}5 + (1 - 0{,}397) \cdot A$
$75 = 0{,}8015 \cdot A$
$A = 93{,}56$
Der Hotelier müsste einen Preis von € 93,56 pro Übernachtung veranschlagen, um mit einem durchschnittlichen Preis von € 75 pro Übernachtung auszusteigen.

c) Die Spannweite liegt zwischen 9,2 und 15,2 Regentagen, sie beträgt also 6 Regentage. Der Median liegt bei 11,8 Regentagen, das untere Quartil etwa bei 10,6 und das obere Quartil bei 12,4 Regentagen.
Der Median liegt nicht in der Mitte des Boxplots, sondern näher am linken Rand. Die Verteilung der Daten ist daher nicht symmetrisch. Die Daten rechts vom Median sind breiter gestreut.
(Für die Kennzahlen können aufgrund der Ablesegenauigkeit auch ähnliche Werte angegeben werden.)

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 5 Stochastik
c) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) A Modellieren und Transferieren
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) —

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) leicht

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2
c) 2

Thema: Tourismus

Quelle: Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik (ZAMG)

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Kraftstoffverbrauch

Aufgabennummer: B_176

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Der Kraftstoffverbrauch eines Kraftfahrzeugs ist unter anderem abhängig von der gefahrenen Geschwindigkeit.

v … Geschwindigkeit in Kilometern pro Stunde (km/h)
$K(v)$ … Kraftstoffverbrauch bei einer konstanten Geschwindigkeit v in Litern pro 100 Kilometer (L/100 km)

a) Die nachstehende Tabelle zeigt den bei einer Testfahrt festgestellten Kraftstoffverbrauch eines LKWs bei verschiedenen Geschwindigkeiten.

v in km/h	30	50	60
$K(v)$ in L/100 km	10	9,4	11,8

Der Kraftstoffverbrauch bei dieser Testfahrt kann in einem Bereich von 30 km/h bis 70 km/h annähernd durch eine quadratische Funktion der Form $K(v) = a \cdot v^2 + b \cdot v + c$ beschrieben werden.

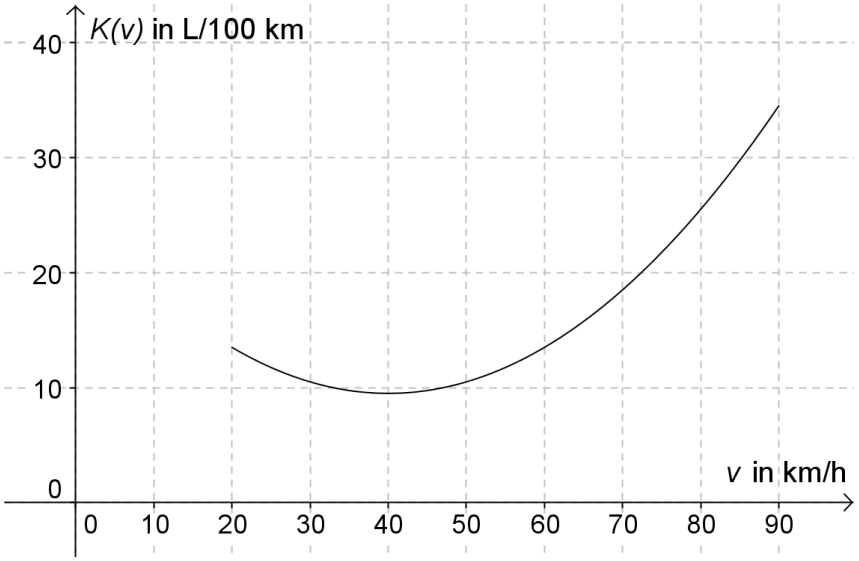
– Stellen Sie ein Gleichungssystem für die Berechnung der Koeffizienten a, b und c auf.
– Ermitteln Sie die Funktionsgleichung $K(v)$.

b) Der Kraftstoffverbrauch eines Kleinlastwagens lässt sich im Intervall [30 km/h; 70 km/h] näherungsweise durch folgende Funktion K beschreiben:

$K(v) = 0{,}005 \cdot v^2 - 0{,}4 \cdot v + 14{,}3$

– Berechnen Sie diejenige Geschwindigkeit, bei der der Kraftstoffverbrauch minimal ist.

c) Die nachstehende Grafik zeigt den Kraftstoffverbrauch eines Kleintransporters in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit beim Fahren mit gleichbleibendem Gang.



– Veranschaulichen Sie in der Grafik die momentane Änderungsrate des Kraftstoffverbrauchs bei einer Geschwindigkeit von 60 km/h.
– Lesen Sie die momentane Änderungsrate des Kraftstoffverbrauchs bei 60 km/h ab.

d) Bei einem Test eines PKWs ergaben sich für den 4. Gang folgende Verbrauchswerte:

v in km/h	80	90	100	110	120
$K(v)$ in L/100 km	5,1	5,65	6,25	6,9	7,6

Zur Beschreibung des Kraftstoffverbrauchs kann man ab 80 km/h ein Modell verwenden, bei dem der Verbrauch mit zunehmender Geschwindigkeit konstant steigt.

– Argumentieren Sie, welcher Funktionstyp diesem Modell gerecht wird.
– Ermitteln Sie die Gleichung der zugehörigen Funktion mittels Regression.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

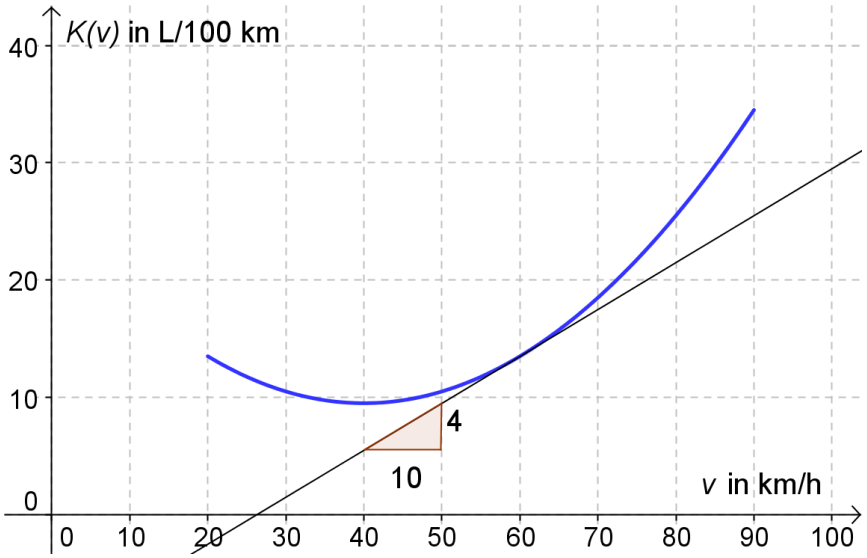
a) $10 = 30^2 \cdot a + 30 \cdot b + c$
$9{,}40 = 50^2 \cdot a + 50 \cdot b + c$
$11{,}8 = 60^2 \cdot a + 60 \cdot b + c$

$K(v) = 0{,}009 \cdot v^2 - 0{,}75 \cdot v + 24{,}4$

b) $K'(v) = 0{,}01 \cdot v - 0{,}4 = 0$
$v = 40$
$K''(v) > 0$

Bei 40 km/h ist der Kraftstoffverbrauch minimal.

c)



Die momentane Änderung des Kraftstoffverbrauchs bei einer Geschwindigkeit von 60 km/h beträgt 0,4 L/100 km pro km/h.

Eine angemessene Ungenauigkeit wird toleriert.

d) Der passende Funktionstyp ist eine lineare Funktion, da die Steigung konstant ist.

Berechnung eines linearen Modells mittels Technologieeinsatz:

$K(v) = 0{,}0625 \cdot v + 0{,}05$

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 4 Analysis
c) 4 Analysis
d) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) —
c) —
d) 5 Stochastik

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) A Modellieren und Transferieren
d) D Argumentieren und Kommunizieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) —
c) C Interpretieren und Dokumentieren
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel
d) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 1
c) 2
d) 2

Thema: Alltag

Quellen: —

Großtrappen

Aufgabennummer: B_131

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein LIFE-Projekt in Ostösterreich widmet sich dem Schutz der Großtrappen, einer gefährdeten Vogelart. Zu Beginn des Beobachtungszeitraums wurden in Niederösterreich und im Burgenland 140 Tiere gezählt. 5 Jahre später waren es bereits 244.

a) – Argumentieren Sie, warum ein lineares bzw. ein unbegrenztes exponentielles Wachstumsmodell die Entwicklung der Tierpopulation zwar beschreibt, dies aber langfristig gesehen nicht der Realität entspricht.

b) Nehmen Sie ein begrenztes exponentielles Wachstum mit einer Obergrenze von $G = 1\,000$ an. Es gilt folgende Funktion:

$$y(t) = G - c \cdot e^{\lambda \cdot t}$$

t … Zeitdauer in Jahren (a)
$y(t)$ … Anzahl der Tiere nach t Jahren
c … Anzahl der Tiere, um die der Anfangsbestand bis zur Obergrenze zunehmen kann

– Berechnen Sie den Stand der Population nach 20 Jahren unter der Voraussetzung, dass die Entwicklung der Vogelpopulation diesem Modell folgt.

c) In der Realität wird das Wachstum der Großtrappen-Population besser durch die folgende logistische Funktion beschrieben:

$$y(t) = \frac{1\,000}{1 + 6{,}143 \cdot e^{-0{,}1369 \cdot t}}$$

t … Zeitdauer in Jahren (a)
$y(t)$ … Anzahl der Tiere nach t Jahren

– Stellen Sie diese Funktion grafisch dar.
– Lesen Sie aus der Grafik ungefähr ab, wann sich der Bestand seit dem Beginn der Beobachtungszeit auf 280 Tiere verdoppelt hat.
– Überprüfen Sie durch Ablesung des Zeitraums bis zur nächsten Verdopplung, ob die Zeitdauer, in der sich der jeweilige Bestand an Tieren verdoppelt, in diesem Modell konstant bleibt.

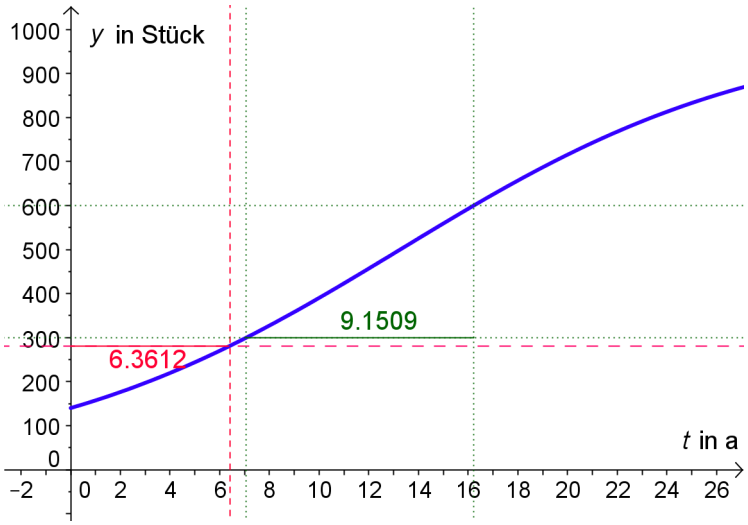
Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Das Wachstum hängt vom Lebensraum und den darin vorhandenen Lebensbedingungen für Großtrappen ab. Langfristig gesehen wird das räumlich begrenzte Schutzgebiet zwar die Vermehrung der Tiere fördern, aber auch nach oben hin einschränken.
Daher kann die Zahl der Vögel zwar anfänglich möglicherweise nach einem linearen oder einem unbegrenzten exponentiellen Wachstum verlaufen, aber nicht unendlich steigen, wie es bei diesen beiden Wachstumsmodellen der Fall wäre.

b) $140 = 1\,000 - c \cdot e^{0} \rightarrow c = 860$
$244 = 1\,000 - c \cdot e^{5 \cdot \lambda} \rightarrow \lambda = -0{,}02577\ldots \approx -0{,}0258$
Funktionsgleichung: $y(t) = 1\,000 - 860 \cdot e^{-0{,}0258 \cdot t}$
Prognose $t = 20$ Jahre → rund 486 Tiere

c)



– Die Verdopplung vom Anfangsbestand von 140 auf 280 Tiere benötigt etwas mehr als 6 Jahre.
– Die Verdopplung von 300 auf 600 Tiere benötigt nach diesem Modell einen Zeitraum von etwas mehr als 9 Jahren.
Bei diesem Modell ist die Dauer, in der sich ein Bestand verdoppelt, nicht konstant.

Ableseungenauigkeiten werden toleriert, insbesondere bei Grafikrechnern und Handskizzen.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) –
b) A Modellieren und Transferieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 1
b) 4
c) 3

Thema: Biologie

Quellen: –

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Skylab (1)

Aufgabennummer: B_063

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

In der US-amerikanischen Weltraumstation *Skylab* wurde in den 1970er-Jahren eine Reihe von naturwissenschaftlichen Experimenten durchgeführt.

Im Weltraum ist ein Objekt schwerelos, seine Masse bleibt aber unverändert. Die Masse kann im Weltraumlabor mithilfe einer frei aufgehängten Feder bestimmt werden. Hängt man ein Objekt an die Feder, so hängt die Schwingungsfrequenz des Federpendels von der Masse ab.

$T = \frac{1}{f}$ $\qquad$ $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$

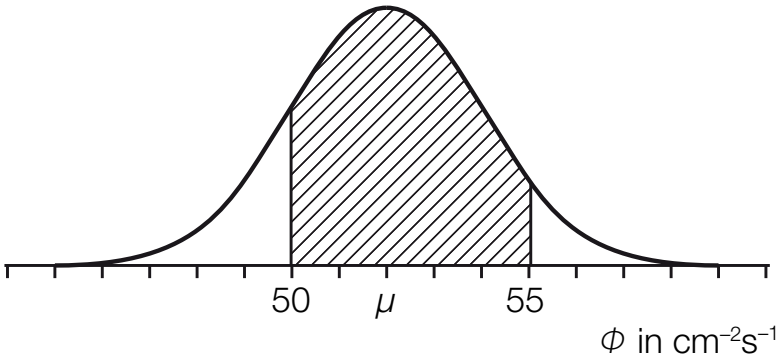
T … Schwingungsdauer in Sekunden (s)
f … Frequenz in Hertz (Sekunden^{-1} (s^{-1}))
m … Pendelmasse in Kilogramm (kg)
k … Federkonstante in Newton pro Meter (N/m)

a) – Stellen Sie die Abhängigkeit der Masse m von der Frequenz f im Intervall [0,4; 3,4] jeweils für die Federkonstanten k_1 = 600 N/m und k_2 = 300 N/m in einem Koordinatensystem dar.
– Beschreiben Sie die Eigenschaften der Potenzfunktionen.
– Interpretieren Sie den Einfluss der Federkonstanten k auf die Schwingungsfrequenz f unter der Voraussetzung, dass m konstant bleibt.

b) In der Weltraumstation *Skylab* wurde unter anderem auch die Masse eines Astronauten bestimmt.
Die Frequenz der Feder mit angehängter Masse m_1, aber ohne Astronaut betrug f_1. Die Frequenz der Feder, an die zusätzlich zur Masse m_1 der Astronaut gehängt wurde, betrug f_2.

– Dokumentieren Sie in Worten, wie man mithilfe der oben angegebenen physikalischen Zusammenhänge ausgehend von den gemessenen Frequenzen f_1 und f_2 eine Formel für die Masse des Astronauten ermitteln kann.

c) In einem Experiment zur Teilchenphysik wurde die Neutronenflussdichte ϕ in der Weltraumstation mithilfe von mehreren Neutronendetektoren gemessen.
Man kann davon ausgehen, dass die Neutronenflussdichte in der Raumstation normalverteilt ist mit den Parametern $\mu = 52\ \text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}$ und $\sigma = 3\ \text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}$.
(Die Neutronenflussdichte ϕ ist die Anzahl der pro Zeiteinheit t durch eine Flächeneinheit hindurchtretenden Neutronen. Ihre übliche Maßeinheit ist Neutronen pro Quadratzentimeter und Sekunde ($\text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}$).)



– Interpretieren Sie die in der obigen Gauß'schen Glockenkurve schraffierte Fläche, indem Sie das zugehörige Ereignis in Worten beschreiben.
– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses.

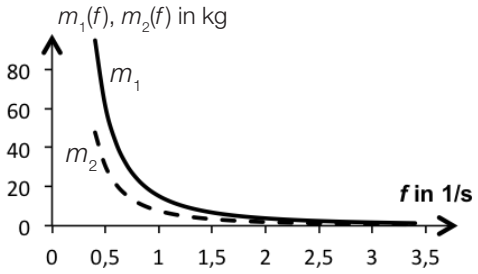
Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $k_1 = 600$ N/m: $m_1(f) = \frac{150}{\pi^2 f^2}$

$k_2 = 300$ N/m: $m_2(f) = \frac{75}{\pi^2 f^2}$

Es handelt sich um Potenzfunktionen mit geraden, negativen Exponenten. Ihre Graphen sind Hyperbeln.



Bei gleicher Masse ist die Schwingungsfrequenz f bei kleinerer Federkonstante geringer.

b) Ausgehend von der Formel $\frac{1}{f} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$ stellt man die Formeln für die Massen m_1 und m_2 auf:

Masse ohne Astronaut: $m_1 = k \cdot \left(\frac{1}{2\pi \cdot f_1}\right)^2$

Masse mit Astronaut: $m_2 = k \cdot \left(\frac{1}{2\pi \cdot f_2}\right)^2$

Aus der Differenz lässt sich die Formel für die Astronautenmasse berechnen:

$m = m_2 - m_1 = \frac{k}{4\pi^2} \cdot \left(\frac{1}{f_2^{\,2}} - \frac{1}{f_1^{\,2}}\right)$

c) Es handelt sich um das Ereignis, dass die an einem zufälligen Ort gemessene Neutronendichte in der Raumstation zwischen 50 $cm^{-2}s^{-1}$ und 55 $cm^{-2}s^{-1}$ liegt.

$P(50 < X < 55) = \Phi(55) - \Phi(50) = 0{,}8413\ldots - 0{,}2524\ldots = 0{,}5888\ldots \approx 58{,}9\ \%$

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren, B Operieren und Technologieeinsatz
b) A Modellieren und Transferieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 4
b) 2
c) 2

Thema: Physik

Quelle: http://history.nasa.gov/SP-401/sp401.htm

Weinhandel

Aufgabennummer: B_121

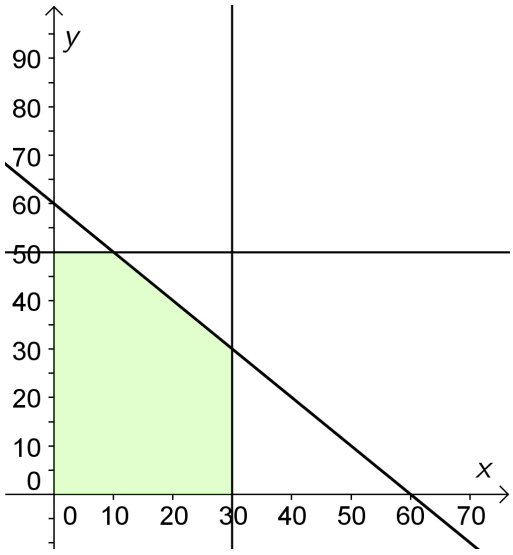
Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Zwei Weinhändler bieten je eine spezielle Sorte von Rot- und Weißwein als Sonderangebot in einem Festzelt an. Die Zahl der an diesem Tag verkauften Weißweinflaschen ist mit x bezeichnet, jene der Rotweinflaschen mit y.

a) Der Weinhändler Weininger kann erfahrungsgemäß bei diesem Fest höchstens 20 Flaschen pro Sorte verkaufen. Er kann an diesem Tag aber nur höchstens 30 Flaschen bei seinem Verkaufsstand unterbringen.
Der Gewinn beträgt bei einer Flasche Weißwein € 1,50 und bei einer Flasche Rotwein € 2,50.
Der Händler möchte die Lieferung so gestalten, dass er maximalen Gewinn hat.

– Stellen Sie alle notwendigen Ungleichungen auf, die diese Bedingungen beschreiben.
– Stellen Sie die Gleichung der Zielfunktion für den Gewinn auf.

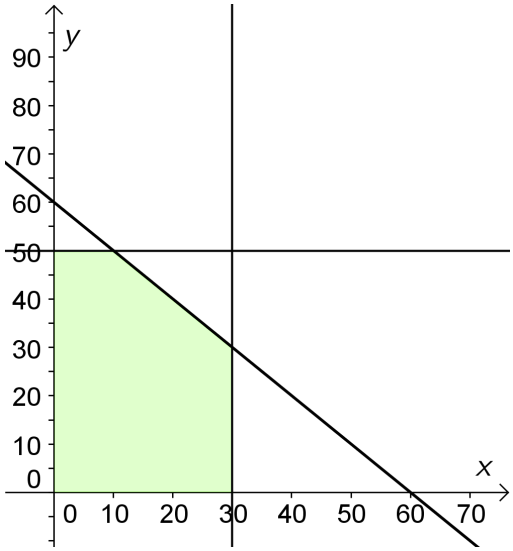
b) Der Verkauf von Weiß- und Rotweinflaschen des Weinhändlers Fassbinder bei diesem Fest wird durch folgende Grafik veranschaulicht:



– Lesen Sie die Ungleichungen ab, die den Lösungsbereich bestimmen.
– Interpretieren Sie aus der Grafik, wie viele Weiß- und Rotweinflaschen dieser Händler jeweils höchstens zu seinem Stand im Festzelt mitnehmen sollte.

c) Beim Weinhändler Fassbinder beträgt die Zielfunktion für den Gewinn $Z(x,y) = 2x + 4y$.

– Zeichnen Sie die Gerade, für die der optimale Wert der Zielfunktion angenommen wird, in die nachstehende Grafik ein.



– Berechnen Sie mithilfe der passenden Werte aus der Grafik den maximalen Gewinn.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

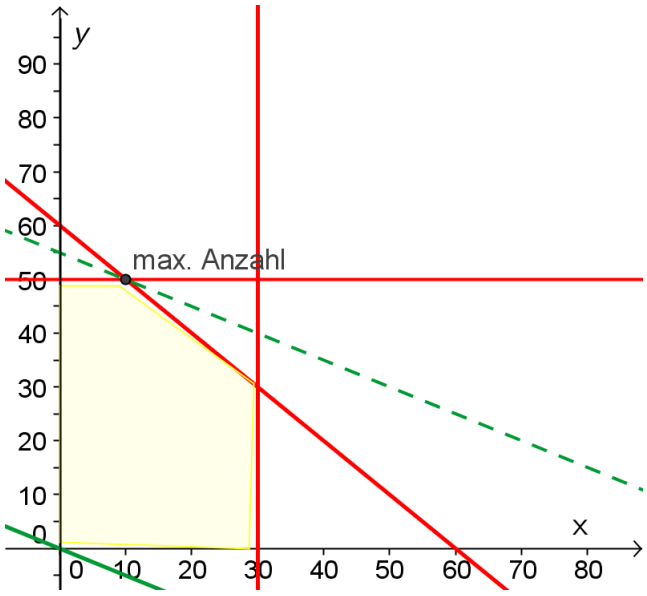
Möglicher Lösungsweg

a) $x \geq 0$
$x \leq 20$
$y \geq 0$
$y \leq 20$
$\underline{x + y \leq 30}$
$Z(x,y) = 1{,}5x + 2{,}5y \rightarrow \max.$

b) $x \leq 30$ und $x \geq 0$
$y \leq 50$ und $y \geq 0$
$x + y \leq 60$

Fassbinder verkauft erfahrungsgemäß an diesem Festtag höchstens 30 Flaschen Weißwein und 50 Flaschen Rotwein.

c) Zielfunktion $Z(x,y) = 2x + 4y \rightarrow \max.$



Lösung: (10|50) … gewinnmaximale Mengen

Die gewinnmaximalen Mengen betragen 10 Flaschen Weißwein und 50 Flaschen Rotwein. Dies führt an diesem Festtag zu einem maximalen Tagesgewinn von € 220.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) –
b) –
c) –

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) leicht
c) leicht

Punkteanzahl:

a) 2
b) 4
c) 2

Thema: Wirtschaft

Quellen: –

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Vitrinen

Aufgabennummer: B_124

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Eine Firma stellt Vitrinen in den 2 verschiedenen Modellen *Roma* und *Vienna* her. Die Stückzahl der pro Monat erzeugten *Roma*-Modelle soll mit x und jene der *Vienna*-Modelle mit y bezeichnet werden. Die Modelle werden in den Größen *large*, *medium* und *mini* gefertigt.

a) Der Stückgewinn bei der Vitrine *Roma large* beträgt durchschnittlich € 40, jener bei der *Vienna large* ungefähr € 70.
Beide Produkte werden von 3 Maschinen gefertigt.
Die 1. Maschine ist pro Monat maximal 650 Stunden, die 2. Maschine 400 Stunden und die 3. Maschine 320 Stunden für den Zusammenbau der Vitrinen verfügbar.
Die Arbeitszeit für den Bau der Vitrine *Roma* beträgt 6 Stunden an der 1. Maschine, 5 Stunden an der 2. Maschine und 1,5 Stunden an der 3. Maschine.
Der Zusammenbau der Vitrine *Vienna* beansprucht die 1. Maschine 4,5 Stunden, die 2. Maschine 1,2 Stunden und die 3. Maschine 3,3 Stunden.

– Stellen Sie alle für diese Bedingungen relevanten Ungleichungen und die Gleichung der Zielfunktion für den maximalen Gewinn auf.

b) Das folgende Ungleichungssystem beschreibt den möglichen Lösungsbereich für die Herstellung von x Vitrinen *Roma medium* und y Vitrinen *Vienna medium* unter den in der Fabrik vorgegebenen Bedingungen.

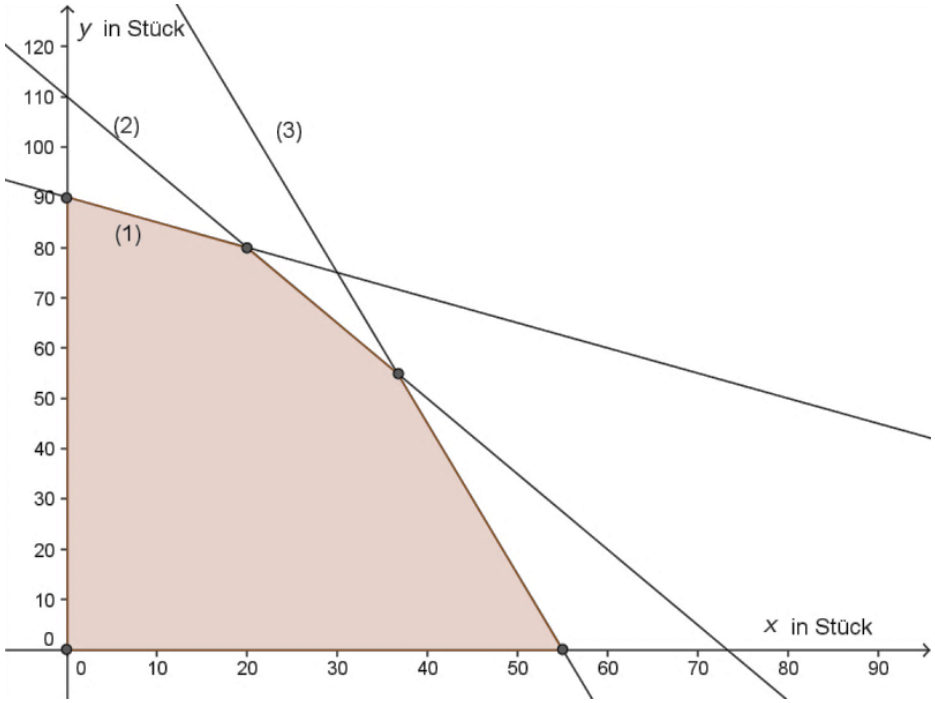
– Stellen Sie den möglichen Lösungsbereich grafisch dar.
– Ermitteln Sie anhand der Grafik die Koordinaten der Eckpunkte des Lösungsbereichs (gerundet auf ganze Zahlen).

$$3x + 2{,}2y \leq 170$$
$$2{,}5x + y \leq 110$$
$$2x + 2{,}8y \leq 180$$
$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$

c) Für die Zielfunktion Z für den Gewinn bei x Vitrinen *Roma mini* und bei y Vitrinen *Vienna mini* gilt:

$$Z(x,y) = 36x + 40y$$

– Zeichnen Sie die Gerade, für die der optimale Wert der Zielfunktion angenommen wird, in die nachstehende Grafik ein.



– Bestimmen Sie den maximalen Gewinn, den man mit dem in der Grafik dargestellten Lösungsbereich erzielen kann.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

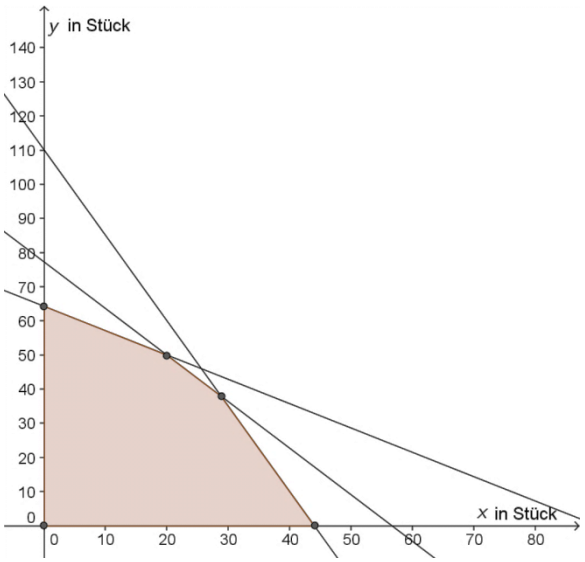
a) Übersichtstabelle (optional)

	Roma x	Vienna y	Stunden/Monat
M_1	6	4,5	650
M_2	5	1,2	400
M_3	1,5	3,3	320

Ungleichungssystem
$6x + 4{,}5y \leq 650$
$5x + 1{,}2y \leq 400$
$1{,}5x + 3{,}3y \leq 320$
$x \geq 0$
$y \geq 0$

Zielfunktion:
$Z(x,y) = 40x + 70y$

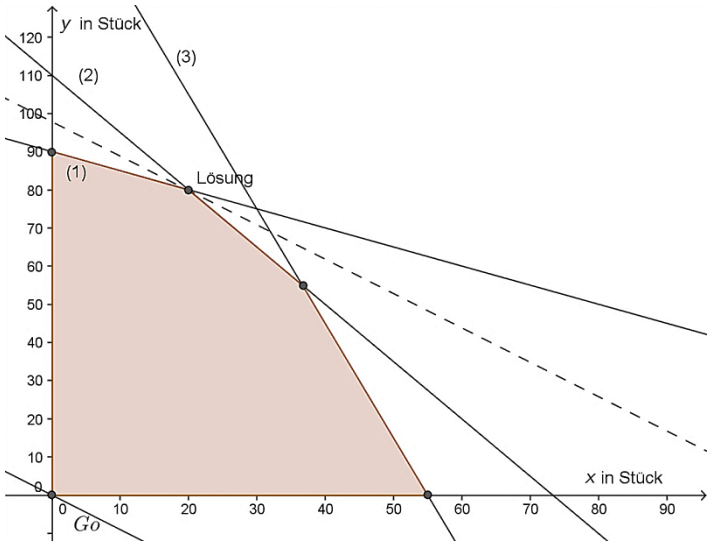
b)



Eckpunkte ablesen aus der Grafik:
(0 | 0)
(0 | 64)
(20 | 50)
(29 | 38)
(44 | 0)

Ableseungenauigkeiten werden toleriert. (Auch das genaue Berechnen mit Technologie ist möglich und zulässig!)

c)



20 Stück *Roma mini* und 80 Stück *Vienna mini* pro Monat bringen unter den vorgegebenen Bedingungen einen maximalen Gewinn. Er beträgt € 3.920.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) –
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) –

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 3
b) 4
c) 3

Thema: Wirtschaft

Quellen: –

Biogas

Aufgabennummer: B_174

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Biogas ist ein alternativer Energieträger. Es kann unter anderem aus Mais- oder Zuckerrüben gewonnen werden. Der Hauptbestandteil von Biogas ist Methan.

x … Ackerfläche in Hektar (ha), auf der Mais angebaut wird
y … Ackerfläche in Hektar (ha), auf der Zuckerrüben angebaut werden

a) Eine Landwirtin hat insgesamt höchstens 40 Hektar (ha) Anbaufläche zur Verfügung. Sie will auf einer Ackerfläche von mindestens 5 ha Mais und auf einer Ackerfläche von mindestens 10 ha Zuckerrüben anbauen.
Außerdem möchte sie einen Ertrag von mindestens 480 000 m^3 Biogas erzielen.
Sie möchte die Kosten für die Erzeugung von Methan möglichst gering halten.
In der folgenden Tabelle sind die Kosten und Erträge aufgelistet:

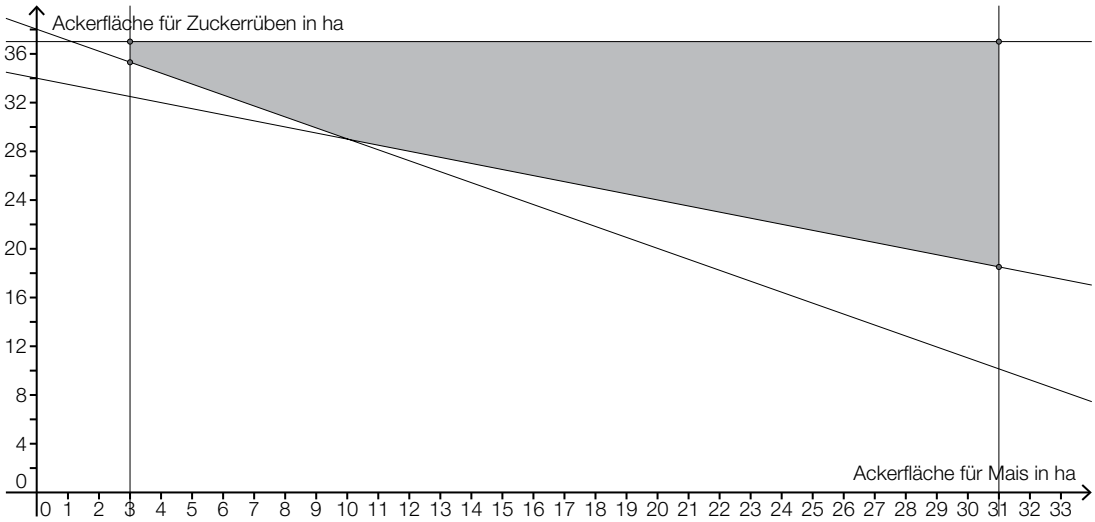
	Produktionskosten für Methan in €/m^3	Methanertrag in m^3/ha	Biogasertrag in m^3/ha
Energiemais	0,2	6 400	11 000
Zuckerrüben	0,25	7 000	12 600

– Stellen Sie die notwendigen Ungleichungen und die Zielfunktion für eine lineare Optimierung auf.

b) Ein Landwirt ermittelt für seine Biogasproduktion folgende Zielfunktion Z der entstehenden Kosten in Euro (€):

$Z(x,y) = 1\,050 \cdot x + 1\,500 \cdot y$

– Zeichnen Sie diejenige Gerade, für die der optimale Wert der Zielfunktion angenommen wird, in die nachstehende Grafik mit dem grau unterlegten Lösungsbereich ein.
– Lesen Sie aus der Grafik diejenigen Ackerflächen für Mais und Zuckerrüben ab, für die die Kosten minimal werden.
– Berechnen Sie die entstehenden minimalen Kosten.



c) Mögliche Werte für x und y werden durch folgende 6 Ungleichungen beschrieben:

(1) $x \geq 10$
(2) $x \leq 62$
(3) $y \geq 8$
(4) $y \leq 60$
(5) $y \geq -0{,}75 \cdot x + 70$
(6) $y \geq -0{,}52 \cdot x + 62$

– Zeichnen Sie diejenige Fläche, die durch diese Ungleichungen bestimmt ist.

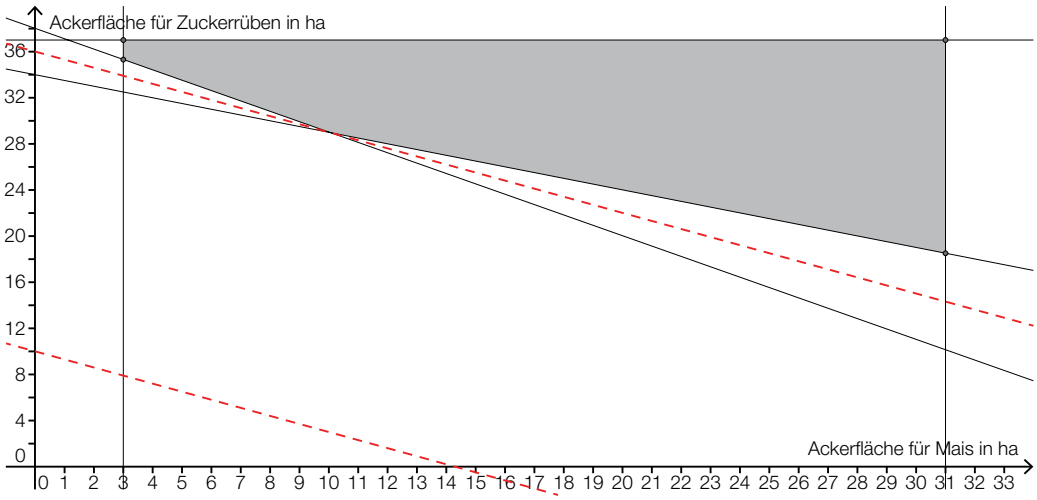
Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Zielfunktion: $Z(x,y) = 0{,}2 \cdot 6\,400 \cdot x + 0{,}25 \cdot 7\,000 \cdot y = 1\,280 \cdot x + 1\,750 \cdot y$

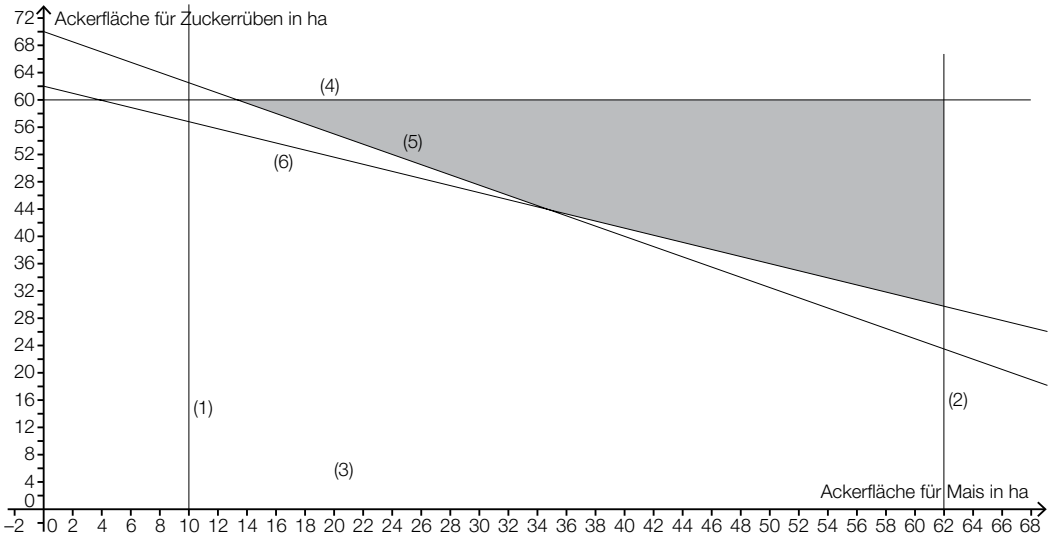
Ungleichungen:
$x \geq 5$
$y \geq 10$
$x + y \leq 40$
$11\,000 \cdot x + 12\,600 \cdot y \geq 480\,000$

b)



Der Lösungspunkt hat die Koordinaten (10|29).
Es werden auf einer Ackerfläche von 10 ha Mais und auf einer Ackerfläche von 29 ha Zuckerrüben angepflanzt. $\Rightarrow$ $Z(10, 29) = 1\,050 \cdot 10 + 1\,500 \cdot 29 = 54\,000$
Die minimalen Kosten betragen daher € 54.000.

c)



Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) –
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 4
b) 3
c) 3

Thema: Wirtschaft

Quellen: –

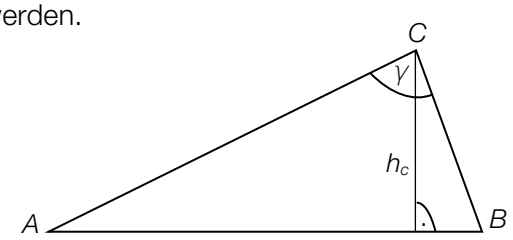
Dachfenster (2)

Aufgabennummer: B_017

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein 3-eckiges Dachfenster soll neu verglast werden.

$\gamma = 81°$
$\overline{AB} = 1{,}60$ m
$\overline{BC} = 0{,}70$ m



a) – Berechnen Sie die Fläche des skizzierten Dreiecks, das die Fensteröffnung darstellt.

b) Ein anderes Dachfenster wird doppelt verglast. Durch die Doppelverglasung entsteht ein Prisma, dessen Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck ist. Den Mantel des Prismas bildet eine Dichtung mit der Höhe h.

– Stellen Sie eine Funktion O für die Oberfläche des Prismas in Abhängigkeit von der Seitenlänge x der Grundfläche und des konstanten Volumens V auf.

c) In einer Glaserei werden 3-eckige Fensterscheiben zugeschnitten. In folgender Tabelle sind die Flächeninhalte einer Produktionsserie bestimmter Fensterscheiben angegeben:

Fläche in m²	Anzahl der Scheiben
1,91 – 1,95	1
1,96 – 2,00	5
2,01 – 2,05	22
2,06 – 2,10	48
2,11 – 2,15	52
2,16 – 2,20	29
2,21 – 2,25	0
2,26 – 2,30	1

– Berechnen Sie den arithmetischen Mittelwert und die Standardabweichung der angegebenen Flächeninhalte. Verwenden Sie dazu die Klassenmitten.

– Beschreiben Sie, welche Wahrscheinlichkeit bezogen auf die Fensterproduktion durch den nachstehenden Rechenausdruck ermittelt wird ($\overline{x}$ und s der vorhergehenden Rechnung sollen als Schätzung für μ und σ verwendet werden).

$$P = 1 - \left[0{,}932 - 0{,}082\right] = 0{,}150\ldots \approx 15\ \%$$

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

$\alpha = \arcsin\left(\frac{a \cdot \sin(\gamma)}{c}\right)$ $\quad \alpha = 25{,}601\ldots \approx 25{,}6°$

$\beta = 180° - \alpha - \gamma$ $\quad \beta = 73{,}398\ldots \approx 73{,}4°$

$A = \frac{a \cdot c \cdot \sin(\beta)}{2}$ $\quad A = 0{,}536\ldots \approx 0{,}54\ \text{m}^2$

Die Fläche des Dachfensters beträgt ca. 0,54 m².

Auch andere Rechenwege sind möglich.

b) $V = \frac{x^2 \cdot \sqrt{3}}{4} h \Rightarrow h = \frac{4V}{x^2 \cdot \sqrt{3}}$

$O(x, h) = \frac{x^2 \cdot \sqrt{3}}{2} + 3xh$

$O(x) = \frac{x^2 \cdot \sqrt{3}}{2} + \frac{12V}{x \cdot \sqrt{3}}$

c) Arithmetischer Mittelwert $\overline{x}$ und Standardabweichung s werden mittels Technologieeinsatz (hier: Excel) berechnet. Zur Berechnung werden die Klassenmitten verwendet.

$\overline{x} \approx 2{,}105\ \text{m}^2$
$s = 0{,}05561793... \approx 0{,}056$

Mittels Technologieeinsatz oder einer Tabelle ermittelt man aus den Wahrscheinlichkeiten $P_1 = 0{,}932$ und $P_2 = 0{,}082$: $x_1 \approx 2{,}188$ und $x_2 \approx 2{,}028$.

Es wird die Wahrscheinlichkeit berechnet, dass eine zufällig ausgewählte Fensterscheibe eine Fläche von weniger als 2,028 m² oder mehr als 2,188 m² hat. Diese beträgt 15 %.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) A Modellieren und Transferieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) C Interpretieren und Dokumentieren, A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 3
b) 2
c) 4

Thema: Bauwesen

Quellen: –

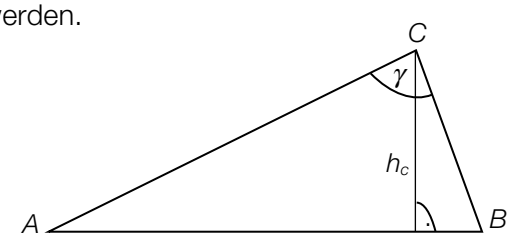
Dachfenster (1)

Aufgabennummer: B_065

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein 3-eckiges Dachfenster soll neu verglast werden.

$\gamma = 81°$
$\overline{AB} = 1{,}60$ m
$\overline{BC} = 0{,}70$ m



a) – Berechnen Sie die Fläche des skizzierten Dreiecks, das die Fensteröffnung darstellt.

b) Das oben angegebene Dreieck wird in ein Koordinatensystem gezeichnet, die Koordinaten der 3 Eckpunkte sind bekannt.

– Beschreiben Sie, welche Überlegung bei der folgenden Vorgangsweise für die Berechnung der Dreiecksfläche nicht korrekt ist:

$c = |\vec{a}| = |\overrightarrow{AB}|$

$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$

$h_c = |\overrightarrow{MC}|$

$A = \frac{c \cdot h_c}{2}$

– Beschreiben Sie, wie man die Koordinaten des Fußpunktes der Höhe h_c ermittelt.
– Stellen Sie die dazu nötigen Geraden in allgemeiner Form auf.

c) In einer Glaserei werden 3-eckige Fensterscheiben zugeschnitten. In folgender Tabelle sind die Flächeninhalte einer Produktionsserie bestimmter Fensterscheiben angegeben:

Fläche in m²	Anzahl der Scheiben
1,91 – 1,95	1
1,96 – 2,00	5
2,01 – 2,05	22
2,06 – 2,10	48
2,11 – 2,15	52
2,16 – 2,20	29
2,21 – 2,25	0
2,26 – 2,30	1

– Berechnen Sie den arithmetischen Mittelwert und die Standardabweichung der angegebenen Flächeninhalte. Verwenden Sie dazu die Klassenmitten.

– Beschreiben Sie, welche Wahrscheinlichkeit bezogen auf die Fensterproduktion durch den nachstehenden Rechenausdruck ermittelt wird ($\overline{x}$ und s der vorhergehenden Rechnung sollen als Schätzung für μ und σ verwendet werden).

$$P = 1 - \left[0{,}932 - 0{,}082\right] = 0{,}150\ldots \approx 15\ \%$$

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

$\alpha = \arcsin\left(\frac{a \cdot \sin(\gamma)}{c}\right)$ $\quad \alpha = 25{,}601\ldots \approx 25{,}6°$

$\beta = 180° - \alpha - \gamma$ $\quad \beta = 73{,}398\ldots \approx 73{,}4°$

$A = \frac{a \cdot c \cdot \sin(\beta)}{2}$ $\quad A = 0{,}536\ldots \approx 0{,}54\ \text{m}^2$

Die Fläche des Dachfensters beträgt ca. 0,54 m².

Auch andere Rechenwege sind möglich.

b) Die Höhe h_c halbiert die Seite c im Allgemeinen nicht. Der Betrag des Vektors $\overrightarrow{MC}$ entspricht somit nicht der Länge der Höhe.

Der Fußpunkt F der Höhe h_c ist der Schnittpunkt der Geraden g und h:

$g: X = A + t \cdot \overrightarrow{AB}$

$h \perp g, h: X = C + s \cdot \vec{n}_{\overrightarrow{AB}}$

Andere korrekte Lösungswege sind ebenfalls möglich.

c) Arithmetischer Mittelwert $\bar{x}$ und Standardabweichung s werden mittels Technologieeinsatz (hier: Excel) berechnet. Zur Berechnung werden die Klassenmitten verwendet.

$\bar{x} \approx 2{,}105\ \text{m}^2$
$s = 0{,}05561793... \approx 0{,}056$

Mittels Technologieeinsatz oder einer Tabelle ermittelt man aus den Wahrscheinlichkeiten $P_1 = 0{,}932$ und $P_2 = 0{,}082$: $x_1 \approx 2{,}188$ und $x_2 \approx 2{,}028$.

Es wird die Wahrscheinlichkeit berechnet, dass eine zufällig ausgewählte Fensterscheibe eine Fläche von weniger als 2,028 m² oder mehr als 2,188 m² hat. Diese beträgt 15 %.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) A Modellieren und Transferieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) C Interpretieren und Dokumentieren, A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 3
b) 4
c) 4

Thema: Bauwesen

Quellen: –

Hustensaft

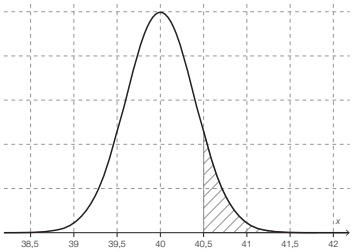
Aufgabennummer: B_138

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

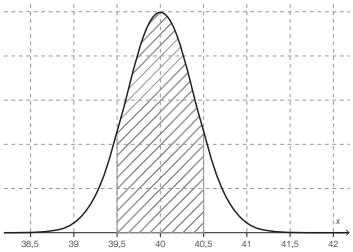
Ein Unternehmen hat das Monopol auf den Vertrieb eines bestimmten Hustensafts. Der Hustensaft wird in kleinen Flaschen abgefüllt, deren Füllmenge in Millilitern (ml) angegeben ist.

a) Die Füllmenge für Flaschen einer bestimmten Größe kann als annähernd normalverteilte Zufallsvariable mit dem Erwartungswert von 40 ml angenommen werden. Die Standardabweichung beträgt 0,4 ml. Zum Ausschuss zählen alle Flaschen, deren Füllmenge außerhalb des Toleranzbereichs von [39,5; 40,5] ml liegt.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Flasche zum Ausschuss zählt.
– Ordnen Sie den durch die schraffierten Flächen dargestellten Wahrscheinlichkeiten in den beiden Skizzen je eine von den in A bis D gegebenen Füllmengen x richtig zu. Schreiben Sie den entsprechenden Buchstaben in das leere Feld neben der Skizze. *[2 zu 4]*



☐

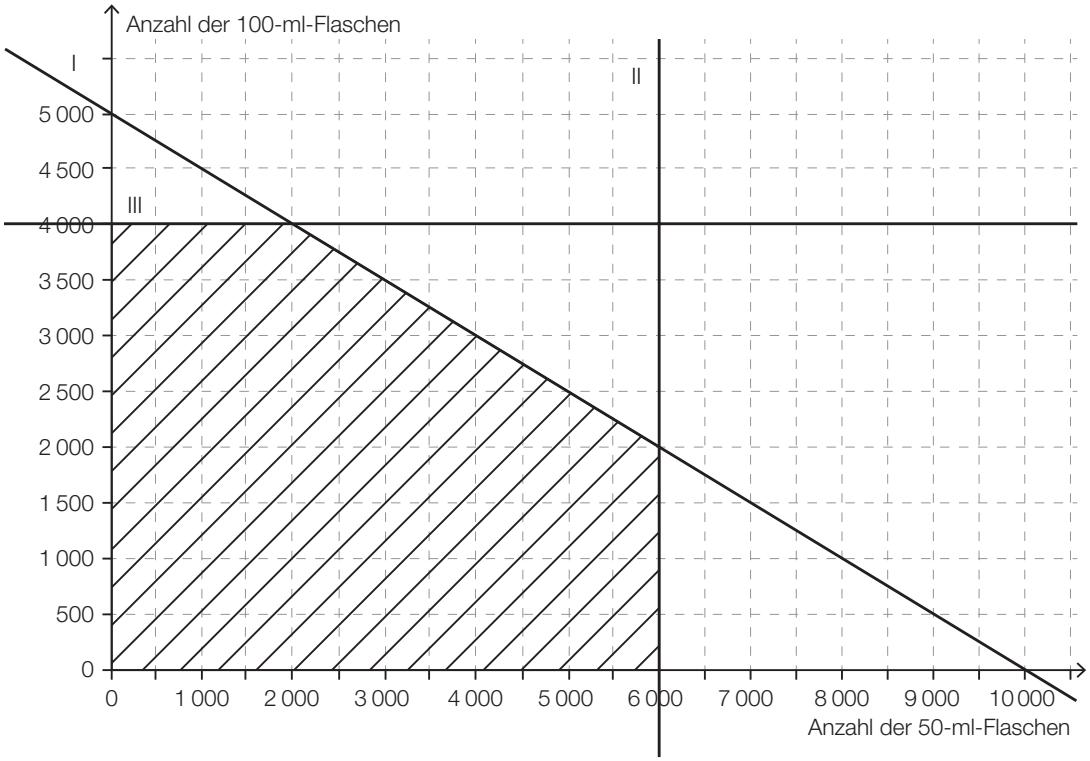


☐

A	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 39{,}5 \wedge x \geq 40{,}5\}$ mit x in ml
B	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 39{,}5 \wedge x \leq 40{,}5\}$ mit x in ml
C	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 39{,}5 \wedge x \leq 40{,}5\}$ mit x in ml
D	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 39{,}5 \wedge x \geq 40{,}5\}$ mit x in ml

b) Das Unternehmen füllt pro Tag 500 Liter Hustensaft in *x* Flaschen mit 50 ml und *y* Flaschen mit 100 ml ab.
Der Verkaufspreis für eine 50-ml-Flasche beträgt € 5,40.
Für eine 100-ml-Flasche erzielt man einen Preis von € 9,60.

Der Lösungsbereich für die möglichen Verkaufszahlen der beiden unterschiedlichen Flaschen ist in der nachstehenden Grafik dargestellt.



– Lesen Sie aus der Grafik die Ungleichung der einschränkenden Bedingung I ab.
– Erstellen Sie die Gleichung der Zielfunktion für den maximalen Erlös.
– Zeichnen Sie in die Grafik diejenige Gerade ein, für die der optimale Wert der Zielfunktion angenommen wird.
– Ermitteln Sie grafisch diejenige Anzahl von Flaschen, die das Unternehmen von beiden Größen verkaufen sollte, um einen maximalen Erlös zu erzielen.

c) Der Zusammenhang zwischen der Anzahl x der abgefüllten 100-ml-Flaschen und dem Verkaufspreis p pro Flasche wird in der folgenden Tabelle dargestellt.

x	1	5	10	15	20	25	30	35	40
$p(x)$	23,90	22,90	21,80	20,50	19,90	18,10	17,90	17,10	16,60

x … Flaschen in Mengeneinheiten (ME)
$p(x)$ … Preis bei einem Absatz von x ME in Geldeinheiten pro Mengeneinheit (GE/ME)

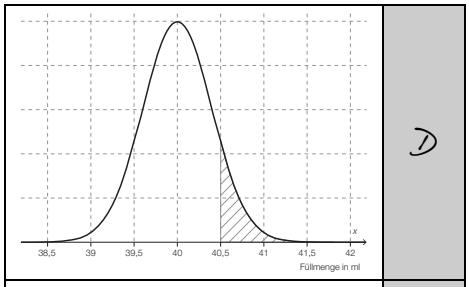
– Ermitteln Sie die Funktionsgleichung für die Preis-Absatz-Funktion mithilfe einer linearen Regression.
– Erstellen Sie die Gleichung der Erlösfunktion.
– Berechnen Sie den maximalen Erlös.
– Erklären Sie den Zusammenhang zwischen der 2. (oberen) Erlösgrenze und der Sättigungsmenge.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

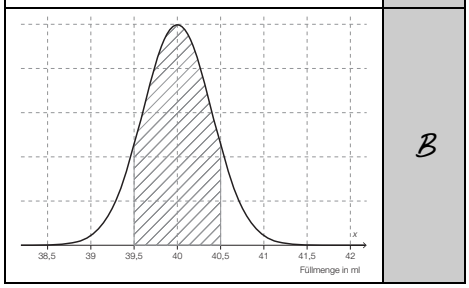
Möglicher Lösungsweg

a) $P(X < 39{,}5) = \Phi\left(\frac{39{,}5 - 40}{0{,}4}\right) = 0{,}105649...$

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig entnommene Flasche Ausschuss ist, beträgt das Doppelte, nämlich rund 21,13 %.



D



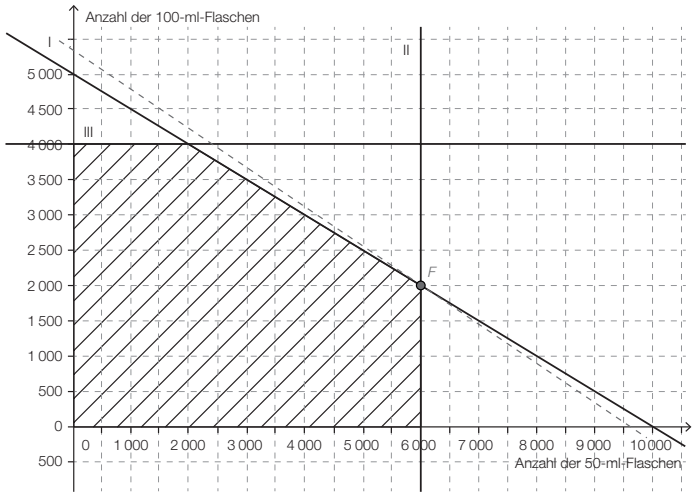
B

A	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 39{,}5 \wedge x \geq 40{,}5\}$ mit x in ml
B	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 39{,}5 \wedge x \leq 40{,}5\}$ mit x in ml
C	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 39{,}5 \wedge x \leq 40{,}5\}$ mit x in ml
D	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 39{,}5 \wedge x \geq 40{,}5\}$ mit x in ml

b) Ungleichung der einschränkenden Bedingung I: $y \leq 5\,000 - 0{,}5x$

$Z(x, y) = E = 5{,}4x + 9{,}6y$ … soll maximal werden

$Z_0 = -\frac{5{,}4}{9{,}6}x$



$F = (6\,000 \mid 2\,000)$

Bei einem Verkauf von 6 000 50-ml-Flaschen und 2 000 100-ml-Flaschen ist maximaler Erlös zu erwarten.

(Ablesung genügt, Toleranz: ±50 Flaschen)

c) $p(x) = -0{,}1916x + 23{,}71$
$E(x) = -0{,}1916x^2 + 23{,}71x$
Maximum des Erlöses: $E_{max} = 733{,}51$ GE

Die Sättigungsmenge ist die Menge, bei der der Stückpreis null ist. Es gibt daher keine Einnahmen.
An dieser Stelle ist auch der Erlös null.
Die 2. (obere) Erlösgrenze ist an der Stelle der Sättigungsmenge.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 5 Stochastik

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) A Modellieren und Transferieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz, C Interpretieren und Dokumentieren
c) D Argumentieren und Kommunizieren, A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) leicht

Punkteanzahl:

a) 3
b) 4
c) 4

Thema: Wirtschaft

Quellen: –

Fotografie

Aufgabennummer: B_047

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

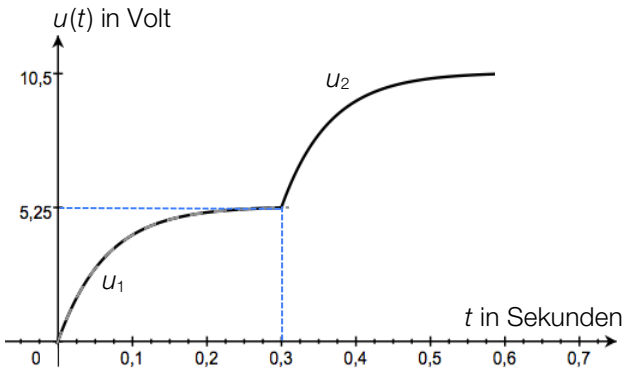
1924 wurden erstmals Kleinbildkameras in Serie gefertigt. Die Automatisierung der bis dahin überwiegend mechanisch funktionierenden Fotoapparate startete in den 1960er-Jahren.

a) Die Batterien in einem Blitzgerät liefern eine Spannung von 6 Volt. Die zur Auslösung des Blitzes erforderliche höhere Spannung wird durch das sukzessive Aufladen von Kondensatoren erzielt.

Für die Spannung $u_1(t)$ gilt:

$u_1(t) = 5{,}3\ \text{V} \cdot (1 - e^{-\lambda \cdot t})$ mit $0\ \text{s} \le t \le 0{,}3\ \text{s}$

t ... Zeit nach Beginn des Aufladevorgangs in Sekunden (s)
$u_1(t)$ ... Spannung in Volt (V), abhängig von der Aufladezeit t
λ ... Konstante in s^{-1}



Nach 0,3 Sekunden ist der Kondensator auf eine Spannung von 5,25 V aufgeladen.

– Zeigen Sie, dass gilt: $\lambda = 15{,}545\ \text{s}^{-1}$.

Der zweite Ladevorgang startet nach 0,3 Sekunden bei einer Anfangsladung von 5,25 V. Der Graph von u_2 wurde durch eine entsprechende Verschiebung von u_1 ermittelt.

– Stellen Sie die Funktionsgleichung für u_2 in Abhängigkeit von t auf.

b) Unter der Schärfentiefe T versteht man die Entfernung von g_{nah} bis g_{fern}, wobei Motive zwischen g_{nah} und g_{fern} scharf abgebildet werden. Wird die Kamera auf ein Motiv in der Entfernung g scharf eingestellt, so gelten für Kleinbildkameras folgende Formeln:

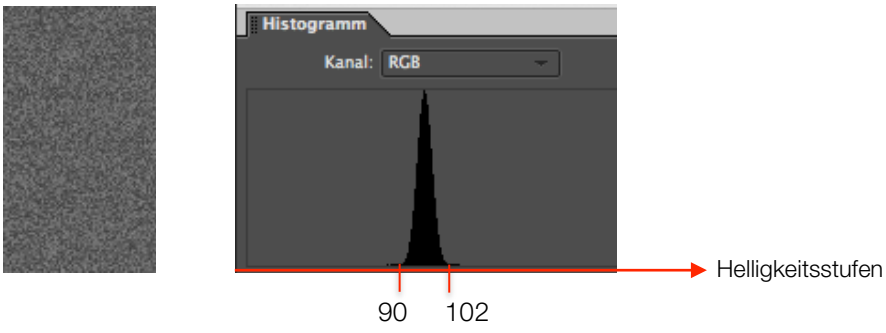
$$g_{nah} = \frac{f^2 \cdot g}{f^2 + k \cdot 0{,}03 \cdot (g - f)} \quad \text{und} \quad g_{fern} = \frac{f^2 \cdot g}{f^2 - k \cdot 0{,}03 \cdot (g - f)}$$

g_{nah} ... in mm
g_{fern} ... in mm
f ... Brennweite des Objektivs in mm, $f > 0$
g ... Entfernung des fokussierten Motivs in mm, $g > f$
k ... Blendenzahl, $k > 0$

Die Formel für g_{fern} gilt nur für $g_{fern} > 0$, andernfalls gilt: $g_{fern} = \infty$.

– Ermitteln Sie die Bedingung, die g erfüllen muss, damit $g_{fern} > 0$.
– Begründen Sie anhand der angegebenen Formeln, warum die Schärfentiefe $T = g_{fern} - g_{nah}$ größer wird, wenn die Blendenzahl k größer wird.
– Stellen Sie den Verlauf von g_{nah} für $f = 80$ mm und $k = 5{,}6$ abhängig von g grafisch dar.
– Schätzen Sie den maximalen Wert von g_{nah} mithilfe der Grafik oder der gegebenen Formel ab.

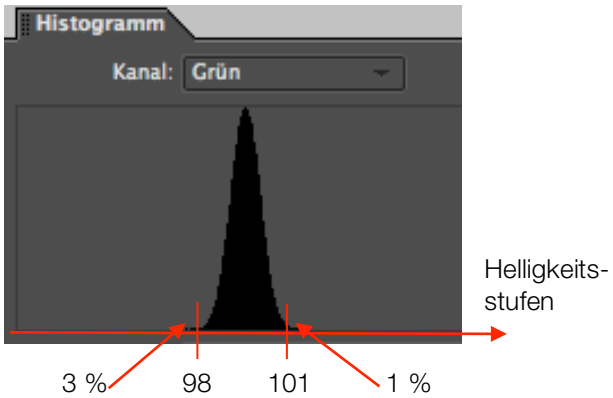
c) Die Helligkeitsverteilung eines Bildes kann in einem Histogramm dargestellt werden. Ein einfärbig graues Bild wird theoretisch durch eine einzige Spektrallinie dargestellt. Durch die elektronische Verstärkung der Kamera kommt es jedoch zum sogenannten Rauschen und die Helligkeitswerte sind annähernd normalverteilt.



– Berechnen Sie, wie viel Prozent der Helligkeitswerte im Intervall [90; 102] liegen, wenn die Normalverteilung folgende Parameter hat: $\mu = 96$, $\sigma = 3$.

d) Da das menschliche Auge grün-sensibel ist, haben Sensoren von Digitalkameras mehr grün-sensible Rezeptoren und der Rauscheffekt ist bei der Farbe grün geringer.

– Interpretieren Sie die nebenstehende Grafik: Beschreiben Sie, was die Werte „3 %“ und „1 %“ bedeuten.
(Die Beschreibung kann entweder über mathematische Ausdrücke oder in Worten erfolgen.)



Anhand der in der Grafik dargestellten Werte können die Standardabweichung σ und der Erwartungswert μ berechnet werden.

– Erstellen Sie ein Gleichungssystem, mit dem σ und μ berechnet werden können.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $u_1(0{,}3) = 5{,}25$

Für $\lambda = 15{,}545\ s^{-1}$ ergibt sich – wie verlangt – der Wert 5,25 V:

$5{,}25 = 5{,}3 \cdot (1 - e^{-15{,}545 \cdot 0{,}3})$

Auch andere korrekte Lösungswege sind möglich.

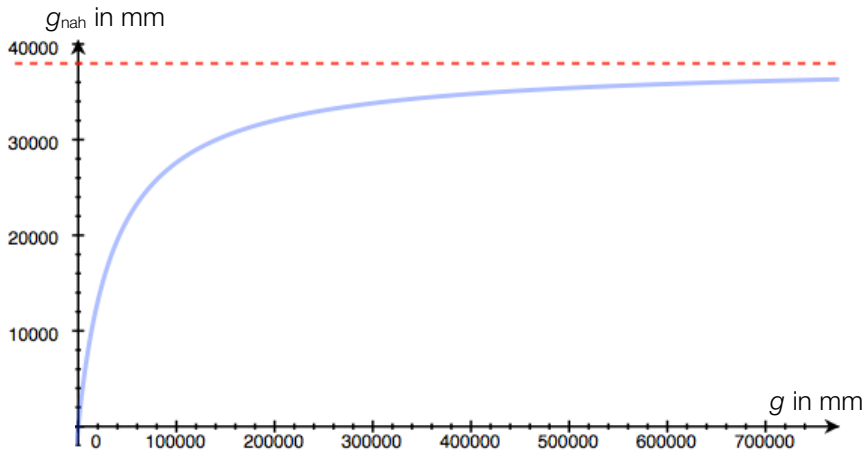
$u_2(t) = 5{,}3\ V \cdot (1 - e^{-15{,}545\ s^{-1} \cdot (t - 0{,}3\ s)}) + 5{,}25\ V$

b) $f^2 - k \cdot 0{,}03 \cdot (g - f) > 0 \ \Rightarrow \ g < f + \frac{f^2}{0{,}03 \cdot k}$

Wird k größer, so wird der Nenner der Formel für g_{nah} größer, der Wert g_{nah} daher kleiner.
Der Nenner in der Formel für g_{fern} wird kleiner, der Wert g_{fern} daher größer.
Daher wird auch die Differenz $g_{nah} - g_{fern}$, also die Schärfentiefe, größer.

Auch andere sinngemäß gleichwertige Formulierung sind zulässig.

$$g_{nah}(g) = \frac{80^2 \cdot g}{80^2 \cdot 5{,}6 \cdot 0{,}03 \cdot (g - 80)} = \frac{6\,400 \cdot g}{6\,400 + 0{,}168 \cdot (g - 80)}$$



g_{nah} nähert sich einem Wert von rund 38 000 mm bzw. 38 m.

oder:

$$\lim_{g \to \infty} \left[\frac{6\,400 \cdot g}{6\,400 + 0{,}168 \cdot (g - 80)} \right] = \frac{6\,400}{0{,}168} = 38\,095{,}2\ mm \approx 38\ m$$

Auch die Berechnung des Grenzwerts mittels Technologieeinsatz ist zulässig.

c) Ermitteln der Wahrscheinlichkeit mittels Technologieeinsatz:

X ... Helligkeitswert
$\mu = 96$
$\sigma = 3$

$P(X \leq 90) = 0{,}02275...$
$P(X \leq 102) = 0{,}977249...$
$P = 0{,}977249... - 0{,}02275... = 0{,}95449... \approx 95{,}4\ \%$

Rund 95,4 % der Helligkeitswerte liegen im angegebenen Intervall.

d) $P(X \leq 98) = 0{,}03$ und $P(101 \leq X) = 0{,}01$

oder:

3 % der Helligkeitswerte sind kleiner (gleich) 98 und 1 % der Werte sind größer (gleich) 101.

Auch sinngemäß gleichwertige Formulierungen oder die Angabe der entsprechenden Integrale sind zulässig.

Erstellung des Gleichungssystems:

$u = \frac{x - \mu}{\sigma}$
$u_{0,03} = -1{,}88079$ und $u_{0,99} = 2{,}32635$

I: $-1{,}88079 = \frac{98 - \mu}{\sigma}$
II: $2{,}32635 = \frac{101 - \mu}{\sigma}$

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 5 Stochastik
d) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) —
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) A Modellieren und Transferieren
d) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) D Argumentieren und Kommunizieren, A Modellieren und Transferieren
c) C Interpretieren und Dokumentieren, B Operieren und Technologieeinsatz
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel
d) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 4
c) 3
d) 3

Thema: Fotografie

Quelle: http://www.elmar-baumann.de/fotografie

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Pumpenproduktion

Aufgabennummer: B_169

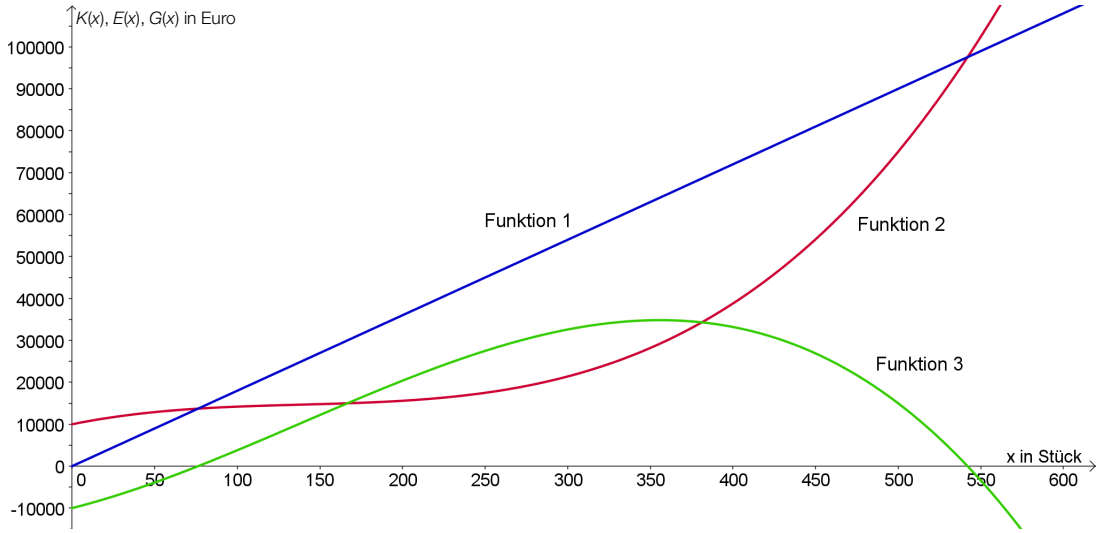
Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Bei der Produktion von Schmutzwasserpumpen wird ein bestimmtes Modell hergestellt. Für die Kostenfunktion K bei der Herstellung dieses Modells gilt:

$$K(x) = 0{,}0012 \cdot x^3 - 0{,}5 \cdot x^2 + 80 \cdot x + 10\,000$$

x … Stückzahl produzierter Schmutzwasserpumpen
$K(x)$ … Kosten bei der Produktion von x Schmutzwasserpumpen in Euro (€)

a) Die unten stehende Abbildung zeigt die Funktionsgraphen
- der Kostenfunktion K
- der Erlösfunktion E
- der Gewinnfunktion G



– Begründen Sie, warum der Graph von Funktion 3 den Verlauf der Gewinnfunktion beschreibt.

b) – Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate der Kosten, wenn die Produktion von 100 auf 101 Stück erhöht wird.
– Berechnen Sie die Grenzkosten für 100 Stück mithilfe der Grenzkostenfunktion.
– Begründen Sie, warum die Ergebnisse dieser Berechnungen unterschiedlich sind.

c) Die Schmutzwasserpumpen werden zu einem Preis von € 200 pro Stück verkauft.

– Stellen Sie die Funktionsgleichung der Gewinnfunktion *G* auf.
– Berechnen Sie, bei wie vielen verkauften Schmutzwasserpumpen der Gewinn maximal ist.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Funktion 3 stellt die Gewinnfunktion dar.
Der Funktionsgraph der Gewinnfunktion schneidet die vertikale Achse bei € –10.000 (Fixkosten).
Die Nullstellen der Gewinnfunktion liegen direkt unterhalb der Schnittpunkte der Kosten- und der Erlösfunktion.
Zwischen den Gewinngrenzen ist der Gewinn positiv, weil dort der Graph der Erlösfunktion oberhalb des Graphen der Kostenfunktion verläuft.

Alle richtigen Begründungen, die eine klare Entscheidung ermöglichen, sind zu akzeptieren.

b) $\frac{K(101)-K(100)}{1} = 15{,}861 \approx 15{,}86$

Die mittlere Änderungsrate beträgt rund € 15,86/Stück.

$K'(x) = 0{,}0036 \cdot x^2 - x + 80 \Rightarrow K'(100) = 16$

Die Grenzkosten bei 100 Stück betragen € 16/Stück.

Die Ergebnisse sind unterschiedlich, weil der Differenzenquotient die exakte Kostensteigerung angibt, während hingegen der Differenzialquotient einen Näherungswert für die Änderung der Kosten bei der Steigerung um ein Stück angibt.

c) Gewinn = Erlös – Kosten
$G(x) = 200 \cdot x - (0{,}0012 \cdot x^3 - 0{,}5 \cdot x^2 + 80 \cdot x + 10000)$
$G(x) = -0{,}0012 \cdot x^3 + 0{,}5 \cdot x^2 + 120 \cdot x - 10000$
$G'(x) = -0{,}0036 \cdot x^2 + x + 120$
$-0{,}0036 \cdot x^2 + x + 120 = 0$ Berechnung mittels Technologieeinsatz: $x \approx 368{,}29$
Der maximale Gewinn wird bei 368 Stück erzielt.

Auch andere korrekte Berechnungswege sind als richtig zu werten.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 4 Analysis
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) –
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 1
b) 3
c) 2

Thema: Wirtschaft

Quellen: –

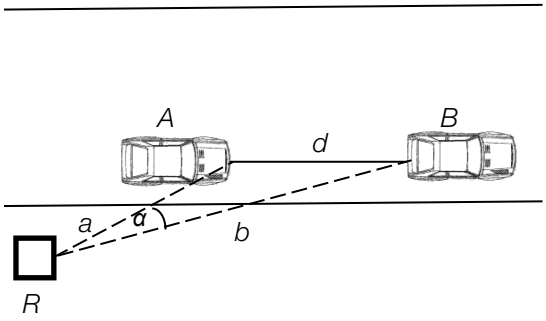
Abstand halten!

Aufgabennummer: B_102

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Der empfohlene Sicherheitsabstand, den Autofahrer/innen einhalten sollten, wird oft nach der „Halbe-Tacho-Regel“ bestimmt. Dabei wird die Hälfte der gefahrenen Geschwindigkeit in km/h als Richtwert für den Sicherheitsabstand in m angegeben. Zum Beispiel: Bei einer Geschwindigkeit von 100 km/h sollte der Abstand mindestens 50 m betragen.

a) Für die Aufklärung der Ursache eines Verkehrsunfalls wird zur Überprüfung des Sicherheitsabstands das Foto einer Radarüberwachung (siehe unten stehende Skizze) herangezogen. Die Geschwindigkeit des Autos *A* wurde mit 108 km/h gemessen. Der Abstand *a* zwischen dem Radargerät und dem Auto *A* betrug 14 m. Die Strecke *b* vom Radargerät zum Auto *B* betrug 55 m. Der Winkel α ist 11°.



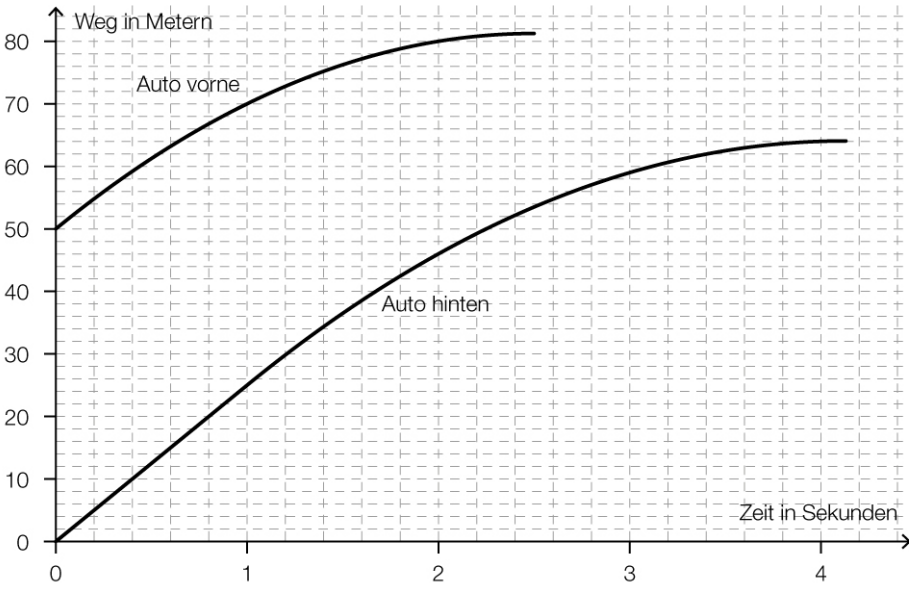
– Überprüfen Sie durch Berechnung von *d*, ob der Sicherheitsabstand im Sinne der Halbe-Tacho-Regel eingehalten wurde.

b) Es wird oft behauptet, dass eine höhere Geschwindigkeit einen höheren „Durchsatz“ (Anzahl der Autos, die in einem bestimmten Zeitraum eine bestimmte Stelle passieren) bedeutet.

– Zeigen Sie unter der Verwendung der Halbe-Tacho-Regel, dass bei korrekter Einhaltung des Sicherheitsabstands der „Durchsatz“ von der gefahrenen Geschwindigkeit unabhängig ist. Nehmen Sie dabei an, dass die Autos mit konstanter Geschwindigkeit fahren. Die Länge der Autos soll dabei unberücksichtigt bleiben.

c) Zwei Autos fahren mit einer konstanten Geschwindigkeit von 90 km/h hintereinander auf der gleichen Fahrspur. Der zeitliche Abstand der beiden Autos (bei dieser Geschwindigkeit) beträgt 2 s. Das vordere Fahrzeug – es hat die besseren Bremsen – verzögert maximal mit einer konstanten Verzögerung von 10 m/s². Das hintere Fahrzeug bremst maximal mit einer konstanten Verzögerung von 8 m/s². Es kommt zu einer Vollbremsung des ersten Fahrzeugs. Der Lenker des hinteren Autos bremst das Auto nach einer Reaktionszeit von 1 s ebenfalls so stark er kann.

– Ermitteln Sie die Weg-Zeit-Funktionen des vorderen Fahrzeugs für den Bremsvorgang.
– Lesen Sie aus der nachstehenden Grafik ab, welchen Abstand die beiden Autos nach dem Stillstand voneinander haben.



Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Einsetzen in den Cosinussatz:

$d^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\alpha)$
$d \approx 41$ m

Der Sicherheitsabstand müsste im Sinne der Halbe-Tacho-Regel 54 m betragen und wurde daher nicht eingehalten.

b) Die Zeit (t_{SA}), die ein Auto mit der Geschwindigkeit (v_A) für die Länge des Sicherheitsabstands (l_{SA}) braucht:

$$t_{SA} = \frac{l_{SA}}{v_A}$$

Die Anzahl der Autos n pro Zeiteinheit:

$$n = \frac{1}{t_{SA}} = \frac{1}{\frac{l_{SA}}{v_A}} = \frac{v_A}{l_{SA}}$$

Der Betrag von l_{SA} sollte $\frac{v_A}{2}$ in Wegeinheiten sein (Verwendung der Halbe-Tacho-Regel):

$$n = \frac{v_A}{\frac{v_A}{2}} = 2$$

Der „Durchsatz“ ist bei Einhaltung des Sicherheitsabstands und bei Nichtberücksichtigung der Autolänge von der Geschwindigkeit unabhängig.

c) Die Verzögerung des vorderen Autos von 10 m/s^2 entspricht einer konstanten Funktion $a_1(t) = -10$.

t … Zeit in Sekunden

Für die Geschwindigkeitsfunktion v_1 gilt:
$v_1(t) = \int a_1(t)\mathrm{d}t = \int(-10)\mathrm{d}t = -10t + C_1;\ C_1 = 25$ m/s
$v_1(t) = -10t + 25$

Für die Wegfunktion s_1 gilt:
$s_1(t) = \int v_1(t)\mathrm{d}t = -\frac{10}{2}t^2 + 25t + C_{s_1}$

Mit $C_{s_1} = 50$ m für $t = 0$:
$s_1(t) = -5t^2 + 25t + 50$

Ein Stillstand der beiden Fahrzeuge bedeutet, dass keine Wegänderung mehr stattfindet (waagrechte Tangente am Graphen der Weg-Zeit-Funktion).
Aus der Grafik lässt sich ein Abstand von rund 17 m ablesen.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) A Modellieren und Transferieren
c) A Modellieren und Transferieren, B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) schwer
c) schwer

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2
c) 3

Thema: Physik

Quellen: –

Preis und Absatz

Aufgabennummer: B_128

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

In einem Monopolbetrieb wird der Zusammenhang des Absatzes einer Ware mit einem bestimmten Preis pro Kilogramm untersucht.

x … Absatz in Kilogramm (kg)
$p(x)$ … Preis für x verkaufte Kilogramm in Euro pro Kilogramm (€/kg)

a) Im 1. Verkaufsmonat ist die Abhängigkeit des Absatzes vom Preis pro Kilogramm der Ware in der untenstehenden Tabelle aufgenommen worden.

x in kg	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28
$p(x)$ in €/kg	40	39	38	37	35	33	31	28	25	22	18	14	10	5,6	0,2

– Ermitteln Sie die passende quadratische Preisfunktion der Nachfrage p in Abhängigkeit von der Absatzmenge x mithilfe von Regression.
– Interpretieren Sie anhand der Grafik, wie gut sich die berechnete Kurve an die gegebenen Daten anpasst.
– Argumentieren Sie, in welchem Definitionsbereich die ermittelte Funktion den Zusammenhang von Absatz und Preis sinnvoll beschreibt.

b) Für den 2. Verkaufsmonat lautet die Preisfunktion der Nachfrage:

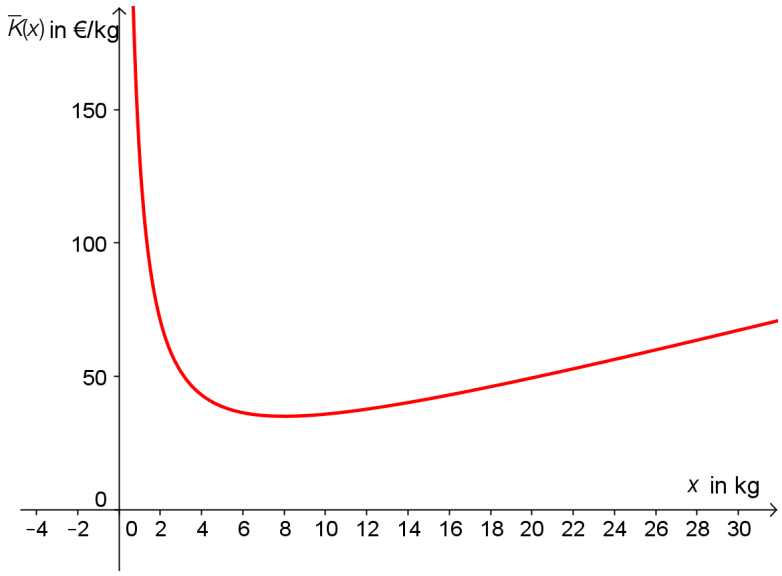
$$p(x) = -0{,}04x^2 - 0{,}2x + 40$$

Wenn sich die Absatzmenge von x kg auf $(x + 1)$ kg verändert, gilt für die damit zusammenhängende Preisänderung $\Delta p(x)$ folgende Beziehung:

$$\Delta p(x) = p(x + 1) - p(x)$$

– Ermitteln Sie eine möglichst einfache Gleichung der Funktion Δp für die gegebene Preisfunktion der Nachfrage p.
– Berechnen Sie mithilfe von Δp die Veränderung des Preises bei einer Absatzsteigerung von 20 kg auf 21 kg.

c) Die Stückkostenfunktion $\overline{K}$ für diese Ware hat den unten dargestellten Funktionsgraphen.

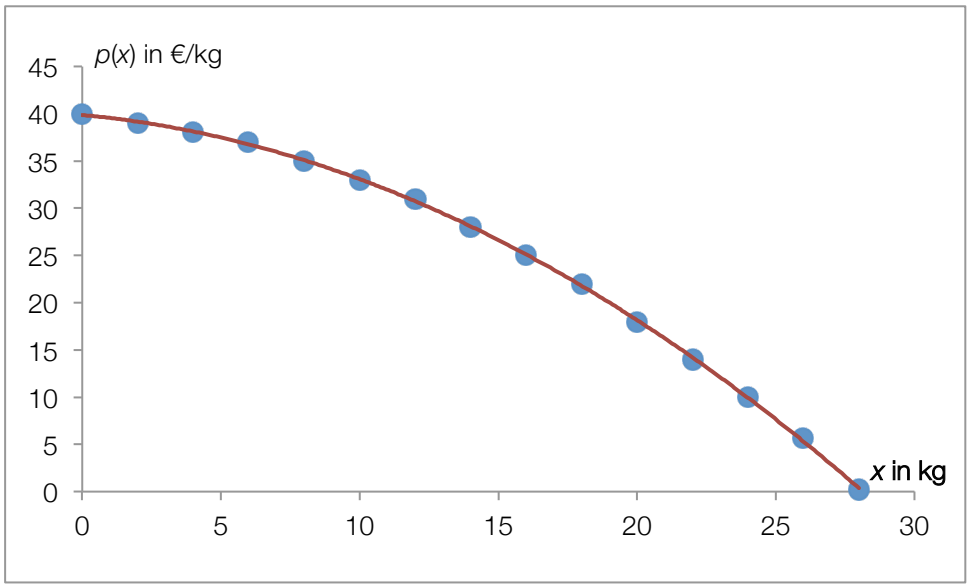


– Lesen Sie daraus das Betriebsoptimum und die minimalen Stückkosten ab.
– Erklären Sie, wie man diese aus der Gleichung der Gesamtkostenfunktion berechnet.
– Argumentieren Sie, welche Bedeutung die minimalen Stückkosten für die Festlegung des Verkaufspreises haben.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Funktionsgleichung mittels quadratischer Regression:



$p(x) = -0{,}0406x^2 - 0{,}2729x + 39{,}8729$

Die Abweichung der gegebenen Daten von der Regressionslinie ist sehr gering. Dies lässt vermuten, dass eine Modellierung mithilfe einer quadratischen Funktion zu diesen Daten passend ist.

Sinnvoller Definitionsbereich:
Untere Grenze des Definitionsbereichs: $x = 0$, der Verkaufspreis zu Beginn ist der höchste Preis.
Obere Grenze: $x \approx 28$ kg, wäre die Sättigungsmenge: Es besteht keine Nachfrage nach dem Produkt mehr, man müsste den Preis auf 0 senken.

b) Wenn der Absatz im 2. Monat um 1 kg steigt, dann nimmt der Preis pro Kilogramm etwas ab.

$\Delta p(x) = p(x + 1) - p(x) = -0{,}04(x + 1)^2 - 0{,}2(x + 1) + 40 - (-0{,}04x^2 - 0{,}2x + 40)$

$\Delta p(x) = -0{,}08x - 0{,}24$

$\Delta p(20) = -1{,}84$

Der Preis pro Kilogramm nimmt um 1 € 84 Cent ab, wenn der Absatz von 20 auf 21 kg steigt.

c) Das Betriebsoptimum beträgt ungefähr 8 kg, die minimalen Stückkosten belaufen sich auf ca. 35 €/kg.

Die Stückkostenfunktion erhält man, indem man die Gesamtkostenfunktion durch die Produktionsmenge x dividiert. Die minimalen Stückkosten kann man durch Nullsetzen der 1. Ableitung der Stückkostenfunktion $\overline{K}$ berechnen. Aus dieser Gleichung erhält man den x-Wert des Minimums – das so genannte *Betriebsoptimum*.
Diese Menge wird in die Stückkostenfunktion eingesetzt und ergibt die minimalen Stückkosten.

Wenn man die Ware bei einem Preis verkauft, der den minimalen Stückkosten entspricht, dann arbeitet der Betrieb zwar gerade kostendeckend, aber ohne Gewinn. Die minimalen Stückkosten legen damit die so genannte *langfristige Preisuntergrenze* fest.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) D Argumentieren und Kommunizieren

Nebenhandlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren; D Argumentieren und Kommunizieren
b) —
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 3
b) 2
c) 3

Thema: Wirtschaft

Quellen: —

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Datenübertragung

Aufgabennummer: B_266

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Als *Datenübertragungsrate* wird die digitale Datenmenge, die innerhalb einer Zeiteinheit übertragen wird, bezeichnet.

a) Das *Shannon-Hartley-Gesetz* beschreibt die theoretische Obergrenze C der Datenübertragungsrate in Abhängigkeit von der Bandbreite B und dem Verhältnis von Signalleistung zu konstanter Rauschleistung $\frac{S}{N}$.

$$C = B \cdot \log_2\left(1 + \frac{S}{N}\right)$$

C … maximale Datenübertragungsrate in Bit pro Sekunde (Bit/s)
$\frac{S}{N}$ … Verhältnis von Signalleistung und konstanter Rauschleistung (dimensionslos)
B … Bandbreite in Hertz (Hz)

– Beschreiben Sie, wie sich C ändert, wenn das Argument $1 + \frac{S}{N}$ verdoppelt wird.

Anstelle von $\frac{S}{N}$ wird oft die logarithmierte Größe *SNR* in Dezibel (dB) (Signal-zu-Rausch-Verhältnis) verwendet.

$$SNR = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{S}{N}\right)$$

– Ermitteln Sie, wie viele kBit/s bei einer Bandbreite B von 1 000 Hz und einem Signal-zu-Rausch-Verhältnis von 40 dB maximal übertragen werden können.

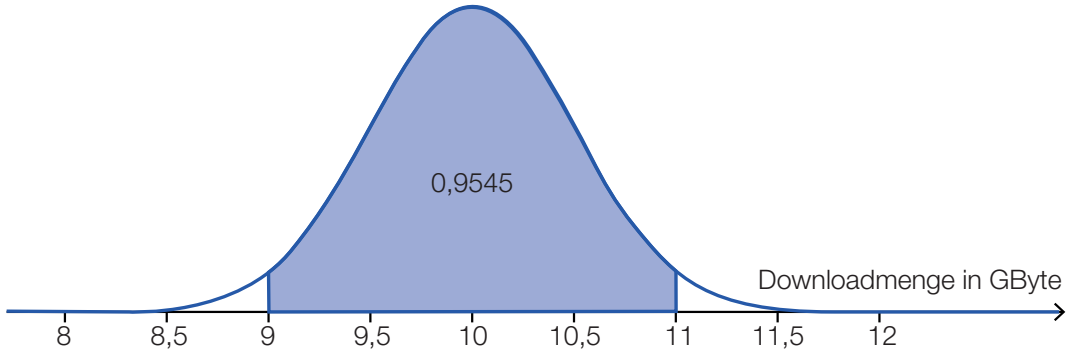
b) Der Download einer 500 MByte großen Datei wird durchgeführt.

– Berechnen Sie, wie lange dieser Download (in Stunden, Minuten und Sekunden) mit einer Datenübertragungsrate von 3 MBit/s dauert (1 Byte = 8 Bit).
– Berechnen Sie, um welchen Faktor sich die Downloadzeit erhöht, wenn die Datenübertragungsgrate um 10 % sinkt.

c) Die Downloadgeschwindigkeit (in MBit/s) in Abhängigkeit von der Zeit (in s) kann im Zeitintervall [0; 60] näherungsweise durch eine Funktion d_L beschrieben werden.

– Beschreiben Sie, was mit dem Ausdruck $\frac{1}{60} \cdot \int_0^{60} d_L(t)\,\mathrm{d}t$ im gegebenen Sachzusammenhang berechnet wird.

d) Die monatlichen Downloadmengen der Kunden eines Internetanbieters sind annähernd normalverteilt. Der Graph der zugehörigen Dichtefunktion ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



– Interpretieren Sie die in der obigen Abbildung farblich gekennzeichnete Fläche im gegebenen Sachzusammenhang.
– Lesen Sie die Parameter μ und σ aus der obigen Abbildung ab.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $C = B \cdot \log_2\left(1 + \frac{S}{N}\right)$

$C_2 = B \cdot \log_2\left(2 \cdot \left(1 + \frac{S}{N}\right)\right)$, wobei C_2 der veränderten maximalen Datenübertragungsrate entspricht

$C_2 = B \cdot \left(\log_2(2) + \log_2\left(1 + \frac{S}{N}\right)\right)$

$C_2 = B + B \cdot \log_2\left(1 + \frac{S}{N}\right)$

$C_2 = B + C$

C wird um B größer.

$40 = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{S}{N}\right)$

$4 = \log_{10}\left(\frac{S}{N}\right)$

$10\,000 = \frac{S}{N}$

$C = 1\,000 \cdot \log_2(1 + 10\,000)$

$C = 13\,287{,}85\ldots$ Bit/s

$C \approx 13{,}288$ kBit/s

b) $\frac{500 \cdot 8}{3} = 1\,333{,}33$ s = 22 min 13,33 s

$\frac{500 \cdot 8}{2{,}7} = 1\,481{,}481$ s

$\frac{1\,481{,}481}{1\,333{,}33} = 1{,}111$

Die Downloadzeit erhöht sich ungefähr um den Faktor 1,11, d. h. um rund 11 %.

c) Mit dem Ausdruck $\frac{1}{60} \cdot \int_0^{60} d_L(t)\,dt$ wird die mittlere Downloadgeschwindigkeit im Zeitintervall [0; 60] berechnet.

d) Aus der Abbildung kann abgelesen werden, dass ein zufällig ausgewählter Kunde mit einer Wahrscheinlichkeit von 95,45 % eine Downloadmenge zwischen 9 und 11 GByte pro Monat hat.

$\mu = 10$ GByte
$\sigma = 0{,}5$ GByte
Toleranzbereich: ±0,2 GByte

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 1 Zahlen und Maße
c) 4 Analysis
d) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) C Interpretieren und Dokumentieren
d) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) —
c) —
d) —

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) leicht
c) schwer
d) leicht

Punkteanzahl:

a) 3
b) 2
c) 1
d) 2

Thema: Informatik

Quellen: —

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Riesenräder*

Aufgabennummer: B_311

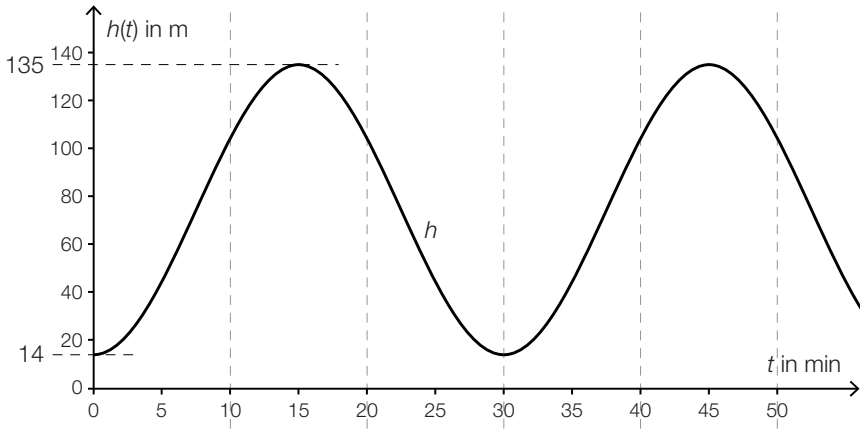
Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Dreht sich ein Riesenrad mit konstanter Geschwindigkeit, so gilt für die Höhe $h(t)$, in der sich eine Gondel zum Zeitpunkt t über dem Boden befindet:

$$h(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) + c$$

a) Das *London Eye,* eines der größten Riesenräder, dreht sich so langsam, dass es für das Ein- und Aussteigen der Fahrgäste nicht anhalten muss.

Der Graph der Funktion h ist in folgender Abbildung dargestellt:



– Lesen Sie den Durchmesser des Riesenrades ab.
– Ermitteln Sie den Parameter ω.
– Ermitteln Sie den Parameter c.

b) Dreht sich das *Wiener Riesenrad* ohne Zwischenstopps, so gilt für die Höhe $h(t)$, in der sich eine Gondel zum Zeitpunkt t über dem Boden befindet:

$h(t) = 30{,}48 \cdot \sin(0{,}02464 \cdot t) + 34{,}27$

t ... Zeit seit Beginn der Beobachtung in Sekunden (s)
$h(t)$ ... Höhe, in der sich diese Gondel zum Zeitpunkt t befindet, in Metern (m)

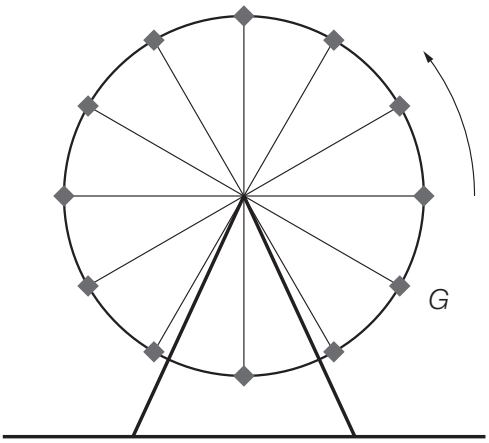
– Ermitteln Sie denjenigen Zeitpunkt, zu dem diese Gondel erstmals eine Höhe von 60 m erreicht.
– Bestimmen Sie die Zeitdauer, während derer sich die Gondel im Laufe einer Umdrehung in einer Höhe von mindestens 60 m befindet.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Ein Riesenrad mit 12 gleichmäßig verteilten Gondeln dreht sich mit konstanter Geschwindigkeit gegen den Uhrzeigersinn. Die Höhe $h(t)$, in der sich eine Gondel zum Zeitpunkt t über dem Boden befindet, ist:

$$h(t) = 15 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{60} \cdot t + \varphi\right) + 20$$

t ... Zeit seit Beginn der Beobachtung in s
$h(t)$ ... Höhe, in der sich eine Gondel zum Zeitpunkt t befindet, in m



– Berechnen Sie, mit welcher Geschwindigkeit (in km/h) sich eine Gondel entlang der Kreisbahn bewegt.

Die Gondel G befindet sich zur Zeit $t = 0$ s an der in der oben stehenden Skizze dargestellten Position.

– Dokumentieren Sie in Worten, wie Sie den Parameter φ für die Funktion h der Gondel G ermitteln können.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Durchmesser: $d = 121$ m

Aus der Periodendauer $T = 30$ min ergibt sich:

$\omega = \frac{2\pi}{30}$ min^{-1} $\approx 0{,}21$ min^{-1}

Verschiebung nach oben: $c = 74{,}5$ m

b) $60 = 30{,}48 \cdot \sin(0{,}02464 \cdot t) + 34{,}27$

$t_1 = 40{,}78\ldots$ s ≈ 41 s
$t_2 = 86{,}71\ldots$ s ≈ 87 s

$t_2 - t_1 \approx 46$ s

Die Gondel erreicht nach etwa 41 Sekunden erstmals 60 Meter und befindet sich rund 46 Sekunden lang in einer Höhe von mindestens 60 Metern.

c) Mit $\omega = \frac{2\pi}{T}$ erhält man für die Zeitdauer einer Umdrehung: $T = 120$ s.

Umfang des Kreises: $u = 30\pi$ m

$v = \frac{30\pi}{120}$ m/s $\approx 0{,}785$ m/s $\approx 2{,}827$ km/h

Da es 12 gleichmäßig verteilte Gondeln gibt, beträgt der Winkel zwischen je 2 benachbarten Gondeln 30°. φ wird gegen den Uhrzeigersinn von der „rechten horizontalen Lage“ aus gemessen. Der Winkel beträgt daher –30° bzw. 330°, im Bogenmaß also $-\frac{\pi}{6}$ bzw. $\frac{11\pi}{6}$.

Lösungsschlüssel

a) 1 × C: für das richtige Ablesen des Durchmessers
1 × B1: für die richtige Ermittlung der Winkelgeschwindigkeit
1 × B2: für die richtige Ermittlung des Parameters c

b) 1 × B1: für die richtige Ermittlung des Zeitpunkts
1 × B2: für die richtige Bestimmung der Zeitdauer

c) 1 × A: für eine richtige Modellbildung zur Berechnung der Geschwindigkeit
1 × B: für die richtige Berechnung der Geschwindigkeit in km/h
1 × C: für die richtige Dokumentation zur Ermittlung des Parameters φ
(auch eine Beschreibung mit einem Winkel in Grad ist als richtig zu werten)

Planeten (1)

Aufgabennummer: B_167

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

In der nachstehenden Tabelle sind die Entfernungen von Planeten zur Sonne in AE (AE = astronomische Einheit = mittlere Entfernung von der Sonne zur Erde) und deren Umlaufzeiten um die Sonne angegeben.

	Merkur	Venus	Erde	Jupiter	Saturn
mittlere Entfernung x zur Sonne in astronomischen Einheiten (AE)	0,39	0,72	1	5,2	9,54
gerundete Umlaufzeit y in Tagen (d)	88	225	365	4 330	10 760

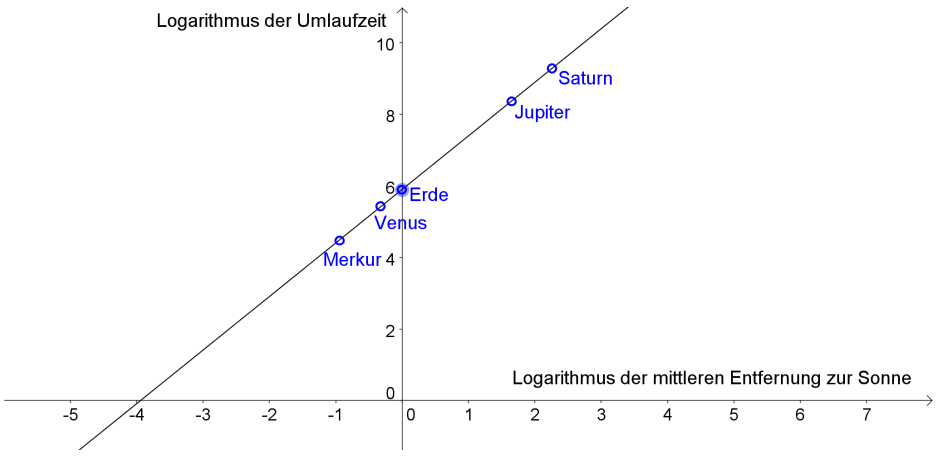
a) Der Zusammenhang zwischen Entfernung und Umlaufzeit wird durch $y = a \cdot x^c$ beschrieben.

– Bestimmen Sie aus den Werten von Venus und Erde die Parameter a und c.

b) Die Anwendung der natürlichen Logarithmusfunktion auf die Werte der obigen Tabelle führt auf die folgende Tabelle:

		Merkur	Venus	Erde	Jupiter	Saturn
Logarithmus der mittleren Entfernung zur Sonne in astronomischen Einheiten (AE)	x	–0,94	–0,33	0	1,65	2,26
Logarithmus der Umlaufzeit in Tagen (d)	y	4,48	5,42	5,9	8,37	9,28

Die logarithmierten Werte müssen auf einer Geraden liegen. Durch Bestimmung der Regressionsgeraden kann man Ungenauigkeiten ausgleichen.



– Berechnen Sie die Gleichung der Regressionsgeraden.
– Berechnen Sie mithilfe der Regressionsgeraden die Umlaufzeit in Tagen für den Mars (mittlere Entfernung zur Sonne = 1,53 AE).

– Erklären Sie, warum die beiden im Folgenden angegebenen Korrelationskoeffizienten für die in der Grafik dargestellten Regression nicht richtig sein können.

$r_1 \approx -0{,}999$
$r_2 \approx 1{,}01$

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $y = a \cdot x^c$

$365 = a \cdot 1^c$
$225 = a \cdot 0{,}72^c$
$a = 365$

$\frac{225}{365} = 0{,}72^c$

$c = \frac{\ln\left(\frac{225}{365}\right)}{\ln(0{,}72)} \approx 1{,}47$

b) Berechnung mit Technologie: $y = 1{,}49716x + 5{,}89950$
Geradensteigung 1,49716 (Steigungsdreieck) Ordinatenabschnitt 5,89950

Berechnung Mars:
$y = 1{,}49716 \ln(1{,}53) + 5{,}89950 \approx 6{,}536$
$e^{6{,}536} \approx 690$
Die Umlaufzeit beträgt gerundet 690 Tage.

Beobachtung: Alle Punkte liegen beinahe auf der Geraden, die Steigung ist positiv. Der Korrelationskoeffizient muss sich daher sehr nahe an 1 befinden und positiv sein.

$r_1 \approx -0{,}999$ nicht passend, weil zwar nahe genug an 1, aber negativ; passt nicht zu positiver Steigung der Regressionsgeraden
$r_2 \approx 1{,}01$ nicht passend, weil größer als 1

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) D Argumentieren und Kommunizieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel

Punkteanzahl:

a) 3
b) 4

Thema: Physik

Quellen: —

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Herstellungskosten (1)

Aufgabennummer: B_123

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Für ein Produkt lautet die quadratische Kostenfunktion wie folgt:

$$K(x) = 0{,}1x^2 + 6x + 40$$

$K(x)$ … Gesamtkosten von x Mengeneinheiten in Geldeinheiten (GE)
x … erzeugte Menge in Mengeneinheiten (ME)

Der Betrieb erzeugt pro Tag höchstens 30 ME dieses Produkts.

a) – Interpretieren Sie die gegebene Kostenfunktion hinsichtlich der folgenden mathematischen Eigenschaften:
- sinnvoller Definitionsbereich
- Monotonie und Krümmungsverhalten
- Fixkosten

b) – Ermitteln Sie aus der gegebenen Gleichung, wie viele ME produziert wurden, wenn Kosten von 150 GE angefallen sind.
– Ermitteln Sie, wie hoch die Kosten für die Produktion von 10 ME sind.
– Stellen Sie die Kostenfunktion grafisch dar und zeichnen Sie die beiden berechneten Wertepaare ein.

c) – Stellen Sie die Stückkostenfunktion (= Durchschnittskostenfunktion) auf.
– Berechnen Sie das Betriebsoptimum mit der langfristigen Preisuntergrenze.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

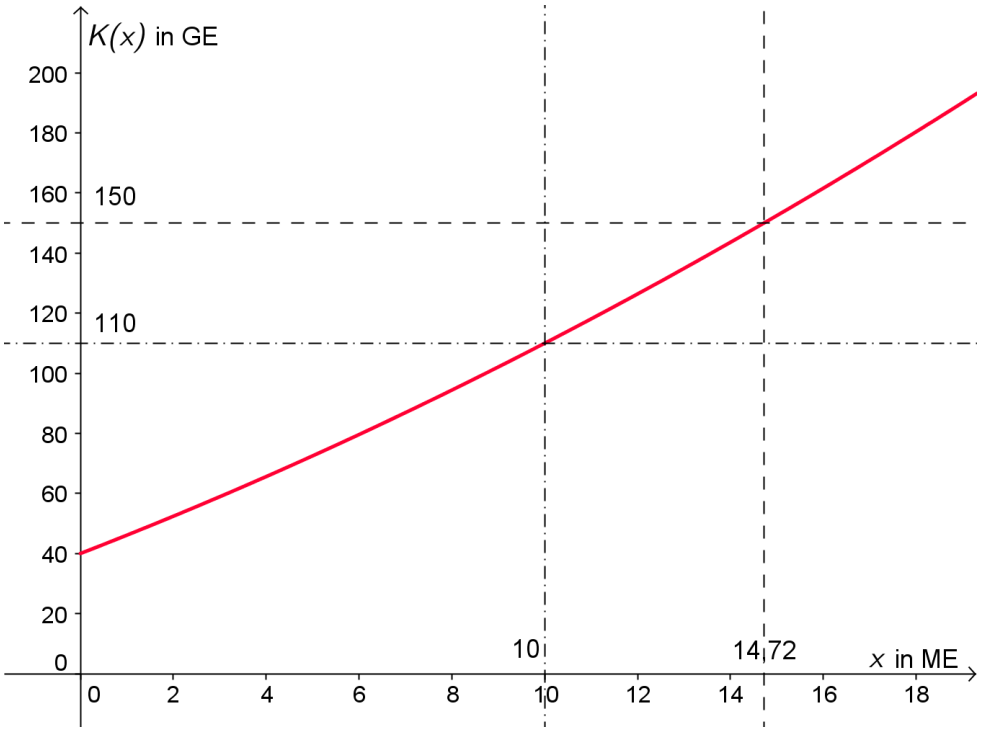
Möglicher Lösungsweg

a) Der Definitionsbereich ist [0; 30].

Die Kostenfunktion ist im angegebenen Definitionsbereich streng monoton steigend.
Die Kosten steigen progressiv, der Graph der Kostenfunktion hat im betrachteten Bereich eine positive Krümmung.

Die Fixkosten betragen $K(0) = 40$ GE.

b) Bei Kosten von 150 GE werden rund 14,72 ME erzeugt.
Die Herstellung von 10 ME kostet 110 GE.



c) $\frac{K(x)}{x} = \overline{K}(x) = 0{,}1x + 6 + \frac{40}{x}$

$\overline{K}(x)' = 0{,}1 - \frac{40}{x^2} = 0$

$x = 20$
$\overline{K}(20) = 10$

Das Betriebsoptimum beträgt 20 ME.
Die langfristige Preisuntergrenze beträgt 10 GE/ME.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) 4 Analysis

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) leicht
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 3
b) 3
c) 3

Thema: Wirtschaft

Quellen: –

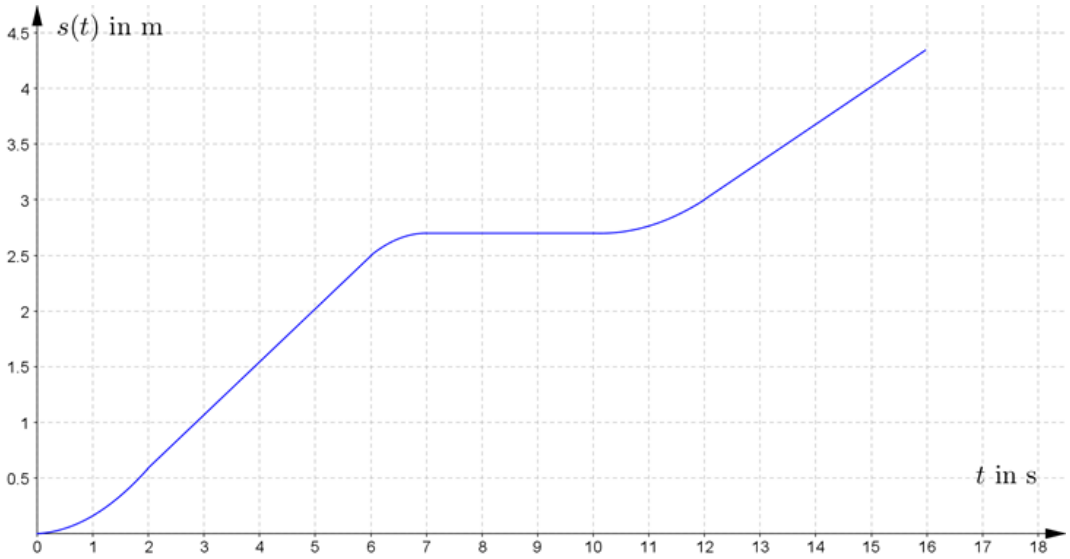
Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Roboter (1)

Aufgabennummer: B_108

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Die nachstehende Grafik stellt in einem Weg-Zeit-Diagramm die Bewegung eines Industrieroboters in einer Produktionshalle dar.



a) – Beschreiben Sie den Unterschied der Bewegungen des Industrieroboters in Bezug auf die Geschwindigkeit in den Intervallen [0 s; 2 s] und [6 s; 7 s].
– Bestimmen Sie die Intervalle, in denen die Beschleunigung des Industrieroboters gleich null ist.

b) – Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate im Intervall [0 s; 15 s].
– Erklären Sie, welche Größe der Bewegung durch diese mittlere Änderungsrate beschrieben wird.

c) Ein Roboter legt mit konstanter Geschwindigkeit von 1,2 m/s eine Strecke von 6 m zurück. Anschließend steigert er seine Geschwindigkeit mit einer Beschleunigung von:

$$a(t) = 1{,}4 \cdot t$$

t … Zeit in Sekunden
$a(t)$ … Beschleunigung in Abhängigkeit von der Zeit t in m/s

– Stellen Sie die Funktionsgleichung der Geschwindigkeit-Zeit-Funktion für den durch die Gleichung angegebenen Beschleunigungsvorgang auf.
– Stellen Sie die Funktionsgleichung der zugehörigen Weg-Zeit-Funktion für den beschriebenen Beschleunigungsvorgang auf.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Im Intervall [0 s; 2 s] beschleunigt der Roboter positiv, d. h., er wird schneller, im Intervall [6 s; 7s] beschleunigt er negativ, d. h., er bremst ab.

Im Intervall [2 s; 6 s] sowie im Intervall [12 s; 16 s] bewegt sich der Roboter mit konstanter Geschwindigkeit. Im Intervall [7 s; 10 s] befindet sich der Roboter im Stillstand. In beiden Situationen ist die Beschleunigung null.

b) Berechnung: $\overline{v} = \frac{4\text{ m}}{15\text{ s}} = 0{,}2\dot{6}\text{ m/s} \approx 0{,}27\text{ m/s}$

Die mittlere Änderungsrate ist die mittlere Geschwindigkeit des Roboters im gegebenen Intervall.

c) Anfangsbedingungen: $v(0) = 1{,}2$ m/s, $s(0) = 6$ m

möglicher Ansatz mittels Integration: $v(t) = \int 1{,}4t\ \mathrm{d}t = 0{,}7 \cdot t^2 + C_1$

Einsetzen der Anfangsbedingung $v(0) = 1{,}2$ m/s:
$v(0) = 0{,}7 \cdot 0 + C_1 = 1{,}2 \implies C_1 = 1{,}2$
$v(t) = 0{,}7 \cdot t^2 + 1{,}2$

$v(t)$ kann auch mit elementaren Formeln aufgefunden werden.
$s(t) = \int v(t)\ \mathrm{d}t = \int \left(0{,}7 \cdot t^2 + 1{,}2\right)\mathrm{d}t = \frac{0{,}7 \cdot t^3}{3} + 1{,}2 \cdot t + C_2$

Einsetzen der Anfangsbedingung $s(0) = 6$ m:
$s(0) = \frac{0{,}7 \cdot 0^2}{3} + 1{,}2 \cdot 0 + C_2 = 6 \implies C_2 = 6$

Somit ergibt sich als Funktionsgleichung für den Weg s:
$s(t) = \frac{0{,}7 \cdot t^3}{3} + 1{,}2 \cdot t + 6$

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 4 Analysis
c) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) –
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) leicht
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2
c) 4

Thema: Physik

Quellen: –

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

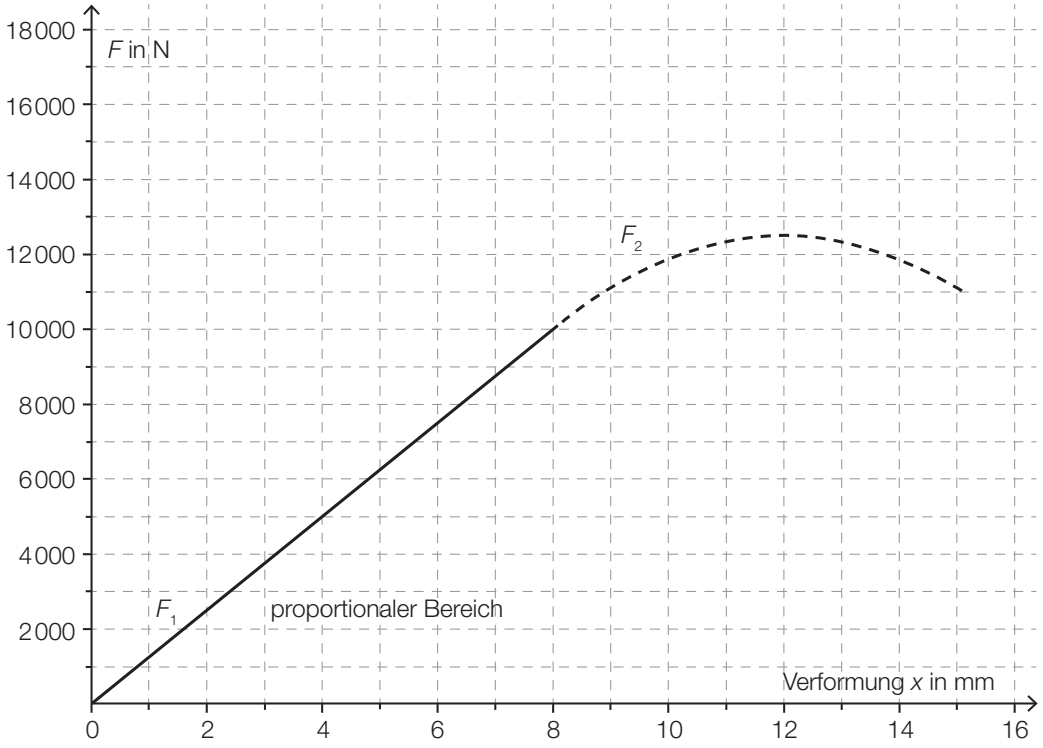
Bruchbiegeprüfung

Aufgabennummer: B_027

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Bei einer Bruchbiegeprüfung wird die Festigkeit von Materialproben bestimmt. Unter Erhöhung des Betrags der Kraft $\vec{F}$ in Newton (N) wird die verursachte Verformung x in Millimetern (mm) ermittelt. Das Kraft-Verformungs-Diagramm beschreibt den Zusammenhang von Kraft und Verformung.

Der Verlauf einer Bruchbiegeprüfung an einer Holzprobe ist im nachstehenden Kraft-Verformungs-Diagramm dargestellt.



$$F_2(x) = -\frac{625}{4} \cdot x^2 + 3750 \cdot x - 10000 \quad \text{mit} \quad 8 \le x \le 15{,}1$$

a) – Berechnen Sie die maximale Kraft im dargestellten Bruchbiegeversuch mithilfe der Differenzialrechnung.

b) Nach einer Verformung von 15,1 mm kam es zum Bruch.

– Ermitteln Sie die Gleichung der Funktion F_1.

– Berechnen Sie die Arbeit W ($W = \int F(x)\,dx$), die bis zum Bruch verrichtet wurde.

c) Die Kraftbelastung der Bruchbiegeprüfung wird im proportionalen Bereich [0; b] auf $F_1(x) = k \cdot x + F_0$ geändert.

– Interpretieren Sie die Bedeutung des Parameters F_0 im gegebenen Sachzusammenhang.
– Zeigen Sie, dass sich die Brucharbeit ($W = \int F(x)\,\mathrm{d}x$) im proportionalen Bereich in diesem Fall um $F_0 \cdot b$ erhöht.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $F_2'(x) = -\frac{625}{2} \cdot x + 3750$

$-\frac{625}{2} \cdot x + 3750 = 0 \Rightarrow x = 12 \text{ mm}$

$F_2(12) = 12500 \text{ N}$

Die maximale Kraft beträgt 12500 N.

b) Ablesen aus der Grafik: $P_1 = (0|0)$, $P_2 = (4|5000)$

$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5000}{4} = 1250$

$F_1(x) = 1250 \cdot x$ mit $0 \leq x \leq 8$

Berechnung des Schnittpunkts der Funktionen:

$F_1(x) = F_2(x) \Rightarrow x_1 = 8$

Berechnung der Brucharbeit W:

$W = \int_0^8 F_1(x)\,dx + \int_8^{15,1} F_2(x)\,dx$

$W = 123865{,}05\ldots \text{ Nmm}$

Bis zum Bruch wurde eine Arbeit von rund 123865 Nmm verrichtet.

c) Kraft ohne Anfangsbelastung F_0: $F(x) = k \cdot x$

Arbeit ohne Anfangsbelastung F_0 im Intervall $[0; b]$: $W = \int_0^b k \cdot x = \left[k \cdot \frac{x^2}{2}\right]_0^b = k \cdot \frac{b^2}{2}$

Arbeit mit der Anfangsbelastung F_0:

$W_{neu} = \int_0^b (k \cdot x + F_0)\,dx = \left[k \cdot \frac{x^2}{2} + F_0 \cdot x\right]_0^b = k \cdot \frac{b^2}{2} + F_0 \cdot b = W + F_0 \cdot b$

Durch die geänderte Kraftbelastung der Bruchbiegeprüfung nimmt die Brucharbeit W_{neu} für den proportionalen Bereich um $F_0 \cdot b$ zu.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 4 Analysis
c) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) D Argumentieren und Kommunizieren

Nebenhandlungsdimension:

a) –
b) A Modellieren und Transferieren
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) leicht
c) leicht

Punkteanzahl:

a) 1
b) 4
c) 2

Thema: Holz

Quellen: –

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Verkehrszeichen

Aufgabennummer: B_261

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Der Durchmesser des Verkehrszeichens *Einfahrt verboten* beträgt 600 mm. Der weiße Balken ist 547 mm lang und 139 mm breit.

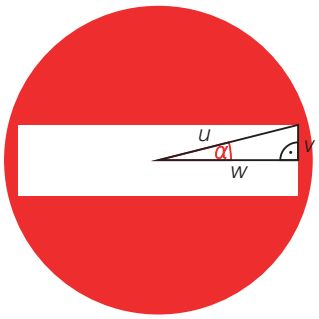


Abbildung 1

– Berechnen Sie, welchen prozentuellen Anteil der Gesamtfläche des Kreises der Balken einnimmt.
– Ordnen Sie anhand des Dreiecks in Abbildung 1 A bis D richtig zu. *[2 zu 4]*

tan(α)	
sin(α)	

A	$\frac{v}{u}$
B	$\frac{w}{v}$
C	$\frac{v}{w}$
D	$\frac{u}{v}$

Aus optischen Gründen soll der Balken so verlängert werden, dass die Ecken den Kreisrand berühren.

– Berechnen Sie die Länge des Balkens bei gleichbleibender Balkenbreite.

b) Das Verkehrszeichen *Starke Steigung* (siehe Abbildung 2) hat die Form eines gleichseitigen Dreiecks.



Abbildung 2

– Zeigen Sie, dass die Steigung im dargestellten schwarzen Dreieck mehr als 50 % beträgt, obwohl der Anstieg genau bis zur Hälfte der Seitenkante reicht.

c) Bei dem Verkehrszeichen *Achtung Querrinne oder Aufwölbung* wird die obere Begrenzung der schwarzen Fläche mit der Funktion *g* modelliert:

$g(x) = \cos(x + \pi) + 2{,}8$

x, $g(x)$ ... Koordinaten

– Skizzieren Sie in Abbildung 3 ein zum Funktionsgraphen *g* passendes Koordinatensystem mit entsprechender Skalierung.



Abbildung 3

– Erstellen Sie eine Formel für die Berechnung des Flächeninhalts der schwarzen Fläche in der Abbildung 3.

$A =$ _____

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) A_G ... Gesamtfläche
$A_G = 300^2 \cdot \pi$
$A_G = 90\,000 \cdot \pi \text{ mm}^2$

A_B ... Fläche des weißen Balkens
$A_B = 547 \cdot 139 = 76\,033$
$A_B = 76\,033 \text{ mm}^2$

$\frac{A_B}{A_G} = 0{,}2689\ldots = 26{,}89\ldots\ \% \approx 27\ \%$

tan(α)	C
sin(α)	A

A	$\frac{v}{u}$
B	$\frac{w}{v}$
C	$\frac{v}{w}$
D	$\frac{u}{v}$

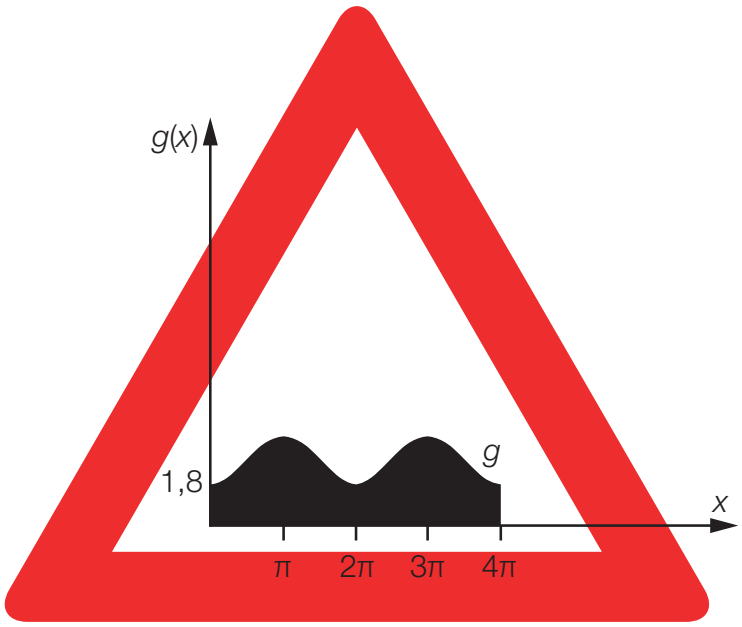
x ... Länge des neuen Balkens

$\frac{x}{2} = \sqrt{300^2 - 69{,}5^2} = \sqrt{85\,169{,}75}$

$x = 2 \cdot \sqrt{85\,169{,}75} = 583{,}677\ldots$
$x \approx 584 \text{ mm}$

b) Halbe Seite heißt auch halber Winkel. Im gleichseitigen Dreieck ist $\alpha = 60° \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 30°$.
$\tan(30°) = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0{,}577\ldots \Rightarrow$ Die Steigung ist größer als 50 %.

c)



$$A = \int_0^{4\pi} \cos(x + \pi) + 2{,}8$$

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) 4 Analysis

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) —
c) —

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) schwer

Punkteanzahl:

a) 3
b) 1
c) 2

Thema: Verkehr

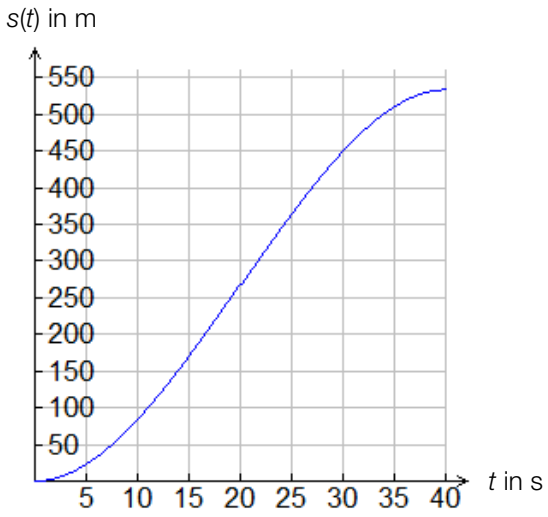
Quellen: —

Autofahrt (1)

Aufgabennummer: B_072

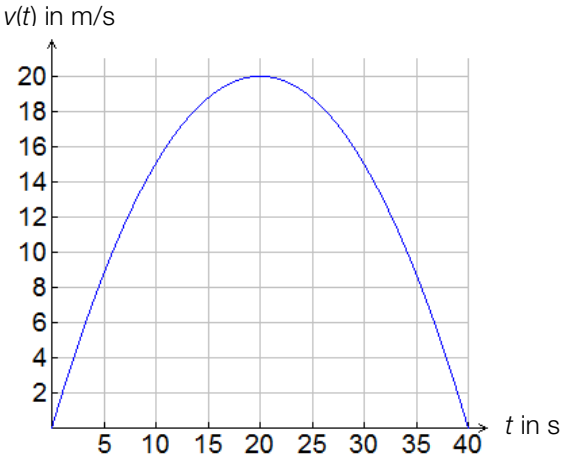
Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Im folgenden Weg-Zeit-Diagramm ist die von einem Auto zurückgelegte Strecke s in Metern (m) in Abhängigkeit von der Zeit t in Sekunden (s) für $0\ \text{s} \leq t \leq 40\ \text{s}$ dargestellt.



– Lesen Sie aus der Grafik die mittlere Geschwindigkeit des Autos für das Zeitintervall $15\ \text{s} \leq t \leq 30\ \text{s}$ ab.
– Lesen Sie aus der Grafik die momentane Geschwindigkeit des Autos für den Zeitpunkt $t = 30\ \text{s}$ ab.

b) Die nachstehende Grafik zeigt das Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm eines Autos für die ersten 40 s seiner Fahrt.



– Kreuzen Sie die zutreffende Aussage über die Beschleunigungsfunktion an.
[1 aus 5]

Die Beschleunigung ist nach ungefähr 40 Sekunden gleich null.	☐
Die Beschleunigung ist für 0 s ≤ t ≤ 40 s positiv.	☐
Der Graph der Beschleunigungsfunktion ist für den Bereich 0 s ≤ t ≤ 40 s fallend.	☐
Die Beschleunigung ist nach ungefähr 20 Sekunden maximal.	☐
Die Beschleunigung ist nach 5 Sekunden ungefähr gleich groß wie nach 35 Sekunden.	☐

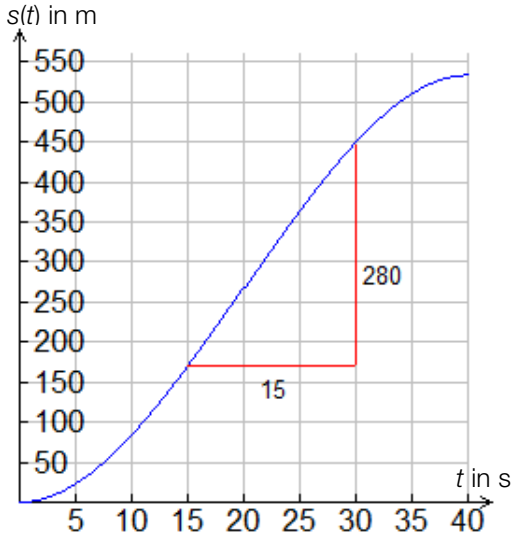
c) Die Geschwindigkeit eines anderen Autos erreicht nach 25 s ihr Maximum von 15 Metern pro Sekunde (m/s) und nach einer Fahrzeit von 50 s ist sie gleich null. Die Geschwindigkeit kann mithilfe einer quadratischen Funktion $v(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c$ beschrieben werden.

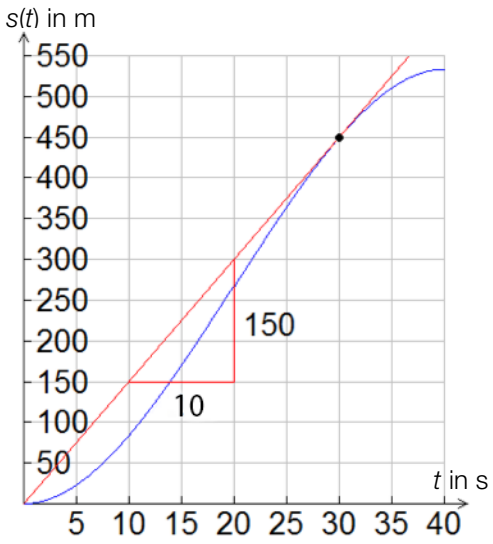
– Stellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Parameter a, b und c auf.
– Ermitteln Sie diejenige Funktion, die die Geschwindigkeit des Autos in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a)





Die mittlere Geschwindigkeit beträgt $\frac{280}{15}\ \frac{\text{m}}{\text{s}} = 18{,}7\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Die Momentangeschwindigkeit entspricht der Steigung der Tangente bei $t = 30$ s und beträgt rund $\frac{150}{10}\ \frac{\text{m}}{\text{s}} = 15\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Etwaige Ableseungenauigkeiten werden toleriert!

b)

Der Graph der Beschleunigungsfunktion ist für den Bereich $0\text{ s} \le t \le 40\text{ s}$ fallend.	☒

c) $v(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c$, $v'(t) = 2 \cdot a \cdot t + b$

1. $v'(25) = 0 \Rightarrow$ Gleichung 1: $50a + b = 0$
2. $v(25) = 15 \Rightarrow$ Gleichung 2: $625a + 25b + c = 15$
3. $v(50) = 0 \Rightarrow$ Gleichung 3: $2\,500a + 50b + c = 0$

Lösen des Gleichungssystems mittels Technologieeinsatz: $v(t) = 1{,}2 \cdot t - 0{,}024 \cdot t^2$

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 4 Analysis
c) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) –
b) –
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) leicht

Punkteanzahl:

a) 2
b) 1
c) 3

Thema: Physik

Quellen: –

Würfel (1)

Aufgabennummer: B_078

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Würfel werden im Kasino und bei vielen Gesellschaftsspielen verwendet.

a) Die Mathematiker Blaise Pascal und Pierre de Fermat beschäftigten sich in einem Briefwechsel mit der folgenden Frage: „Was ist wahrscheinlicher: Bei 4 Würfen mit einem Würfel mindestens einen Sechser zu werfen oder bei 24 Würfen mit 2 Würfeln mindestens einen Doppelsechser?“ Dabei wird mit einem herkömmlichen Spielwürfel gewürfelt, wobei die Augenzahlen 1 bis 6 jeweils mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten.

– Überprüfen Sie die Fragestellung durch Berechnung der jeweiligen Wahrscheinlichkeiten.

b) Ein Betrieb plant, eine spezielle Art von Würfeln für Gesellschaftsspiele auf den Markt zu bringen. Der monatliche Absatz von Würfeln ist annähernd normalverteilt. Ein Marktforschungsinstitut ermittelt aus dem monatlichen Absatz der Würfel an n verschiedenen Standorten ein zweiseitiges 95-%-Konfidenzintervall, um den durchschnittlichen monatlichen Absatz zu schätzen.

– Dokumentieren Sie in einzelnen Schritten, wie dieses zweiseitige Konfidenzintervall ermittelt wird.
– Interpretieren Sie die Bedeutung des zweiseitigen Konfidenzintervalls.

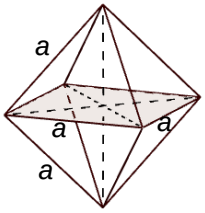
c) Bei einem Spiel wird mit zwei 6-seitigen Würfeln gewürfelt, wobei die Augenzahlen 1 bis 6 jeweils mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten. Die Zufallsvariable X ist die Summe der gewürfelten Augenzahlen.

– Kreuzen Sie die zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]*

Die Wahrscheinlichkeit, die Augensumme 8 zu werfen, ist am größten.	☐
$P(X = 6) = P(X = 9)$	☐
$P(X \geq 4) = 1 - P(X < 5)$	☐
Die Wahrscheinlichkeit, die Augensumme 2 zu werfen, ist $\frac{2}{36}$.	☐
$P(X = 3) = P(X = 11)$	☐

d) Ein 8-seitiger Würfel hat die Form eines regelmäßigen Oktaeders.





– Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung des Volumens V des Oktaeders in Abhängigkeit von seiner Kantenlänge a.

Der abgebildete Oktaeder hat eine Kantenlänge a = 15 mm und eine Masse m = 2,4 g.

– Berechnen Sie seine Dichte in g/cm³.

– Erklären Sie, was eine Verdoppelung der Kantenlänge a für das Volumen des Oktaeders bedeutet.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) X ... Anzahl der Sechser

$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0{,}5177\ldots \approx 51{,}8\ \%$

X … Anzahl der Doppelsechser

$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} = 0{,}4914\ldots \approx 49{,}1\ \%$

Es ist wahrscheinlicher, bei 4 Würfen mit 1 Würfel mindestens 1 Sechser zu würfeln als bei 24 Würfen mit 2 Würfeln mindestens 1 Doppelsechser.

b) Es werden zuerst der Mittelwert $\bar{x}$ und die Standardabweichung s der Stichprobe ermittelt. Mithilfe der Tabelle der t-Verteilung oder mittels Technologieeinsatz ermittelt man $t_{\left(1-\frac{\alpha}{2};n-1\right)} = t_{(0{,}975;n-1)}$, wobei n die Anzahl der Werte in der Stichprobe ist.

Die Grenzen des Konfidenzintervalls für μ sind dann $\bar{x} \pm t_{\left(1-\frac{\alpha}{2};n-1\right)} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$.

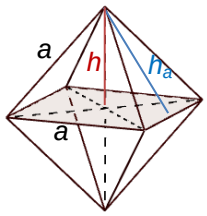
Führt man die Ermittlung des Konfidenzintervalls mit unterschiedlichen Stichproben sehr oft durch, enthalten im Mittel 95 % der Konfidenzintervalle den wahren Erwartungswert, also den durchschnittlichen monatlichen Absatz an Würfeln.

Ebenfalls zulässig:
Die Wahrscheinlichkeit, dass der tatsächliche Erwartungswert für den monatlichen Absatz der Würfel im ermittelten Konfidenzintervall liegt, beträgt 95 %.

c)

$P(X = 3) = P(X = 11)$	☒

d) $h_a = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2}$



$h = \sqrt{h_a^{\,2} - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3 \cdot a^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a \cdot \sqrt{2}}{2}$

(Die beiden obigen Formeln können auch dem Formelheft entnommen werden.)

$V = 2 \cdot \frac{a^2 \cdot h}{3} = \frac{2a^2 \cdot a\sqrt{2}}{3 \cdot 2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$

$V = \frac{15^3 \cdot \sqrt{2}}{3} = 1590{,}9902\ldots\ \text{mm}^3 = 1{,}5909\ldots\ \text{cm}^3$

$\rho = \frac{m}{V} = \frac{2{,}4}{1{,}59099\ldots} = 1{,}5084\ldots\ \frac{g}{cm^3} \approx 1{,}51\ \frac{g}{cm^3}$

Bei einer Verdoppelung von *a* wird das Volumen des Oktaeders 8-mal so groß.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 5 Stochastik
c) 5 Stochastik
d) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —
d) 1 Zahlen und Maße

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) C Interpretieren und Dokumentieren
d) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) A Modellieren und Transferieren
c) —
d) B Operieren und Technologieeinsatz, D Argumentieren und Kommunizieren

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) leicht
d) mittel

Punkteanzahl:

a) 3
b) 3
c) 1
d) 4

Thema: Alltag

Quelle: http://www.austromath.at/medienvielfalt/materialien/wkeit/lernpfad/01_Historisch.html

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Belastung von Bauteilen

Aufgabennummer: B_069

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein Unternehmen stellt verschiedene Bauteile her, die einer gewissen Belastung standhalten müssen. Die Belastung, der die Bauteile standhalten, ist normalverteilt mit den Parametern μ und σ.

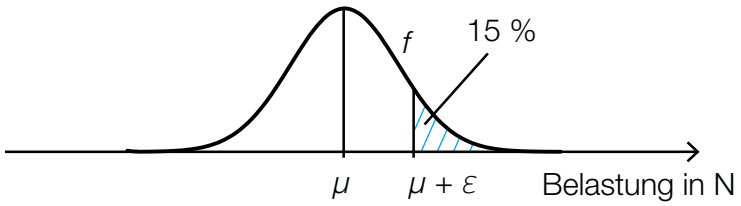
a) Das Unternehmen behauptet, dass der Erwartungswert der Belastung, der die Bauteile standhalten, μ = 120 Newton (N) beträgt.

Eine Stichprobe ergab folgende Werte:

118,5 N	122 N	120,5 N	117 N	118,5 N	121 N	121,5 N	119,5 N

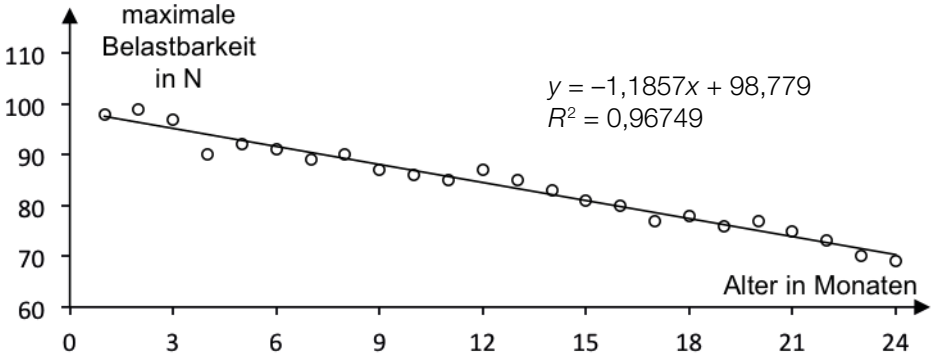
– Ermitteln Sie den Stichprobenmittelwert $\overline{x}$ und die Stichprobenstandardabweichung s dieser Stichprobe.
– Überprüfen Sie mithilfe eines 95-%-Vertrauensbereichs für μ, ob die Behauptung des Unternehmens durch diese Stichprobe untermauert werden kann.

b) Für andere Bauteile beträgt der Erwartungswert für die Belastbarkeit μ = 102 Newton (N). Der Graph der zugehörigen Dichtefunktion ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



– Interpretieren Sie den in der obigen Abbildung gekennzeichneten Flächeninhalt im gegebenen Sachzusammenhang.
– Geben Sie einen mathematischen Ausdruck an, der die in der Abbildung dargestellte Wahrscheinlichkeit beschreibt.
– Berechnen Sie ε für σ = 3,5 N.

c) In einer Messreihe wurden Bauteile abhängig von ihrem Alter auf ihre maximale Belastbarkeit getestet (siehe nachstehende Abbildung). Anhand der Daten wurde eine lineare Regressionsfunktion erstellt.



Das Tabellenkalkulationsprogramm liefert statt des Korrelationskoeffizienten r sein Quadrat r^2 (= R^2).

– Bestimmen Sie den Korrelationskoeffizienten r.
– Interpretieren Sie diesen Korrelationskoeffizienten hinsichtlich des Zusammenhangs zwischen dem Alter eines Bauteils und der maximalen Belastbarkeit.

Regressionsfunktionen werden mithilfe der *Methode der kleinsten Quadrate* erstellt.

– Erklären Sie diese Methode.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Stichprobe: $n = 8$; $\bar{x} = 119{,}8125$ N; $s = 1{,}73076...$ N

Anzahl der Freiheitsgrade: $n - 1 = 7$
$1 - \alpha = 0{,}95$; $\alpha = 0{,}05$; $1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}975$;

$$\bar{x} - t_{7;0{,}975} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + t_{7;0{,}975} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$119{,}8125 - 2{,}365 \cdot \frac{1{,}73...}{\sqrt{8}} \leq \mu \leq 119{,}8125 + 2{,}365 \cdot \frac{1{,}73...}{\sqrt{8}}$$

$118{,}36 \text{ N} \leq \mu \leq 121{,}26 \text{ N}$

Der Erwartungswert μ liegt mit 95%iger Wahrscheinlichkeit im Intervall [118,4 N; 121,3 N].
Die Behauptung des Unternehmens, dass $\mu = 120$ N ist, wird daher durch diese Stichprobe untermauert.

b) Die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Bauteil einer Belastung von mindestens $(102 + \varepsilon)$ N standhält, beträgt 15 %.

oder:

15 % der Bauteile können mit mindestens $(102 + \varepsilon)$ N belastet werden, ohne dabei Schaden zu nehmen.

$P(X \geq 102 + \varepsilon) = 0{,}15$ oder $\int_{\mu+\varepsilon}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 0{,}15$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$\varepsilon \approx 3{,}63$ N

c) Korrelationskoeffizient $r \approx -0{,}9836$

Im gemessenen Bereich lässt der Korrelationskoeffizient einen starken linearen Zusammenhang zwischen dem Alter der Bauteile und der Belastbarkeit vermuten.

Methode der kleinsten Quadrate:
Die Ausgleichsfunktion wird so aufgestellt, dass die Summe der quadrierten vertikalen Abstände der Messwerte zur Regressionsgerade so klein wie möglich, also ein Minimum, wird.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 5 Stochastik
c) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) D Argumentieren und Kommunizieren

Nebenhandlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz, A Modellieren und Transferieren
c) C Interpretieren und Dokumentieren, B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 3
b) 3
c) 3

Thema: Technik

Quellen: —

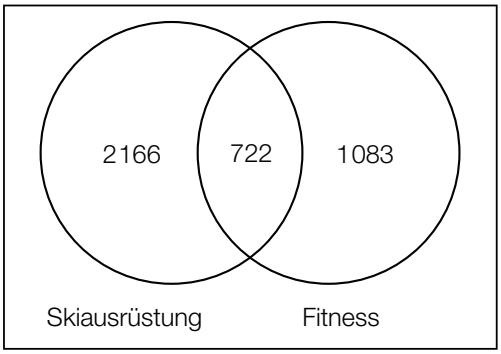
BMB
Bundesministerium
für Bildung

Sportgeschäft

Aufgabennummer: B_263

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Während des Winterschlussverkaufs wurde die Anzahl der Kunden eines Sportgeschäfts, die in verschiedenen Abteilungen eingekauft haben, aufgezeichnet. Insgesamt haben 5 776 Kunden im Sportgeschäft eingekauft.



alle Kunden
des Sportgeschäfts

– Berechnen Sie die Anzahl der Kunden, die weder in der Abteilung *Skiausrüstung* noch in der Abteilung *Fitness* eingekauft haben.
– Ordnen Sie den beiden Aussagen jeweils den richtigen Prozentsatz aus A bis D zu. *[2 zu 4]*

Der Prozentsatz der Kunden, die nur Skiausrüstung kaufen, beträgt …	
Der Prozentsatz der Kunden, die sowohl Skiausrüstung als auch Fitnessartikel kaufen, beträgt …	

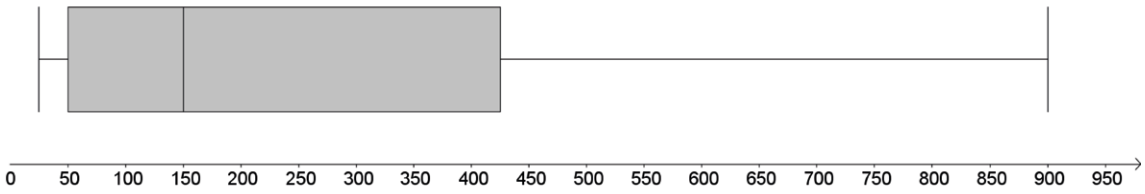
A	50 %
B	12,5 %
C	37,5 %
D	18,75 %

b) Ein Sportgeschäft verleiht tageweise Ski. Erfahrungsgemäß müssen bei etwa 6 % der zurückgebrachten Paar Ski Reparaturen durchgeführt werden.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Zufallsauswahl von 10 Paar ausgeliehenen Ski mindestens 2 Paar Ski repariert werden müssen.

c) Für den einkommensschwachen Monat Februar möchte ein Sportgeschäft eine Marketing-Strategie entwickeln. Dafür wird ausgewertet, wie viel Geld die einzelnen Kunden bei einem Einkauf im Monat Jänner jeweils ausgegeben haben.

Das Ergebnis der Auswertung wird im nachstehenden Boxplot dargestellt.



ausgegebenes Geld pro Kundeneinkauf in Euro im Monat Jänner

– Lesen Sie den Median und den Interquartilsabstand ab.
– Interpretieren Sie den Boxplot hinsichtlich desjenigen Anteils an Kunden, die zwischen € 150 und € 425 pro Kundeneinkauf ausgegeben haben.

d) Als Werbestrategie wird den Besuchern ein Gewinnspiel angeboten. Jeder Besucher darf mit einem fairen Spielwürfel, bei dem die Augenzahlen 1 bis 6 mit jeweils gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten, einmal würfeln. Zeigt der Würfel die Augenzahl 6, gewinnt man einen 10-Euro-Gutschein, bei der Augenzahl 5 gewinnt man einen 5-Euro-Gutschein. Bei jeder anderen Augenzahl gewinnt man nichts.

– Berechnen Sie den Erwartungswert des Gewinns eines Besuchers.
– Interpretieren Sie die Bedeutung des Erwartungswerts im gegebenen Sachzusammenhang.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $5\,776 - (2\,166 + 722 + 1\,083) = 1\,805$

Es haben 1 805 Personen weder in der Abteilung *Skiausrüstung* noch in der Abteilung *Fitness* eingekauft.

Der Prozentsatz der Kunden, die nur Skiausrüstung kaufen, beträgt …	C
Der Prozentsatz der Kunden, die sowohl Skiausrüstung als auch Fitnessartikel kaufen, beträgt …	B

A	50 %
B	12,5 %
C	37,5 %
D	18,75 %

b) mit Technologieeinsatz berechnet: $P(X \geq 2) = 0{,}1176\ldots$

$\left(P(X \geq 2) = \sum_{k=2}^{10} \binom{10}{k} \cdot 0{,}06^k \cdot 0{,}94^{10-k} = 0{,}1176\ldots\right)$

Mit rund 11,8 % Wahrscheinlichkeit müssen mindestens 2 Paar Ski repariert werden.

c) Median = € 150
Interquartilsabstand = € 375

Man kann am Boxplot ablesen, dass etwa 25 % der Kunden zwischen € 150 und € 425 im Jänner für Einkäufe ausgegeben haben.

d) $E(\text{„Gewinn“}) = 10 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} = 2{,}50$

Der Erwartungswert beträgt € 2,50.

Der Erwartungswert beschreibt den mittleren Gewinn pro Person unter der Annahme, dass eine große Anzahl an Personen an diesem Spiel teilnimmt.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 1 Zahlen und Maße
b) 5 Stochastik
c) 5 Stochastik
d) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) C Interpretieren und Dokumentieren
d) D Argumentieren und Kommunizieren

Nebenhandlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) A Modellieren und Transferieren
c) —
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) leicht
c) leicht
d) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2
c) 2
d) 2

Thema: Wirtschaft

Quellen: —

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Weinbau und Weinkonsum

Aufgabennummer: B_133

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

In einem Weinbaugebiet sollen neue Anbauflächen für Reben optimal genutzt werden.

a) Auf einer Fläche von höchstens 30 Hektar (ha) sind 2 verschiedene Rebsorten *A* und *B* angebaut. Die nachstehende Tabelle enthält die Prognose pro Hektar für die Arbeitskosten in Euro (€), den Ernteertrag in Tonnen (t) und die erwartete Weinmenge in Litern (L). Außerdem ist der Verkaufspreis des Weins in Euro pro Liter (€/L) angegeben.

	Arbeitskosten in €/ha	Ernteertrag in t/ha	Weinmenge in L/ha	Preis pro Liter in €/L
Sorte *A*	500	7,5	3 200	2
Sorte *B*	950	5,3	4 000	1,8

Man möchte für dieses Gebiet nicht mehr als € 24.000 für die Arbeitskosten ausgeben und kann nur insgesamt 220 t Trauben zu Wein verarbeiten.
Die Anbaufläche soll zwischen den Sorten *A* und *B* so aufgeteilt werden, dass der Weinverkauf einen maximalen Erlös ergibt.

– Erstellen Sie die Zielfunktion und alle für den möglichen Lösungsbereich notwendigen Ungleichungen.

b) Auf einer weiteren Anbaufläche sollen die Sorten *C* und *D* angebaut werden. Die Bedingungen für die Aufteilung der Anbaufläche werden durch die folgenden Ungleichungen charakterisiert:

$x \geq 0$ … Anbaufläche für Sorte *C* in ha
$y \geq 0$ … Anbaufläche für Sorte *D* in ha
$x + y \leq 32$
$7x + 5y \leq 210$
$400x + 760y \leq 21\,280$

Der Erlös in Euro (€) soll maximal sein und wird durch die Zielfunktion *E* mit $E(x,y) = 7\,200x + 6\,400y$ beschrieben.

– Stellen Sie die Bedingungen und die Gerade, für die der optimale Wert der Zielfunktion angenommen wird, grafisch dar.
– Berechnen Sie diejenige Aufteilung der Anbaufläche für die Reben der Sorte *C* bzw. *D*, die einen maximalen Erlös ergibt.

c) Der Weinbau in Österreich ermöglichte den in der nachstehenden Tabelle dargestellten Weinkonsum von 2001 bis 2010 in Millionen Hektolitern (hl).

Jahrgang	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Mio. hl	2,477	2,291	2,403	2,263	2,443	2,643	2,680	2,410	2,438	2,664

– Stellen Sie die Daten grafisch mithilfe eines Balken- oder Säulendiagramms dar.
– Berechnen Sie das arithmetische Mittel und die Standardabweichung.
– Lesen Sie die Spannweite des jährlichen Weinkonsums in Österreich ab.
– Beurteilen Sie, ob das arithmetische Mittel für diese Daten ein sinnvolles Zentralmaß darstellt.

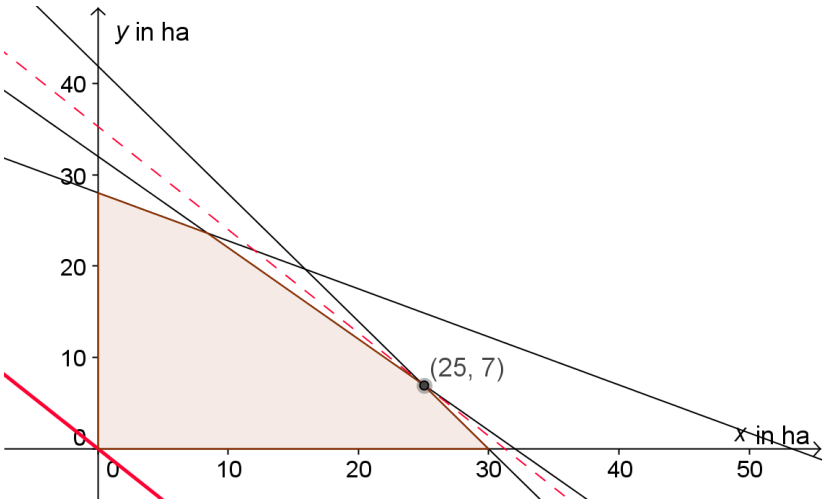
Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) a: $x + y \leq 30$
b: $500x + 950y \leq 24\,000$
c: $7{,}5x + 5{,}3y \leq 220$
d: $x \geq 0$
e: $y \geq 0$

$Z(x,y) = 6\,400x + 7\,200y \rightarrow$ Maximum

b) Bestimmen des für diese Bedingungen optimalen Schnittpunkts mit grafischer oder mit rechnerischer Methode mittels Technologieeinsatz

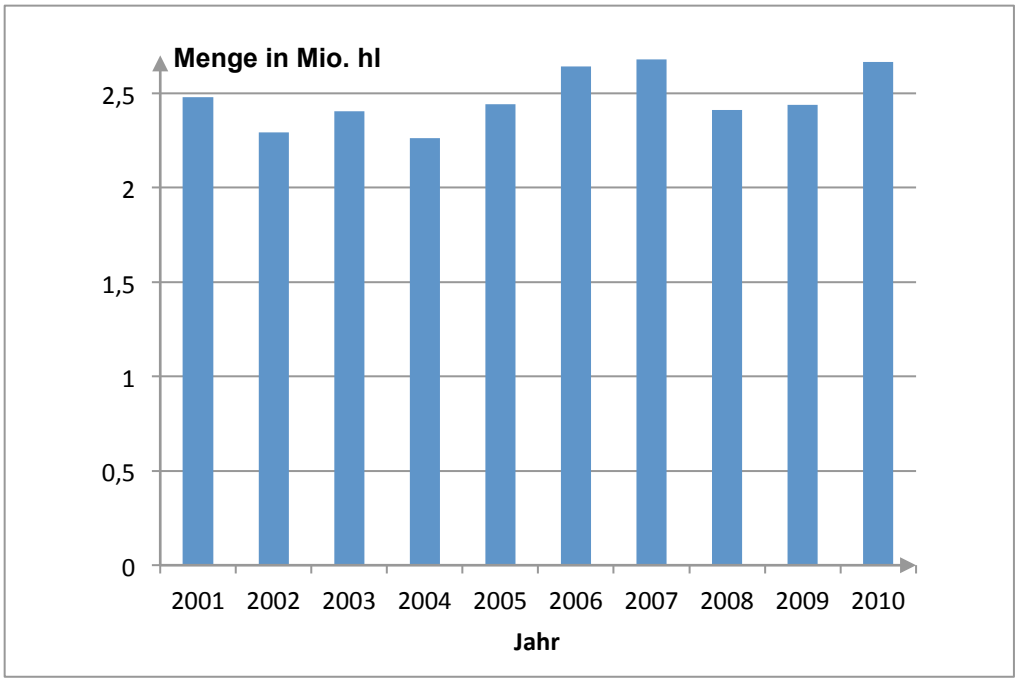


$x + y = 32$
$7x + 5y = 210$

Lösung des Gleichungssystems:
$x = 25$; $y = 7$

Die für einen maximalen Erlös günstigste Aufteilung erhält man mit 25 ha von Sorte C und 7 ha von Sorte D.

c)



Mittelwert: 2,4712 Mio. hl, Standardabweichung $\sigma \approx 0{,}148$ Mio. hl

Der jährliche Weinkonsum in Österreich schwankte in den 10 Jahren innerhalb einer Spannweite von ungefähr 0,42 hl.

Die Standardabweichung vom arithmetischen Mittel ist relativ groß, aber es kommen keine auffälligen Ausreißerwerte vor. Daher ist das arithmetische Mittel ein sinnvolles Zentralmaß.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) —
c) C Interpretieren und Dokumentieren, D Argumentieren und Kommunizieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) leicht

Punkteanzahl:

a) 4
b) 4
c) 4

Thema: Wirtschaft

Quelle: Statistik Austria, Endbericht Weinernte und Weinbestand 2010

BMB
Bundesministerium
für Bildung

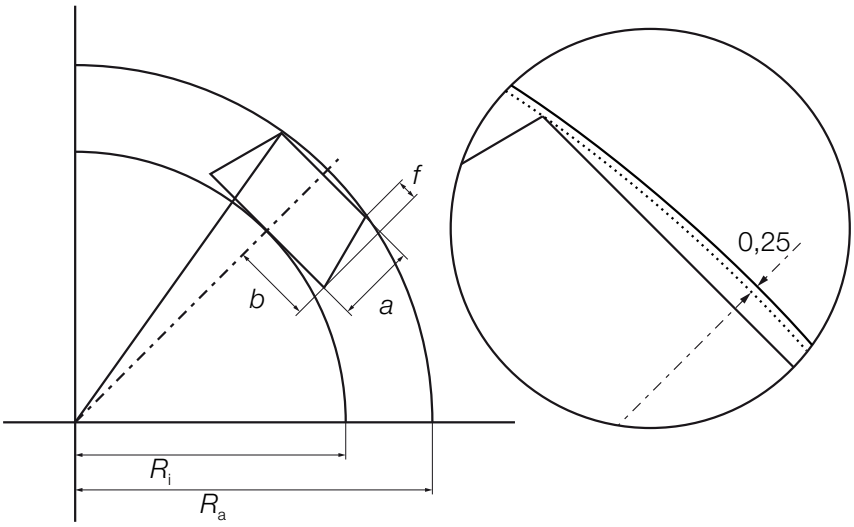
Rollladen

Aufgabennummer: B_013

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Bei einem Rollladen werden Stäbe mit einem trapezförmigen Querschnitt in einer Nut geführt.

a) Ein Stab mit den Maßen a und b soll durch eine kreisringförmige Nut mit dem Innendurchmesser R_i und dem Außendurchmesser R_a geführt werden. Die Toleranz zwischen dem trapezförmigen Querschnitt und der äußeren Kreislinie soll an der engsten Stelle 0,25 mm betragen (siehe nachstehende Abbildung).



– Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung der Länge von f in Abhängigkeit von den Größen a, b, R_i und R_a.

$f =$ _____

b) Der innere Kantenverlauf einer Nut kann näherungsweise durch die Funktion g beschrieben werden:

$g(x) = -6{,}25 \cdot 10^{-5} \cdot x^3 + 9{,}375 \cdot 10^{-3} \cdot x^2 + 8{,}75 \cdot 10^{-2} \cdot x$

x … Koordinaten in mm ($0 \leq x \leq 100$)
$g(x)$ … Koordinaten in mm

– Berechnen Sie die Stelle, an der der Funktionsgraph g die maximale Steigung aufweist.

c) Der Stabproduktion wird eine Zufallsstichprobe von 20 Stück entnommen und auf ihre Breite untersucht. Die Breite der produzierten Stäbe ist annähernd normalverteilt. Diese Stichprobe hat einen Mittelwert $\bar{x}$ = 12,0 mm und eine Standardabweichung s = 0,2 mm.

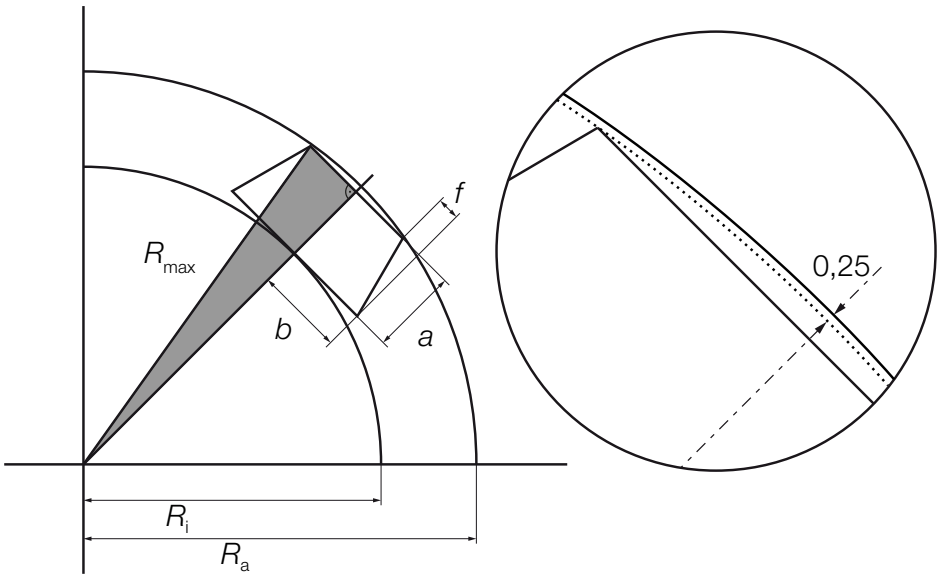
– Berechnen Sie, ausgehend von der vorliegenden Stichprobe, den 95-%-Vertrauensbereich des Erwartungswerts μ dieser Normalverteilung.
– Interpretieren Sie das Ergebnis im gegebenen Sachzusammenhang.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $R_{max} = R_a - 0{,}25$

$R_{max}^2 = (b - f)^2 + (R_i + a)^2$
$b - f = \sqrt{(R_a - 0{,}25)^2 - (R_i + a)^2}$
$f = b - \sqrt{(R_a - 0{,}25)^2 - (R_i + a)^2}$



b) Stelle der maximalen Steigung:

$g(x) = -6{,}25 \cdot 10^{-5} \cdot x^3 + 9{,}375 \cdot 10^{-3} \cdot x^2 + 8{,}75 \cdot 10^{-2} \cdot x$

$g''(x) = -3{,}75 \cdot 10^{-4} \cdot x + 1{,}875 \cdot 10^{-2}$
$g''(x) = 0 \Rightarrow x = 50$

Der Funktionsgraph g hat bei $x = 50$ mm die maximale Steigung.

c) $\bar{x} = 12$ mm
$s = 0{,}2$ mm

$\mu_{\text{unten}}^{\text{oben}} = \bar{x} \pm t_{f;1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$ $\qquad f = n - 1$

$\mu_{\text{unten}}^{\text{oben}} = 12 \pm 2{,}093\ldots \cdot \frac{0{,}2}{\sqrt{20}}$ $\qquad \mu_{\text{unten}} = 11{,}90\ldots \approx 11{,}9$
$\mu_{\text{oben}} = 12{,}09\ldots \approx 12{,}1$

Vertrauensbereich für μ: 11,9 mm $\leq \mu \leq$ 12,1 mm

Aufgrund der vorliegenden Stichprobe liegt der Erwartungswert μ der Grundgesamtheit mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % im Bereich von 11,9 mm bis 12,1 mm.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 4 Analysis
c) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) —
c) A Modellieren und Transferieren, C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) leicht
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 1
c) 3

Thema: Alltag

Quellen: —

Magneten

Aufgabennummer: B_081

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Ein Unternehmen stellt Dauermagneten für verschiedene technische Anwendungen her.
Ein Magnet aus dem Werkstoff Ferrit wird auf seinen Curie-Punkt erhitzt, in einer Spule magnetisiert, und anschließend wieder abgekühlt.
Der Abkühlungsprozess verläuft nach folgender Differenzialgleichung:

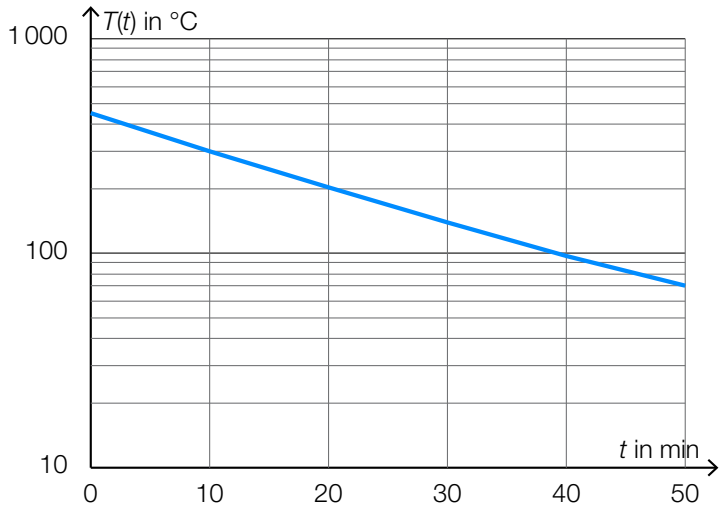
$$\frac{dT(t)}{dt} = k \cdot (T_U - T(t))$$

t … Zeit ab Beginn der Abkühlung in Minuten (min)
$T(t)$ … Temperatur des Werkstoffes zur Zeit t in °C
T_U … Umgebungstemperatur in °C
$k > 0$ … Proportionalitätsfaktor (in min^{-1})

a) – Beschreiben Sie die Bedeutung von $\frac{dT(t)}{dt}$ beim Abkühlungsprozess.
– Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung durch *Trennen der Variablen*.

Der Curie-Punkt des Werkstoffs Ferrit liegt bei 450 °C.
– Bestimmen Sie den Wert der Integrationskonstanten, wenn die Umgebungstemperatur $T_U = 20$ °C beträgt.

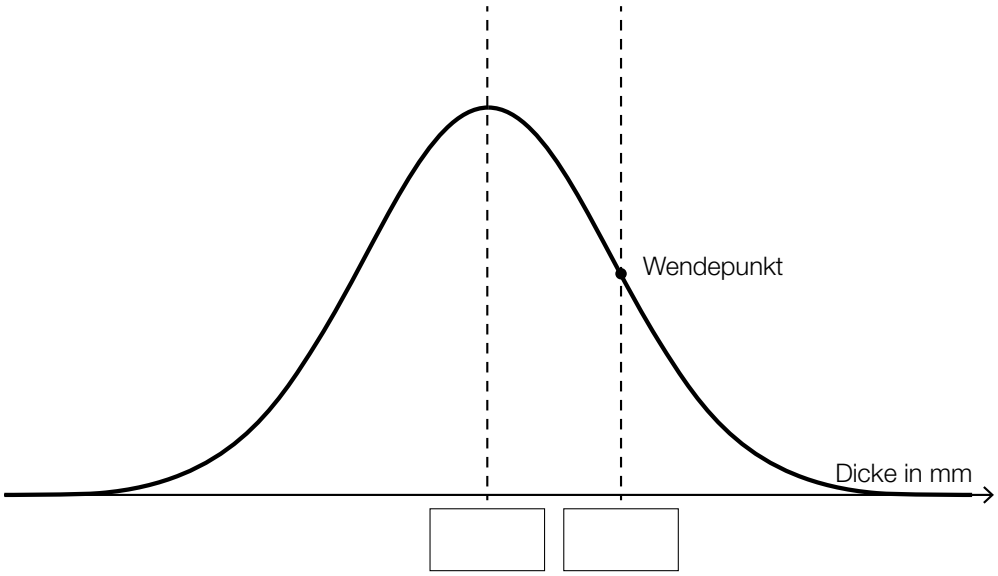
b) Die Abhängigkeit der Temperatur T von der Zeit t während des Abkühlungsprozesses lässt sich durch folgende Funktion beschreiben:
$T(t) = 20 + 430 \cdot e^{-k \cdot t}$



– Lesen Sie aus der obigen Abbildung des Funktionsgraphen von T die Temperatur zur Zeit $t = 10$ min ab.
– Berechnen Sie k mithilfe des abgelesenen Werts.

c) Die erforderliche Länge (= Sollwert) der Magneten für den Einbau in elektronische Geräte ist 2,5 mm.
Messungen haben ergeben, dass die Magnetlänge normalverteilt ist mit dem Erwartungswert μ = 2,5 mm und der Standardabweichung σ = 0,05 mm.

– Tragen Sie in der nachstehenden Abbildung die fehlenden Beschriftungen in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.



Magnete, die zu lang oder zu kurz sind, sind Ausschuss und werden aussortiert. Abweichungen von bis zu ± 0,1 mm vom Erwartungswert werden toleriert.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Magnet aussortiert wird.

Der Produktionsprozess wird so verändert, dass eine Verringerung der Ausschussquote auf 1 % bei gleichbleibenden Toleranzgrenzen erreicht wird.

– Ermitteln Sie die neue Standardabweichung σ bei unverändertem μ.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $\frac{\mathrm{d}T(t)}{\mathrm{d}t}$ beschreibt die momentane Änderungsrate der Temperatur T des Werkstoffs abhängig von der Zeit t.

$$\frac{\mathrm{d}T(t)}{\mathrm{d}t} = -k \cdot (T(t) - T_\mathrm{U})$$

$$\frac{\mathrm{d}T(t)}{T(t) - T_\mathrm{U}} = -k \cdot \mathrm{d}t$$

$$\int \frac{\mathrm{d}T(t)}{T(t) - T_\mathrm{U}} = -k \cdot \int \mathrm{d}t$$

$$\ln|T(t) - T_\mathrm{U}| = -k \cdot t + C_1$$

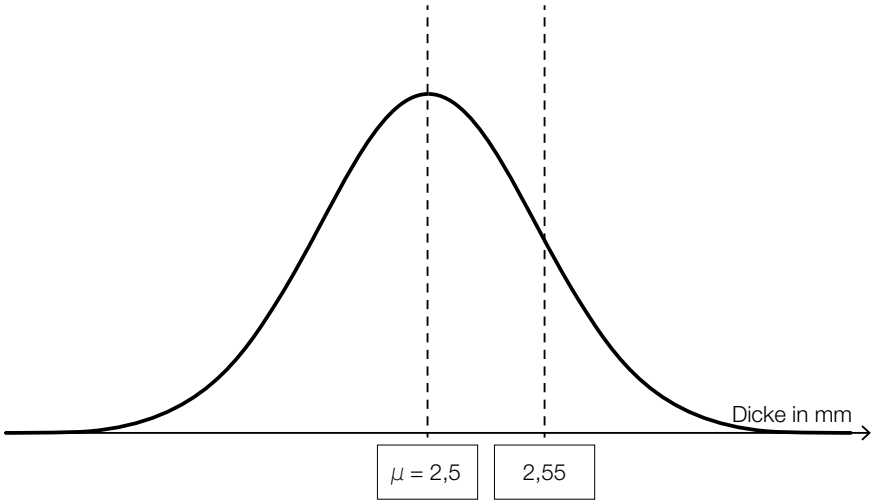
$$T(t) = T_\mathrm{U} + C \cdot e^{-k \cdot t}$$

Ermittlung des Parameters C: $450 = 20 + C \cdot e^{-k \cdot 0} \Rightarrow C = 430$

b) $t = 10\ \mathrm{min} \Rightarrow T = 300\ °\mathrm{C}$

$300 = 20 + 430 \cdot e^{-k \cdot 10} \Rightarrow k = 0{,}042899\ldots \Rightarrow k \approx 0{,}0429\ \mathrm{min}^{-1}$

c)



$P(2{,}4 \le X \le 2{,}6) \approx 0{,}9545$

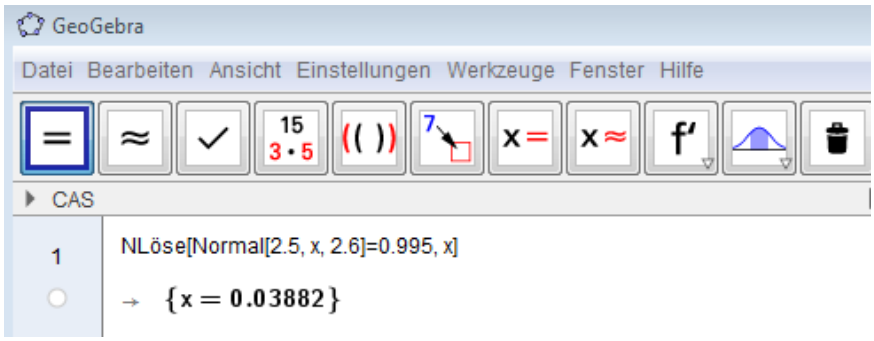
Ausschuss: $1 - 0{,}9545 = 0{,}0455 = 4{,}55\ \%$

$P(t) = 0{,}995 \Rightarrow z_{\frac{1-\alpha}{2}} = 2{,}576$ $\qquad \sigma = \frac{x-\mu}{z} = \frac{2{,}6-2{,}5}{2{,}576} \approx 0{,}0388$

oder:

Berechnung mittels Technologieeinsatz: beispielhaft mit GeoGebra

$1 - \alpha = 0{,}99 \Rightarrow \frac{1-\alpha}{2} = 0{,}995$



Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) leicht
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 3
b) 2
c) 4

Thema: Physik

Quellen: —

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Miststreuer

Aufgabennummer: B_286

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Ein Unternehmen stellt Miststreuer her. Die Produktion sowie der Verkauf werden innerhalb eines Jahres betrachtet.

a) Das Unternehmen geht bezüglich eines speziellen Zusatzteils innerhalb eines Jahres von folgender Preis-Absatz-Funktion aus:

$p(x) = -0{,}02 \cdot (x + 10)^2 + 288$

x … verkaufte Menge in Mengeneinheiten (ME)
$p(x)$ … Preis bei x verkauften ME in Geldeinheiten pro Mengeneinheit (GE/ME)

– Argumentieren Sie anhand der Funktionsgleichung, dass der Graph der Funktion p einen Hochpunkt hat.
– Berechnen Sie die Sättigungsmenge.
– Stellen Sie eine Gleichung zur Berechnung der erlösmaximierenden Menge auf.

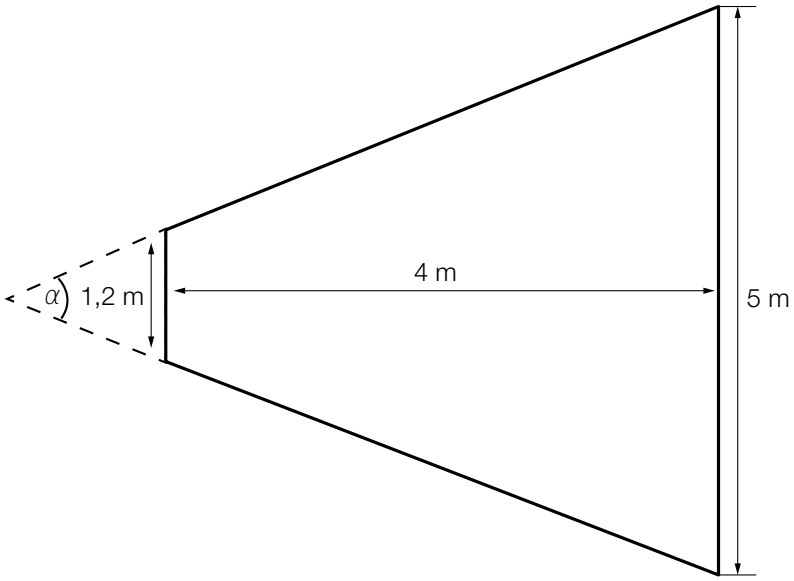
b) Die jährlichen Fixkosten für die Herstellung eines Produktionsteils des Miststreuers belaufen sich auf 8 000 Geldeinheiten (GE).
Die variablen Gesamtkosten können durch folgende Funktion beschrieben werden:

$K_V(x) = 0{,}11 \cdot x^3 - 5 \cdot x^2 + 80 \cdot x$ mit $x \geq 0$

x … produzierte Mengeneinheiten (ME)
$K_V(x)$ … variable Kosten in GE bei x produzierten ME

– Dokumentieren Sie, wie die langfristige Preisuntergrenze berechnet werden kann.
– Berechnen Sie dasjenige Intervall, in dem die Kostenfunktion degressiv verläuft.
– Interpretieren Sie die Stelle des Übergangs vom degressiven in den progressiven Verlauf der Kostenfunktion hinsichtlich der Veränderung der Kosten.

c) Ein bestimmtes Miststreuer-Modell hat eine Breite von 1,2 m. Es streut im Stand bis zu einer Breite von rund 5 m. Dabei wirft es den Mist (wie in der nachstehenden Skizze ersichtlich) bis zu rund 4 m weit.
Die dick umrandete Fläche der Skizze zeigt den Bereich, der vom stehenden Miststreuer bestreut wird.



– Berechnen Sie den Winkel α.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Da der Koeffizient –0,02 negativ ist, ist der Graph dieser quadratischen Funktion eine nach unten geöffnete Parabel. Der Scheitel dieser Parabel ist daher der Hochpunkt.

Lösen der Gleichung $p(x) = 0$ ergibt: $x = 110$ bzw. $x = -130$ $\Rightarrow$ 110 Stück ist die Sättigungsmenge.

$p(x) = -0{,}02 \cdot (x + 10)^2 + 288 = -0{,}02 \cdot x^2 - 0{,}4 \cdot x - 2 + 288$

$E(x) = p(x) \cdot x$

$E(x) = -0{,}02 \cdot x^3 - 0{,}4 \cdot x^2 + 286 \cdot x$

$E'(x) = 0 \Rightarrow E'(x) = -0{,}06 \cdot x^2 - 0{,}8 \cdot x + 286 \Rightarrow -0{,}06 \cdot x^2 - 0{,}8 \cdot x + 286 = 0$

b) Man berechnet die Gesamtkostenfunktion durch Addition der variablen Kosten und der Fixkosten. Danach bestimmt man die Durchschnittskostenfunktion, indem man die Gesamtkostenfunktion durch x dividiert. Man berechnet die Nullstellen der 1. Ableitung der Durchschnittskostenfunktion. Die positive Nullstelle ist Minimumstelle der Durchschnittskostenfunktion. Die Durchschnittskosten an der Stelle des Minimums stellen die langfristige Preisuntergrenze dar.

$K(x) = 0{,}11 \cdot x^3 - 5 \cdot x^2 + 80 \cdot x + 8\,000$

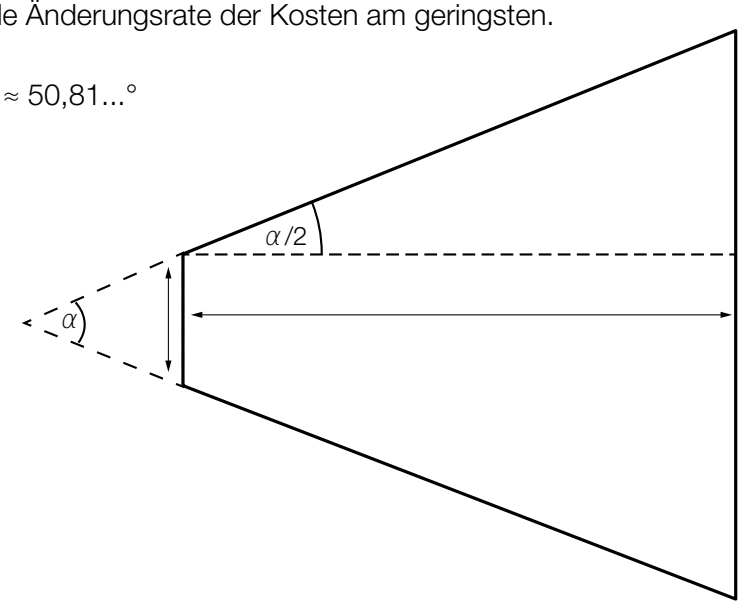
$K''(x) = 0{,}66 \cdot x - 10 = 0 \Rightarrow x \approx 15{,}15$ ME

Die Funktion verläuft im Intervall [0; 15,15] degressiv.

An dieser Stelle ist die lokale Änderungsrate der Kosten am geringsten.

c) $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{2{,}5 - 0{,}6}{4} \Rightarrow \alpha \approx 50{,}81...°$

$\alpha \approx 50{,}8°$



Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 4 Analysis
c) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren, D Argumentieren und Kommunizieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz, A Modellieren und Transferieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 3
b) 4
c) 1

Thema: Sonstiges

Quellen: –

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Programmieren

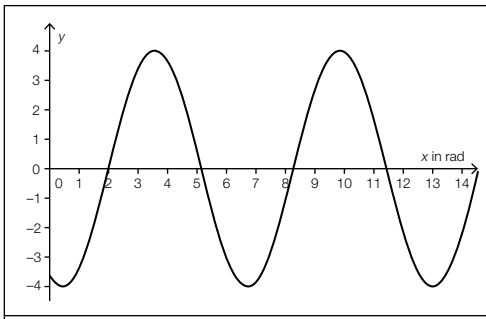
Aufgabennummer: B_031

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Um bestimmte grafische Objekte zu animieren, muss ein Programmierer über verschiedene mathematische Hintergründe Bescheid wissen.

a) Um das Auf-und-ab-Fliegen zweier Hexen am Bildschirm darzustellen, werden Wellenlinien benötigt.

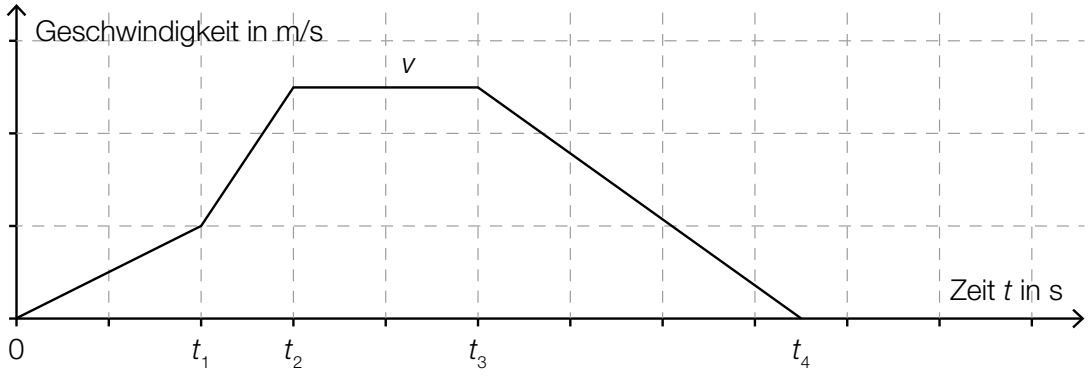
– Ordnen Sie den beiden Flugkurven jeweils den passenden Funktionsterm aus A bis D zu. *[2 zu 4]*



A	$\frac{1}{2} \cdot \sin(x + 2)$
B	$\frac{1}{2} \cdot \sin(x - 2)$
C	$4 \cdot \sin(x + 2)$
D	$4 \cdot \sin(x - 2)$

– Erklären Sie den Einfluss des Parameters c in der allgemeinen Sinusfunktion $y(x) = a \cdot \sin(x + b) + c$.

b) Ein Ball wird animiert. Die nachstehende Abbildung zeigt den Geschwindigkeit-Zeit-Verlauf des rollenden Balles.



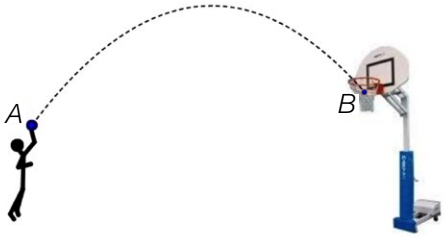
– Skizzieren Sie das dazugehörige Beschleunigung-Zeit-Diagramm.
– Erklären Sie die physikalische Bedeutung derjenigen Fläche, die der Graph der Funktion v mit der Zeitachse einschließt.

c) Eine Figur in einem Spiel wirft einen Ball in einen Basketballkorb. Dabei wird der Ball als punktförmig angenommen. Der Ball soll im Punkt $A = (3|5)$ starten. Die Mitte des Korbes befindet sich im Punkt $B = (12|7)$. Die Flugbahn kann näherungsweise durch eine Polynomfunktion 2. Grades beschrieben werden.

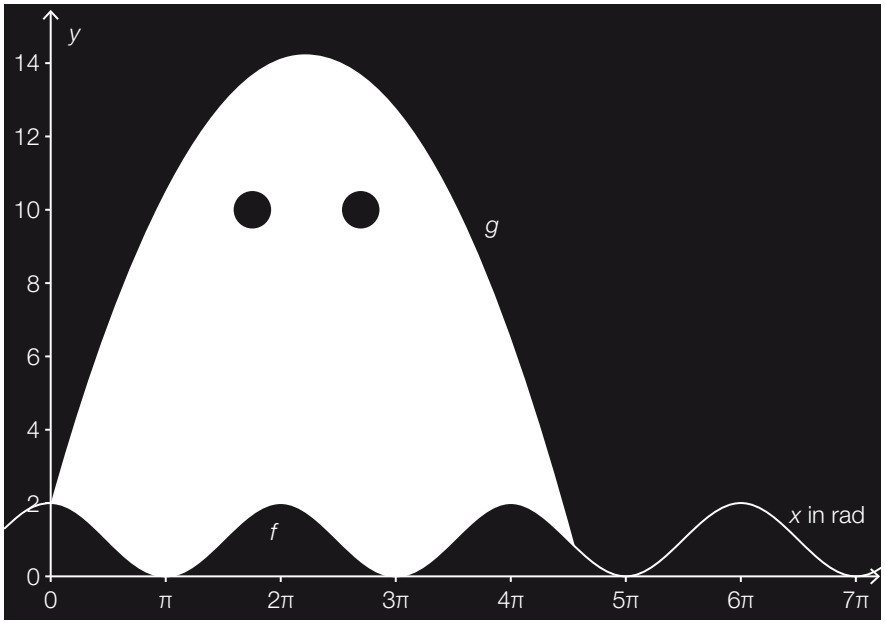
– Begründen Sie, warum durch die 2 gegebenen Punkte die Flugbahn nicht eindeutig bestimmt ist.

Der Abschusswinkel beträgt 46°.

– Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung der Flugbahn.



d) Der nachstehend abgebildete Geist wird durch den Funktionsgraphen f mit $f(x) = \cos(x) + 1$ und g mit $g(x) = -0{,}25 \cdot x^2 + 3{,}5 \cdot x + 2$ begrenzt. Zwei Kreise mit einem Radius von jeweils 0,5 cm bilden die Augen. Die Funktionsgraphen f und g schneiden sich an den Stellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 14{,}3$.



– Berechnen Sie den Flächeninhalt des abgebildeten Geistes.

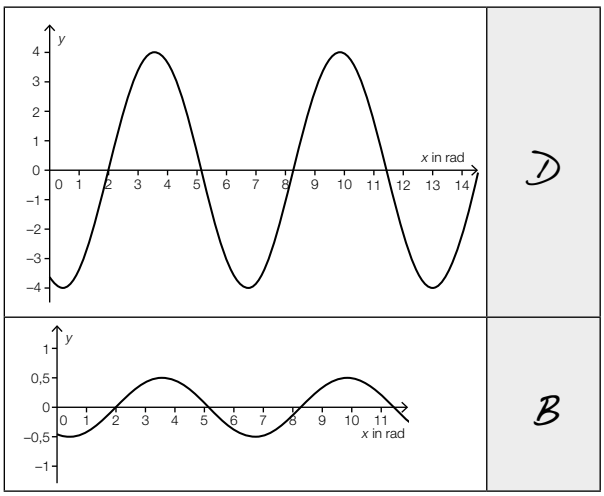
Der Programmierer lässt den Geist wandern, indem er die Funktion g und die beiden Kreise in x-Richtung verschiebt, während die untere Funktion f unverändert bleibt.

– Bestimmen Sie, nach welcher Entfernung der Geist wieder denselben Flächeninhalt haben wird.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

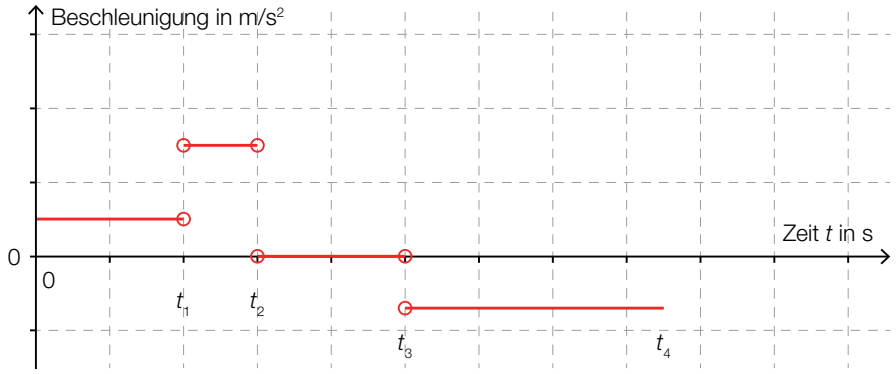
a)



A	$\frac{1}{2} \cdot \sin(x + 2)$
B	$\frac{1}{2} \cdot \sin(x - 2)$
C	$4 \cdot \sin(x + 2)$
D	$4 \cdot \sin(x - 2)$

Ein positiver Parameter c verschiebt den Funktionsgraphen der Funktion um c nach oben, ein negativer Parameter c verschiebt die Funktion um $|c|$ nach unten.

b)



Als Ableitungsfunktion ist die Beschleunigung-Zeit-Funktion an den Sprungstellen nicht definiert. Es ist nicht gefordert, diese Definitionslücken zu berücksichtigen.

Die Fläche, die der Funktionsgraph v mit der Zeitachse einschließt, entspricht dem zurückgelegten Weg in Metern im Zeitintervall $0 \le t \le t_4$.

c) Eine allgemeine Polynomfunktion 2. Grades ($f(x) = a + x^2 + b \cdot x + c$) hat 3 Parameter. Es werden deshalb 3 Bedingungen für 3 Gleichungen benötigt, um diese eindeutig zu bestimmen. Es fehlt also eine 3. Bedingung.

Aus den 3 Bedingungen werden die 3 Gleichungen erstellt:

I: $A \in f$: $9 \cdot a + 3 \cdot b + c = 5$

II: $B \in f$: $144 \cdot a + 12 \cdot b + c = 7$

III: $f'(3) = \tan(46°)$: $2 \cdot 3 \cdot a + b = \tan(46°)$

Das Lösen des Gleichungssystems ergibt: $a \approx -0{,}09$, $b \approx 1{,}58$ und $c \approx 1{,}08$, somit: $f(x) = -0{,}09 \cdot x^2 + 1{,}58 \cdot x + 1{,}08$.

d) Der Flächeninhalt der Kreise beträgt: $A_K = 2 \cdot 0{,}5^2 \cdot \pi = \frac{\pi}{2} \approx 1{,}57\ \text{cm}^2$.

Flächeninhalt des Geistes:

$$\left(\int_0^{14{,}3} -0{,}25 \cdot x^2 + 3{,}5 \cdot x + 2 - \cos(x) - 1\ \mathrm{d}x\right) - \frac{\pi}{2} = 125{,}9216\ldots\ \text{cm}^2$$

Nach einer Entfernung von 2π wird der Geist wieder denselben Flächeninhalt haben, da die Cosinusfunktion periodisch mit der Periode 2π ist.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 4 Analysis
d) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) 4 Analysis
c) 2 Algebra und Geometrie
d) 2 Algebra und Geometrie

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) A Modellieren und Transferieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) D Argumentieren und Kommunizieren, A Modellieren und Transferieren
d) D Argumentieren und Kommunizieren, B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel
d) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2
c) 4
d) 3

Thema: IT

Quellen: –

Fahrzeugtests (2)

Aufgabennummer: B_159

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

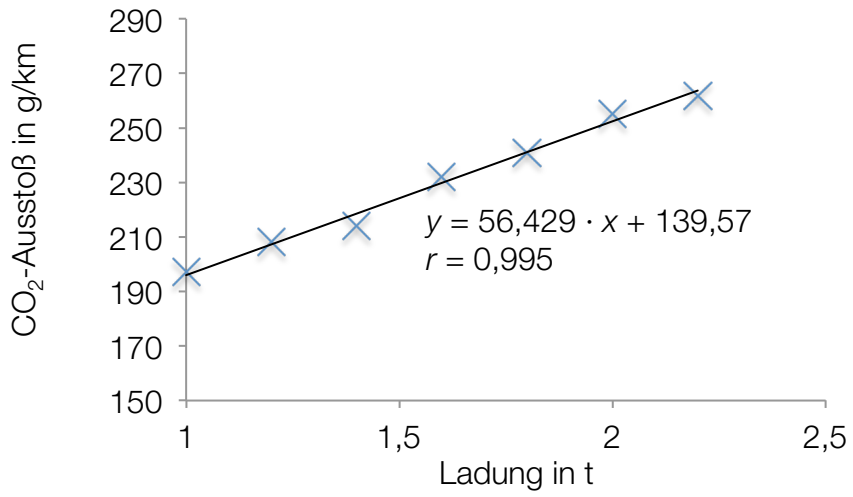
Die Firma Cargo-Car führt in der Entwicklungsphase eines neuen Transporters Tests durch.

a) In Testreihen wurde der Kraftstoffverbrauch – abhängig von der Ladung – erhoben. In der folgenden Tabelle ist für 8 Testfahrten die Reichweite pro Liter Kraftstoffverbrauch bei einer vorgegebenen Ladung in Tonnen angegeben:

Reichweite in km	12,46	12,10	11,81	11,32	10,94	10,81	10,79	10,23
Ladung in t	1	1,05	1,3	1,4	1,52	1,7	1,9	2,1

– Geben Sie an, welche Variable hier als unabhängig und welche als abhängig anzunehmen ist.
– Ermitteln Sie die lineare Regressionsgerade und stellen Sie diese mit den gegebenen Daten dar.
– Beschreiben Sie, wie man die Regressionsgerade zu einer Punktewolke ermittelt.

b) Bei der Auswertung einer Testreihe ergab sich folgende Regressionsgerade y:



Ein Mitarbeiter möchte die geschätzte CO_2-Emission bei einer Ladung von 1,5 Tonnen und bei einer Ladung von 2,5 Tonnen ermitteln.

– Berechnen Sie die gesuchten Werte.
– Interpretieren Sie den in der Grafik angegebenen Korrelationskoeffizienten r.

c) Tests zur Haltbarkeit neuer Bremsbeläge eines bestimmten Transporter-Typs haben ergeben, dass deren Zuverlässigkeit mithilfe der Funktion R beschrieben werden kann:

$R(t) = e^{-0,02 \cdot t}$

t ... Benützungsdauer in Stunden
$R(t)$ ... Anteil der Bremsbeläge, die nach der Benützungsdauer t noch intakt sind, in Prozent

– Weisen Sie nach, dass nach einer Benützungsdauer von durchschnittlich 50 Stunden ca. 36,8 % der Bremsbeläge noch intakt sind.

Die Formel $R(t) = e^{-0,02 \cdot t}$ wird nach t umgeformt. Dabei wird ein Fehler gemacht.

– Kennzeichnen Sie die fehlerhafte Zeile.
– Formen Sie die Gleichung mathematisch richtig um.

1. $R(t) = e^{-0,02 \cdot t}$

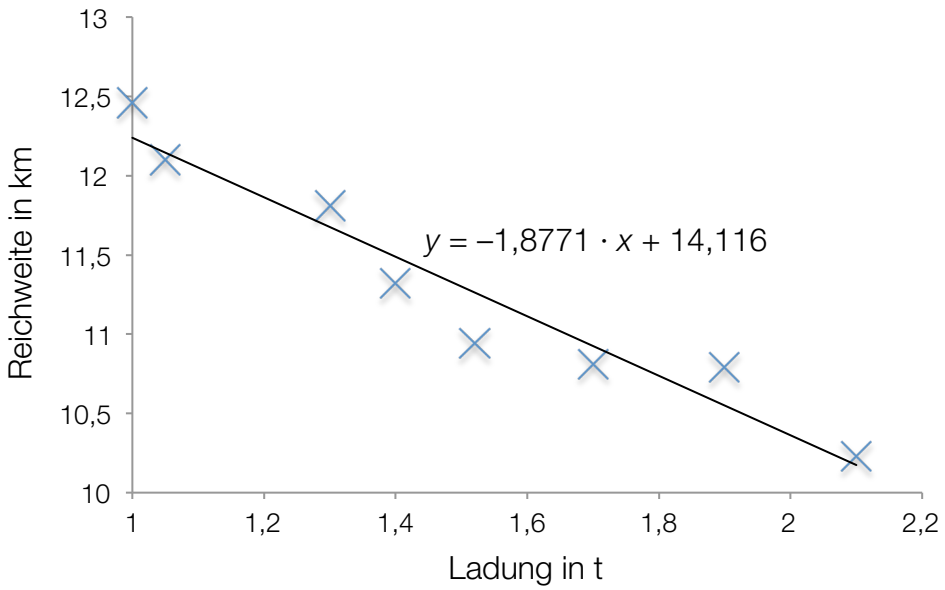
2. $\ln(R) = \frac{1}{0,02 \cdot t}$

3. $t = \frac{1}{0,02 \cdot \ln(R)}$

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Es wird die Abhängigkeit der Reichweite von einer vorgegebenen Ladung untersucht. Die Ladung ist daher die unabhängige Variable x, die Reichweite ist die abhängige Variable y.



Es werden die Differenzen zwischen den y-Werten der Punktewolke (des Streudiagramms) und den noch unbekannten y-Werten der Regressionsgeraden ermittelt. Diese Differenzen werden quadriert und summiert. Die Summe wird anschließend minimiert. Damit lässt sich die Gerade finden, die von den Punkten des Streudiagramms den geringsten Abstand hat.
(Auch die Erklärung mithilfe einer Skizze ist als richtig zu werten.)

b) Die geschätzte Emission bei einer Ladung von 1,5 t beträgt 224,2... g/km ≈ 224 g/km.
Die geschätzte Emission bei einer Ladung von 2,5 t beträgt 280,6... g/km ≈ 281 g/km.

Der Korrelationskoeffizient $r = 0{,}995$ liegt sehr nahe bei 1. Das bedeutet, dass der Zusammenhang sehr gut durch eine lineare Funktion beschrieben werden kann.
Das positive Vorzeichen deutet auf einen steigenden Trend.

c) $t = 50$ wird in die gegebene Gleichung eingesetzt:
$R(50) = 0{,}3678\ldots \approx 36{,}8\ \%$

Der Fehler befindet sich in der 2. Zeile. (Begründung: Der negative Exponent wurde falsch interpretiert bzw. eine logarithmische Rechenregel falsch angewendet.)

Korrekte Umformung:

1. $R(t) = e^{-0{,}02 \cdot t}$
2. $\ln(R) = -0{,}02 \cdot t$
3. $t = \frac{-\ln(R)}{0{,}02}$

c)

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 5 Stochastik
c) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren, C Interpretieren und Dokumentieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz, C Interpretieren und Dokumentieren
c) C Interpretieren und Dokumentieren, D Argumentieren und Kommunizieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 3
b) 3
c) 3

Thema: Messreihen

Quellen: –

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

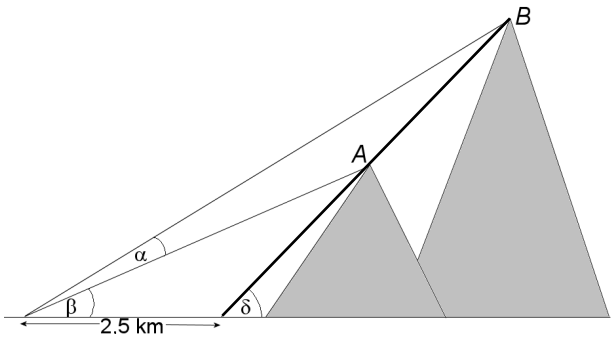
Bergwandern

Aufgabennummer: B_230

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) – Erstellen Sie eine Text-Angabe, die zur nebenstehenden Zeichnung passt, wobei die Punkte *A* und *B* die Gipfel von 2 Bergen symbolisieren.

b) – Berechnen Sie anhand der Skizze von Aufgabe a die Entfernung der Bergspitzen *A* und *B*, wenn die Winkel $\alpha = 2{,}8°$, $\beta = 18{,}7°$ und $\delta = 24{,}2°$ gemessen werden. (Die Zeichnung ist nicht maßstabgetreu.)

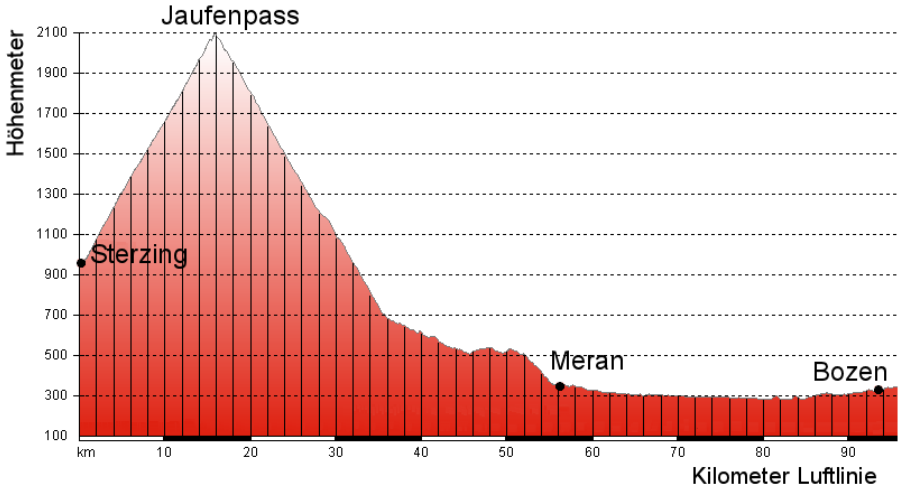


c) Beim Wandern in einer Gruppe rechnet man in ebenem Gelände mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit *v* von 4 Kilometern pro Stunde (km/h). Für den Aufstieg bzw. den Abstieg gilt die Formel:

$$t = \frac{\Delta H}{p} + \frac{e}{2v}$$

t … reine Gehzeit in Stunden (h)
ΔH … Höhendifferenz in Höhenmetern (m)
e … horizontale Entfernung (Luftlinie) in Kilometern (km)
v … durchschnittliche Geschwindigkeit im ebenen Gelände in km/h
p … in einer Stunde zurückgelegte Höhenmeter,
für den Anstieg gilt erfahrungsgemäß $p = 300$ m/h und für den Abstieg $p = 500$ m/h

Eine Gruppe Jugendlicher macht eine mehrtägige Treckingtour in Südtirol und wandert von Sterzing über den Jaufenpass nach Bozen.
– Ermitteln Sie anhand des Höhenprofils näherungsweise die Gehzeiten für den Aufstieg von Sterzing auf den Jaufenpass, für den Abstieg nach Meran und für die ebene Strecke nach Bozen sowie die Gesamtgehzeit in Stunden.

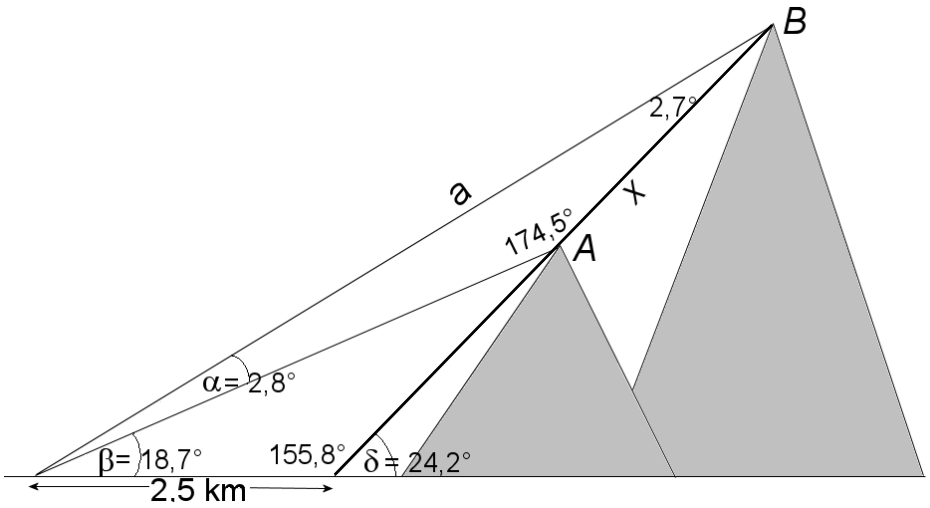


Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Für einen Beobachter in einem bestimmten Punkt eines ebenen Tales scheint es, als ob der Berggipfel *A* von einem zweiten, dahinterliegenden Berggipfel *B* um den Winkel α überragt wird; der Höhenwinkel von *A* beträgt β. Wandert dieser Beobachter 2,5 km gegen die Berge hin, so „verschwindet" für ihn der Gipfel *B* hinter dem Gipfel *A*, der in diesem Augenblick einen Höhenwinkel von δ aufweist.

b) Alle nötigen Winkel berechnen.



Sinussatz: $\frac{2{,}5}{\sin 2{,}7} = \frac{a}{\sin 155{,}8}$

$a = 21{,}755$ km

Sinussatz: $\frac{x}{\sin 2{,}8} = \frac{21{,}755}{\sin 174{,}5}$

$x = 11{,}1$ km

Die beiden Berggipfel *A* und *B* sind ca. 11 km voneinander entfernt.
(Es sind auch andere Lösungswege möglich und erlaubt.)

c) Sterzing – Jaufenpass: von 950 m auf 2 100 m: 1150 m Aufstieg

$t = \frac{1\,150}{300} + \frac{16}{8} = 5{,}8 \sim 6$ h

Jaufenpass – Meran: von 2 100 m auf 350 m: 1750 m Abstieg

$t = \frac{1\,750}{500} + \frac{40}{8} = 8{,}5$ h

Meran – Bozen: keine Steigung, 94 km – 56 km = 38 km

$t = \frac{38}{4} = 9{,}5$ h

Die Wandergruppe hat ca. 24 Stunden reine Gehzeit.
(Die Genauigkeit beim Ablesen sollte großzügig beurteilt werden (± 50 m tolerieren).)

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) 1 Zahlen und Maße

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) —
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 4
c) 3

Themen: Sport, Tourismus

Quelle: Höhenprofil: http://www.alpenrennradtouren.de

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Autokauf (2)

Aufgabennummer: B_143

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein neues Auto kostet € 66.700.

a) Herr Maier möchte dieses Auto kaufen. Innerhalb von 30 Tagen ist die Rechnung zu bezahlen. Der Verkäufer bietet ihm bei Barzahlung des Wagens innerhalb von 14 Tagen einen Skonto (Preisnachlass bei Zahlung binnen einer bestimmten Frist) von 1,5 % des Kaufpreises an. Leider verfügt Herr Maier erst 30 Tage nach dem Autokauf über das notwendige Geld. Um das Skonto-Angebot des Verkäufers annehmen zu können, müsste er sein Konto bei einem Überziehungszinssatz von 12 % p. a. überziehen.

– Überprüfen Sie, ob Herr Maier unter diesen Bedingungen das Auto innerhalb der ersten 14 Tage nach Kauf bezahlen soll.

b) Frau Specht möchte dasselbe Auto kaufen. Allerdings kann sie nicht den vollen Kaufpreis von € 66.700 zahlen. Sie überlegt daher, das Auto zu leasen. Das Autohaus bietet ihr folgende Konditionen:
Anzahlung: € 13.340
Laufzeit: 36 Monate
monatlich nachschüssige Rate: € 922
Restwert: € 26.000

– Berechnen Sie den effektiven Jahreszinssatz für dieses Leasinggeschäft.

c) Eine Alternative zu einer Leasingfinanzierung ist die Finanzierung mittels eines Kredits. Für das zum Verkauf stehende Auto (Kaufpreis: € 66.700) wird folgender Kredit angeboten:
Anzahlung: € 13.560
Zinssatz: 5,06 % p. a.
Laufzeit: 60 Monate

– Berechnen Sie, wie hoch bei diesem Angebot die zu leistenden nachschüssigen Monatsraten sind.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Die Kontoüberziehung verursacht bei einem Jahreszinssatz von 12 % für 16 Tage Kosten in Höhe von $\frac{16}{360} \cdot 0{,}12 = 0{,}005\dot{3} \approx 0{,}53$ % von € 65.699,50.
Diese sind viel geringer als der angebotene Skonto von 1,5 % der Kaufsumme.
Herr Maier sollte das Angebot des Verkäufers annehmen.

b) $13\,340 + 922 \cdot \frac{q_{12}^{36} - 1}{q_{12} - 1} \cdot \frac{1}{q_{12}^{36}} + \frac{26\,000}{q_{12}^{36}} = 66\,700$
Lösung mittels Technologieeinsatz: $q_{12} = 1{,}00401...$
$q = (q_{12})^{12} = 1{,}0492...$
Der Zinssatz beträgt rund 4,9 % p. a.

c) $q_{12} = \sqrt[12]{1{,}0506} = 1{,}00412...$
$66\,700 - 13\,560 = R \cdot \frac{q_{12}^{60} - 1}{q_{12} - 1} \cdot \frac{1}{q_{12}^{60}}$
$53\,140 = R \cdot 53{,}0598...$
$R = 1\,001{,}51$
Die monatlichen Raten betragen jeweils € 1.001,51.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) —
c) —

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) leicht

Punkteanzahl:

a) 2
b) 3
c) 2

Thema: Alltag

Quellen: —

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Maibaum aufstellen*

Aufgabennummer: A_179

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein Maibaum der Höhe H steht senkrecht auf einem horizontalen Gelände.

a) Ein Maibaum der Höhe H wirft zu einem bestimmten Zeitpunkt einen 10,00 m langen Schatten. Die Sonne erscheint dabei unter dem Höhenwinkel α.

Hans stellt sich so hin, dass sein Schatten an derselben Stelle endet wie jener des Maibaums. Hans ist 1,76 m groß und ist 8,50 m vom Maibaum entfernt.

– Veranschaulichen Sie den Sachverhalt in einer Skizze, in der die gegebenen Größen sowie der Höhenwinkel α und die Höhe H beschriftet sind.
– Berechnen Sie den Höhenwinkel α.

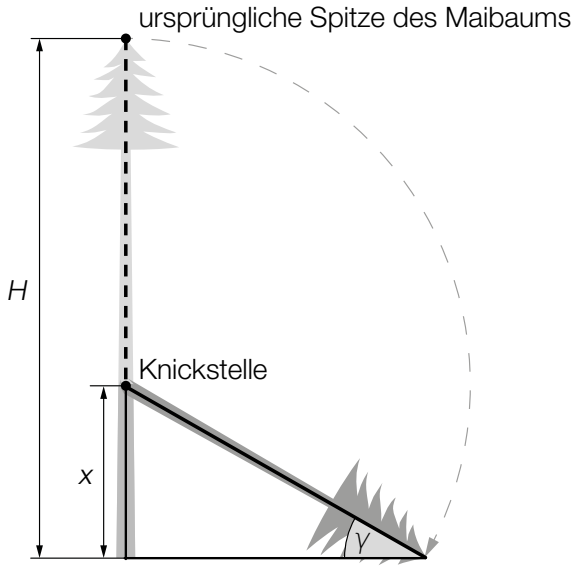
b) Martin misst in einer horizontalen Entfernung von 50 m vom Maibaum den Höhenwinkel $\beta = 26{,}6°$ zur Spitze des Maibaums. Anschließend verkürzt er seine horizontale Entfernung auf die Hälfte.
Er behauptet, dass sich dadurch der Höhenwinkel zur Spitze verdoppelt hat.

– Überprüfen Sie nachweislich, ob Martins Behauptung richtig ist.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Bei einem starken Unwetter knickt ein Maibaum der Höhe H um.

Der geknickte Teil schließt mit dem horizontalen Boden einen Winkel γ ein (siehe nachstehende nicht maßstabgetreue Skizze).



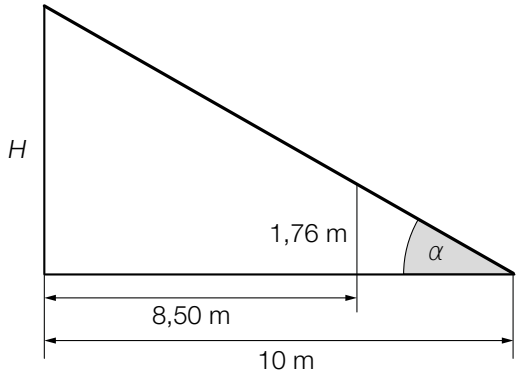
– Stellen Sie eine Formel zur Berechnung von x aus H und γ auf.

$x =$ _____

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



$\tan(\alpha) = \frac{1{,}76}{1{,}5} \Rightarrow \alpha = 49{,}55...° \approx 49{,}6°$

b) $\tan(26{,}6°) = \frac{H}{50} \Rightarrow H = 25{,}03...$

$\tan(\gamma) = \frac{H}{25} \Rightarrow \gamma = 45{,}04...° \approx 45{,}0°$

Die Behauptung stimmt also nicht, weil $2 \cdot 26{,}6° \neq 45{,}0°$.

Auch eine richtige Argumentation mithilfe der allgemeinen Eigenschaften der Tangensfunktion ist zulässig.

c) $\sin(\gamma) = \frac{x}{H - x} \Rightarrow x = \frac{H \cdot \sin(\gamma)}{1 + \sin(\gamma)}$

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Veranschaulichen aller Größen in der Skizze
1 × B: für die richtige Berechnung des Höhenwinkels α

b) 1 × D: für den richtigen Nachweis
Auch eine richtige Argumentation mithilfe der allgemeinen Eigenschaften der Tangensfunktion ist zulässig.

c) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Formel

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Unter Wasser*

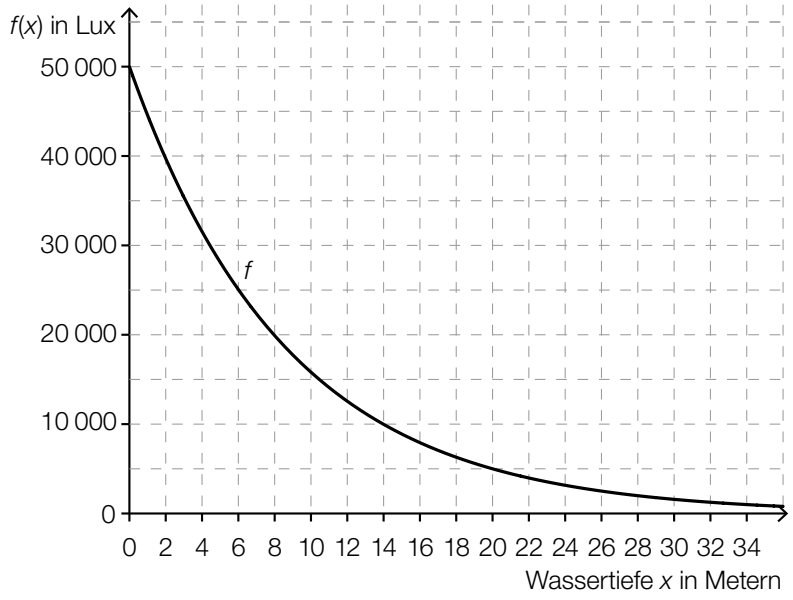
Aufgabennummer: A_178

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Direkt unter der Wasseroberfläche beträgt der Druck 1 Bar. Der Druck nimmt mit zunehmender Wassertiefe gleichmäßig zu, und zwar um 1 Bar je 10 Meter Wassertiefe.

– Berechnen Sie, in welcher Wassertiefe ein Druck von 3,9 Bar herrscht.

b) Die Abnahme der Beleuchtungsstärke erfolgt unter Wasser exponentiell und kann näherungsweise durch die Funktion f beschrieben werden. Der Graph von f ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



– Lesen Sie aus der obigen Abbildung ab, in welcher Tiefe die Beleuchtungsstärke nur mehr 10 % ihres Anfangswerts beträgt.
– Erstellen Sie eine Gleichung der Funktion f.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Zur Ermittlung der Schallgeschwindigkeit unter Wasser wurde eine Messung durchgeführt. Der Schall benötigte 0,4 Millisekunden, um eine Strecke der Länge 0,57 Meter zurückzulegen.

– Berechnen Sie die Schallgeschwindigkeit in Metern pro Sekunde mit den Daten dieses Versuchs.

d) Durch eine bestimmte Tauchermaske werden alle Gegenstände unter Wasser um ein Drittel größer wahrgenommen, als sie tatsächlich sind.

– Ermitteln Sie, um wie viel Prozent die tatsächliche Größe kleiner als die wahrgenommene Größe ist.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $3{,}9 = 1 + 0{,}1 \cdot x \quad \Rightarrow \quad x = 29$
In einer Wassertiefe von 29 Metern herrscht ein Druck von 3,9 Bar.

b) In einer Tiefe von 20 Metern beträgt die Beleuchtungsstärke 5 000 Lux.
Toleranzbereich: [19,5; 20,5]
$f(x) = a \cdot b^x$
$a = 50\,000$
$5\,000 = 50\,000 \cdot b^{20} \quad \Rightarrow \quad b = \sqrt[20]{0{,}1} = 0{,}8912... \approx 0{,}891$
$f(x) = 50\,000 \cdot 0{,}891^x$
Geringfügige Abweichungen aufgrund der Verwendung anderer Punkte sind zulässig.

c) $v = \frac{s}{t} = \frac{0{,}57}{0{,}4 \cdot 10^{-3}}$ m/s = 1 425 m/s

d) tatsächliche Größe: x
wahrgenommene Größe: $w = \frac{4}{3} \cdot x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3}{4} \cdot w$

Die tatsächliche Größe ist um 25 % kleiner als die wahrgenommene Größe.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für die richtige Berechnung der Wassertiefe mit 3,9 Bar Druck

b) 1 × C: für das richtige Ablesen der Wassertiefe im Toleranzbereich [19,5; 20,5]
1 × A: für das richtige Erstellen der Funktionsgleichung
Geringfügige Abweichungen aufgrund der Verwendung anderer Punkte sind zulässig.

c) 1 × B: für die richtige Berechnung der Schallgeschwindigkeit in m/s

d) 1 × A: für das richtige Ermitteln des Prozentsatzes

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Äpfel*

Aufgabennummer: A_170

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Die Äpfel einer Großlieferung wurden einzeln gewogen. Die Daten sind in Form eines Boxplots dargestellt:



In der Fachliteratur wird ein Wert oft als „Ausreißer nach oben“ bezeichnet, wenn der Wert weiter als das 1,5-Fache des Interquartilsabstands rechts vom 3. Quartil liegt. Solche Ausreißer sind im obigen Boxplot nicht berücksichtigt.

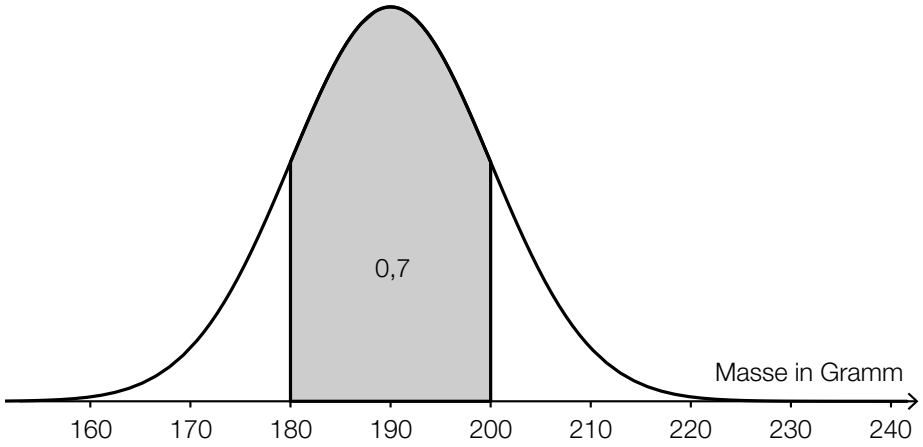
– Geben Sie an, ab welcher Masse ein Apfel als „Ausreißer nach oben“ bezeichnet wird.

b) Die Masse von Äpfeln einer bestimmten Sorte ist annähernd normalverteilt mit einem Erwartungswert von 200 g und einer Standardabweichung von 50 g.

– Berechnen Sie dasjenige um den Erwartungswert symmetrische Intervall, in dem die Masse eines zufällig ausgewählten Apfels mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % liegt.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Die Masse der Äpfel in einer Lieferung ist annähernd normalverteilt mit einem Erwartungswert von 190 g.
In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der zugehörigen Dichtefunktion dargestellt.



– Interpretieren Sie die Bedeutung der markierten Fläche im gegebenen Sachzusammenhang.
– Ermitteln Sie mithilfe der obigen Abbildung, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein zufällig ausgewählter Apfel eine Masse von mehr als 200 g hat.

d) Aus Erfahrung ist bekannt, dass $\frac{1}{30}$ aller Äpfel einer Lieferung wurmstichig ist.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Zufallsstichprobe von 200 Äpfeln höchstens 5 Äpfel wurmstichig sind.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Interquartilsabstand: 230 – 200 = 30
3. Quartil: 230
230 + 1,5 · 30 = 275

Äpfel mit einer Masse von mehr als 275 g werden als „Ausreißer nach oben“ bezeichnet.

b) Berechnung des symmetrischen Intervalls mittels Technologieeinsatz:
$P(\mu - a < X < \mu + a) = 0{,}90 \quad \Rightarrow \quad [117{,}8;\ 282{,}2]$

c) Ein zufällig ausgewählter Apfel hat mit einer Wahrscheinlichkeit von 70 % eine Masse zwischen 180 g und 200 g.

Aufgrund der Symmetrie der Glockenkurve gilt:
$P(X > 200) = 15\ \%$

d) X ... Anzahl der wurmstichigen Äpfel
Binomialverteilung mit $n = 200$ und $p = \frac{1}{30}$
Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$P(X \leq 5) = 0{,}34133... \approx 34{,}13\ \%$

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Angeben der Masse, ab der ein Apfel als „Ausreißer nach oben“ bezeichnet wird

b) 1 × B: für die richtige Berechnung des symmetrischen Intervalls

c) 1 × C1: für die richtige Interpretation der Fläche im gegebenen Sachzusammenhang
1 × C2: für das richtige Ermitteln der Wahrscheinlichkeit

d) 1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Wechselkurse*

Aufgabennummer: A_169

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Für einen Urlaub außerhalb der Eurozone muss Geld in die entsprechende Landeswährung gewechselt werden.

a) Ein Wechselvorgang wird folgendermaßen durchgeführt:
Vom zu wechselnden Betrag B in Euro wird eine fixe Gebühr G in Euro abgezogen.
Der verbleibende Betrag wird mit dem Wechselkurs w multipliziert und so erhält man den auszuzahlenden Betrag F in der Fremdwährung.

– Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung von F aus B, G und w.

$F =$ _____

b) Für die bargeldlose Bezahlung in einem Urlaubsland außerhalb der Eurozone stehen einer Urlauberin zwei Umrechnungsmöglichkeiten A und B zur Verfügung.
Zur Umrechnung eines Fremdwährungsbetrags in den entsprechenden Eurobetrag werden modellhaft die nachstehenden linearen Funktionen verwendet:

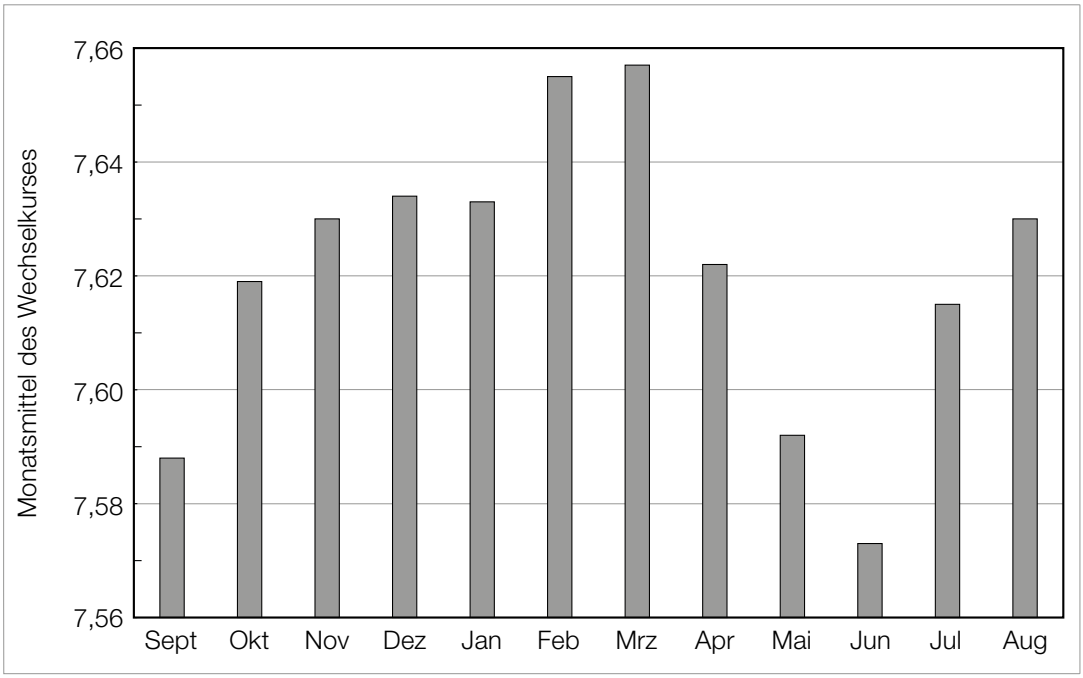
Möglichkeit A: $E_A(F) = 0{,}134 \cdot F + 3{,}83$
Möglichkeit B: $E_B(F) = 0{,}135 \cdot F + 2{,}02$

F ... Betrag in der Fremdwährung
$E_A(F)$, $E_B(F)$ ... dem Fremdwährungsbetrag F entsprechender Eurobetrag

– Ermitteln Sie, für welche Beträge in der Fremdwährung die Bezahlung mit der Möglichkeit A für die Urlauberin günstiger ist.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Die Monatsmittel des Wechselkurses einer Fremdwährung gegenüber dem Euro sind für ein Jahr im unten stehenden Diagramm dargestellt.



Jemand behauptet: „Das Monatsmittel des Wechselkurses im Monat Oktober war ungefähr doppelt so groß wie das Monatsmittel des Wechselkurses im Monat September, weil der entsprechende Balken im Diagramm ungefähr doppelt so hoch ist."

– Erklären Sie, warum diese Argumentation falsch ist.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $F = (B - G) \cdot w$

b) $0{,}134 \cdot F + 3{,}83 = 0{,}135 \cdot F + 2{,}02$

Berechnung mittels Technologieeinsatz: $F = 1\,810$

Für Beträge in der Fremdwährung, die größer als 1 810 sind, ist die Möglichkeit *A* für die Urlauberin günstiger.

c) Diese Argumentation ist falsch, weil die Skalierung der *y*-Achse nicht bei 0 „beginnt“, sondern bei 7,56.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel zur Berechnung von *F* aus *B*, *G* und *w*

b) 1 × A: für die richtige Modellierung
1 × B: für das richtige Ermitteln der Beträge in der Fremdwährung, für die die Bezahlung mit der Möglichkeit *A* für die Urlauberin günstiger ist

c) 1 × D: für die richtige Erklärung, warum diese Argumentation falsch ist

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Wellness*

Aufgabennummer: A_144

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

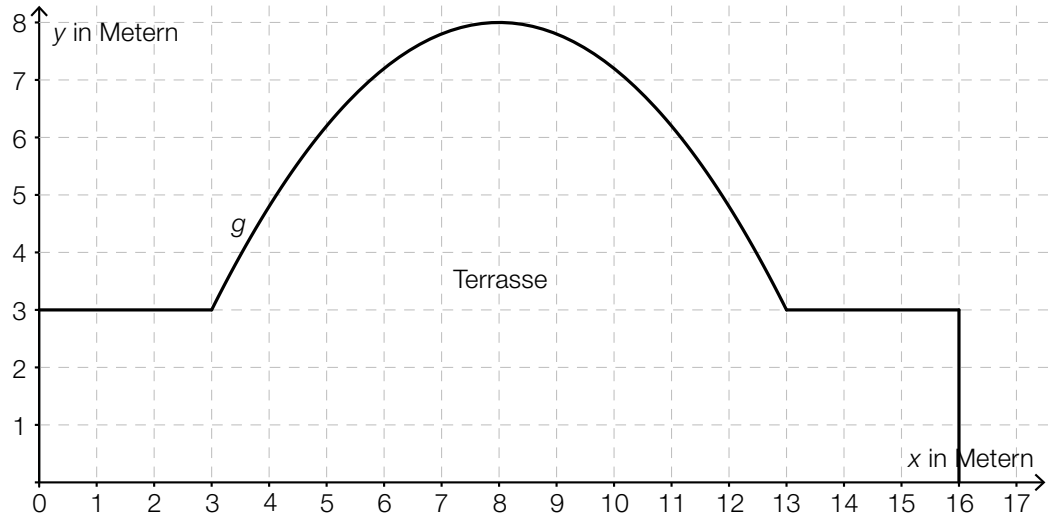
a) In Saunen werden zur Zeitmessung meist Sanduhren verwendet.
Der Sand in einer solchen Sanduhr benötigt 15 Minuten, bis er von oben nach unten vollständig durchgerieselt ist. Pro Minute rieseln 4 Gramm Sand von oben nach unten.
Die gesamte Sandmenge befindet sich zu Beginn ($t = 0$) im oberen Teil der Sanduhr (siehe nebenstehende Skizze).



– Erstellen Sie eine Gleichung derjenigen linearen Funktion, die der Zeit t in Minuten die Sandmenge im oberen Teil der Sanduhr in Gramm zuordnet.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Im Außenbereich einer Sauna wird eine neue Terrasse mit folgender Grundfläche geplant (siehe Grafik):



In dem gegebenen Koordinatensystem wird die Rundung der Terrasse im Intervall [3; 13] durch den Graphen einer Funktion *g* beschrieben.

– Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung des Flächeninhalts der Grundfläche der Terrasse, wenn die Funktion *g* bekannt ist.

$A =$ _____

Für die Verlegung von Sandsteinfliesen auf der Terrasse werden 90 m^2 Fliesen eingekauft. Die Sandsteinfliesen kosten netto (ohne 20 % Umsatzsteuer) pro Quadratmeter € 56.

– Berechnen Sie die Gesamtkosten für die Sandsteinfliesen inklusive Umsatzsteuer, wenn ein Preisnachlass von 3 % gewährt wird.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $s(t) = -4 \cdot t + 60$

t ... Zeit in min
$s(t)$ ... Sandmenge zur Zeit t in g

b) $A = 18 + \int_3^{13} g(x)\,dx$

$90 \cdot 56 \cdot 1{,}2 \cdot 0{,}97 = 5\,866{,}56$

Die Gesamtkosten betragen € 5.866,56.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Erstellen der Funktionsgleichung

b) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Formel
1 × B: für die richtige Berechnung der Gesamtkosten

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Leistungsdiagnostik im Sport*

Aufgabennummer: B_417

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Bei höherer Belastung benötigt der Körper mehr Sauerstoff und produziert als „Abfallprodukt“ Laktat.

Ab einer gewissen Laktatkonzentration ist das Herz-Kreislauf-System nicht mehr in der Lage, die arbeitenden Muskeln mit genügend Sauerstoff zu versorgen. Diese Laktatkonzentration heißt *anaerobe Schwelle*.

a) Für einen bestimmten Sportler kann die Laktatkonzentration in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit beim Laufen näherungsweise durch die Funktion f beschrieben werden:

$f(x) = 0{,}0461 \cdot e^{0{,}29 \cdot x} + 0{,}9$

x ... Geschwindigkeit beim Laufen in Kilometern pro Stunde (km/h)
$f(x)$ ... Laktatkonzentration bei der Geschwindigkeit x in Millimol pro Liter Blut (mmol/L)

Erreicht die Laktatkonzentration die anaerobe Schwelle, so beträgt der Steigungswinkel von f an dieser Stelle 45°.

– Bestimmen Sie die anaerobe Schwelle dieses Sportlers.

b) Bei einem bestimmten Sportler wird die Herzschlagfrequenz in Abhängigkeit von der Laufgeschwindigkeit bestimmt:

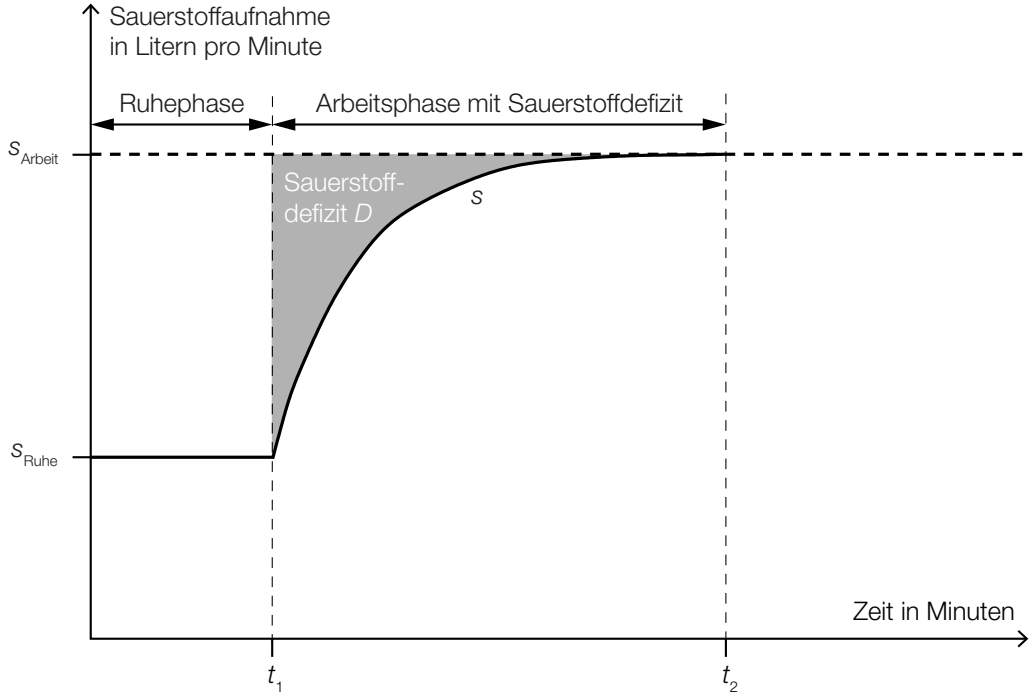
Laufgeschwindigkeit in Kilometern pro Stunde	11,0	11,5	12,0	12,5	13,0	13,5	14,0	14,5
Herzschlagfrequenz in min^{-1}	140	150	162	168	175	182	190	200

Die Herzschlagfrequenz in Abhängigkeit von der Laufgeschwindigkeit soll mithilfe einer linearen Ausgleichsfunktion beschrieben werden.

– Bestimmen Sie eine Gleichung dieser linearen Ausgleichsfunktion.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Nach Beginn einer körperlichen Belastung beim Sport (Arbeitsphase) passt sich das Atmungssystem nur verzögert dem erhöhten Sauerstoffbedarf an. Erst nach einigen Minuten wird eine ausreichende Versorgung erreicht. Bis dahin kommt es zu einem Sauerstoffdefizit.



– Stellen Sie eine Formel auf, mit der man das Sauerstoffdefizit D (grau markierte Fläche in obiger Skizze) berechnen kann, wenn eine Gleichung der Funktion s bekannt ist.

$D =$ _____

– Geben Sie die Einheit von D an.

d) Das Absinken der Sauerstoffaufnahme nach Beendigung einer körperlichen Belastung beim Sport kann mit der folgenden Differenzialgleichung beschrieben werden:

$$\frac{dy}{dt} = -1{,}386 \cdot (y - 0{,}3)$$

t ... Zeit nach Beendigung der körperlichen Belastung in Minuten (min)
$y(t)$ ... Sauerstoffaufnahme zur Zeit t in Litern pro Minute (L/min)

– Lösen Sie diese Differenzialgleichung mithilfe der Methode *Trennen der Variablen*.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Eine Tangentensteigung von 45° entspricht $f'(x) = 1$.

$0{,}013369 \cdot e^{0{,}29 \cdot x} = 1$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$x = 14{,}878... \approx 14{,}88$

$f(14{,}878...) = 4{,}348...$

Die anaerobe Schwelle dieses Sportlers liegt bei rund 4,35 mmol/L.

b) Bestimmen der Gleichung der linearen Ausgleichsfunktion mittels Technologieeinsatz:

$f(x) = 16{,}36 \cdot x - 37{,}68$ *(Koeffizienten gerundet)*

x ... Laufgeschwindigkeit in km/h
$f(x)$ ... Herzschlagfrequenz bei der Laufgeschwindigkeit x in min^{-1}

c) $D = (t_2 - t_1) \cdot s_{\text{Arbeit}} - \int_{t_1}^{t_2} s(t)\,\text{d}t$

oder:

$D = \int_{t_1}^{t_2} [s_{\text{Arbeit}} - s(t)]\,\text{d}t$

Die Einheit von D lautet:
$\frac{\text{L}}{\text{min}} \cdot \text{min} = \text{L}$

d) $\frac{\text{d}y}{y - 0{,}3} = -1{,}386\,\text{d}t \quad \left(\text{oder: } \frac{y'}{y - 0{,}3} = -1{,}386\right)$
$\int \frac{\text{d}y}{y - 0{,}3} = \int -1{,}386\,\text{d}t \quad \left(\text{oder: } \int \frac{y'(t)}{y(t) - 0{,}3}\,\text{d}t = \int -1{,}386\,\text{d}t\right)$
$\ln|y(t) - 0{,}3| = -1{,}386 \cdot t + C_1$
$y(t) = C_2 \cdot e^{-1{,}386 \cdot t} + 0{,}3$

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für das richtige Bestimmen der anaeroben Schwelle

b) 1 × B: für das richtige Bestimmen der Gleichung der linearen Ausgleichsfunktion

c) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Formel zur Berechnung von D
1 × C: für das richtige Angeben der Einheit von D

d) 1 × B: für das richtige Lösen der Differenzialgleichung

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Seegrundstück*

Aufgabennummer: B_415

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Für den Kauf eines Seegrundstücks benötigt der Käufer einen Kredit in Höhe von € 865.000. (Spesen und Gebühren werden nicht berücksichtigt.)

a) Ein Kreditinstitut macht folgendes Angebot:
Der Kreditnehmer bezahlt am Ende jedes Jahres eine Rate in Höhe von € 100.000 bei einem Zinssatz von 6,75 % p. a.

– Berechnen Sie, wie viele volle Raten der Kreditnehmer bezahlen muss.
– Berechnen Sie die Höhe des ein Jahr nach der letzten vollen Rate fälligen Restbetrags.

b) Ein anderes Kreditinstitut stellt einen Tilgungsplan zur Rückzahlung des Kredits auf. Ein Ausschnitt dieses Tilgungsplans ist in der nachstehenden Tabelle dargestellt.

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0				€ 865.000
1	€ 51.467,50	€ 53.532,50		
2	€ 48.282,32	€ –48.282,32		
...				

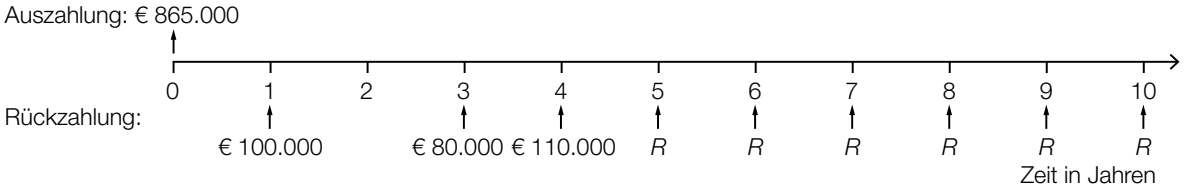
– Ermitteln Sie die Annuität und die Restschuld im Jahr 1.

Im Jahr 2 sind die beiden Einträge in den Spalten „Zinsanteil“ und „Tilgungsanteil“ bis auf das Vorzeichen gleich.

– Beschreiben Sie die Auswirkungen auf die Restschuld im Jahr 2.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Ein weiteres Angebot zur Rückzahlung des Kredits innerhalb von 10 Jahren kann mithilfe folgender Zeitachse dargestellt werden:



– Beschreiben Sie den Rückzahlungsvorgang des in der Zeitachse dargestellten Angebots in Worten.
– Berechnen Sie die Ratenhöhe *R* bei einem Zinssatz von 6 % p. a.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $865\,000 = 100\,000 \cdot \frac{1{,}0675^n - 1}{0{,}0675} \cdot \frac{1}{1{,}0675^n}$

Lösung der Gleichung mittels Technologieeinsatz:
$n = 13{,}42...$
Der Kreditnehmer muss 13 volle Raten bezahlen.

$\left(865\,000 - 100\,000 \cdot \frac{1{,}0675^{13} - 1}{0{,}0675} \cdot \frac{1}{1{,}0675^{13}}\right) \cdot 1{,}0675^{14} = 43\,077{,}457...$

Die Höhe des Restbetrags beträgt € 43.077,46.

b) Annuität im Jahr 1: 51 467,50 + 53 532,50 = 105 000
Restschuld im Jahr 1: 865 000 – 53 532,50 = 811 467,50
Im Jahr 1 beträgt die Annuität € 105.000 und die Restschuld € 811.467,50.

Die Restschuld erhöht sich um die anfallenden Zinsen.

c) Jeweils am Ende des ersten, des dritten und des vierten Jahres erfolgt eine Einmalzahlung in Höhe von € 100.000, € 80.000 bzw. € 110.000.
Ab dem fünften Jahr wird eine 6-mal zahlbare nachschüssige Jahresrate in Höhe von R vereinbart.

Restschuld zum Zeitpunkt $t = 4$ Jahre:
$865\,000 \cdot 1{,}06^4 - 100\,000 \cdot 1{,}06^3 - 80\,000 \cdot 1{,}06 - 110\,000 = 778\,140{,}970...$

$778\,140{,}970... = R \cdot \frac{1{,}06^6 - 1}{0{,}06} \cdot \frac{1}{1{,}06^6}$
Berechnung mittels Technologieeinsatz: $R = 158\,244{,}793...$

Die Ratenhöhe beträgt € 158.244,79.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B1: für die richtige Berechnung der Anzahl der Vollraten
1 × B2: für die richtige Berechnung der Höhe des Restbetrags

b) 1 × B: für das richtige Ermitteln der Annuität und der Restschuld im Jahr 1
1 × C: für die richtige Beschreibung der Auswirkungen auf die Restschuld im Jahr 2

c) 1 × C: für die richtige Beschreibung des Rückzahlungsvorgangs
1 × A: für einen richtigen Ansatz
1 × B: für die richtige Berechnung der Ratenhöhe

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Prismen und Linsen*

Aufgabennummer: B_411

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

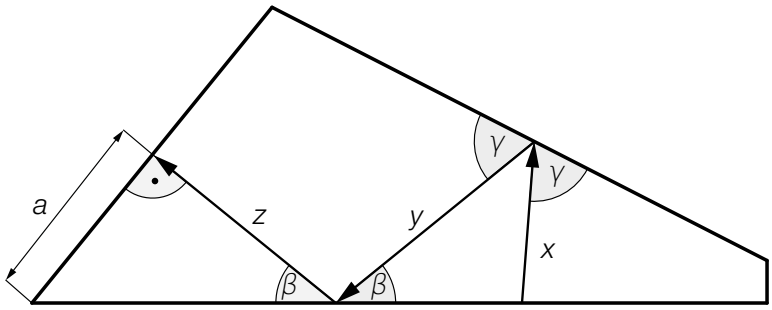
Der Verlauf eines Lichtstrahls durch ein Glasprisma wird als *Strahlengang* bezeichnet.

a) In einem Spezialglas beträgt die Lichtgeschwindigkeit 205 337 300 m/s.

In einem aus diesem Glas gefertigten Prisma beträgt die Länge des Strahlengangs 5 cm.

– Berechnen Sie, wie viele Sekunden es dauert, bis ein Lichtstrahl dieses Prisma durchquert hat.

b) Ein Strahlengang durch ein Glasprisma einer Filmkamera kann folgendermaßen dargestellt werden:



Hinweis: Die Skizze ist nicht maßstabgetreu!

a = 0,50 cm
x = 0,55 cm
β = 40°
γ = 68°

– Berechnen Sie die Länge $x + y + z$ des Strahlengangs.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Bei der Abbildung eines Gegenstands mithilfe einer Sammellinse gelten folgende Beziehungen:

$$\frac{B}{G} = \frac{b}{g} \text{ und } b = \frac{g \cdot f}{g - f}$$

B ... Höhe des Bildes
G ... Höhe des Gegenstands
b ... Abstand des Bildes von der Linse
g ... Abstand des Gegenstands von der Linse
f ... Brennweite der Linse

– Kreuzen Sie die zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]*

Wenn $g = 3 \cdot f$ gilt, dann ist B größer als G.	☐
Wenn $g = 3 \cdot f$ gilt, dann ist $B = G$.	☐
Wenn $g = 2 \cdot f$ gilt, dann ist B kleiner als G.	☐
Wenn $g = 2 \cdot f$ gilt, dann ist $B = G$.	☐
Wenn $g = 2 \cdot f$ gilt, dann ist B größer als G.	☐

d) Ein Unternehmen fertigt Linsen aus Glas für industrielle Anwendungen. Die Dicke spezieller Linsen (gemessen in der Linsenmitte) erweist sich als annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert μ und der Standardabweichung σ:

$\mu = 12{,}000$ mm
$\sigma = 0{,}060$ mm

– Berechnen Sie dasjenige um μ symmetrische Intervall, in dem die Dicke einer zufällig ausgewählten Linse mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % liegt.

Eine Linse erreicht Präzisionsqualität, wenn die Abweichung vom Erwartungswert nicht mehr als ±0,040 mm beträgt.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Linse Präzisionsqualität hat.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $\frac{0{,}05\ \text{m}}{205\,337\,300\ \text{m/s}} = 2{,}43... \cdot 10^{-10}\ \text{s} \approx 2{,}4 \cdot 10^{-10}\ \text{s}$

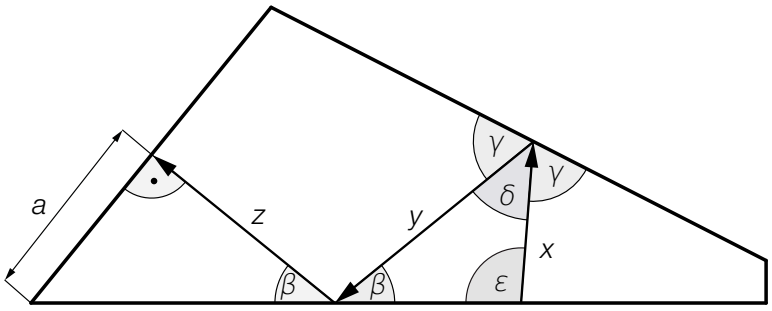
b) $z = \frac{0{,}5}{\tan(40°)} = 0{,}595...$

$\delta = 180° - 2 \cdot \gamma = 44°$

$\varepsilon = 180° - \beta - \delta = 96°$

$y = \frac{0{,}55 \cdot \sin(96°)}{\sin(40°)} = 0{,}850...$

$x + y + z = 1{,}996...$



Die Länge des Strahlengangs beträgt rund 2,00 cm.

c)

Wenn $g = 2 \cdot f$ gilt, dann ist $B = G$.	☒

d) Berechnung des Intervalls mittels Technologieeinsatz:
$P(\mu - a < X < \mu + a) = 0{,}90 \Rightarrow [11{,}901;\ 12{,}099]$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$P(11{,}960 < X < 12{,}040) = 0{,}495... \approx 50\ \%$

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für die richtige Berechnung der Zeitdauer in Sekunden

b) 1 × A1: für die richtige Modellierung am rechtwinkeligen Dreieck zur Berechnung von z
1 × A2: für die richtige Modellierung am schiefwinkeligen Dreieck zur Berechnung von y
1 × B: für die richtige Berechnung der Länge des Strahlengangs

c) 1 × C: für das richtige Ankreuzen

d) 1 × B1: für die richtige Berechnung des symmetrischen Intervalls
1 × B2: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Catering*

Aufgabennummer: B_410

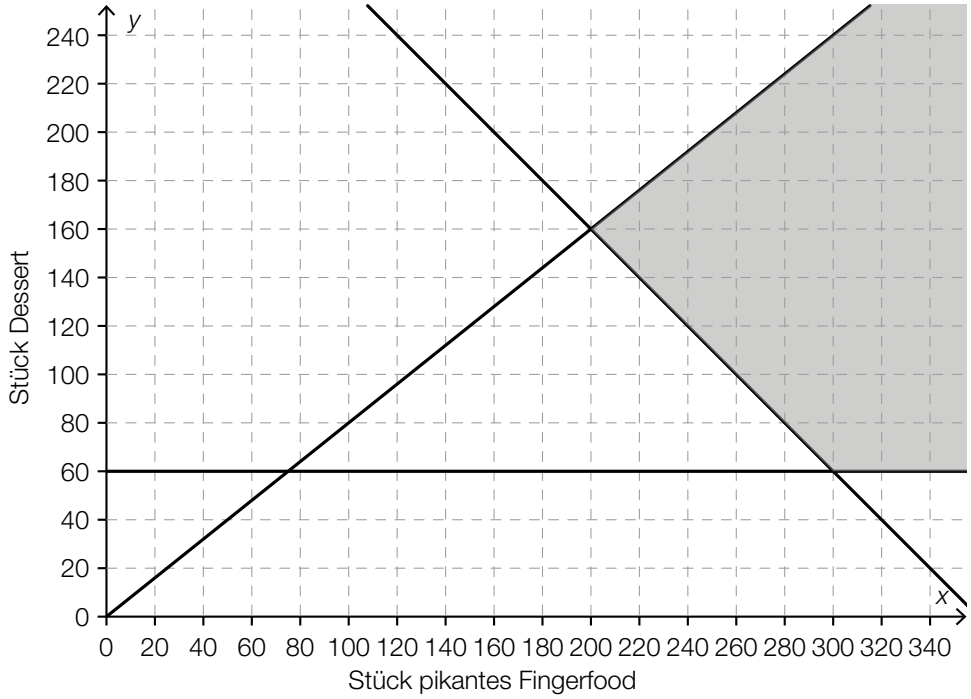
Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Im Rahmen eines Schulprojekts soll eine Schülergruppe Caterings für Events durchführen. Dabei sollen *x* Stück pikantes Fingerfood und *y* Stück Dessert geliefert werden.

a) Für ein Event sollen insgesamt mindestens 270 Stück geliefert werden, davon sollen höchstens 100 Stück Dessert sein. Insgesamt sollen mindestens doppelt so viel Stück pikantes Fingerfood wie Stück Dessert geliefert werden.

– Erstellen Sie die Ungleichungen, die diesen Sachverhalt beschreiben.

b) In der nachstehenden Abbildung ist der Lösungsbereich des Ungleichungssystems mit den Vorgaben eines anderen Events dargestellt.

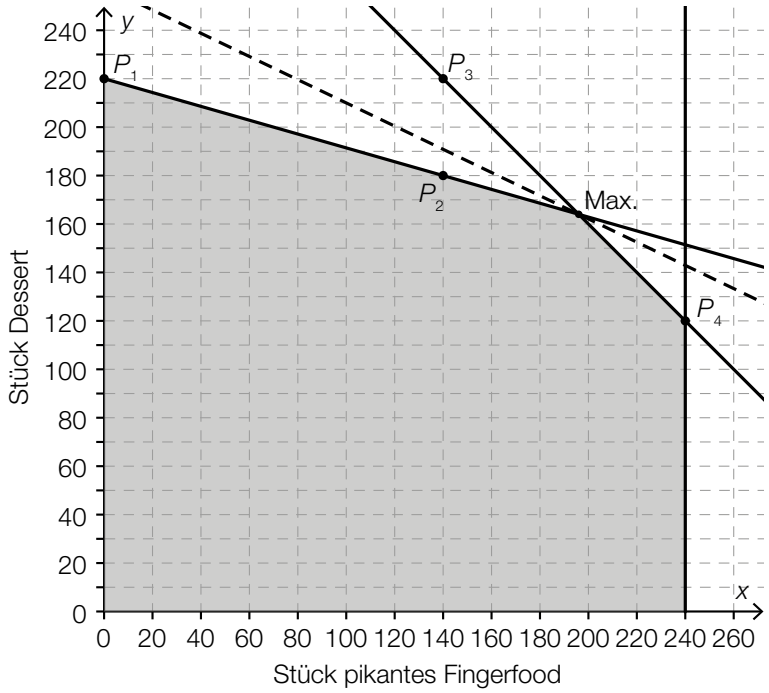


Die Produktionskosten für jedes Stück pikantes Fingerfood betragen € 0,80, für jedes Stück Dessert € 1. Die Gesamtproduktionskosten sollen möglichst gering sein.

– Erstellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Zielfunktion.
– Zeichnen Sie in der obigen Abbildung diejenige Gerade ein, für die im Lösungsbereich des Ungleichungssystems der minimale Wert der Zielfunktion angenommen wird.
– Lesen Sie aus der obigen Abbildung diejenigen Produktionsmengen ab, bei der die Gesamtproduktionskosten minimal sind.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) In der nachstehenden Abbildung ist der Lösungsbereich zur Ermittlung des maximalen Gewinns beim Catering für ein anderes Event dargestellt. Die Gerade, für die der optimale Wert der Zielfunktion angenommen wird, ist strichliert eingezeichnet.



Die Punkte P_1, P_2, P_3 und P_4 liegen auf dem Koordinatengitter.

– Erstellen Sie mithilfe der eingezeichneten Punkte die Gleichungen der beiden Begrenzungsgeraden, die zum Bestimmen der Produktionsmengen für den maximalen Gewinn benötigt werden.
– Berechnen Sie diejenigen Stückzahlen an pikantem Fingerfood und Dessert, bei denen ein maximaler Gewinn erzielt wird.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

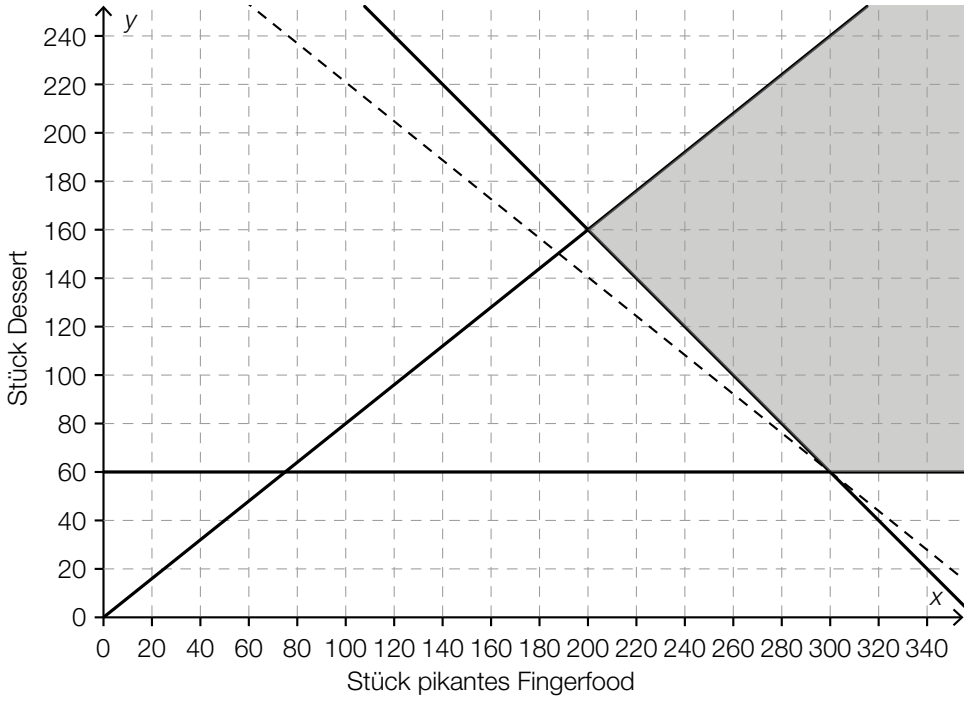
Möglicher Lösungsweg

a) x ... Stück pikantes Fingerfood
y ... Stück Dessert

I: $x + y \geq 270$
II: $y \leq 100$
III: $x \geq 2 \cdot y$
IV: $x \geq 0$
V: $y \geq 0$

Die Angabe der Nichtnegativitätsbedingungen ist für die Punktevergabe nicht erforderlich.

b) $Z(x, y) = 0{,}80 \cdot x + 1 \cdot y$



Die Gesamtproduktionskosten sind bei einer Produktion von 300 Stück pikantem Fingerfood und 60 Stück Dessert minimal.

c) P_1P_2: $y = -\frac{2}{7} \cdot x + 220$
P_3P_4: $y = -x + 360$

$-x + 360 = -\frac{2}{7} \cdot x + 220$

$140 = \frac{5}{7} \cdot x$

$x = 196 \Rightarrow y = 164$

Der maximale Gewinn wird bei einer Produktion von 196 Stück pikantem Fingerfood und 164 Stück Dessert erzielt.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A1: für das richtige Erstellen der Ungleichung (Einschränkung „mindestens 270 Stück“)
1 × A2: für das richtige Erstellen der Ungleichung (Einschränkung „höchstens 100 Stück Dessert“)
1 × A3: für das richtige Erstellen der Ungleichung (Einschränkung „mindestens doppelt so viel ...“)
Die Angabe der Nichtnegativitätsbedingungen ist für die Punktevergabe nicht erforderlich.

b) 1 × A: für das richtige Erstellen der Gleichung der Zielfunktion
1 × B: für das richtige Einzeichnen der Geraden, für die der minimale Wert der Zielfunktion angenommen wird
1 × C: für das richtige Ablesen der optimalen Produktionsmengen

c) 1 × A1: für das richtige Erstellen der Gleichung der Geraden P_1P_2
1 × A2: für das richtige Erstellen der Gleichung der Geraden P_3P_4
1 × B: für die richtige Berechnung der Stückzahlen an pikantem Fingerfood und Dessert mit maximalem Gewinn

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Lego*

Aufgabennummer: B_409

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Legosteine sind Bausteine aus Kunststoff, die von einem dänischen Unternehmen produziert werden.

a) Könnte man 40 Milliarden Legosteine gleicher Höhe aufeinanderstecken, so würde der dabei entstehende „Turm“ bis zum Mond reichen. Die Entfernung des Monds von der Erde beträgt etwa 384 400 km.

– Berechnen Sie die Höhe eines Legosteins, der dieser Überlegung zugrunde liegt, in Zentimetern.

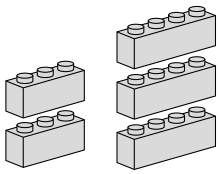
b) Am 80. Jahrestag der Gründung des Unternehmens gab es auf der Welt etwa 564,6 Milliarden Legosteine.

– Kreuzen Sie diejenige Zahl an, die nicht diesem Wert entspricht. *[1 aus 5]*

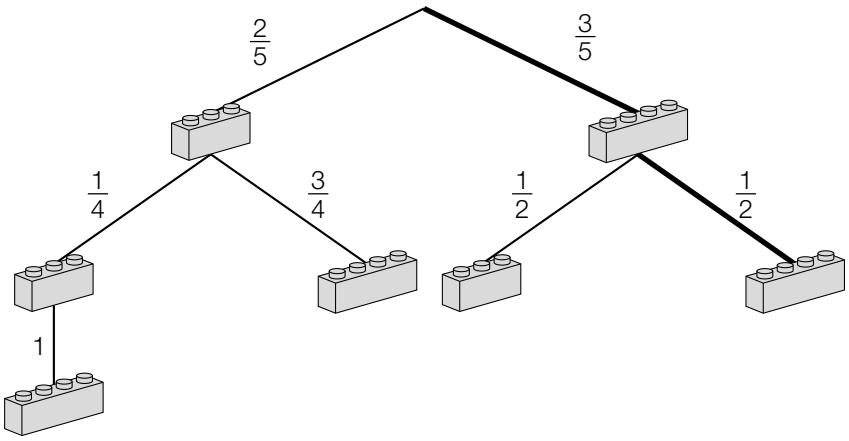
$0{,}5646 \cdot 10^{12}$	☐
$56\,460 \cdot 10^{7}$	☐
$56{,}46 \cdot 10^{10}$	☐
$564{,}6 \cdot 10^{9}$	☐
$564\,600 \cdot 10^{5}$	☐

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Tobias spielt mit 5 Legosteinen: 2 Steine mit 3 Noppen in einer Reihe und 3 Steine mit 4 Noppen in einer Reihe (siehe nachstehende Abbildung).



Er zieht zufällig (also ohne die Anzahl der Noppen zu sehen oder zu ertasten) einen Legostein nach dem anderen und legt sie aneinander. Er zieht so lange, bis die entstehende Mauer mindestens 7 Noppen lang ist.
Das nachstehende Baumdiagramm zeigt seine möglichen Züge und die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten.



– Beschreiben Sie, welches Ereignis *E* durch den fett gezeichneten Pfad beschrieben wird.

Die Zufallsvariable *X* beschreibt die gesamte Anzahl der Noppen in der Mauer.

– Bestimmen Sie die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten mithilfe des Baumdiagramms und tragen Sie diese in der nachstehenden Tabelle ein.

x_i	7	8	10
$P(X = x_i)$			

Die Zufallsvariable *Y* beschreibt die Anzahl der Züge, die Tobias benötigt, um eine Mauer mit mindestens 7 Noppen zu erhalten.

– Berechnen Sie den Erwartungswert dieser Zufallsvariablen *Y*.

d) Legosteine unterscheiden sich in der Farbe und in der Anzahl der Noppen.
Es gelten folgende Bezeichnungen:

N … Menge aller Legosteine mit genau 6 Noppen
R … Menge aller Legosteine, die rot sind

– Beschreiben Sie die Bedeutung der Menge $N \cap R$ im gegebenen Sachzusammenhang.
– Beschreiben Sie die Bedeutung der Menge $R \setminus N$ im gegebenen Sachzusammenhang.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $\frac{3{,}844 \cdot 10^{10}}{4 \cdot 10^{10}} = 0{,}961$

Man geht bei dieser Überlegung von einer Höhe von rund 0,96 cm aus.

b)

$564\,600 \cdot 10^5$	☒

c) E ist das Ereignis, dass 2 Steine mit 4 Noppen gezogen werden.

x_i	7	8	10
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{6}{10}$	$\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$	$\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{10}$

y_i	2	3
$P(Y = y_i)$	0,9	0,1

$E(Y) = 2 \cdot 0{,}9 + 3 \cdot 0{,}1 = 2{,}1$

d) $N \cap R$ ist die Menge aller Legosteine, die rot sind und genau 6 Noppen haben.

$R \setminus N$ ist die Menge aller Legosteine, die rot sind und nicht genau 6 Noppen haben.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für die richtige Berechnung der Höhe der Legosteine in cm

b) 1 × C: für das richtige Ankreuzen

c) 1 × C: für die richtige Beschreibung des Ereignisses im gegebenen Sachzusammenhang
1 × B1: für das richtige Bestimmen der Wahrscheinlichkeiten
1 × A: für die richtige Modellbildung
1 × B2: für die richtige Berechnung des Erwartungswerts

d) 1 × C1: für die richtige Beschreibung von $N \cap R$ im gegebenen Sachzusammenhang
1 × C2: für die richtige Beschreibung von $R \setminus N$ im gegebenen Sachzusammenhang

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Sinkende Kugeln*

Aufgabennummer: B_407

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Die Sinkgeschwindigkeit einer in einer Flüssigkeit sinkenden Metallkugel kann durch eine Funktion v beschrieben werden:

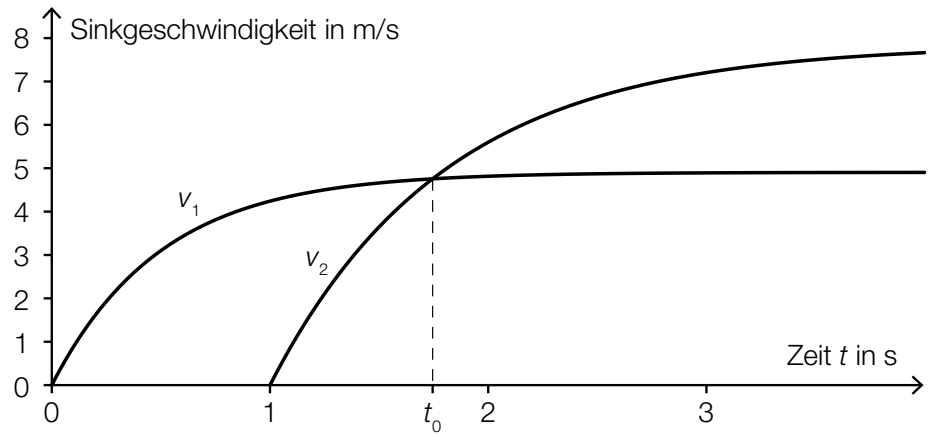
$v(t) = g \cdot \tau \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ mit $t \geq 0$

t ... Zeit ab Beginn des Sinkens in Sekunden (s)
$v(t)$ ... Sinkgeschwindigkeit zur Zeit t in Metern pro Sekunde (m/s)
τ ... Zeitkonstante in s mit $\tau > 0$
g ... Erdbeschleunigung ($g \approx 9{,}81$ m/s^2)

a) – Begründen Sie mathematisch, warum die Sinkgeschwindigkeit ständig zunimmt.

b) Eine Kugel K_2 beginnt 1 Sekunde nach einer Kugel K_1 zu sinken.

In der nachstehenden Grafik sind die Sinkgeschwindigkeit v_1 der Kugel K_1 und die Sinkgeschwindigkeit v_2 der Kugel K_2 dargestellt. Die Zeitkonstante der Sinkgeschwindigkeit v_2 beträgt $\tau_2 = 0{,}8$ s.



– Erstellen Sie eine Gleichung der Funktion v_2 für $t \geq 1$.

Zum Zeitpunkt t_0 ist die Beschleunigung der Kugel K_2 größer als die Beschleunigung der Kugel K_1.

– Beschreiben Sie, wie man dies in der obigen Grafik erkennen kann.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Die Sinkgeschwindigkeit einer bestimmten Kugel kann durch die Funktion v beschrieben werden:

$v(t) = g \cdot 0{,}25 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{0{,}25}}\right)$ mit $t \geq 0$

t ... Zeit ab Beginn des Sinkens in s
$v(t)$ ... Sinkgeschwindigkeit zur Zeit t in m/s

– Berechnen Sie denjenigen Weg, den die Kugel in der ersten Sekunde zurücklegt.

Im Zeitintervall $[0; t_1]$ legt die Kugel einen Weg von 8 m zurück.

– Bestimmen Sie die Zeit t_1.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Für größer werdendes t wird $e^{-\frac{t}{\tau}}$ immer kleiner und damit $\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ immer größer.

b) $v_2(t) = g \cdot 0{,}8 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t-1}{0{,}8}}\right)$

An der Stelle t_0 ist die Steigung der Funktion v_2 größer als die Steigung der Funktion v_1.

c) $s(1) = \int_0^1 g \cdot 0{,}25 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{0{,}25}}\right) \mathrm{d}t = 1{,}8506...$

In der ersten Sekunde legt die Kugel rund 1,85 m zurück.

$s(t_1) = 8$

$\int_0^{t_1} g \cdot 0{,}25 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{0{,}25}}\right) \mathrm{d}t = 8$

Lösung mittels Technologieeinsatz:

$t_1 = 3{,}51...$
$(t_2 = -0{,}70...)$

Die Kugel benötigt rund 3,5 Sekunden, um diesen Weg zurückzulegen.

Lösungsschlüssel

a) 1 × D: für die richtige Begründung

b) 1 × A: für das richtige Erstellen einer Gleichung der Funktion v_2
1 × C: für die richtige Beschreibung

c) 1 × B1: für die richtige Berechnung desjenigen Weges, den die Kugel in der ersten Sekunde zurücklegt
1 × B2: für das richtige Bestimmen der Zeit t_1

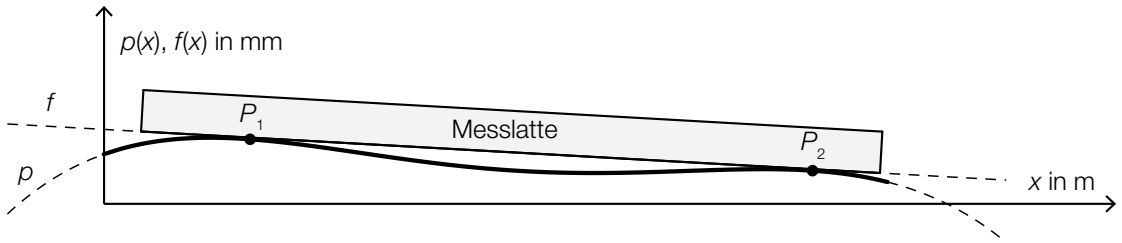
BMB
Bundesministerium
für Bildung

Bodenunebenheiten*

Aufgabennummer: B_405

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Um Unebenheiten eines Bodens festzustellen, wird eine Messlatte verwendet.



Das Profil des Bodens kann näherungsweise durch den Graphen einer Polynomfunktion p beschrieben werden, die Unterkante der Messlatte kann durch den Graphen einer linearen Funktion f beschrieben werden.

a) Die Messlatte berührt den Boden in den Punkten $P_1 = (x_1|p(x_1))$ und $P_2 = (x_2|p(x_2))$. Die Steigung der linearen Funktion f ist k.

Eine der folgenden Aussagen stimmt nicht mit der obigen Abbildung überein.

– Kreuzen Sie die nicht zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]*

$k = \frac{p(x_2) - p(x_1)}{x_2 - x_1}$	☐
$p'(x_1) = 0$	☐
$p'(x_2) = k$	☐
$p'(x_1) = p'(x_2)$	☐
$f(x_1) = p(x_1)$	☐

b) – Begründen Sie, warum der Grad der in der obigen Abbildung dargestellten Polynomfunktion p größer oder gleich 4 sein muss.

* ehemalige Klausuraufgabe

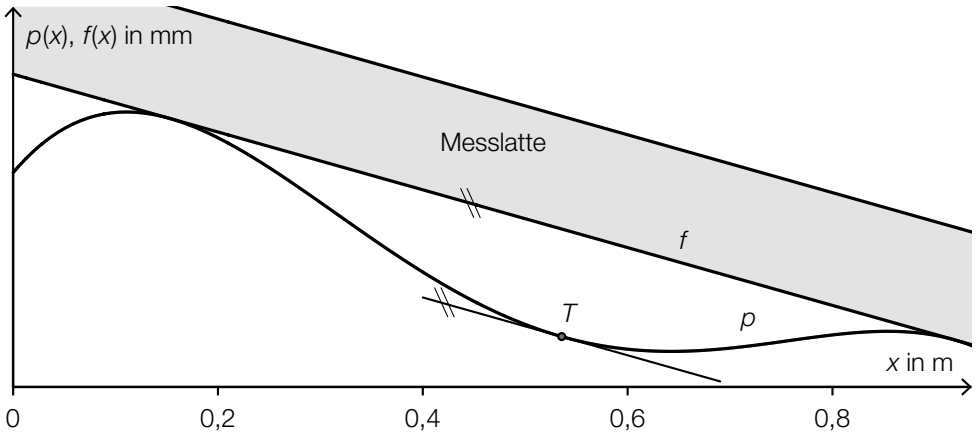
c) Der Graph der Polynomfunktion p mit $p(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$ verläuft durch die folgenden 5 Punkte:

$A = (0|1{,}8)$, $B = (0{,}25|2{,}1)$, $C = (0{,}5|0{,}4)$, $D = (0{,}75|0{,}7)$, $E = (1|0{,}5)$

x ... horizontale Koordinate in Metern (m)
$p(x)$ ... vertikale Koordinate in Millimetern (mm)

– Stellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten dieser Polynomfunktion p auf.
– Ermitteln Sie die Koeffizienten dieser Polynomfunktion p.

d) Um die Unebenheit eines anderen Bodens zu ermitteln, soll der Punkt T bestimmt werden. Im Punkt T ist die Tangente an den Graphen von p parallel zur Geraden f (siehe nachstehende Skizze).



Es gilt:

$p(x) = -70{,}000 \cdot x^4 + 150{,}000 \cdot x^3 - 100{,}000 \cdot x^2 + 17{,}000 \cdot x + 3{,}000$
$f(x) = -4{,}046 \cdot x + 4{,}378$

x ... horizontale Koordinate in Metern (m)
$p(x)$, $f(x)$ ... vertikale Koordinate in Millimetern (mm)

– Erstellen Sie eine Gleichung, mit der die x-Koordinate des Punktes T berechnet werden kann.
– Berechnen Sie die x-Koordinate des Punktes T.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a)

$p'(x_1) = 0$	☒

b) Der Graph der Funktion hat mindestens 2 Wendepunkte.

oder:

Die Funktion hat mindestens 3 lokale Extrema.

oder:

Es gibt mindestens 4 Schnittpunkte mit einer geeigneten Geraden.

c) $p(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$

I: $p(0) = 1{,}8$
II: $p(0{,}25) = 2{,}1$
III: $p(0{,}5) = 0{,}4$
IV: $p(0{,}75) = 0{,}7$
V: $p(1) = 0{,}5$

oder:

I: $a \cdot 0^4 + b \cdot 0^3 + c \cdot 0^2 + d \cdot 0 + e = 1{,}8$
II: $a \cdot 0{,}25^4 + b \cdot 0{,}25^3 + c \cdot 0{,}25^2 + d \cdot 0{,}25 + e = 2{,}1$
III: $a \cdot 0{,}5^4 + b \cdot 0{,}5^3 + c \cdot 0{,}5^2 + d \cdot 0{,}5 + e = 0{,}4$
IV: $a \cdot 0{,}75^4 + b \cdot 0{,}75^3 + c \cdot 0{,}75^2 + d \cdot 0{,}75 + e = 0{,}7$
V: $a \cdot 1^4 + b \cdot 1^3 + c \cdot 1^2 + d \cdot 1 + e = 0{,}5$

Berechnung der Koeffizienten mittels Technologieeinsatz:

$a = -69{,}333...$
$b = 146{,}666...$
$c = -95{,}666...$
$d = 17{,}033...$
$e = 1{,}8$

d) $p'(x) = f'(x)$
$p'(x) = -4{,}046$

$-280 \cdot x^3 + 450 \cdot x^2 - 200 \cdot x + 17 = -4{,}046$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

($x_1 = 0{,}1527...$)
$x_2 = 0{,}5357...$
($x_3 = 0{,}9187...$)

Die x-Koordinate des Punktes T ist 0,5357...

Lösungsschlüssel

a) 1 × C: für das richtige Ankreuzen

b) 1 × D: für die richtige Begründung

c) 1 × A: für das richtige Aufstellen des Gleichungssystems
1 × B: für das richtige Ermitteln der Koeffizienten

d) 1 × A: für das richtige Erstellen der Gleichung zur Berechnung der x-Koordinate des Punktes T
1 × B: für die richtige Berechnung der x-Koordinate des Punktes T

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Weinbau (2)*

Aufgabennummer: B_413

Technologieeinsatz:	möglich ☐	erforderlich ☒

a) Aus nostalgischen Gründen werden in einem kleinen Weingut Trauben der Sorte *Welschriesling* mit einer renovierten Handpresse gepresst.
Der zylinderförmige Korb, in dem die Weintrauben gepresst werden, hat dabei die folgenden Abmessungen:
Höhe h = 80 cm, Innenradius r = 42 cm.



– Überprüfen Sie nachweislich mithilfe der Volumsformel des Drehzylinders, ob die nachstehenden Aussagen jeweils richtig sind.

Aussage 1: „Wäre die Presse 1,6 m hoch (bei gleichem Durchmesser), so würde sie das doppelte Volumen fassen.“
Aussage 2: „Hätte die Presse einen Innenradius von 84 cm (bei gleicher Höhe), so würde sie das doppelte Volumen fassen.“

Der Korb ist zu 95 % mit Trauben gefüllt. Aus diesen Trauben werden 350 Liter Traubenmost gepresst.

– Berechnen Sie den prozentuellen Anteil des Traubenmosts am ursprünglichen Volumen der Trauben.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Während der Vergärung von Traubenmost zu Wein wird CO_2 gebildet. In der nachstehenden Tabelle sind 6 Messwerte eines Vergärungsprozesses angegeben.

Zeit in Sekunden	CO_2-Druck in Kilopascal
0	90
100	100
200	115
300	135
400	155
500	190

Die Abhängigkeit des CO_2-Drucks von der Zeit soll beschrieben werden.

– Ermitteln Sie mithilfe der gegebenen Daten eine Gleichung der zugehörigen exponentiellen Regressionsfunktion.

c) Weine der Sorten *Zweigelt* und *Grüner Veltliner* werden in Kisten zu 12 Flaschen und Kartons zu 6 Flaschen verkauft. Die Preise pro Flasche sind unabhängig von der Packungsgröße.

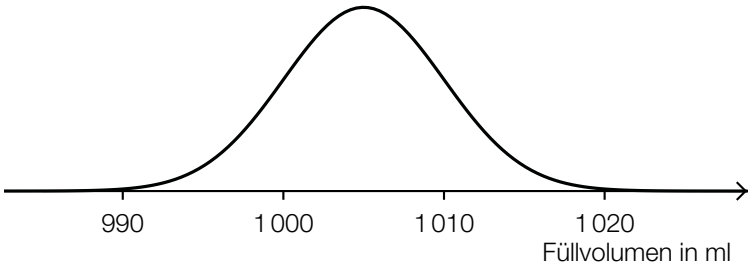
1 Kiste *Zweigelt* und 1 Karton *Grüner Veltliner* kosten insgesamt € 47,40.
2 Kisten *Grüner Veltliner* und 1 Karton *Zweigelt* kosten insgesamt € 72.

– Erstellen Sie ein Gleichungssystem, mit dem der Preis für eine Flasche *Zweigelt* und der Preis für eine Flasche *Grüner Veltliner* berechnet werden können.
– Berechnen Sie den Preis für eine Flasche *Zweigelt* und den Preis für eine Flasche *Grüner Veltliner*.

d) Der Wein wird mit einem manuellen Reihenfüller in Flaschen abgefüllt. Das Füllvolumen der Flaschen kann dabei als annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert μ = 1 005 Milliliter (ml) und der Standardabweichung σ = 5 ml angenommen werden.

– Ermitteln Sie dasjenige um μ symmetrische Intervall, in dem 95 % der Füllvolumina liegen.

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Dichtefunktion dieser Normalverteilung dargestellt.



– Veranschaulichen Sie in der obigen Abbildung die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Flasche ein Füllvolumen von mindestens 1 000 ml hat.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Aussage 1 ist richtig, weil das Volumen direkt proportional zur Höhe ist.
Aussage 2 ist falsch, weil das Volumen nicht direkt proportional zum Radius ist.
Bei Verdoppelung des Radius erhält man das vierfache Volumen.

Auch ein rechnerischer Nachweis ist jeweils als richtig zu werten.

Volumen der Trauben im Korb in Litern: $0{,}95 \cdot 4{,}2^2 \cdot \pi \cdot 8 = 421{,}1...$
relativer Anteil des Traubenmosts am ursprünglichen Traubenvolumen:
$\frac{350}{421{,}1...} = 0{,}8310... \approx 83{,}1\ \%$

b) Ermitteln der Gleichung der Regressionsfunktion mittels Technologieeinsatz:
$p(t) = 87{,}24 \cdot 1{,}00149^t$ *(Parameter gerundet)*

Abhängig von der verwendeten Technologie kann man geringfügig abweichende Parameter bei der Ermittlung der Regressionsfunktion erhalten.

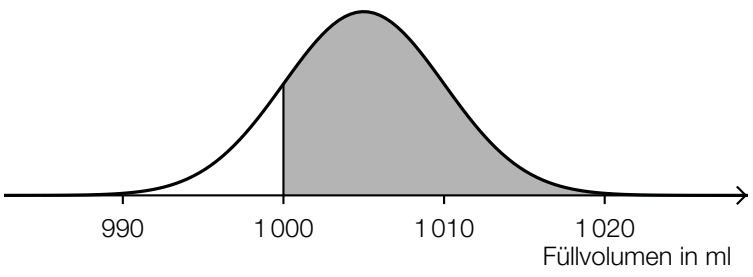
c) z ... Preis für 1 Flasche *Zweigelt*
g ... Preis für 1 Flasche *Grüner Veltliner*

I: $12 \cdot z + 6 \cdot g = 47{,}40$
II: $24 \cdot g + 6 \cdot z = 72$

Lösung des Gleichungssystems mittels Technologieeinsatz:
$z = 2{,}80$
$g = 2{,}30$

Preis für 1 Flasche *Zweigelt*: € 2,80
Preis für 1 Flasche *Grüner Veltliner*: € 2,30

d) Ermittlung des symmetrischen Intervalls mittels Technologieeinsatz:
$P(\mu - a < X < \mu + a) = 0{,}95 \Rightarrow [995{,}2;\ 1\,014{,}8]$
(Ein Ermitteln der Intervallgrenzen mithilfe der 2σ-Umgebung ist ebenfalls zulässig.)



Lösungsschlüssel

a) 1 × D1: für den richtigen Nachweis zur Aussage 1
1 × D2: für den richtigen Nachweis zur Aussage 2
Auch ein rechnerischer Nachweis ist jeweils als richtig zu werten.
1 × B: für die richtige Berechnung des prozentuellen Anteils

b) 1 × B: für das richtige Ermitteln einer Gleichung der exponentiellen Regressionsfunktion

c) 1 × A: für das richtige Erstellen eines Gleichungssystems
1 × B: für die richtige Berechnung der Preise

d) 1 × B: für das richtige Ermitteln des Intervalls
1 × A: für das richtige Veranschaulichen der Wahrscheinlichkeit

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Weinbau (1)*

Aufgabennummer: B_412

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Aus nostalgischen Gründen werden in einem kleinen Weingut Trauben der Sorte *Welschriesling* mit einer renovierten Handpresse gepresst.
Der zylinderförmige Korb, in dem die Weintrauben gepresst werden, hat dabei die folgenden Abmessungen:
Höhe $h = 80$ cm, Innenradius $r = 42$ cm.



– Überprüfen Sie nachweislich mithilfe der Volumsformel des Drehzylinders, ob die nachstehenden Aussagen jeweils richtig sind.

Aussage 1: „Wäre die Presse 1,6 m hoch (bei gleichem Durchmesser), so würde sie das doppelte Volumen fassen.“
Aussage 2: „Hätte die Presse einen Innenradius von 84 cm (bei gleicher Höhe), so würde sie das doppelte Volumen fassen.“

Der Korb ist zu 95 % mit Trauben gefüllt. Aus diesen Trauben werden 350 Liter Traubenmost gepresst.

– Berechnen Sie den prozentuellen Anteil des Traubenmosts am ursprünglichen Volumen der Trauben.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Weine der Sorten *Zweigelt* und *Grüner Veltliner* werden in Kisten zu 12 Flaschen und Kartons zu 6 Flaschen verkauft. Die Preise pro Flasche sind unabhängig von der Packungsgröße.

1 Kiste *Zweigelt* und 1 Karton *Grüner Veltliner* kosten insgesamt € 47,40.
2 Kisten *Grüner Veltliner* und 1 Karton *Zweigelt* kosten insgesamt € 72.

– Erstellen Sie ein Gleichungssystem, mit dem der Preis für eine Flasche *Zweigelt* und der Preis für eine Flasche *Grüner Veltliner* berechnet werden können.
– Berechnen Sie den Preis für eine Flasche *Zweigelt* und den Preis für eine Flasche *Grüner Veltliner*.

c) Der Wein wird mit einem manuellen Reihenfüller in Flaschen abgefüllt. Das Füllvolumen der Flaschen kann dabei als annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert μ und der Standardabweichung σ angenommen werden. Es liegen 95 % der Füllvolumina in dem um μ symmetrischen Intervall von 995 Millilitern (ml) bis 1 015 ml.

– Berechnen Sie den Erwartungswert μ des Füllvolumens der Flaschen.
– Berechnen Sie die Standardabweichung σ.

Möglicher Lösungsweg

a) Aussage 1 ist richtig, weil das Volumen direkt proportional zur Höhe ist.
Aussage 2 ist falsch, weil das Volumen nicht direkt proportional zum Radius ist.
Bei Verdoppelung des Radius erhält man das vierfache Volumen.

Auch ein rechnerischer Nachweis ist jeweils als richtig zu werten.

Volumen der Trauben im Korb in Litern: $0{,}95 \cdot 4{,}2^2 \cdot \pi \cdot 8 = 421{,}1...$
relativer Anteil des Traubenmosts am ursprünglichen Traubenvolumen:
$\frac{350}{421{,}1...} = 0{,}8310... \approx 83{,}1\ \%$

b) z ... Preis für 1 Flasche *Zweigelt*
g ... Preis für 1 Flasche *Grüner Veltliner*

I: $12 \cdot z + 6 \cdot g = 47{,}40$
II: $24 \cdot g + 6 \cdot z = 72$

Lösung des Gleichungssystems mittels Technologieeinsatz:
$z = 2{,}80$
$g = 2{,}30$

Preis für 1 Flasche *Zweigelt*: € 2,80
Preis für 1 Flasche *Grüner Veltliner*: € 2,30

c) $\mu = \frac{995 + 1\,015}{2} = 1\,005$
Der Erwartungswert beträgt 1 005 ml.

X ... Füllvolumen in ml
$P(X \leq 1\,015) = 0{,}975$
Berechnung von σ mittels Technologieeinsatz: $\sigma = 5{,}1...$
Die Standardabweichung beträgt rund 5 ml.

Lösungsschlüssel

a) 1 × D1: für den richtigen Nachweis zur Aussage 1
1 × D2: für den richtigen Nachweis zur Aussage 2
Auch ein rechnerischer Nachweis ist jeweils als richtig zu werten.
1 × B: für die richtige Berechnung des prozentuellen Anteils

b) 1 × A: für das richtige Erstellen eines Gleichungssystems
1 × B: für die richtige Berechnung der Preise

c) 1 × B1: für die richtige Berechnung des Erwartungswerts
1 × B2: für die richtige Berechnung der Standardabweichung

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Lampenproduktion (2)*

Aufgabennummer: A_258

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein Unternehmen produziert verschiedene Lampen.

a) Die Kosten für die Produktion der Pendelleuchte *Ecos* lassen sich näherungsweise durch eine Kostenfunktion K beschreiben:

$K(x) = 0{,}05 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 155$

x ... Anzahl der produzierten ME
$K(x)$ ... Kosten bei x produzierten ME in GE

Die Pendelleuchte wird zu einem fixen Preis von 9 GE/ME verkauft.

– Erstellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Gewinnfunktion.
– Ermitteln Sie die Gewinngrenzen.
– Ermitteln Sie den maximalen Gewinn.

b) Für eine quadratische Gewinnfunktion G gilt:

$G(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

x ... Anzahl der abgesetzten ME
$G(x)$ ... Gewinn bei x abgesetzten ME in GE

Es wird behauptet, dass die Extremstelle von G bei $x_0 = -\frac{b}{2 \cdot a}$ liegt.

– Zeigen Sie, dass diese Behauptung stimmt.
– Geben Sie an, welche Bedingung für den Koeffizienten a gelten muss, damit an dieser Stelle ein Maximum vorliegt.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

a) $G(x) = E(x) - K(x) = 9 \cdot x - (0{,}05 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 155) = -0{,}05 \cdot x^2 + 6 \cdot x - 155$

$G(x) = 0$:
Lösen der Gleichung mittels Technologieeinsatz: $x_1 = 37{,}639...$ ME $\approx 37{,}64$ ME,
$x_2 = 82{,}360...$ ME $\approx 82{,}36$ ME

$G'(x) = 0$:
$0 = -0{,}1 \cdot x + 6$
$x = 60$
$G(60) = 25$

Der maximale Gewinn beträgt 25 GE.

Eine Überprüfung, ob an der berechneten Stelle tatsächlich ein Maximum vorliegt, z. B. mithilfe der 2. Ableitung, ist hier nicht erforderlich.

b) $G'(x) = 2 \cdot a \cdot x + b$
$0 = 2 \cdot a \cdot x_0 + b$
$\Rightarrow x_0 = -\frac{b}{2 \cdot a}$

Es muss gelten: $a < 0$.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Erstellen der Gleichung der Gewinnfunktion
1 × B1: für das richtige Ermitteln der Gewinngrenzen
1 × B2: für das richtige Ermitteln des maximalen Gewinns (Eine Überprüfung, ob an der berechneten Stelle tatsächlich ein Maximum vorliegt, z. B. mithilfe der 2. Ableitung, ist nicht erforderlich.)

b) 1 × D: für den richtigen Nachweis
1 × A: für das richtige Angeben der Bedingung

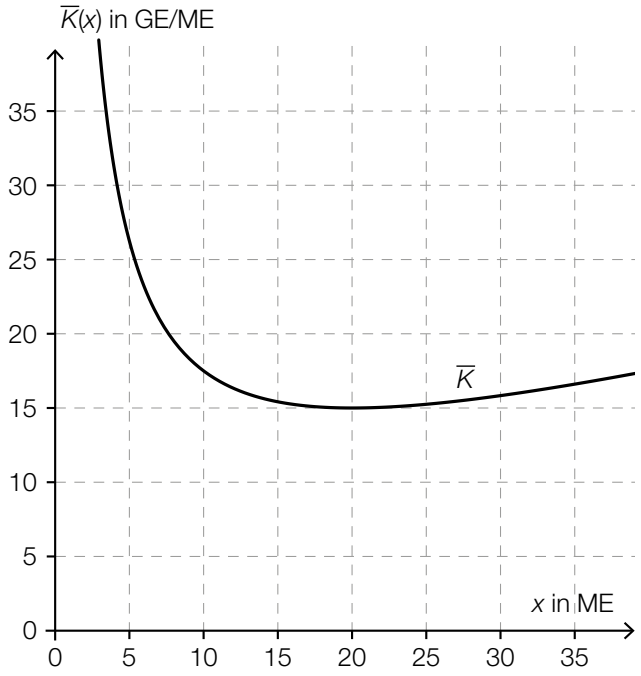
Lampenproduktion (1)*

Aufgabennummer: B_419

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein Unternehmen produziert verschiedene Lampen.

a) In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Stückkostenfunktion $\overline{K}$ der Leuchte *Credas* dargestellt.



Die zugehörige Grenzkostenfunktion K' ist gegeben durch:

$K'(x) = 0{,}5 \cdot x + 5$

x ... Anzahl der produzierten ME
$K'(x)$ ... Grenzkosten bei x produzierten ME in GE/ME

– Zeichnen Sie den Graphen der Grenzkostenfunktion K' in der obigen Abbildung ein.
– Lesen Sie das Betriebsoptimum ab.
– Erstellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Kostenfunktion K.
– Berechnen Sie die Fixkosten.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Die Kosten für die Produktion der Pendelleuchte *Ecos* lassen sich näherungsweise durch eine Kostenfunktion K beschreiben:

$K(x) = 0{,}05 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 155$

x ... Anzahl der produzierten ME
$K(x)$ ... Kosten bei x produzierten ME in GE

Die Pendelleuchte wird zu einem fixen Preis von 9 GE/ME verkauft.

– Erstellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Gewinnfunktion.
– Ermitteln Sie die Gewinngrenzen.
– Ermitteln Sie den maximalen Gewinn.

c) Für eine quadratische Gewinnfunktion G gilt:

$G(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

x ... Anzahl der abgesetzten ME
$G(x)$ ... Gewinn bei x abgesetzten ME in GE

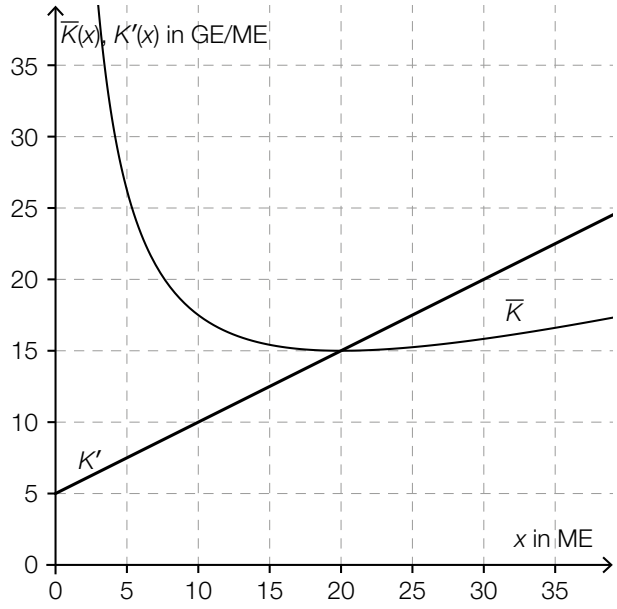
Es wird behauptet, dass die Extremstelle von G bei $x_0 = -\frac{b}{2 \cdot a}$ liegt.

– Zeigen Sie, dass diese Behauptung stimmt.
– Geben Sie an, welche Bedingung für den Koeffizienten a gelten muss, damit an dieser Stelle ein Maximum vorliegt.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



Betriebsoptimum: $x_{opt} = 20$ ME
Toleranzbereich: [18 ME; 22 ME]

$K(x) = \int (0{,}5 \cdot x + 5)\,dx =$
$= 0{,}25 \cdot x^2 + 5 \cdot x + C$
$K(20) = 20 \cdot 15 = 300$
$300 = 0{,}25 \cdot 20^2 + 5 \cdot 20 + C$
$C = 100$

Die Fixkosten betragen 100 GE.

b) $G(x) = E(x) - K(x) = 9 \cdot x - (0{,}05 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 155) = -0{,}05 \cdot x^2 + 6 \cdot x - 155$

$G(x) = 0$:
Lösen der Gleichung mittels Technologieeinsatz: $x_1 = 37{,}639...$ ME $\approx 37{,}64$ ME,
$x_2 = 82{,}360...$ ME $\approx 82{,}36$ ME

$G'(x) = 0$:
$0 = -0{,}1 \cdot x + 6$
$x = 60$
$G(60) = 25$

Der maximale Gewinn beträgt 25 GE.

Eine Überprüfung, ob an der berechneten Stelle tatsächlich ein Maximum vorliegt, z. B. mithilfe der 2. Ableitung, ist hier nicht erforderlich.

c) $G'(x) = 2 \cdot a \cdot x + b$
$0 = 2 \cdot a \cdot x_0 + b$
$\Rightarrow x_0 = -\frac{b}{2 \cdot a}$

Es muss gelten: $a < 0$.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B1: für das richtige Einzeichnen des Graphen der Grenzkostenfunktion
1 × C: für das richtige Ablesen des Betriebsoptimums im Toleranzbereich [18 ME; 22 ME]
1 × A: für das richtige Erstellen der Gleichung der Kostenfunktion (ohne Berechnung der Integrationskonstanten)
1 × B2: für die richtige Berechnung der Fixkosten

b) 1 × A: für das richtige Erstellen der Gleichung der Gewinnfunktion
1 × B1: für das richtige Ermitteln der Gewinngrenzen
1 × B2: für das richtige Ermitteln des maximalen Gewinns (Eine Überprüfung, ob an der berechneten Stelle tatsächlich ein Maximum vorliegt, z. B. mithilfe der 2. Ableitung, ist nicht erforderlich.)

c) 1 × D: für den richtigen Nachweis
1 × A: für das richtige Angeben der Bedingung

Spam (1)*

Aufgabennummer: B_418

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Als *Spam* werden unerwünscht zugestellte E-Mails bezeichnet.

a) Der nachstehenden Tabelle kann man die Entwicklung der Anzahl der weltweit täglich versendeten Spam-Mails in Milliarden entnehmen.

Beginn des Jahres ...	Anzahl der weltweit täglich versendeten Spam-Mails in Milliarden
2010	62
2011	42
2012	30

Die Anzahl der Spam-Mails kann näherungsweise durch die Funktion S beschrieben werden:

$S(t) = 50 \cdot 0{,}6^t + 12$

t ... Zeit in Jahren ab 2010, d. h., für den Beginn des Jahres 2010 gilt: $t = 0$
$S(t)$ ... Anzahl der weltweit täglich versendeten Spam-Mails zur Zeit t in Milliarden

– Zeigen Sie, dass die Funktion S die Anzahl der weltweit täglich versendeten Spam-Mails für den Beginn des Jahres 2012 richtig beschreibt.

Die Funktion S kann auch in der Form $S(t) = 50 \cdot e^{k \cdot t} + 12$ angegeben werden.

– Berechnen Sie k.
– Beschreiben Sie das Ergebnis der Berechnung $\frac{S(5) - S(3)}{S(3)} \approx -0{,}30$ im gegebenen Sachzusammenhang.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Nach Expertenschätzungen sind 80 % aller E-Mails Spam.
In 8 % aller E-Mails kommt das Wort „Konto“ vor.
7 % aller E-Mails enthalten das Wort „Konto“ und sind Spam.

S bezeichnet das Ereignis, dass ein zufällig ausgewähltes E-Mail Spam ist, $\overline{S}$ bezeichnet das Gegenereignis von S.

K bezeichnet das Ereignis, dass ein zufällig ausgewähltes E-Mail das Wort „Konto“ enthält, $\overline{K}$ bezeichnet das Gegenereignis von K.

– Vervollständigen Sie die nachstehende Vierfeldertafel so, dass sie den beschriebenen Sachverhalt wiedergibt.

	S	$\overline{S}$	Summe
K			
$\overline{K}$			
Summe			

– Lesen Sie aus der Vierfeldertafel die Wahrscheinlichkeit ab, dass ein zufällig ausgewähltes E-Mail kein Spam ist und das Wort „Konto“ enthält.

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses E wird in diesem Zusammenhang durch folgenden Ausdruck ermittelt:

$$P(E) = \frac{0{,}07}{0{,}08}$$

– Beschreiben Sie dieses Ereignis im gegebenen Sachzusammenhang.

c) Mit einem *Aktienspam* wird durch massenhaften Versand von E-Mails eine meist wertlose Aktie beworben, um deren Kurs in die Höhe zu treiben. Der Versender ist selbst Besitzer der Aktie, die er nach der Kurssteigerung gewinnbringend verkauft, worauf der Kurs wieder fällt.

Für eine so beworbene Aktie hat es in den 4 Quartalen eines Jahres folgende prozentuelle Kursänderungen gegeben:

Quartal	1	2	3	4
Kursänderung	+5 %	+20 %	+25 %	−50 %

– Berechnen Sie die mittlere prozentuelle Kursänderung pro Quartal.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Beginn des Jahres 2012: $S(2) = 50 \cdot 0{,}6^2 + 12 = 30$

$k = \ln(0{,}6) = -0{,}510... \approx -0{,}51$

Im Zeitraum vom Beginn des Jahres 2013 bis zum Beginn des Jahres 2015 ist die Anzahl der weltweit täglich versendeten Spam-Mails um rund 30 % gesunken.

b)

	S	$\overline{S}$	Summe
K	0,07	0,01	0,08
$\overline{K}$	0,73	0,19	0,92
Summe	0,80	0,20	

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewähltes E-Mail kein Spam ist und das Wort „Konto“ enthält, beträgt 1 %.

E ist das Ereignis, dass ein (zufällig ausgewähltes) E-Mail Spam ist unter der Bedingung, dass es das Wort „Konto“ enthält.

c) $\sqrt[4]{1{,}05 \cdot 1{,}2 \cdot 1{,}25 \cdot 0{,}5} - 1 = -0{,}0579... \approx -0{,}058$
Die mittlere prozentuelle Kursänderung pro Quartal beträgt rund –5,8 %.

Die angegebenen prozentuellen Kursänderungen könnten auch als Kursänderungen in Bezug auf den Beginn des 1. Quartals aufgefasst werden. Eine diesem Ansatz entsprechende Berechnung der mittleren prozentuellen Kursänderung pro Quartal ist dann als richtig zu werten.

Lösungsschlüssel

a) 1 × D: für den richtigen Nachweis
1 × B: für die richtige Berechnung von k
1 × C: für die richtige Interpretation des Ergebnisses der Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang

b) 1 × A: für das richtige Vervollständigen der Vierfeldertafel
1 × C1: für das richtige Ablesen der Wahrscheinlichkeit
1 × C2: für die richtige Beschreibung des Ereignisses im gegebenen Sachzusammenhang

c) 1 × B: für die richtige Berechnung der mittleren prozentuellen Kursänderung pro Quartal
Die angegebenen prozentuellen Kursänderungen könnten auch als Kursänderungen in Bezug auf den Beginn des 1. Quartals aufgefasst werden. Eine diesem Ansatz entsprechende Berechnung der mittleren prozentuellen Kursänderung pro Quartal ist dann als richtig zu werten.

Spam (2)*

Aufgabennummer: A_257

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Als *Spam* werden unerwünscht zugestellte E-Mails bezeichnet.

a) Der nachstehenden Tabelle kann man die Entwicklung der Anzahl der weltweit täglich versendeten Spam-Mails in Milliarden entnehmen.

Beginn des Jahres ...	Anzahl der weltweit täglich versendeten Spam-Mails in Milliarden
2010	62
2011	42
2012	30

Die Anzahl der Spam-Mails kann näherungsweise durch die Funktion S beschrieben werden:

$S(t) = 50 \cdot 0{,}6^t + 12$

t ... Zeit in Jahren ab 2010, d. h., für den Beginn des Jahres 2010 gilt: $t = 0$
$S(t)$ ... Anzahl der weltweit täglich versendeten Spam-Mails zur Zeit t in Milliarden

– Zeigen Sie, dass die Funktion S die Anzahl der weltweit täglich versendeten Spam-Mails für den Beginn des Jahres 2012 richtig beschreibt.

Die Funktion S kann auch in der Form $S(t) = 50 \cdot e^{k \cdot t} + 12$ angegeben werden.

– Berechnen Sie k.
– Beschreiben Sie das Ergebnis der Berechnung $\frac{S(5) - S(3)}{S(3)} \approx -0{,}30$ im gegebenen Sachzusammenhang.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Mit einem *Aktienspam* wird durch massenhaften Versand von E-Mails eine meist wertlose Aktie beworben, um deren Kurs in die Höhe zu treiben.

Der Versender ist selbst Besitzer der Aktie, die er nach der Kurssteigerung gewinnbringend verkauft, worauf der Kurs wieder fällt.

Ein Händler behauptet: „Wenn der Kurs der Aktie in einem Quartal um 50 % steigt und im nächsten Quartal um 50 % fällt, dann haben Sie weder Gewinn noch Verlust gemacht."

– Zeigen Sie, dass diese Aussage falsch ist.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Beginn des Jahres 2012: $S(2) = 50 \cdot 0{,}6^2 + 12 = 30$

$k = \ln(0{,}6) = -0{,}510... \approx -0{,}51$

Im Zeitraum vom Beginn des Jahres 2013 bis zum Beginn des Jahres 2015 ist die Anzahl der weltweit täglich versendeten Spam-Mails um rund 30 % gesunken.

b) Der Kurs der Aktie ändert sich insgesamt um den Faktor $1{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}75$, d. h., der Aktienkurs ist um 25 % gefallen. (Man hat also Verlust gemacht.)

Lösungsschlüssel

a) 1 × D: für den richtigen Nachweis
1 × B: für die richtige Berechnung von k
1 × C: für die richtige Interpretation des Ergebnisses der Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang

b) 1 × D: für den richtigen Nachweis

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Alles für die Torte*

Aufgabennummer: A_254

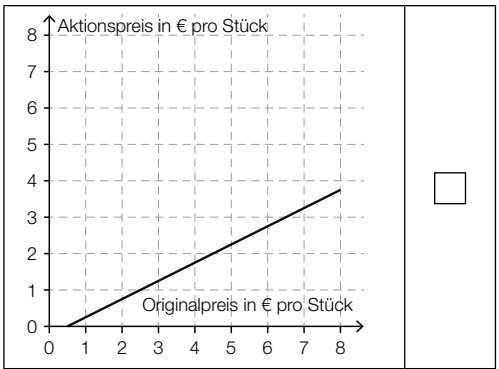
Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein Wiener Konditormeister bietet unterschiedliche Torten an.

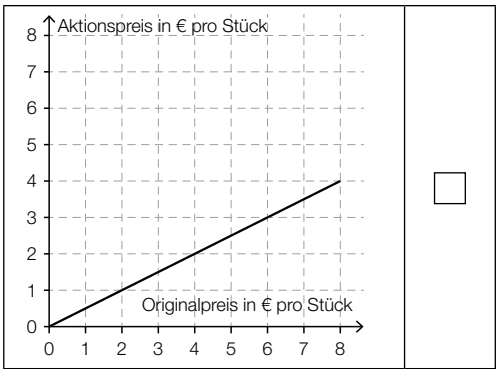
a) Jeden ersten Montag im Monat gibt es eine Aktion: Der Aktionspreis für Tortenstücke ist dann um 50 Cent pro Stück geringer als der Originalpreis.

Eine der nachstehenden Abbildungen stellt den Zusammenhang zwischen dem Originalpreis und dem Aktionspreis korrekt dar.

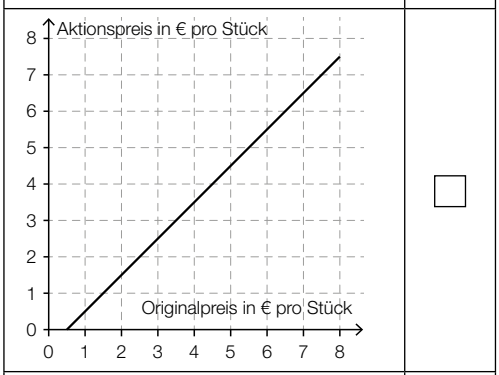
– Kreuzen Sie die entsprechende Abbildung an. *[1 aus 5]*



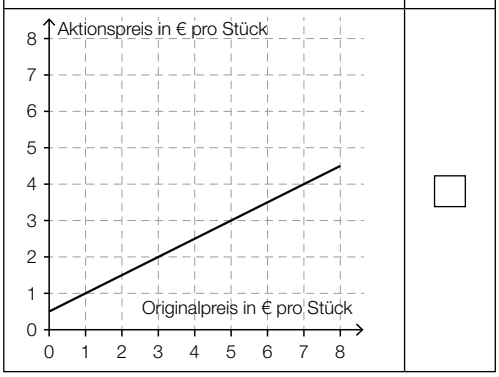
☐



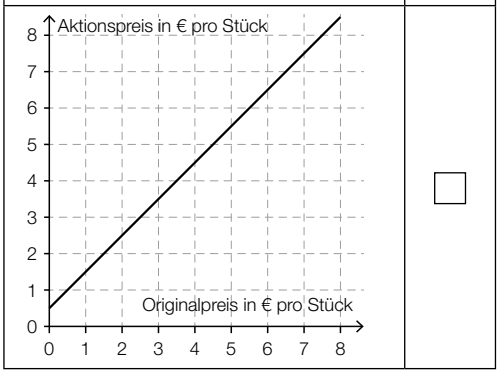
☐



☐



☐



☐

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Der Konditormeister stellt betriebswirtschaftliche Überlegungen darüber an, wie sich der Preis der Tortenstücke auf die verkaufte Stückzahl auswirkt.

Der Preis für Topfentortenstücke in Abhängigkeit von der nachgefragten Menge kann modellhaft durch die Funktion f beschrieben werden:

$f(x) = -0{,}015 \cdot x + 6{,}45$

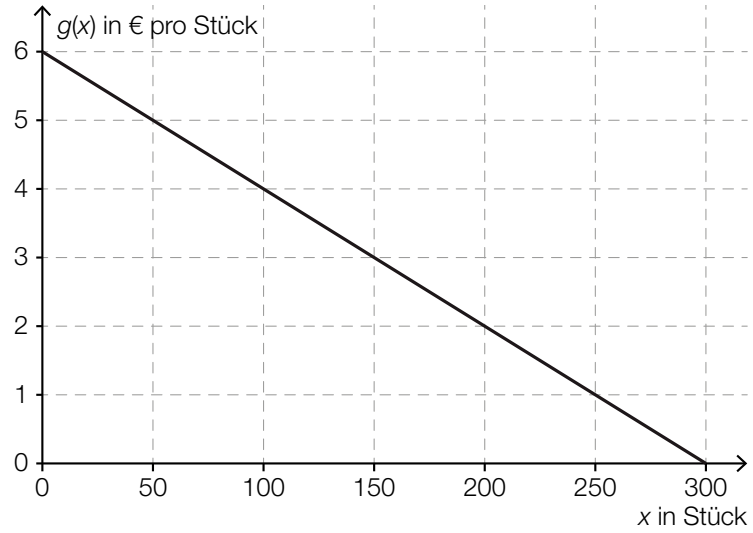
x … Anzahl der nachgefragten Topfentortenstücke
$f(x)$ ... Preis bei x nachgefragten Topfentortenstücken in € pro Stück

Der Konditormeister bietet ein Topfentortenstück um € 4,20 an.

– Berechnen Sie die entsprechende Anzahl der nachgefragten Topfentortenstücke.
– Bestimmen Sie den entsprechenden Erlös.

c) Der Zusammenhang zwischen dem Preis und der nachgefragten Menge (= Anzahl der Tortenstücke, die die Konsumentinnen und Konsumenten kaufen würden) wird durch die sogenannte *Preisfunktion der Nachfrage* festgelegt.

Der Graph der Preisfunktion der Nachfrage g für Nusstortenstücke ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.

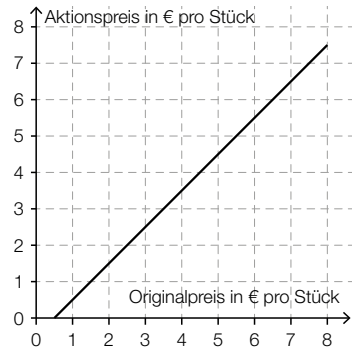


– Ermitteln Sie die Steigung der Funktion g.
– Lesen Sie denjenigen Preis ab, bei dem gemäß diesem Modell niemand mehr bereit ist, ein Nusstortenstück zu kaufen.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a)



☒

b) $4{,}20 = -0{,}015 \cdot x + 6{,}45$
$x = 150$

Gemäß dem Modell werden bei einem Preis von € 4,20 pro Topfentortenstück insgesamt 150 Topfentortenstücke nachgefragt.

$150 \cdot 4{,}20 = 630$

Der Erlös beträgt € 630.

c) Die Steigung beträgt $-\frac{1}{50}$.

Bei einem Preis von € 6 pro Stück ist gemäß dem Modell niemand mehr bereit, ein Nusstortenstück zu kaufen.

Lösungsschlüssel

a) 1 × C: für das richtige Ankreuzen

b) 1 × B1: für das richtige Berechnen der Anzahl der nachgefragten Topfentortenstücke
1 × B2: für das richtige Ermitteln des Erlöses

c) 1 × C1: für das richtige Ermitteln der Steigung
1 × C2: für das richtige Ablesen des Höchstpreises

BMB
Bundesministerium
für Bildung

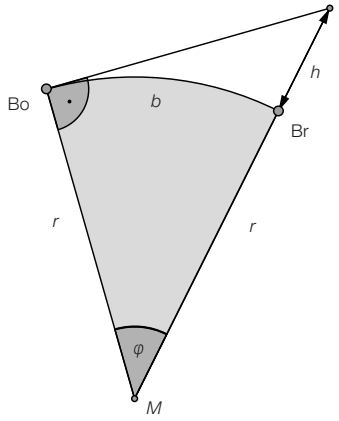
Der Bodensee*

Aufgabennummer: A_253

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Der Bodensee misst in seiner längsten Ausdehnung von Bregenz (Br) bis Bodman (Bo) 66 Kilometer (km). Aufgrund der Erdkrümmung ist von Bregenz aus das Seeufer bei Bodman nicht zu sehen (siehe nachstehende nicht maßstabgetreue Skizze):

r … Erdradius (6371 km)
b … Bogenlänge, entspricht der Entfernung zwischen Bregenz und Bodman
M … Erdmittelpunkt



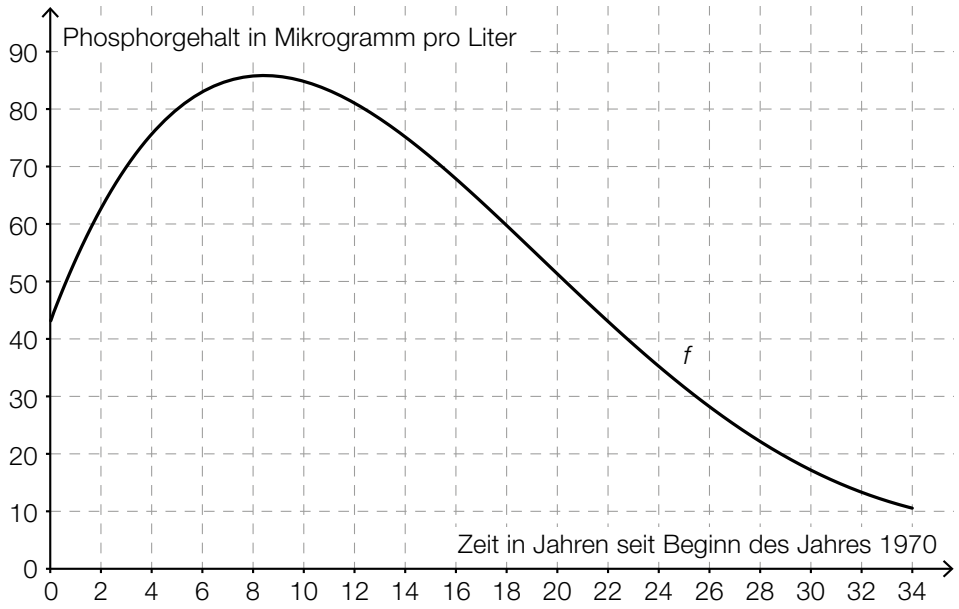
– Berechnen Sie den Winkel φ.

Um bei sehr guten Sichtverhältnissen von Bregenz aus das Seeufer bei Bodman sehen zu können, muss sich ein Beobachter in Bregenz mindestens auf einer Höhe *h* über dem Seeniveau befinden (siehe obige nicht maßstabgetreue Skizze).

– Berechnen Sie die Höhe *h*.

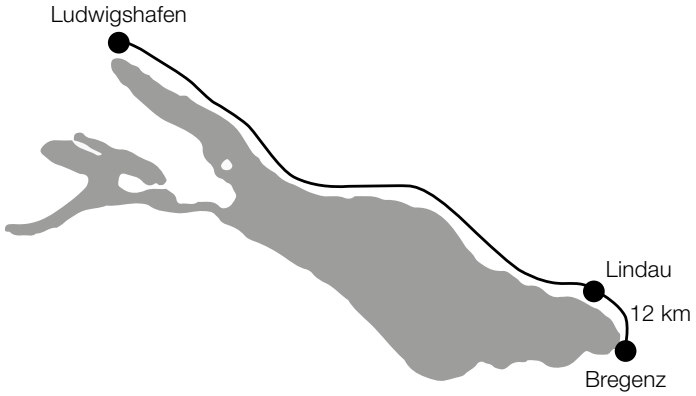
* ehemalige Klausuraufgabe

b) Der Phosphorgehalt im Bodensee kann im Zeitraum von 1970 bis 2004 näherungsweise durch eine Polynomfunktion f beschrieben werden.

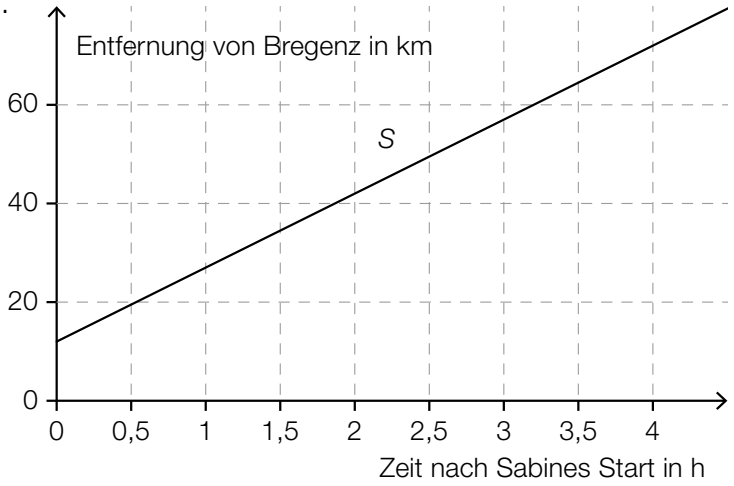


– Ermitteln Sie mithilfe des oben dargestellten Graphen von f die mittlere Änderungsrate des Phosphorgehalts im Zeitintervall [12; 18].
– Dokumentieren Sie in Worten, wie man mittels Differenzialrechnung berechnen kann, wann der Phosphorgehalt am stärksten gesunken ist.

c) Sabine und Johanna fahren mit ihren Fahrrädern auf einem Radweg in Richtung Ludwigshafen (siehe nachstehende Skizze). Sabine startet im 12 Kilometer von Bregenz entfernten Lindau und fährt mit einer konstanten Geschwindigkeit von 15 km/h. Johanna startet mit einem E-Bike eine Stunde später in Bregenz und fährt mit einer konstanten Geschwindigkeit von 30 km/h.



Sabines Entfernung von Bregenz kann näherungsweise durch die lineare Funktion S beschrieben werden.



– Zeichnen Sie im obigen Diagramm den Graphen der linearen Funktion J ein, der Johannas Entfernung von Bregenz darstellt.
– Lesen Sie ab, wie lange Johanna unterwegs ist, bis sie Sabine einholt.

Auch Otto fährt auf diesem Radweg von Bregenz in Richtung Ludwigshafen. Seine Geschwindigkeit kann durch eine Funktion v beschrieben werden.

t ... Zeit in h
$v(t)$ ... Geschwindigkeit zur Zeit t in km/h

– Beschreiben Sie unter Angabe der entsprechenden Einheit, was mit $\int_0^2 v(t)\,\mathrm{d}t$ im gegebenen Sachzusammenhang berechnet wird.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $b = \pi \cdot r \cdot \frac{\varphi}{180°}$

$\varphi = \frac{66 \cdot 180°}{6371 \cdot \pi} = 0{,}593...° \approx 0{,}59°$

Auch eine Berechnung des Winkels im Bogenmaß ist als richtig zu werten.

$\cos(\varphi) = \frac{6371}{6371 + h} \Rightarrow h = \frac{6371}{\cos(\varphi)} - 6371 = 0{,}3418... \approx 0{,}342$

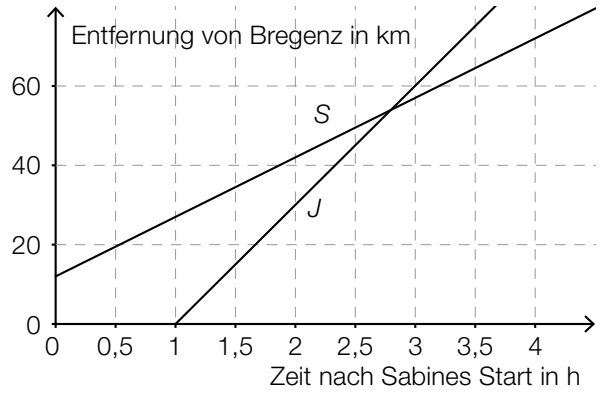
Die Höhe, auf der sich ein Beobachter befinden müsste, beträgt rund 342 Meter.

b) $\frac{60 - 81}{18 - 12} = -3{,}5$

Die mittlere Änderungsrate im gegebenen Intervall beträgt rund –3,5 µg pro Liter pro Jahr.
Toleranzintervall: [–4; –3,3]

Dazu ermittelt man die Nullstelle der 2. Ableitung der Funktion *f* im dargestellten Intervall.
In der Grafik ist klar zu erkennen, dass f *im dargestellten Intervall nur eine Wendestelle hat und dass an dieser Stelle die Abnahme am stärksten ist. Daher sind eine Überprüfung mithilfe der 1. Ableitung und eine Überprüfung der Randstellen nicht erforderlich.*

c)



Johanna ist 1,8 h unterwegs, bis sie Sabine einholt.
Toleranzintervall: [1,6; 2,1]

Es wird die Länge desjenigen Weges (Entfernung von Bregenz) in Kilometern berechnet, den Otto in den ersten 2 Stunden zurückgelegt hat.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B1: für die richtige Berechnung des Winkels φ
Auch eine Berechnung des Winkels im Bogenmaß ist als richtig zu werten.
1 × B2: für die richtige Berechnung der Höhe h

b) 1 × B: für das richtige Ermitteln der mittleren Änderungsrate im Toleranzbereich $[-4; -3{,}3]$
1 × C: für die richtige Dokumentation in Worten (In der Grafik ist klar zu erkennen, dass f im dargestellten Intervall nur eine Wendestelle hat und dass an dieser Stelle die Abnahme am stärksten ist. Daher sind eine Überprüfung mithilfe der 1. Ableitung und eine Überprüfung der Randstellen nicht erforderlich.)

c) 1 × A: für das richtige Einzeichnen des Graphen
1 × C1: für das richtige Ablesen der Fahrtdauer im Toleranzbereich [1,6; 2,1]
1 × C2: für die richtige Beschreibung im gegebenen Sachzusammenhang mit Angabe der entsprechenden Einheit

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Rohmilchproduktion*

Aufgabennummer: A_252

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Im Jahr 1995 betrug die Rohmilchproduktion der Kühe in Österreich insgesamt 2,948 Millionen Tonnen, im Jahr 2013 betrug sie 3,393 Millionen Tonnen. Die jährliche absolute Zunahme der Rohmilchproduktion wird als konstant angenommen.

– Erstellen Sie eine Gleichung der Funktion f, die die Rohmilchproduktion in Abhängigkeit von der Zeit t beschreibt. Wählen Sie $t = 0$ für das Jahr 1995.
– Berechnen Sie mithilfe der Funktion f die voraussichtliche Rohmilchproduktion im Jahr 2017.

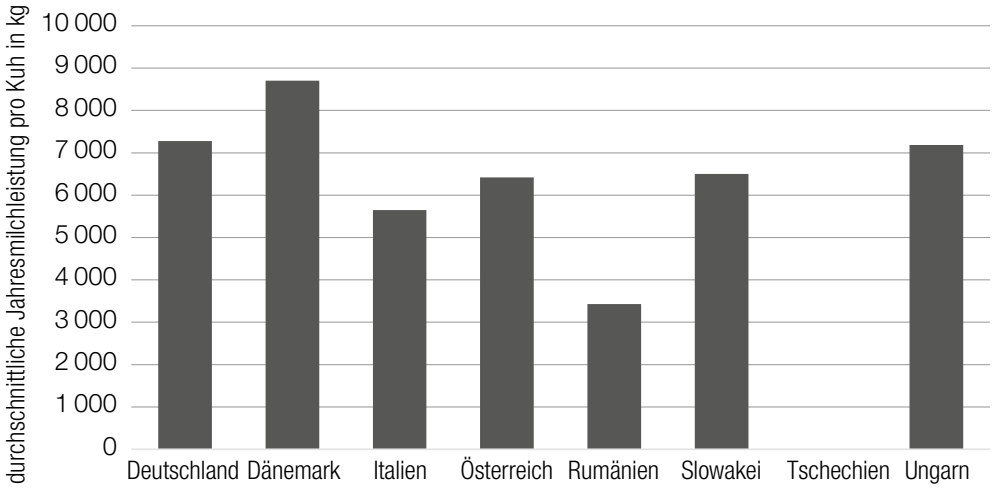
* ehemalige Klausuraufgabe

b) In der nachstehenden Tabelle ist die durchschnittliche Jahresmilchleistung pro Kuh in Kilogramm (kg) für einige ausgewählte europäische Länder im Jahr 2012 angegeben.

Land	durchschnittliche Jahresmilchleistung pro Kuh in kg
Deutschland	7 280
Dänemark	8 701
Italien	5 650
Österreich	6 418
Rumänien	3 429
Slowakei	6 501
Tschechien	7 705
Ungarn	7 184

– Ermitteln Sie, um wie viel Prozent die durchschnittliche Jahresmilchleistung pro Kuh in Dänemark höher als jene in Rumänien war.

Diese Daten sind, mit Ausnahme der durchschnittlichen Jahresmilchleistung pro Kuh in Tschechien, im nachstehenden Diagramm dargestellt.



– Zeichnen Sie im obigen Diagramm die fehlende Säule für Tschechien ein.

c) In Österreich produzierte Rohmilch enthält unmittelbar nach dem Melken durchschnittlich 20 000 Keime pro Milliliter (ml). Ein Modell geht davon aus, dass sich die Anzahl der Keime alle 25 Minuten verdoppelt.

– Argumentieren Sie, dass die unten angegebene Funktion N nicht diesem Modell entspricht.

$N(t) = 20\,000 + 800 \cdot t$

t … Zeit nach dem Melken in min
$N(t)$ … Anzahl der Keime pro ml zur Zeit t

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Aufgrund der konstanten absoluten Zunahme handelt es sich um eine lineare Funktion.

$k = \frac{3{,}393 - 2{,}948}{18} = 0{,}02472... \approx 0{,}0247$

$f(t) = 0{,}0247 \cdot t + 2{,}948$

t ... Zeit in Jahren seit 1995

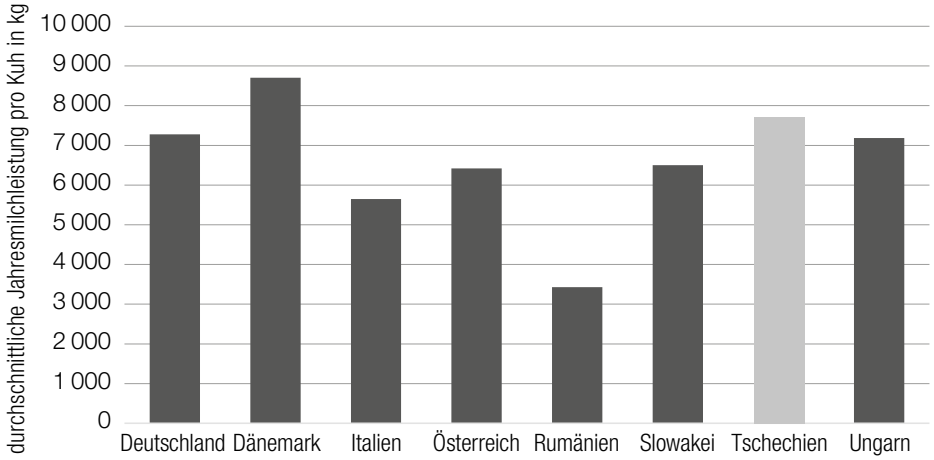
$f(t)$ ... jährliche Rohmilchproduktion zur Zeit t in Millionen Tonnen

$f(22) = 3{,}4918...$

Gemäß diesem Modell beträgt die voraussichtliche jährliche Rohmilchproduktion im Jahr 2017 in Österreich rund 3,492 Millionen Tonnen.

b) $\frac{8\,701 - 3\,429}{3\,429} = 1{,}53747... \approx 153{,}75\ \%$

In Dänemark war die durchschnittliche Jahresmilchleistung pro Kuh im Jahr 2012 um rund 153,75 % höher als in Rumänien.



Toleranzbereich: Höhe der Säule klar erkennbar größer als 7 500 kg und kleiner als 8 000 kg eingezeichnet

c) Aus der Angabe der konstanten Verdoppelungszeit geht hervor, dass es sich um exponentielles Wachstum handelt, nicht um lineares. Deshalb ist N nicht zur Beschreibung geeignet.

oder:

rechnerische Überprüfung: z. B. $N(50) = 60\,000 \neq 20\,000 \cdot 4$

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Erstellen einer Gleichung der Funktion f
1 × B: für die richtige Berechnung der jährlichen Rohmilchproduktion im Jahr 2017

b) 1 × B: für das richtige Ermitteln des Prozentsatzes
1 × A: für das richtige Einzeichnen der fehlenden Säule (Höhe der Säule klar erkennbar größer als 7 500 kg und kleiner als 8 000 kg eingezeichnet)

c) 1 × D: für die richtige Argumentation

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Buchsbäume*

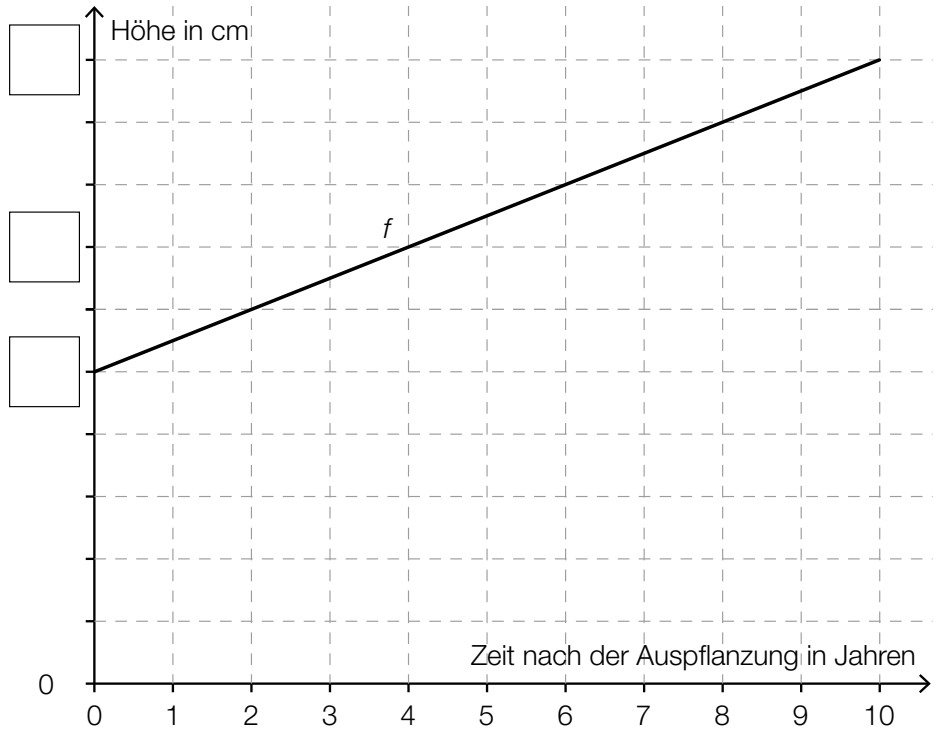
Aufgabennummer: A_186

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Buchsbäume werden in verschiedenen Sorten mit unterschiedlichem Höhenwachstum angeboten.

a) Ein bestimmter Buchsbaum der Sorte *A* wuchs in den ersten 10 Jahren nach der Auspflanzung jeweils 3 cm pro Jahr. 4 Jahre nach der Auspflanzung hatte der Buchsbaum eine Höhe von 42 cm. Die Höhe des Buchsbaums in Abhängigkeit von der Zeit nach der Auspflanzung wird durch eine lineare Funktion *f* beschrieben. Der Graph dieser Funktion ist im nachstehenden Koordinatensystem dargestellt. Dabei fehlt die Skalierung der vertikalen Achse.

– Tragen Sie die fehlenden Werte in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.

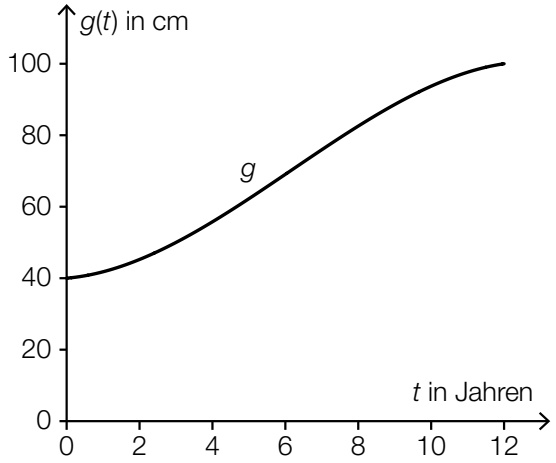


* ehemalige Klausuraufgabe

b) In den ersten 12 Jahren nach der Auspflanzung kann die Höhe eines Buchsbaums der Sorte *B* näherungsweise durch die Funktion *g* beschrieben werden:

$g(t) = -0{,}053 \cdot t^3 + 0{,}98 \cdot t^2 + 0{,}872 \cdot t + 40$ mit $0 \le t \le 12$

t ... Zeit nach der Auspflanzung des Buchsbaums in Jahren
g(*t*) ... Höhe des Buchsbaums zur Zeit *t* in cm

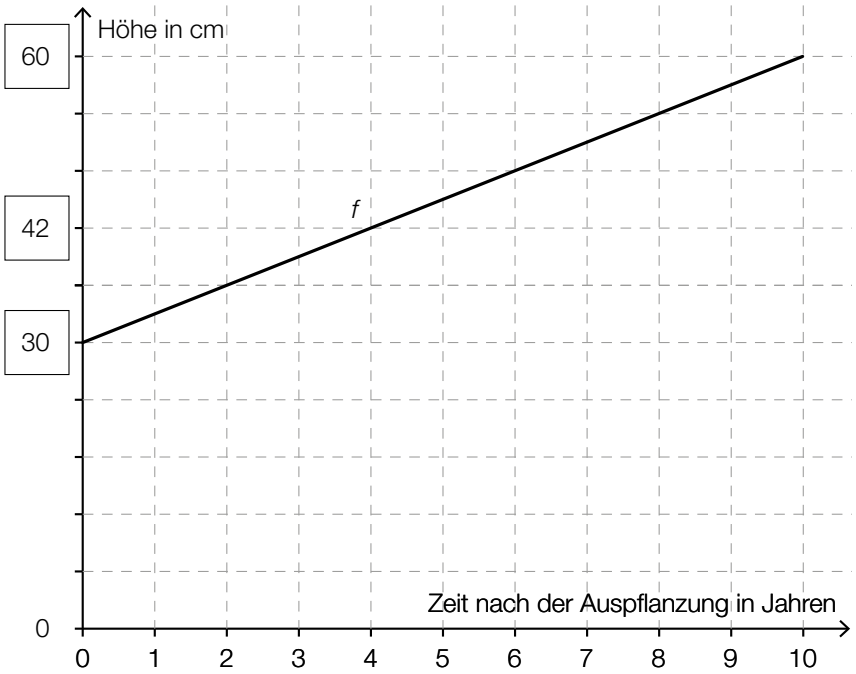


– Berechnen Sie den Zeitpunkt des stärksten Höhenwachstums.
– Beschreiben Sie, was mit folgendem Ausdruck im gegebenen Sachzusammenhang berechnet wird:
$g(5) - g(0)$

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



b) Zeitpunkt des stärksten Höhenwachstums: $g''(t) = 0$
Berechnung mittels Technologieeinsatz: $t = 6{,}16... \approx 6{,}2$

Etwa 6,2 Jahre nach der Auspflanzung ist das Höhenwachstum am größten.

Mit dem Ausdruck $g(5) - g(0)$ wird der (absolute) Höhenzuwachs in cm in den ersten 5 Jahren nach der Auspflanzung berechnet.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Eintragen der fehlenden Werte

b) 1 × B: für die richtige Berechnung des Zeitpunkts des stärksten Höhenwachstums
(In der Grafik ist klar zu erkennen, dass an der Wendestelle das stärkste Höhenwachstum vorliegt. Eine rechnerische Überprüfung des Steigungsverhaltens der Funktion an der berechneten Stelle sowie eine Überprüfung der Randstellen sind daher nicht erforderlich.)
1 × C: für die richtige Beschreibung des Ausdrucks im gegebenen Sachzusammenhang

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Fußballspielen im Park*

Aufgabennummer: A_250

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Roland und Julia spielen im Park Fußball. Roland legt den Ball auf die horizontale Wiese, nimmt Anlauf und schießt.

Die Flugbahn des Balls kann näherungsweise durch den Graphen einer Polynomfunktion 3. Grades h beschrieben werden. Dabei wird der Ball als punktförmig angenommen.

$h(x) = -0{,}003 \cdot x^3 + 0{,}057 \cdot x^2$ mit $x \geq 0$

x … horizontale Entfernung des Balls von der Abschussstelle in Metern (m)
$h(x)$ … Höhe des Balls über dem Boden an der Stelle x in m

a) – Ermitteln Sie den für diesen Sachzusammenhang größtmöglichen sinnvollen Definitionsbereich für die Funktion h.
– Berechnen Sie den höchsten Punkt der Flugbahn.

b) Julia fängt den Ball aus einer Höhe von 1,80 m.

– Ermitteln Sie die beiden horizontalen Entfernungen von der Abschussstelle, an denen Julia sich dabei befinden kann.

c) Roland überlegt, ob er bei diesem Schuss den Ball über ein 2,8 m hohes Klettergerüst, das in direkter Schussrichtung 10 m von der Abschussstelle entfernt steht, schießen könnte.

– Überprüfen Sie nachweislich, ob der Ball bei diesem Schuss tatsächlich über das Klettergerüst fliegen kann.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

a) $0 = -0{,}003 \cdot x^3 + 0{,}057 \cdot x^2$
$0 = x^2 \cdot (-0{,}003 \cdot x + 0{,}057) \Rightarrow x_1 = 0$
$-0{,}003 \cdot x + 0{,}057 = 0 \Rightarrow x_2 = 19$

$D = [0; 19]$

$h'(x) = 0$
$x \cdot (-0{,}009 \cdot x + 0{,}114) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$
$-0{,}009 \cdot x + 0{,}114 = 0 \Rightarrow x_2 = 12{,}66... \approx 12{,}7$
$h(x_2) = 3{,}04\ldots \approx 3{,}0$

In einer horizontalen Entfernung von rund 12,7 m zur Abschussstelle erreicht der Ball seine größte Höhe von rund 3,0 m.
Der Nachweis, dass es sich bei der Extremstelle um eine Maximumstelle handelt, und eine Überprüfung der Ränder des Definitionsbereichs sind nicht erforderlich.

b) $1{,}80 = -0{,}003 \cdot x^3 + 0{,}057 \cdot x^2$

Lösung mittels Technologieeinsatz:
($x_1 = -5$)
$x_2 = 7{,}10\ldots \approx 7{,}1$
$x_3 = 16{,}89\ldots \approx 16{,}9$

Julia kann sich in einer Entfernung von etwa 7,1 m oder von etwa 16,9 m von der Abschussstelle befinden.

c) $h(10) = 2{,}7$

Da $h(10)$ kleiner als 2,8 m ist, kann der Ball nicht über das Klettergerüst fliegen.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Ermitteln des Definitionsbereichs (Die untere Grenze des Definitionsbereichs $x_1 = 0$ muss nicht explizit angegeben sein.)
1 × B: für die richtige Berechnung des höchsten Punktes (beide Koordinaten)
(Der Nachweis, dass es sich bei der Extremstelle um eine Maximumstelle handelt, und eine Überprüfung der Ränder des Definitionsbereichs sind nicht erforderlich.)

b) 1 × B: für das richtige Ermitteln der beiden horizontalen Entfernungen von der Abschussstelle

c) 1 × D: für die richtige nachweisliche Überprüfung

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Vergnügungspark (2)*

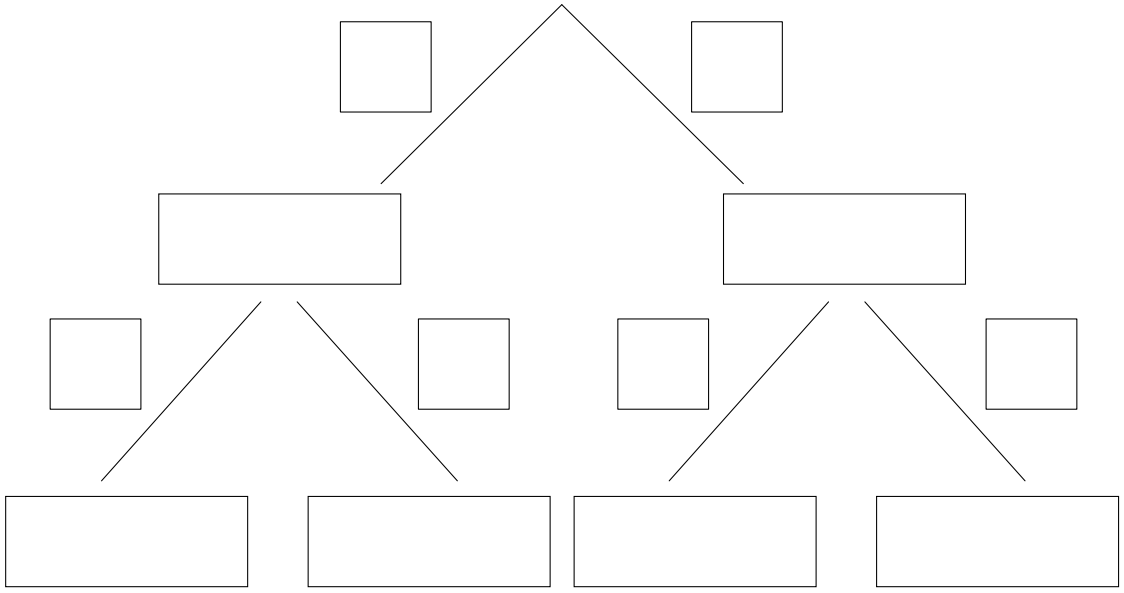
Aufgabennummer: A_249

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Bei einer Besucherbefragung in einem Vergnügungspark wurden folgende Daten erhoben:

60 % der Besucher sind aus dem Inland. Die Besucher aus dem Inland reisen zu 45 % mit dem PKW an, die restlichen Besucher aus dem Inland mit öffentlichen Verkehrsmitteln. 90 % der Besucher aus dem Ausland reisen mit öffentlichen Verkehrsmitteln an, die restlichen Besucher aus dem Ausland mit dem PKW.

– Vervollständigen Sie das nachstehende Baumdiagramm so, dass es den beschriebenen Sachverhalt wiedergibt.

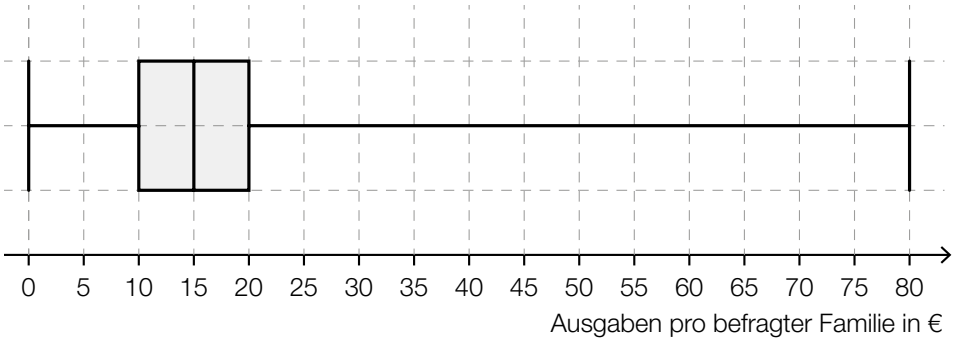


* ehemalige Klausuraufgabe

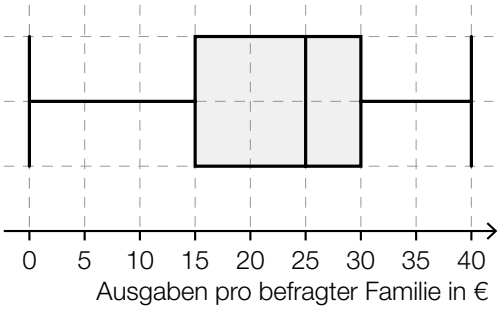
b) In einem Vergnügungspark werden Familien nach ihren Ausgaben befragt.

Die beiden nachstehenden Boxplots veranschaulichen die Ausgaben der befragten Familien für die Attraktionen und jene für Essen und Getränke.

Attraktionen:



Essen und Getränke:



Andreas behauptet, aus den beiden Boxplots Folgendes ablesen zu können: „Es gibt mit Sicherheit mindestens eine Familie, die insgesamt 120 Euro für Attraktionen sowie Essen und Getränke ausgibt."

– Argumentieren Sie, dass die Behauptung von Andreas falsch ist.

c) Aus Erfahrung weiß man, dass eine bestimmte Attraktion des Vergnügungsparks von jeder Person mit der Wahrscheinlichkeit p genutzt wird.

Es werden 10 Personen zufällig ausgewählt.

– Kreuzen Sie dasjenige Ereignis E an, für dessen Wahrscheinlichkeit gilt:

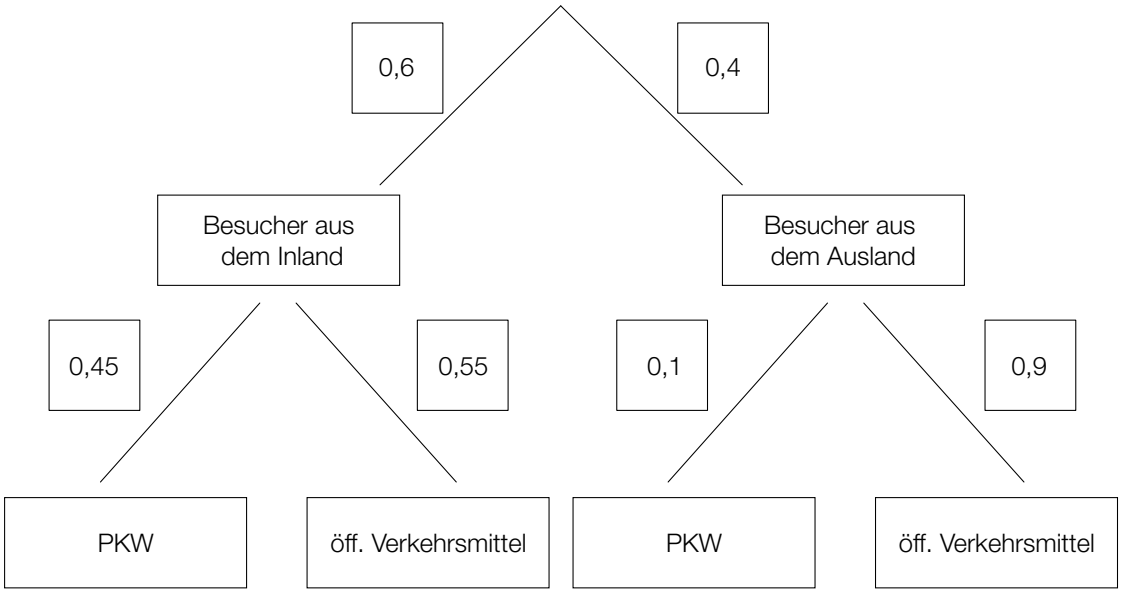
$$P(E) = \binom{10}{3} \cdot p^3 \cdot (1 - p)^7$$ *[1 aus 5]*

Genau 3 der 10 Personen nutzen die Attraktion.	☐
Maximal 7 der 10 Personen nutzen die Attraktion.	☐
Mindestens 7 der 10 Personen nutzen die Attraktion.	☐
Genau 7 der 10 Personen nutzen die Attraktion.	☐
Höchstens 3 der 10 Personen nutzen die Attraktion.	☐

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



b) Die Behauptung von Andreas ist falsch, weil nicht sicher ist, dass dieselbe Familie die maximalen Beträge von 80 Euro für Attraktionen und von 40 Euro für Essen und Getränke ausgibt.

c)

Genau 3 der 10 Personen nutzen die Attraktion.	☒

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Vervollständigen des Baumdiagramms

b) 1 × D: für die richtige Argumentation

c) 1 × C: für das richtige Ankreuzen

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Silvesterlauf*

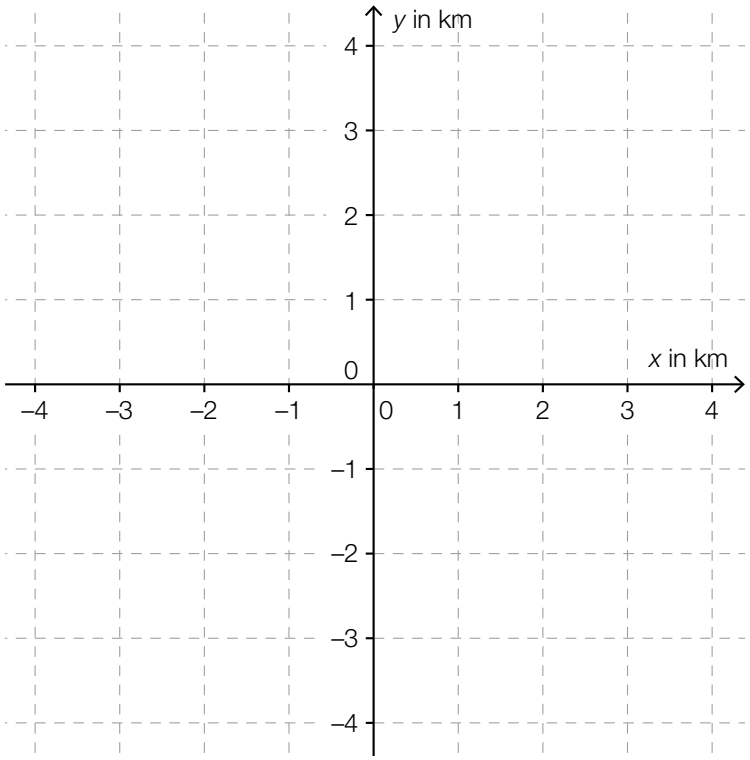
Aufgabennummer: B_403

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Die ebene Laufstrecke eines Silvesterlaufs startet bei A und führt in geradlinigen Streckenabschnitten über die Kontrollpunkte B, C und D zum Ziel E.
Die Koordinaten dieser Punkte (in km) in einem rechtwinkeligen Koordinatensystem sind angegeben:

Ausgangspunkt $A = (-1|1)$
1. Kontrollpunkt $B = (1|3)$
2. Kontrollpunkt $C = (2|-2)$
3. Kontrollpunkt $D = (1|-2)$
Zielpunkt $E = (1|1)$

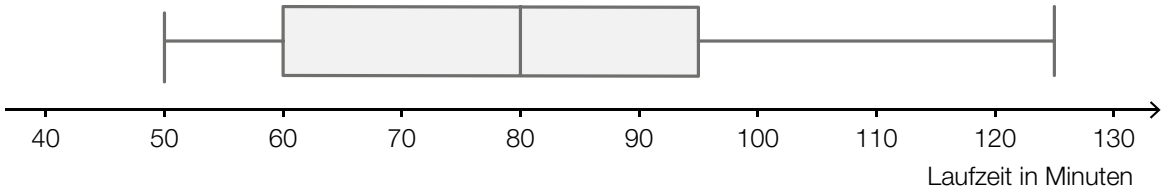
– Veranschaulichen Sie diese Laufstrecke im nachstehenden Koordinatensystem.



– Erklären Sie, warum für das folgende Skalarprodukt gilt: $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{DE} = 0$
– Ermitteln Sie die Koordinaten des Vektors $\overrightarrow{BC}$.
– Berechnen Sie die Streckenlänge $\overline{BC}$.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Für die Gesamtwertung wurden die Zeiten aller 130 Läufer/innen dokumentiert und im nachstehenden Boxplot zusammengefasst.



– Lesen Sie den Median der Laufzeiten ab.

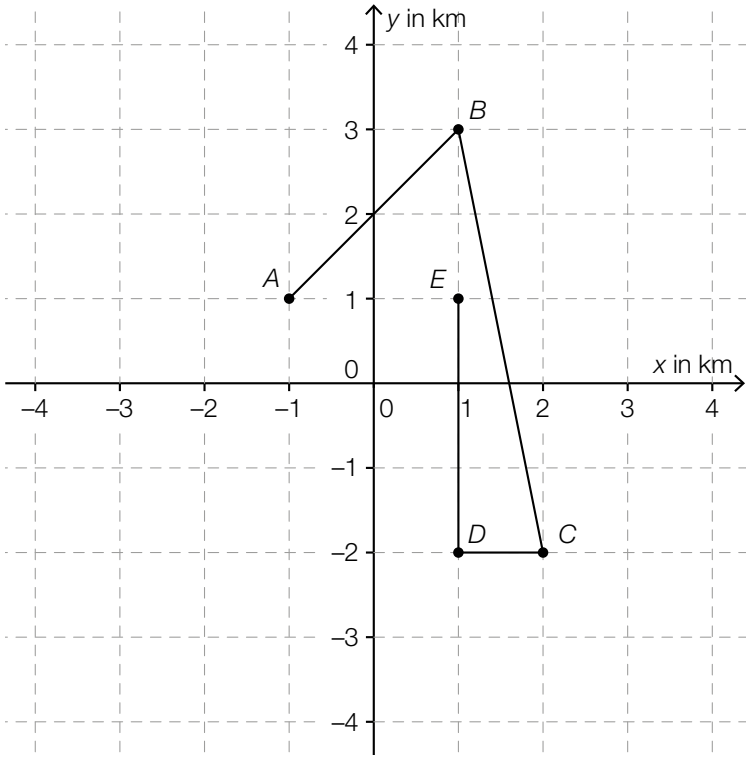
Elisabeth erreichte bei diesem Silvesterlauf in der Gesamtwertung den 20. Platz.

– Lesen Sie aus dem obigen Boxplot das kleinste Intervall ab, in dem Elisabeths Laufzeit mit Sicherheit liegen muss.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



Das Skalarprodukt $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{DE} = 0$, weil die beiden Vektoren normal aufeinander stehen.

$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$

$\overline{BC} = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{26} = 5{,}09...$

Die Streckenlänge $\overline{BC}$ beträgt rund 5,1 km.

b) Median der Laufzeiten: 80 min

Elisabeth gehört zum Viertel der schnellsten Läufer/innen, ihre Laufzeit liegt also im Intervall von 50 min bis 60 min.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Veranschaulichen der Laufstrecke im gegebenen Koordinatensystem
1 × D: für die richtige Erklärung
1 × B1: für das richtige Ermitteln der Koordinaten des Vektors $\overrightarrow{BC}$
1 × B2: für die richtige Berechnung der Streckenlänge $\overline{BC}$

b) 1 × C1: für das richtige Ablesen des Medians der Laufzeiten
1 × C2: für das richtige Ablesen des kleinsten Intervalls, in dem Elisabeths Laufzeit mit Sicherheit liegen muss

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Druckmaschine*

Aufgabennummer: B_402

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Die Geschäftsführung einer Druckerei überlegt die Anschaffung einer neuen Druckmaschine.

a) Eine Druckmaschine *A* mit Anschaffungskosten in Höhe von € 1.200.000 hat eine Nutzungsdauer von 4 Jahren. Mit dieser Maschine können jährlich 20 000 Bücher hergestellt werden, die zu einem Stückpreis von € 18 verkauft werden. Die Herstellungskosten betragen € 4 pro Buch. Jährlich fallen Kosten für Wartungsarbeiten in Höhe von € 8.000 an.

– Übertragen Sie für den Zeitraum der Nutzungsdauer die Einnahmen, Ausgaben und Rückflüsse in die nachstehende Tabelle.

Jahr	Einnahmen in €	Ausgaben in €	Rückflüsse in €
0			
1			
2			
3			
4			

– Erklären Sie anhand dieser Tabelle, warum diese Investition sogar bei einem kalkulatorischen Zinssatz von 0 % nicht vorteilhaft ist.

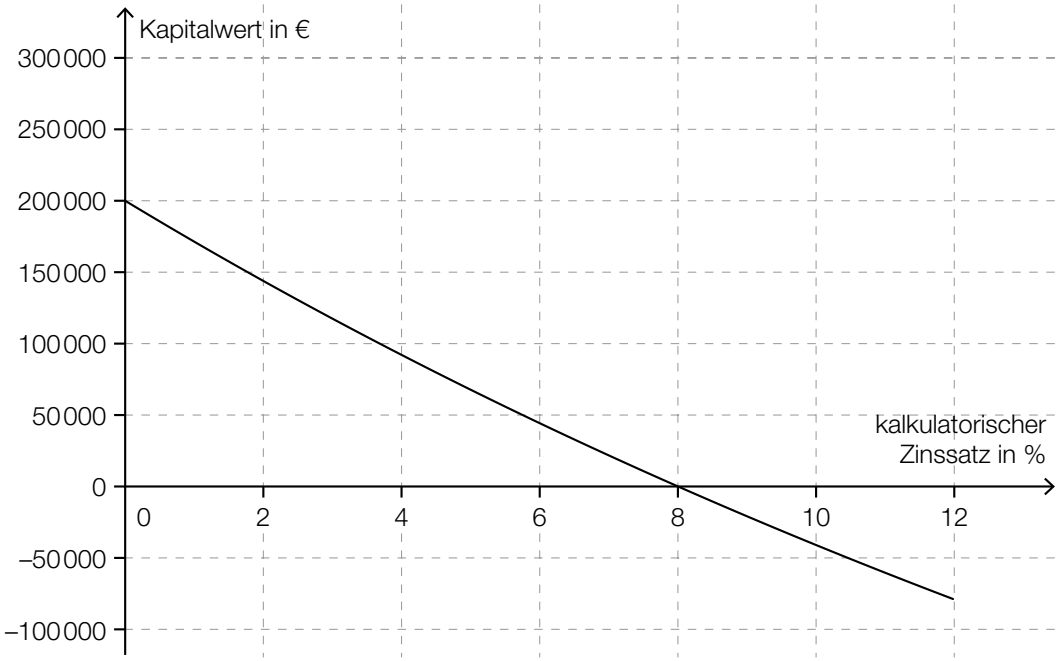
b) Für die Anschaffung einer Druckmaschine *B* wurde der Kapitalwert C_0 dieser Investition durch folgende Rechnung ermittelt:

$$C_0 = -900\,000 + \frac{260\,000}{1{,}075} + \frac{260\,000}{1{,}075^2} + \frac{260\,000}{1{,}075^3} + \frac{350\,000}{1{,}075^4} \approx 38\,217$$

– Lesen Sie aus der obigen Rechnung den kalkulatorischen Zinssatz ab.
– Stellen Sie den Zahlungsstrom dieser Investition auf einer Zeitachse dar.
– Interpretieren Sie den Kapitalwert im Hinblick auf die Vorteilhaftigkeit der Investition.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Für die Beurteilung der Vorteilhaftigkeit der Anschaffung einer Druckmaschine *C* ist der Kapitalwert dieser Investition in Abhängigkeit vom kalkulatorischen Zinssatz in der nachstehenden Abbildung dargestellt (Kapitalwertkurve).



Ein Mitarbeiter behauptet: „Wenn die Anschaffungskosten um € 50.000 niedriger wären, hätten wir einen internen Zinssatz von über 10 %."

– Skizzieren Sie in der oben stehenden Abbildung diejenige Kapitalwertkurve, für die die Anschaffungskosten um € 50.000 niedriger sind.
– Markieren Sie in der von Ihnen skizzierten Kapitalwertkurve den internen Zinssatz.

d) Für eine Druckmaschine *D* mit Anschaffungskosten in Höhe von € 800.000 und einer Nutzungsdauer von 4 Jahren wurden folgende Rückflüsse ermittelt: je € 220.000 im ersten, zweiten und dritten Jahr, € 280.000 im vierten Jahr. Die Druckerei kann die Rückflüsse zu einem Zinssatz von 3,5 % p. a. wiederveranlagen.

– Berechnen Sie den modifizierten internen Zinssatz dieser Investition.
– Interpretieren Sie den modifizierten internen Zinssatz im Hinblick auf die Vorteilhaftigkeit dieser Investition.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

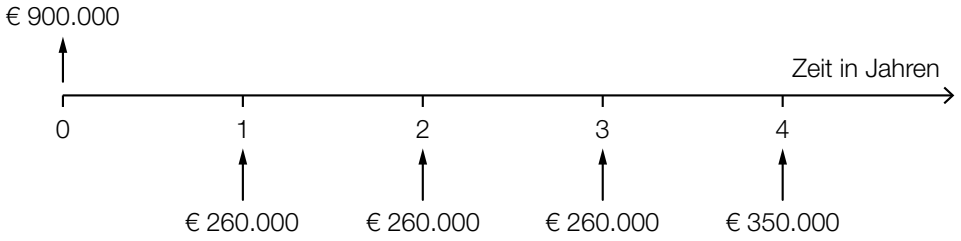
Möglicher Lösungsweg

a)

Jahr	Einnahmen in €	Ausgaben in €	Rückflüsse in €
0		1 200 000	–1 200 000
1	360 000	88 000	272 000
2	360 000	88 000	272 000
3	360 000	88 000	272 000
4	360 000	88 000	272 000

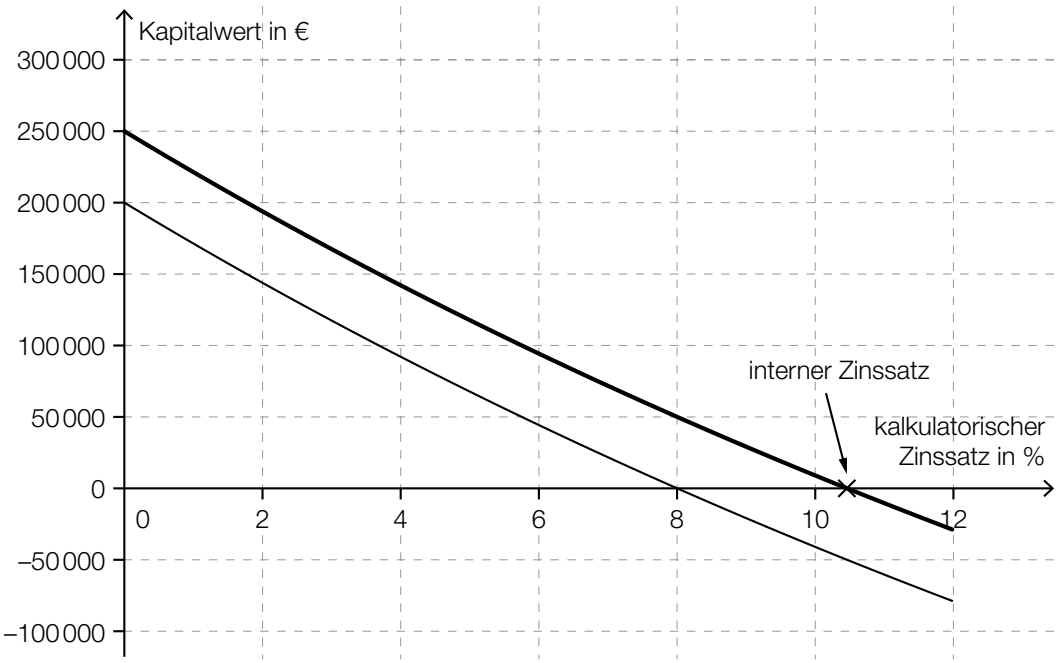
Da die Summe der positiven Rückflüsse (€ 1.088.000) kleiner als die Anschaffungskosten ist, ist diese Investition sicherlich nicht vorteilhaft.

b) kalkulatorischer Zinssatz: 7,5 %



Der Kapitalwert C_0 ist positiv, daher ist diese Investition vorteilhaft.

c)



d) Endwert E der wiederveranlagten Rückflüsse:
$E = 220000 \cdot 1{,}035^3 + 220000 \cdot 1{,}035^2 + 220000 \cdot 1{,}035 + 280000 = 987287{,}4\ldots$

modifizierter interner Zinssatz i_{mod}:
$i_{mod} = \sqrt[4]{\frac{987287{,}4\ldots}{800000}} - 1 = 0{,}0539\ldots \approx 5{,}4\ \%$

Da der modifizierte interne Zinssatz höher als der Wiederveranlagungszinssatz ist, ist diese Investition vorteilhaft.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Übertragen der Einnahmen, Ausgaben und Rückflüsse in die vorgegebene Tabelle
1 × D: für die richtige Erklärung zur Vorteilhaftigkeit der Investition

b) 1 × C1: für das richtige Ablesen des kalkulatorischen Zinssatzes
1 × A: für das richtige Darstellen des Zahlungsstroms auf einer Zeitachse
1 × C2: für die richtige Interpretation des Kapitalwerts im Hinblick auf die Vorteilhaftigkeit der Investition

c) 1 × A: für das richtige Skizzieren der Kapitalwertkurve
1 × C: für das richtige Markieren des internen Zinssatzes in der neu skizzierten Kapitalwertkurve

d) 1 × B: für die richtige Berechnung des modifizierten internen Zinssatzes
1 × C: für die richtige Interpretation des modifizierten internen Zinssatzes im Hinblick auf die Vorteilhaftigkeit der Investition

Kunst und Kaffee*

Aufgabennummer: B_401

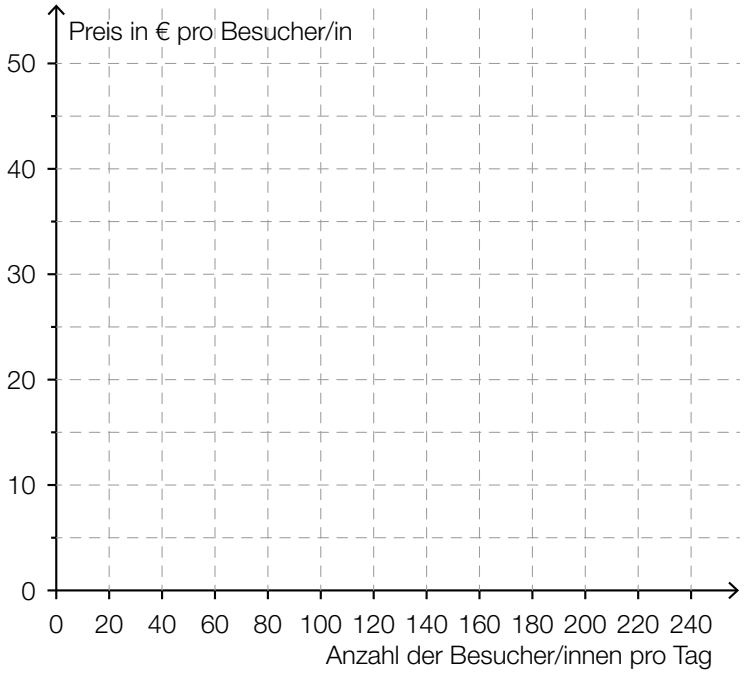
Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Das Café-Restaurant in einer Kunsthalle bietet für die neue Ausstellung als zusätzliche Attraktion die Veranstaltung *Kunst und Kaffee* an. Nach einem gemütlichen Frühstück im Café-Restaurant kann man die Ausstellung besuchen und bezahlt für Frühstück und Ausstellungsbesuch nur einen Gesamtpreis.
Aus diesem Grund wird durch eine Befragung der Besucher/innen festgestellt, welcher Preis dafür verlangt werden kann.
Das Ergebnis dieser Befragung führt zu folgender linearer Preisfunktion der Nachfrage p:

$p(x) = -0{,}25 \cdot x + 45$

x ... Anzahl der Besucher/innen pro Tag
$p(x)$ ... Preis bei x Besucher/innen in € pro Besucher/in

a) – Zeichnen Sie den Graphen dieser linearen Preisfunktion der Nachfrage in der nachstehenden Abbildung ein.



– Markieren Sie in der obigen Abbildung die Sättigungsmenge.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) – Ermitteln Sie, um welchen Betrag der Preis reduziert werden muss, wenn man 10 Besucher/innen pro Tag mehr für dieses Angebot gewinnen möchte.

c) – Stellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Erlösfunktion E auf.
– Interpretieren Sie die Bedeutung der beiden Koordinaten des Scheitelpunkts der Erlösfunktion im gegebenen Sachzusammenhang.

Die täglichen Kosten, die dem Café-Restaurant für dieses Angebot entstehen, lassen sich durch die folgende Funktion K beschreiben:

$K(x) = 0{,}05 \cdot x^2 + 12 \cdot x + 500$

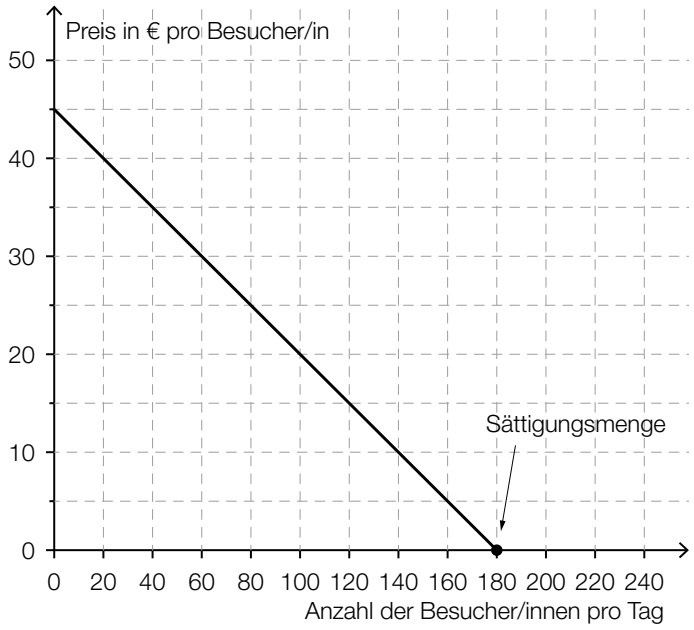
x ... Anzahl der Besucher/innen pro Tag
$K(x)$ ... tägliche Kosten bei x Besucherinnen und Besuchern in €

– Berechnen Sie die Höhe des maximalen Gewinns.
– Erklären Sie, warum die Stelle, an der der Gewinn maximal ist, nicht von den Fixkosten abhängt.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



b) Gemäß dem Modell steigt die Besucheranzahl um 1 Person pro Tag, wenn der Preis um € 0,25 pro Person reduziert wird (Steigung der Preisfunktion der Nachfrage). Daher muss der Preis um € 2,50 pro Person gesenkt werden, wenn man 10 Besucher/innen mehr pro Tag gewinnen möchte.

c) $E(x) = p(x) \cdot x = -0{,}25 \cdot x^2 + 45 \cdot x$

x … Anzahl der Besucher/innen pro Tag
$E(x)$ … Erlös bei x Besucherinnen und Besuchern in €

Die erste Koordinate des Scheitelpunkts gibt an, bei welcher Anzahl an Besucherinnen und Besuchern pro Tag der Erlös maximal ist, die zweite Koordinate gibt an, wie hoch dieser maximale Erlös ist.

$G(x) = E(x) - K(x) = -0{,}3 \cdot x^2 + 33 \cdot x - 500$
Lösen der Gleichung $G'(x) = 0$:
$-0{,}6 \cdot x + 33 = 0 \Rightarrow x = 55$
$G(55) = 407{,}50$

Der maximale Gewinn beträgt € 407,50 pro Tag.

Eine Änderung der Fixkosten entspricht der Addition bzw. Subtraktion einer konstanten Funktion zur Gewinnfunktion. Sie bewirkt eine vertikale Verschiebung des Graphen, wodurch sich die Maximumstelle nicht verändert.

oder:

Die Stelle des maximalen Gewinns ist die Nullstelle der 1. Ableitung der Gewinnfunktion. Die Fixkosten sind in der Gewinnfunktion ein konstanter Summand, der beim Bilden der 1. Ableitung wegfällt. Folglich haben sie auch keinen Einfluss auf die Stelle des maximalen Gewinns.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für das richtige Einzeichnen des Funktionsgraphen
1 × C: für das richtige Markieren der Sättigungsmenge

b) 1 × C: für das richtige Ermitteln der Preisreduktion

c) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung
1 × C: für die richtige Interpretation der beiden Koordinaten des Scheitelpunkts im gegebenen Sachzusammenhang
1 × B: für die richtige Berechnung des maximalen Gewinns
1 × D: für die richtige Erklärung

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Fruchtsäfte*

Aufgabennummer: B_400

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Ein Unternehmen erzeugt Fruchtsäfte (Apfel-, Birnen-, Trauben- und Orangensaft).

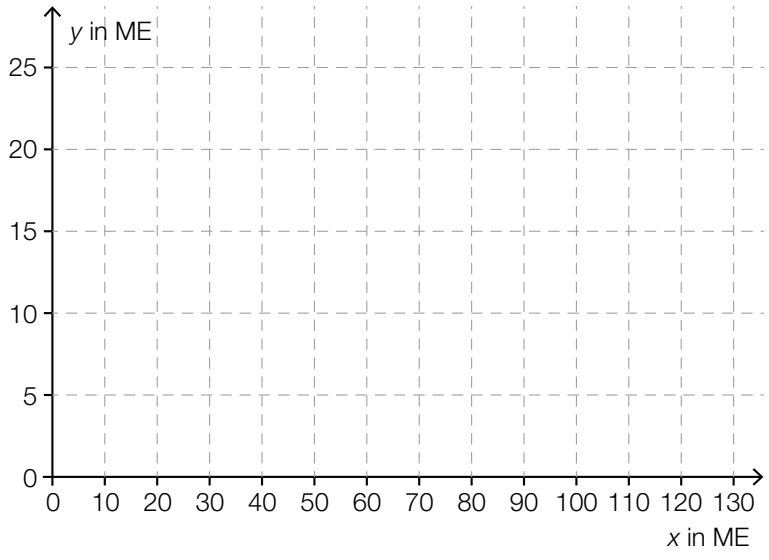
a) Die beiden Hauptprodukte des Unternehmens sind Apfelsaft und Birnensaft.
Aus Kapazitätsgründen können insgesamt pro Tag höchstens 200 Mengeneinheiten (ME) von diesen beiden Säften produziert werden.
Das Unternehmen kann pro Tag maximal 40 ME Birnensaft produzieren.

– Erstellen Sie die beiden Ungleichungen, die diese Produktionseinschränkungen für x ME Apfelsaft und y ME Birnensaft beschreiben.

b) Das folgende Ungleichungssystem beschreibt die Produktionseinschränkungen für x ME Apfelsaft und y ME Traubensaft:

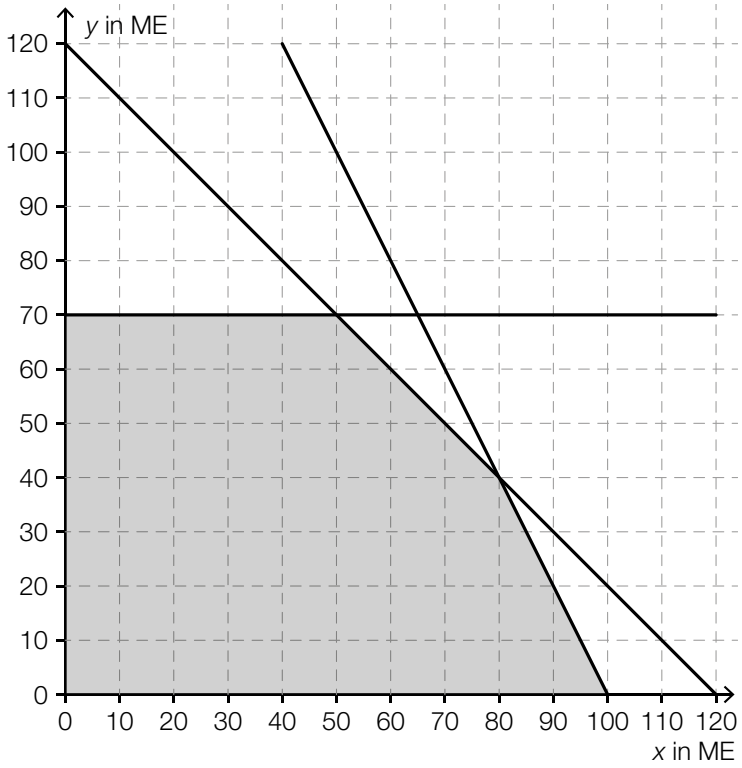
$x + 10 \cdot y \leq 200$
$x + 5 \cdot y \leq 125$
$x \leq 100$
$x \geq 0$
$y \geq 0$

– Zeichnen Sie den Lösungsbereich dieses Ungleichungssystems in der nachstehenden Abbildung ein.



* ehemalige Klausuraufgabe

c) In der nachstehenden Abbildung ist der Lösungsbereich der Produktionseinschränkungen für die tägliche Produktion von *x* ME Apfelsaft und *y* ME Orangensaft dargestellt.



Der Gewinn beim Verkauf jeder Flasche Apfelsaft beträgt € 0,12. Der Gewinn beim Verkauf jeder Flasche Orangensaft beträgt € 0,20. Dabei gilt: 1 ME = 1 000 Flaschen.

– Stellen Sie eine Gleichung der Zielfunktion zur Beschreibung des Gewinns auf.
– Zeichnen Sie diejenige Gerade, für die der optimale Wert der Zielfunktion angenommen wird, in der obigen Abbildung ein.
– Ermitteln Sie den maximalen Gewinn pro Tag in €.

Aufgrund einer weiteren Produktionseinschränkung können pro Tag nur maximal 60 ME Apfelsaft hergestellt werden.

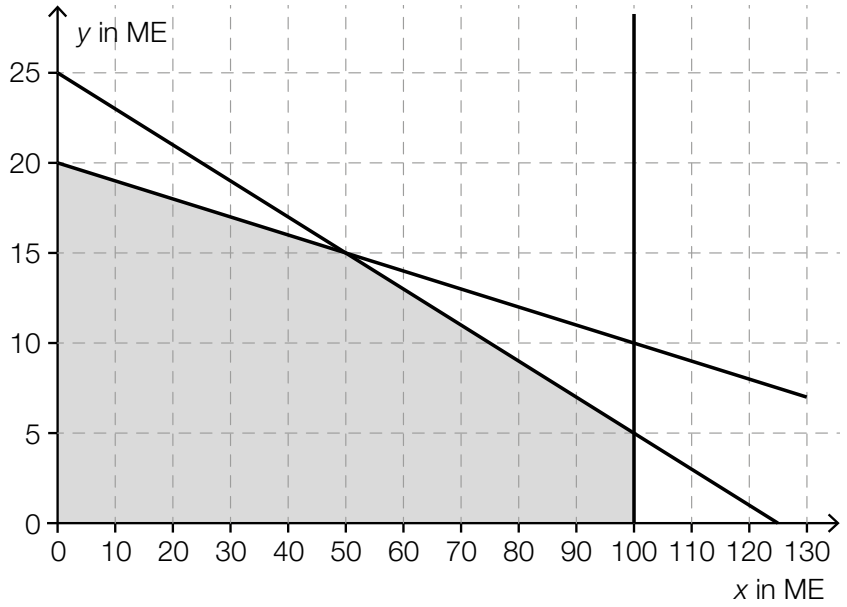
– Begründen Sie, warum sich der maximale Gewinn pro Tag dadurch nicht verändert.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $x + y \leq 200$
$y \leq 40$

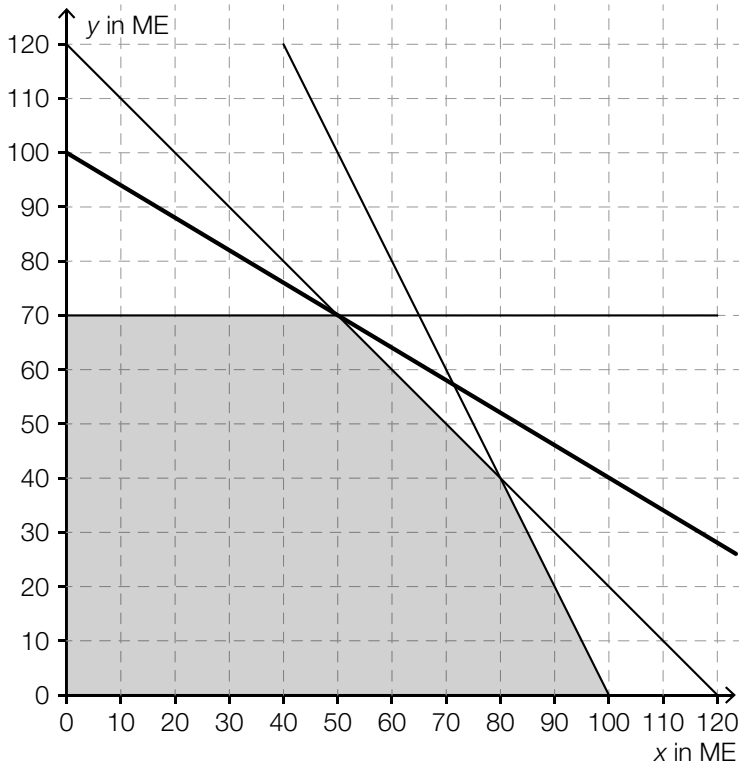
b)



c) $Z(x, y) = 120 \cdot x + 200 \cdot y$
x, y … Anzahl der ME Apfelsaft bzw. Orangensaft

oder:

$Z(x, y) = 0{,}12 \cdot x + 0{,}20 \cdot y$
x, y … Anzahl der Flaschen Apfelsaft bzw. Orangensaft



$120 \cdot 50 + 200 \cdot 70 = 20\,000$
Der maximale Gewinn pro Tag beträgt € 20.000.

Der maximale Gewinn pro Tag verändert sich nicht, weil der Eckpunkt (50|70) trotz dieser zusätzlichen Einschränkung immer noch im Lösungsbereich enthalten ist.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A1: für das richtige Erstellen der Ungleichung mithilfe der Information bezüglich der gesamten Kapazitätsbeschränkung
1 × A2: für das richtige Erstellen der Ungleichung mithilfe der Information bezüglich der Produktionseinschränkung bei Birnensaft

b) 1 × B: für das richtige Zeichnen der Randgeraden des Lösungsbereichs
1 × C: für das richtige Markieren des Lösungsbereichs

c) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Gleichung der Zielfunktion
1 × B1: für das richtige Einzeichnen der Geraden, für die der optimale Wert der Zielfunktion angenommen wird
1 × B2: für das richtige Ermitteln des maximalen Gewinns pro Tag
1 × D: für die richtige Begründung

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Fairtrade*

Aufgabennummer: B_399

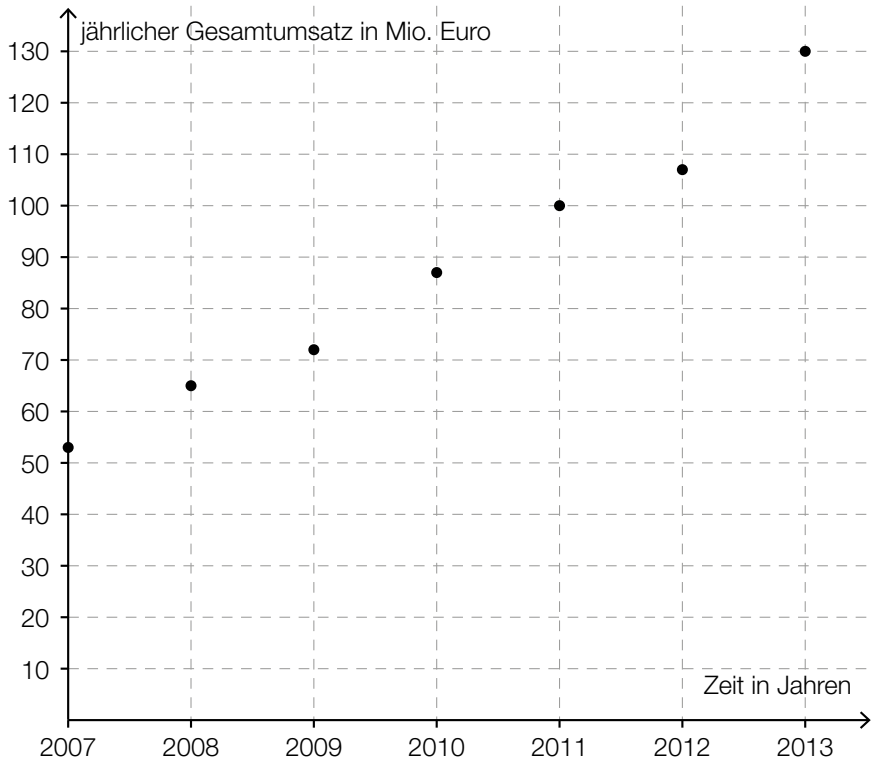
Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Der Gesamtumsatz von Fairtrade-Produkten in Österreich ist in den letzten Jahren deutlich gestiegen:

Jahr	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
jährlicher Gesamtumsatz in Millionen (Mio.) Euro	53	65	72	87	100	107	130

Quelle: http://www.fairtrade.at/fileadmin/AT/Materialien/2013_FAIRTRADE_Inside_Zahlen_Fakten.pdf [05.09.2016].

a) Die nachstehende Abbildung zeigt diese Gesamtumsatzentwicklung.



Der jährliche Gesamtumsatz soll in Abhängigkeit von der Zeit beschrieben werden.

– Ermitteln Sie mithilfe der gegebenen Daten eine Gleichung der zugehörigen linearen Regressionsfunktion. Wählen Sie $t = 0$ für das Jahr 2007.
– Zeichnen Sie den Graphen der Regressionsfunktion im obigen Koordinatensystem ein.
– Beurteilen Sie mithilfe des Korrelationskoeffizienten, ob die lineare Regressionsfunktion ein geeignetes Modell zur Beschreibung der Gesamtumsatzentwicklung ist.
– Berechnen Sie anhand dieses Modells den zu erwartenden jährlichen Gesamtumsatz im Jahr 2020.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Betrachtet man nur den Zeitraum von 2009 bis 2013, so kann die Entwicklung des Gesamtumsatzes näherungsweise durch die Funktion f beschrieben werden:

$f(t) = 13{,}6 \cdot t + 72$

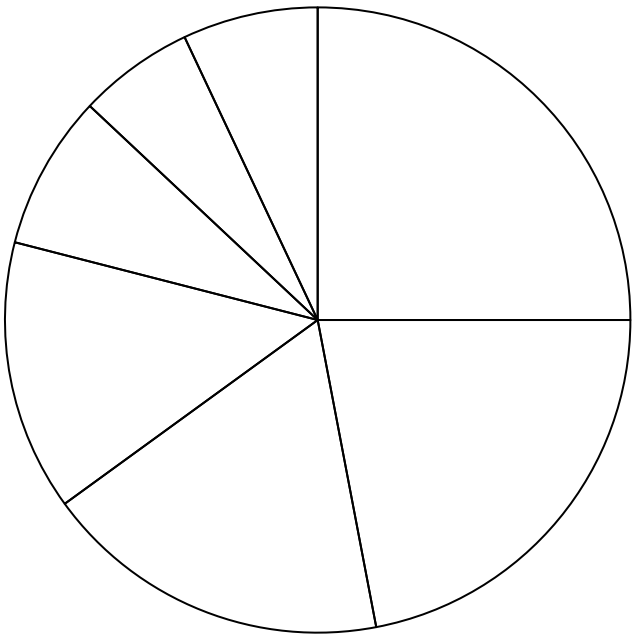
t ... Zeit in Jahren ab 2009 ($t = 0$ entspricht dem Jahr 2009)
$f(t)$ ... jährlicher Gesamtumsatz zur Zeit t in Mio. Euro

– Interpretieren Sie den Wert der Steigung dieser Funktion im gegebenen Sachzusammenhang.

c) Im Jahr 2012 teilte sich der Gesamtumsatz auf folgende 7 Bereiche auf:
Baumwolle, frische Früchte, Fruchtsäfte, Kaffee, Rosen, Süßwaren und Rest.

Der Umsatz an Kaffee betrug in diesem Jahr 18 % des Gesamtumsatzes.

– Kennzeichnen Sie im nachstehenden Diagramm denjenigen Sektor, der dem Umsatz an Kaffee entspricht.



Der Umsatz an Süßwaren betrug 2012 etwa 24 Mio. Euro.

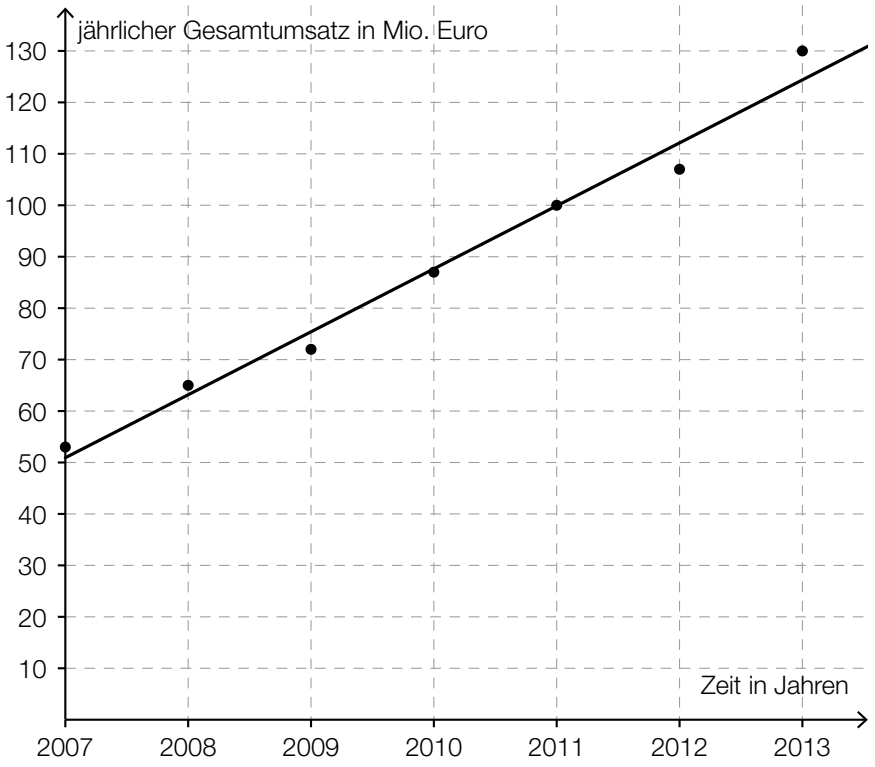
– Berechnen Sie, wie viel Prozent der Umsatz an Süßwaren in Bezug auf den Gesamtumsatz im Jahr 2012 (siehe Tabelle) betrug.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Ermitteln der Regressionsfunktion mittels Technologieeinsatz:
$f(t) = 12{,}25 \cdot t + 50{,}96$ (Koeffizienten gerundet)

t … Zeit in Jahren ($t = 0$ entspricht dem Jahr 2007)
$f(t)$ … jährlicher Gesamtumsatz zur Zeit t in Mio. Euro



Ermitteln des Korrelationskoeffizienten mittels Technologieeinsatz: $r \approx 0{,}991$

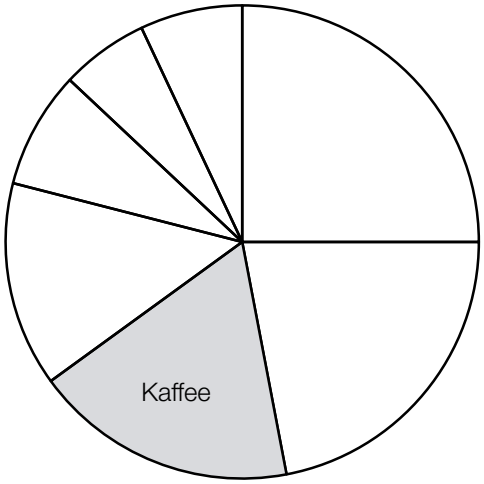
Da der Korrelationskoeffizient sehr nahe bei 1 liegt, kann ein starker linearer Zusammenhang vermutet werden.

$f(13) = 210{,}2\ldots$

Gemäß diesem Modell wird der jährliche Gesamtumsatz im Jahr 2020 rund 210 Millionen Euro betragen.

b) Gemäß diesem Modell steigt der jährliche Gesamtumsatz pro Jahr um 13,6 Millionen Euro.

c)



$\frac{24}{107} = 0{,}2242\ldots \approx 22{,}4\ \%$

Der Umsatz an Süßwaren betrug im Jahr 2012 rund 22,4 Prozent des Gesamtumsatzes.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B1: für das richtige Ermitteln der Gleichung der Regressionsfunktion
1 × B2: für das richtige Einzeichnen des Graphen der Regressionsfunktion
1 × D: für die richtige Beurteilung mithilfe des Korrelationskoeffizienten
1 × B3: für die richtige Berechnung des jährlichen Gesamtumsatzes im Jahr 2020

b) 1 × C: für die richtige Interpretation im gegebenen Sachzusammenhang

c) 1 × C: für das richtige Kennzeichnen des Sektors, der den Umsatz an Kaffee darstellt
1 × B: für die richtige Berechnung des Prozentsatzes

BMB
Bundesministerium
für Bildung

CO_2-Gehalt der Luft*

Aufgabennummer: B_398

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Der CO_2-Gehalt der Luft ist ein wichtiger Indikator für die Qualität der Luft. Er wird als Volumenanteil in parts per million (ppm) angegeben.

a) Die Luft in einem geschlossenen Raum mit einem Luftvolumen von 800 m^3 hat einen CO_2-Gehalt von 1 100 ppm.

– Ermitteln Sie das CO_2-Volumen (in m^3) in diesem Raum.

Eine Lüftungsanlage wird zum Zeitpunkt $t = 0$ eingeschaltet. Es strömt nun gleichmäßig Frischluft mit einem CO_2-Gehalt von 400 ppm in den Raum. Die Durchflussrate beträgt dabei 2,5 m^3/s. Gleichzeitig wird die durchmischte Luft mit derselben Durchflussrate abgesaugt.

– Stellen Sie eine Differenzialgleichung auf, die das CO_2-Volumen im Raum in Abhängigkeit von der Zeit darstellt. $V(t)$ ist dabei das CO_2-Volumen (in m^3) zum Zeitpunkt t (in s).

b) In Schulklassen ist der CO_2-Gehalt an Wintertagen nach 2 Unterrichtsstunden annähernd normalverteilt. Eine Stichprobe in 7 zufällig ausgewählten Klassen ergibt folgende Werte:

CO_2-Gehalt in ppm	2 500	2 780	3 500	4 000	2 800	2 740	3 850

– Berechnen Sie den Stichprobenmittelwert und die Stichprobenstandardabweichung dieser Messwerte.
– Ermitteln Sie den zweiseitigen 95-%-Vertrauensbereich für den Erwartungswert μ.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

a) $0{,}0011 \cdot 800\ \text{m}^3 = 0{,}88\ \text{m}^3$
Das CO_2-Volumen beträgt $0{,}88\ \text{m}^3$.

$$\frac{dV}{dt} = 2{,}5 \cdot 0{,}0004 - 2{,}5 \cdot \frac{V}{800}$$

b) Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$\bar{x} = 3\,167{,}14\ldots$ ppm
$s = 603{,}17\ldots$ ppm

Zweiseitigen 95-%-Vertrauensbereich mithilfe der t-Verteilung bestimmen:
$\bar{x} \pm t_{f;1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$

$n = 7 \Rightarrow f = 6$
$t_{6;0{,}975} = 2{,}44691\ldots$

Daraus ergibt sich folgender Vertrauensbereich für μ in ppm: $2\,609{,}29\ldots \leq \mu \leq 3\,724{,}98\ldots$

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für das richtige Ermitteln des CO_2-Volumens
1 × A: für das richtige Aufstellen der Differenzialgleichung

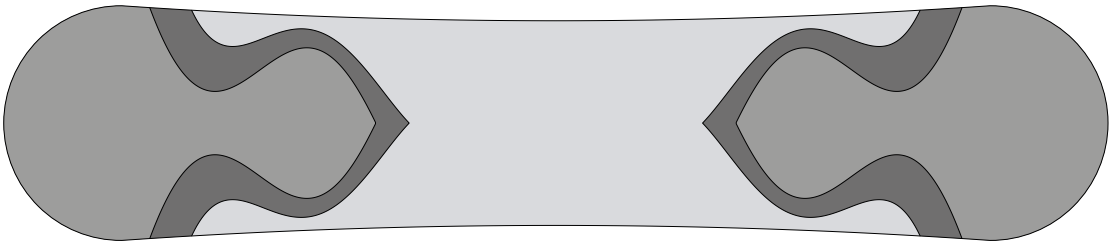
b) 1 × B1: für die richtige Berechnung von arithmetischem Mittel und Standardabweichung
1 × A: für die Verwendung des richtigen Modells (Vertrauensbereich mithilfe der t-Verteilung)
1 × B2: für die richtige Berechnung des Vertrauensbereichs

Snowboard (2)*

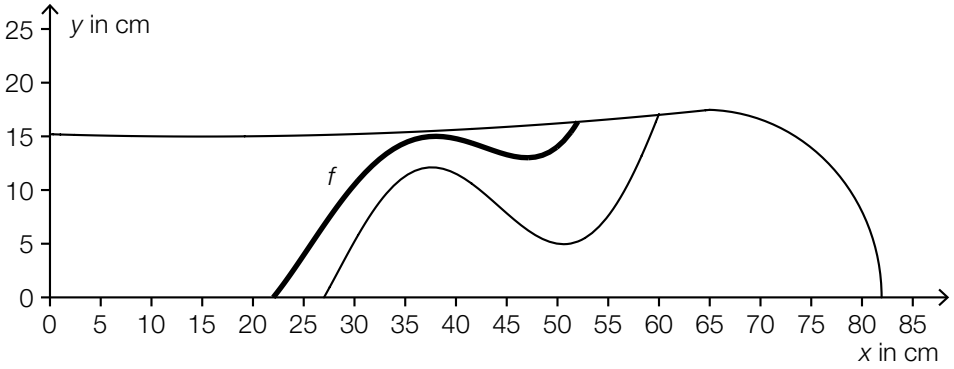
Aufgabennummer: B_397

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Das Design für ein Freestyle-Snowboard sieht folgendermaßen aus:



a) Das Snowboard-Design setzt sich aus 4 zueinander symmetrischen Elementen zusammen. Eines dieser Elemente ist in folgender Grafik dargestellt:



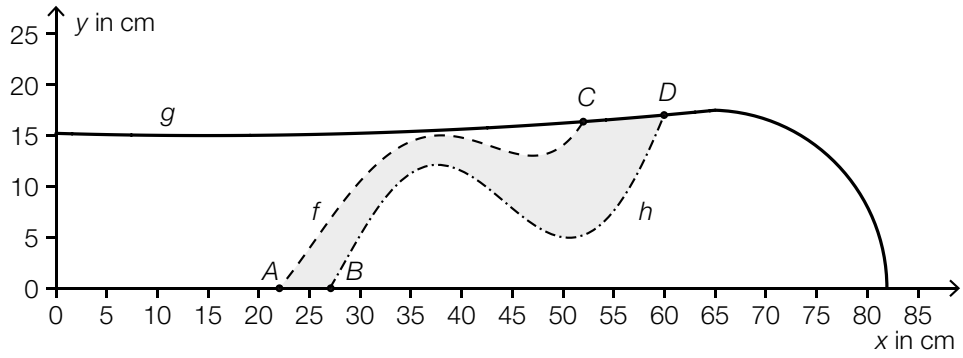
Die in der obigen Grafik markierte Kurve kann als Graph einer Polynomfunktion 4. Grades mit $f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$ dargestellt werden. Von dieser Funktion sind folgende Eigenschaften bekannt:

Bei $x = 22$ hat die Funktion f eine Nullstelle.
Der Punkt (38|15) ist ein Hochpunkt.
Der Punkt (47|13) ist ein Tiefpunkt.

– Stellen Sie ein Gleichungssystem auf, mit dem man die Koeffizienten dieser Polynomfunktion 4. Grades berechnen kann.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Die geschwungene Farbfläche des Snowboards wird durch die Graphen der Funktionen f, g und h sowie die x-Achse begrenzt:



$A = (22|0)$
$B = (27|0)$
$C = (52|16{,}5)$
$D = (60|17)$

Im nachstehenden Ansatz zur Berechnung des Inhalts dieser grau markierten Fläche in cm² wurde eine Teilfläche nicht berücksichtigt.

$$A_1 = \int_{22}^{27} f(x)\,dx \qquad A_2 = \int_{27}^{52} \left[f(x) - h(x)\right] dx$$

– Kennzeichnen Sie in der obigen Grafik die fehlende Teilfläche.
– Stellen Sie eine Formel zur Berechnung des Flächeninhalts A_3 dieser Teilfläche auf.

$A_3 =$ _____

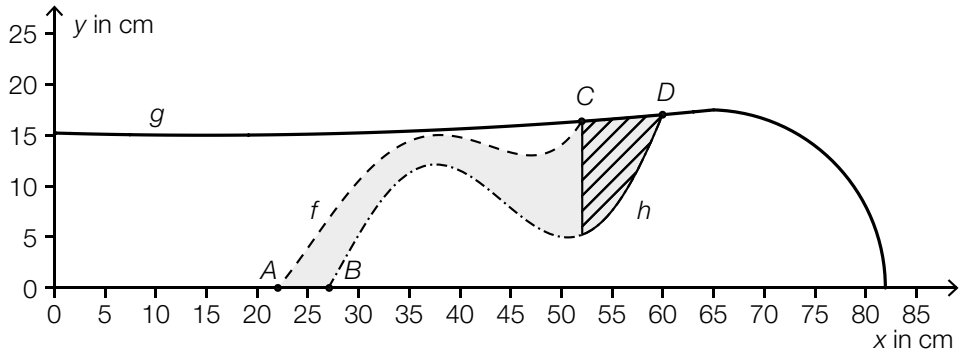
Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$
$f'(x) = 4 \cdot a \cdot x^3 + 3 \cdot b \cdot x^2 + 2 \cdot c \cdot x + d$

$f(22) = 0$		$22^4 \cdot a + 22^3 \cdot b + 22^2 \cdot c + 22 \cdot d + e = 0$
$f(38) = 15$		$38^4 \cdot a + 38^3 \cdot b + 38^2 \cdot c + 38 \cdot d + e = 15$
$f'(38) = 0$	*oder:*	$4 \cdot 38^3 \cdot a + 3 \cdot 38^2 \cdot b + 2 \cdot 38 \cdot c + d = 0$
$f(47) = 13$		$47^4 \cdot a + 47^3 \cdot b + 47^2 \cdot c + 47 \cdot d + e = 13$
$f'(47) = 0$		$4 \cdot 47^3 \cdot a + 3 \cdot 47^2 \cdot b + 2 \cdot 47 \cdot c + d = 0$

b)



$A_3 = \int_{52}^{60} \left[g(x) - h(x) \right] \mathrm{d}x$

Lösungsschlüssel

a) 1 × A1: für das richtige Aufstellen der Gleichungen mithilfe der Koordinaten der Punkte
1 × A2: für das richtige Aufstellen der Gleichungen mithilfe der 1. Ableitung

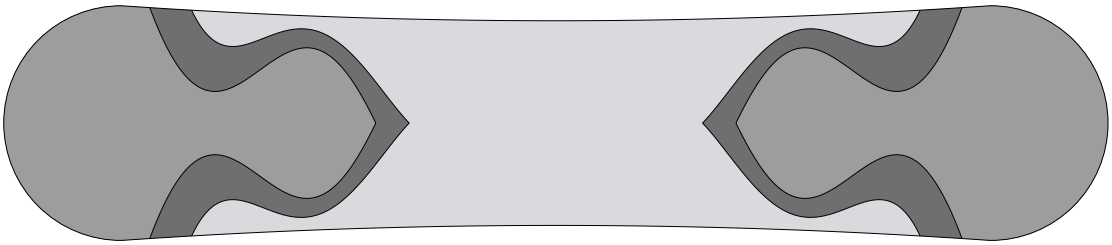
b) 1 × C: für das richtige Kennzeichnen der fehlenden Teilfläche
1 × A: für das richtige Aufstellen der Formel

Snowboard (1)*

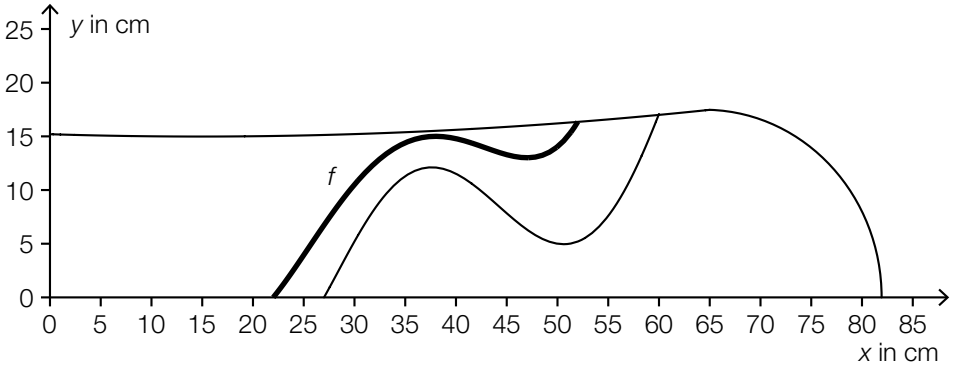
Aufgabennummer: B_392

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Das Design für ein Freestyle-Snowboard sieht folgendermaßen aus:



a) Das Snowboard-Design setzt sich aus 4 zueinander symmetrischen Elementen zusammen. Eines dieser Elemente ist in folgender Grafik dargestellt:



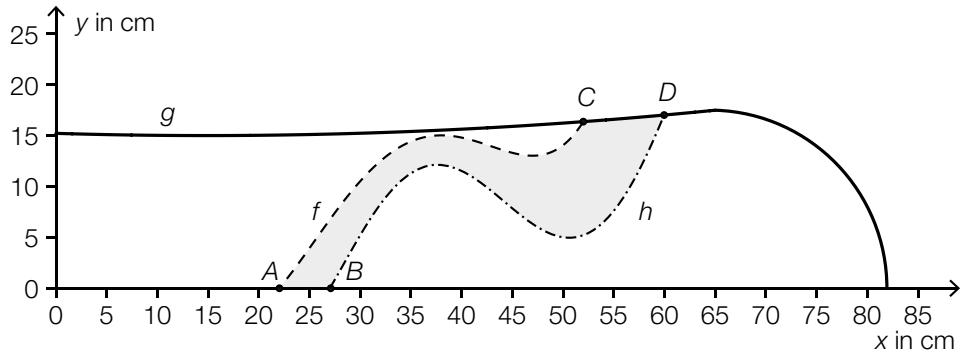
Die in der obigen Grafik markierte Kurve kann als Graph einer Polynomfunktion 4. Grades mit $f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$ dargestellt werden. Von dieser Funktion sind folgende Eigenschaften bekannt:

Bei $x = 22$ hat die Funktion f eine Nullstelle.
Der Punkt (38|15) ist ein Hochpunkt.
Der Punkt (47|13) ist ein Tiefpunkt.

– Stellen Sie ein Gleichungssystem auf, mit dem man die Koeffizienten dieser Polynomfunktion 4. Grades berechnen kann.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Die geschwungene Farbfläche des Snowboards wird durch die Graphen der Funktionen f, g und h sowie die x-Achse begrenzt:



$A = (22|0)$
$B = (27|0)$
$C = (52|16{,}5)$
$D = (60|17)$

Im nachstehenden Ansatz zur Berechnung des Inhalts dieser grau markierten Fläche in cm² wurde eine Teilfläche nicht berücksichtigt.

$$A_1 = \int_{22}^{27} f(x)\,dx \qquad A_2 = \int_{27}^{52} \left[f(x) - h(x)\right] dx$$

– Kennzeichnen Sie in der obigen Grafik die fehlende Teilfläche.
– Stellen Sie eine Formel zur Berechnung des Flächeninhalts A_3 dieser Teilfläche auf.

$A_3 =$ _____

c) Die Kosten bei der Produktion von Snowboards einer *limited edition* können durch die Funktion K, der Erlös beim Verkauf kann durch die Funktion E beschrieben werden:

$K(x) = 0{,}27 \cdot x^3 - 15 \cdot x^2 + 591{,}67 \cdot x + 10\,000$
$E(x) = 1\,000 \cdot x$

x ... Anzahl der Mengeneinheiten (ME)
$K(x)$ ... Gesamtkosten bei der Produktion von x ME in Geldeinheiten (GE)
$E(x)$ ... Erlös beim Verkauf von x ME in GE

Es wird angenommen, dass alle produzierten Snowboards auch verkauft werden.

– Stellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Gewinnfunktion auf.
– Berechnen Sie den maximalen Gewinn.
– Ermitteln Sie den Gewinnbereich.

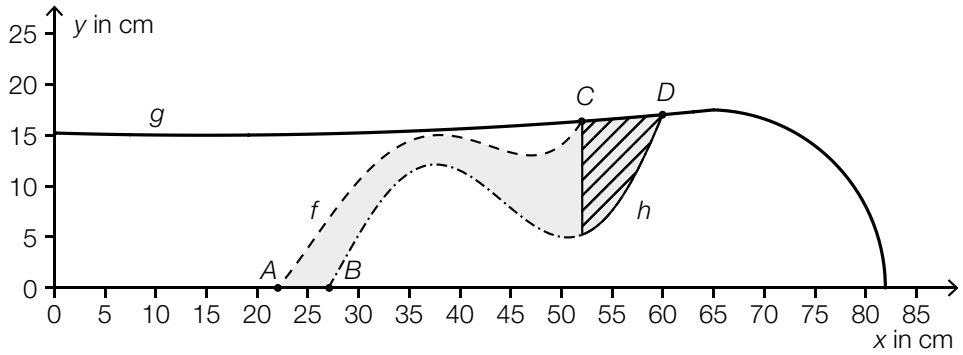
Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$
$f'(x) = 4 \cdot a \cdot x^3 + 3 \cdot b \cdot x^2 + 2 \cdot c \cdot x + d$

$f(22) = 0$		$22^4 \cdot a + 22^3 \cdot b + 22^2 \cdot c + 22 \cdot d + e = 0$
$f(38) = 15$		$38^4 \cdot a + 38^3 \cdot b + 38^2 \cdot c + 38 \cdot d + e = 15$
$f'(38) = 0$	*oder:*	$4 \cdot 38^3 \cdot a + 3 \cdot 38^2 \cdot b + 2 \cdot 38 \cdot c + d = 0$
$f(47) = 13$		$47^4 \cdot a + 47^3 \cdot b + 47^2 \cdot c + 47 \cdot d + e = 13$
$f'(47) = 0$		$4 \cdot 47^3 \cdot a + 3 \cdot 47^2 \cdot b + 2 \cdot 47 \cdot c + d = 0$

b)



$A_3 = \int_{52}^{60} \left[g(x) - h(x) \right] \mathrm{d}x$

c) $G(x) = -0{,}27 \cdot x^3 + 15 \cdot x^2 + 408{,}33 \cdot x - 10\,000$

$G'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 47{,}62\ldots \quad (x_2 = -10{,}58\ldots)$
$G(47{,}62\ldots) = 14\,303{,}372\ldots$
Der maximale Gewinn beträgt rund 14 303,37 GE.

Nullstellen der Gewinnfunktion: $G(x) = 0$
$(x_1 = -31{,}15\ldots)$
$x_2 = 17{,}07\ldots$
$x_3 = 69{,}63\ldots$

Der Gewinnbereich lautet: [17,1; 69,6].

Lösungsschlüssel

a) 1 × A1: für das richtige Aufstellen der Gleichungen mithilfe der Koordinaten der Punkte
1 × A2: für das richtige Aufstellen der Gleichungen mithilfe der 1. Ableitung

b) 1 × C: für das richtige Kennzeichnen der fehlenden Teilfläche
1 × A: für das richtige Aufstellen der Formel

c) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Gleichung der Gewinnfunktion
1 × B1: für die richtige Berechnung des maximalen Gewinns
1 × B2: für das richtige Ermitteln des Gewinnbereichs

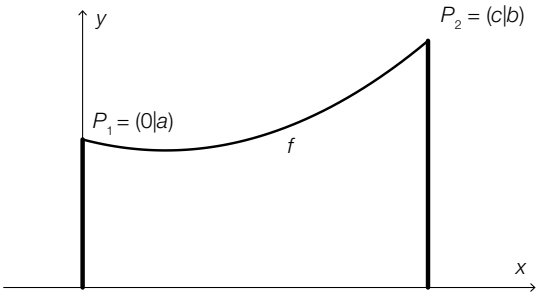
BMB
Bundesministerium
für Bildung

Seile*

Aufgabennummer: B_391

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Der Verlauf eines durchhängenden Seils einer Gondelbahn zwischen dem Punkt P_1 und dem Punkt P_2 kann näherungsweise durch den Graphen der Polynomfunktion f dargestellt werden (siehe nachstehende Abbildung).

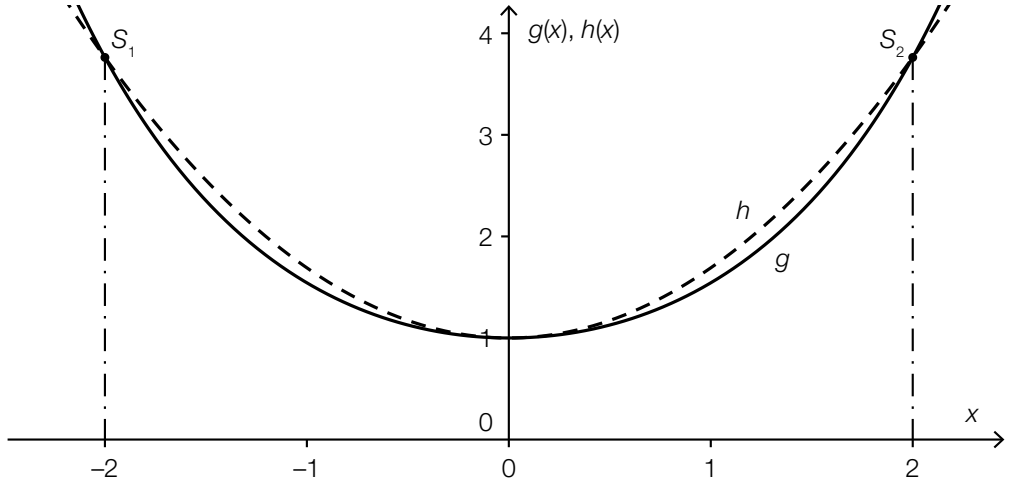


– Interpretieren Sie die Bedeutung der Größe $\frac{b-a}{c}$ im gegebenen Sachzusammenhang.
– Stellen Sie eine Formel auf, mit der der Steigungswinkel φ des Graphen der Funktion f im Punkt $P_2 = (c|b)$ bestimmt werden kann.

$\varphi =$ _____

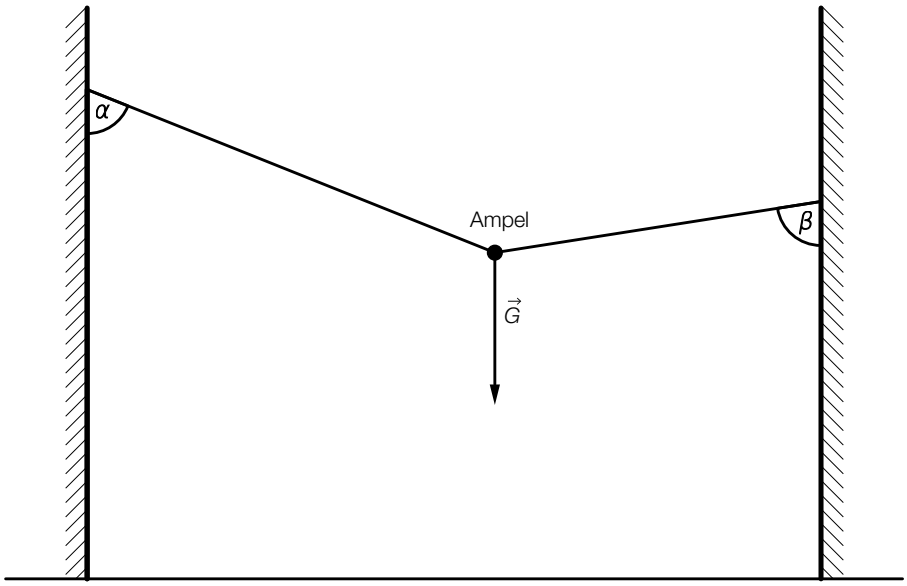
* ehemalige Klausuraufgabe

b) Der Verlauf eines zwischen zwei Punkten S_1 und S_2 durchhängenden Seils kann durch den Graphen der Funktion g mit $g(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ dargestellt werden. Näherungsweise kann dieser Seilverlauf durch den Graphen einer quadratischen Funktion h mit $h(x) = a \cdot x^2 + c$ dargestellt werden (siehe nachstehende Abbildung).
Die Graphen der beiden Funktionen schneiden einander in den Punkten S_1 und S_2.



– Lesen Sie aus der obigen Abbildung den Parameter c ab.
– Ermitteln Sie den Parameter a.
– Berechnen Sie den Schnittwinkel der Graphen von g und h im Schnittpunkt S_2.

c) Zwischen zwei Gebäuden verläuft eine Straße. Eine Ampelanlage wird mit Seilen an beiden Gebäudemauern befestigt. Die Winkel, die die Seile mit den Hausmauern einschließen, betragen $\alpha = 71°$ und $\beta = 78°$. Der Betrag der Gewichtskraft $\vec{G}$ der Ampel ist: $|\vec{G}| = 1\,500$ N (siehe nachstehende Abbildung).



– Veranschaulichen Sie mithilfe eines Kräfteparallelogramms, wie die Kraft $\vec{G}$ auf die beiden Seile aufgeteilt werden kann.
– Berechnen Sie die Beträge der beiden Kräfte, die auf die Seile wirken.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $\frac{b-a}{c}$ ist die mittlere Steigung des Seils der Gondelbahn zwischen den Punkten P_1 und P_2.

$\varphi = \arctan(f'(c))$

b) $c = h(0) = 1$

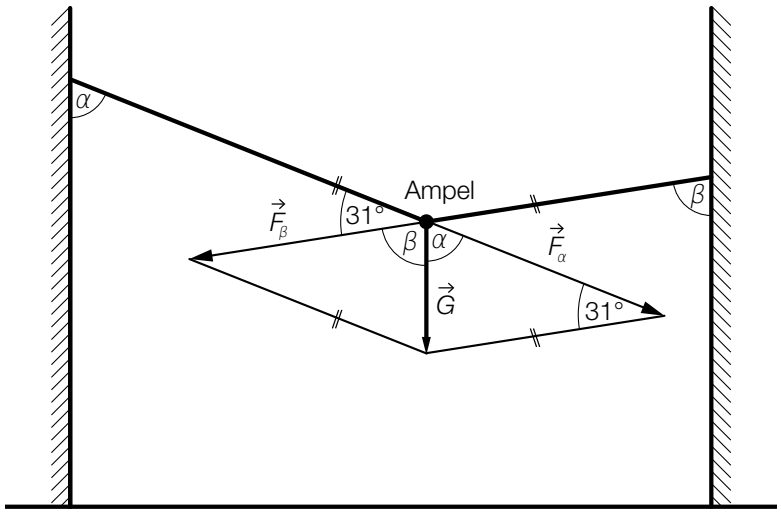
$h(2) = g(2)$

$a \cdot 2^2 + 1 = \frac{e^2 + e^{-2}}{2} \Rightarrow a = 0{,}690...$

$\arctan(g'(2)) = 74{,}58...°$
$\arctan(h'(2)) = 70{,}09...°$
$74{,}58...° - 70{,}09...° = 4{,}48...°$

Der Schnittwinkel der Graphen von g und h im Schnittpunkt S_2 beträgt rund 4,5°.

c)



$180° - 71° - 78° = 31°$

Es gilt folgende Schreibweise: $|\vec{F}| = F$.

$\frac{F_\alpha}{\sin(\beta)} = \frac{G}{\sin(31°)} \Rightarrow F_\alpha = 2\,848{,}7\ldots \text{ N}$

$\frac{F_\beta}{\sin(\alpha)} = \frac{G}{\sin(31°)} \Rightarrow F_\beta = 2\,753{,}7\ldots \text{ N}$

Lösungsschlüssel

a) 1 × C: für die richtige Interpretation im gegebenen Sachzusammenhang
1 × A: für das richtige Aufstellen der Formel

b) 1 × C: für das richtige Ablesen des Parameters c
1 × B1: für das richtige Ermitteln des Parameters a
1 × A: für einen richtigen Ansatz zur Berechnung des Schnittwinkels im Schnittpunkt S_2
1 × B2: für die richtige Berechnung des Schnittwinkels

c) 1 × A1: für das richtige Veranschaulichen mithilfe eines Kräfteparallelogramms
1 × A2: für den richtigen Ansatz (z. B. Sinussatz)
1 × B: für die richtige Berechnung der Beträge der beiden Kräfte

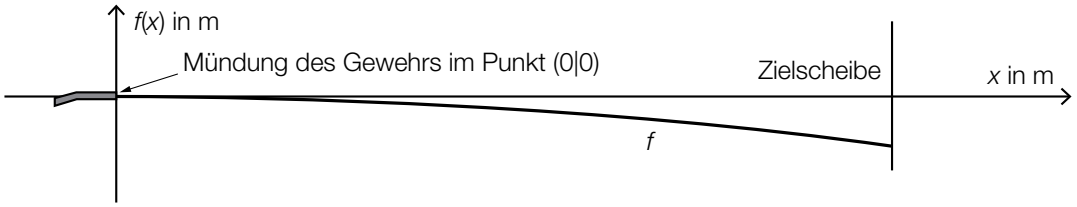
BMB
Bundesministerium
für Bildung

Flugbahnen*

Aufgabennummer: B_389

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Ein Gewehr wird so eingespannt, dass der Lauf des Gewehrs waagrecht verläuft. Beim Schießen auf eine Zielscheibe trifft das Projektil im Vergleich zur Abschusshöhe tiefer auf (siehe nachstehende Skizze).



Die Flugbahn eines Projektils kann unter Vernachlässigung des Luftwiderstands näherungsweise durch den Graphen einer Polynomfunktion 2. Grades f mit $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ beschrieben werden.

– Begründen Sie, warum für die dargestellte Flugbahn gilt: $b = 0$ und $c = 0$.
– Begründen Sie anhand des Funktionsgraphen, warum a negativ sein muss.

Die Zielscheibe ist in horizontaler Richtung 100 Meter von der Mündung des Gewehrs entfernt.
Das Projektil trifft im Vergleich zur Abschusshöhe um 8 Zentimeter tiefer auf der Zielscheibe auf.

– Berechnen Sie den Parameter a.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Die Flugbahn eines schräg nach oben abgeschossenen Projektils kann durch den Graphen einer Funktion h beschrieben werden:

$$h(x) = \tan(\alpha) \cdot x - \frac{g}{2 \cdot v^2 \cdot \cos^2(\alpha)} \cdot x^2$$

x … horizontal zurückgelegte Wegstrecke in Metern (m)
$h(x)$ ... Höhe an der Stelle x in m
v ... Abschussgeschwindigkeit in Metern pro Sekunde (m/s)
g ... Erdbeschleunigung (konstant)
$0° < \alpha < 90°$ ... Abschusswinkel (gemessen von der Horizontalen)

Für eine spezielle Flugbahn gilt:

$$h(x) = 0{,}03492 \cdot x - \frac{g}{7{,}192 \cdot 10^5} \cdot x^2$$

– Bestimmen Sie die zugehörige Abschussgeschwindigkeit v.

c) Ein Geschoss, das unter einem Winkel α abgeschossen wird, trifft nach der Schussweite $x(\alpha)$ wieder auf dem Boden auf. Dabei gilt näherungsweise:

$$x(\alpha) = \frac{2 \cdot v^2}{g} \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)$$

α … Abschusswinkel mit $0° < \alpha < 90°$
$x(\alpha)$ … Schussweite bei einem Abschusswinkel α in m
v ... Abschussgeschwindigkeit in m/s
g ... Erdbeschleunigung (konstant)

– Berechnen Sie denjenigen Winkel, bei dem die Schussweite am größten ist.
– Zeigen Sie mithilfe der 2. Ableitung, dass für diesen berechneten Winkel die Schussweite maximal sein muss.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Da sich der Scheitel der dargestellten Parabel im Ursprung des Koordinatensystems befindet, gilt: $b = 0$ und $c = 0$.

Da der Funktionsgraph eine nach unten geöffnete Parabel ist, gilt: $a < 0$.

$-0{,}08 = a \cdot 100^2 \Rightarrow a = -8 \cdot 10^{-6}$

b) Koeffizientenvergleich:
$0{,}03492 = \tan(\alpha) \Rightarrow \alpha = 1{,}99\ldots°$

$7{,}192 \cdot 10^5 = 2 \cdot v^2 \cdot \cos^2(1{,}99\ldots°) \Rightarrow v = 600{,}0\ldots \approx 600$

Die Abschussgeschwindigkeit beträgt rund 600 m/s.

c) $\frac{dx}{d\alpha} = 0$:
$\frac{2 \cdot v^2}{g} \cdot [\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)] = 0 \Rightarrow \cos(\alpha) = \sin(\alpha) \Rightarrow \alpha = 45°$
$\frac{d^2x}{d\alpha^2} < 0$ für $\alpha = 45°$:
$\frac{d^2x}{d\alpha^2} = -\frac{8 \cdot v^2}{g} \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) < 0$, wenn $0 < \alpha < 90°$

Lösungsschlüssel

a) 1 × D1: für die richtige Begründung zu den Parametern b und c
1 × D2: für die richtige Begründung zum Vorzeichen des Parameters a
1 × B: für die richtige Berechnung des Parameters a

b) 1 × A: für einen richtigen Ansatz zur Berechnung von α (Koeffizientenvergleich)
1 × B: für die richtige Berechnung der Abschussgeschwindigkeit

c) 1 × B: für die richtige Berechnung des Winkels
1 × D: für den richtigen Nachweis

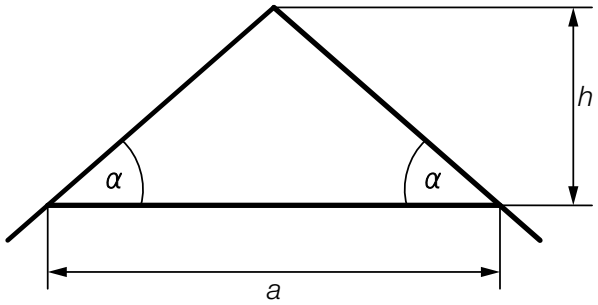
BMB
Bundesministerium
für Bildung

Hausbau*

Aufgabennummer: A_248

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Der Querschnitt eines Dachstuhls ist in der nachstehenden Skizze vereinfacht dargestellt.

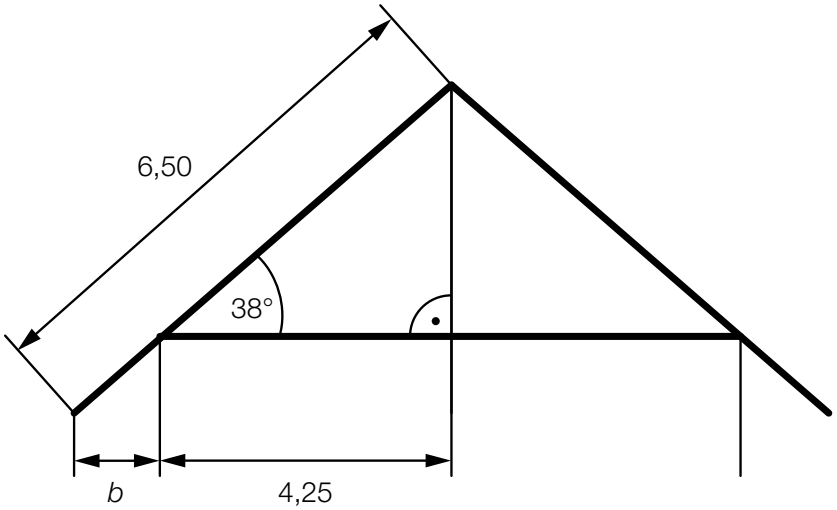


– Erstellen Sie eine Formel, mit der man den Winkel α aus a und h berechnen kann.

$\alpha =$ _____

– Berechnen Sie den Winkel α für $a = 7$ m und $h = 220$ cm.

b) Der Querschnitt eines Dachstuhls ist in der nachstehenden Skizze vereinfacht dargestellt. Alle Längen sind in Metern angegeben.



– Berechnen Sie b.

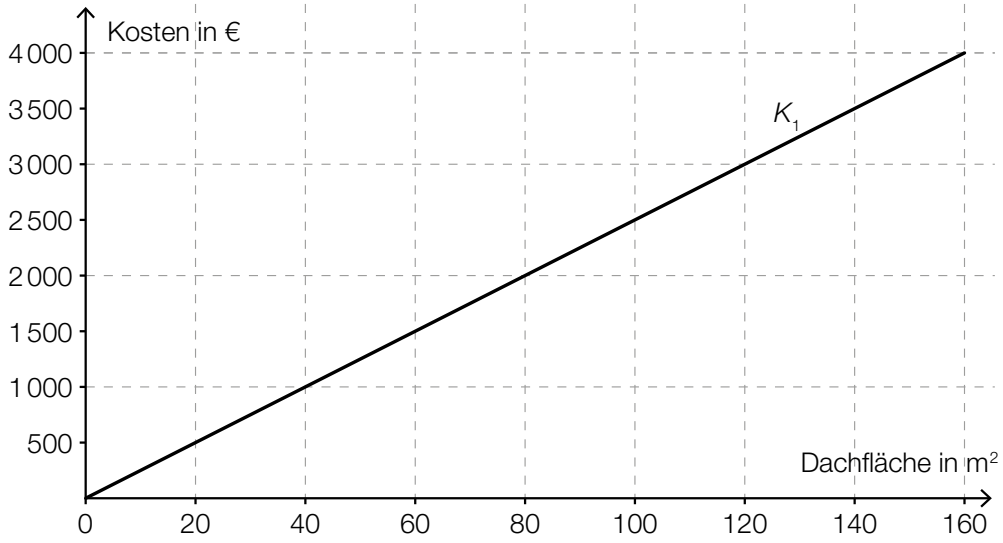
* ehemalige Klausuraufgabe

c) Zwei Unternehmen legen ihre Angebote für das Eindecken von Einfamilienhäusern vor:

Angebot 1: Das Angebot des ersten Anbieters ist in der unten stehenden Abbildung als Graph der Kostenfunktion K_1 dargestellt.

Angebot 2: Die Kosten betragen € 20 je m² Dachfläche, dazu kommen mengenunabhängige Lieferkosten von € 500.

– Zeichnen Sie in der nachstehenden Abbildung den Graphen der Kostenfunktion K_2 für das Angebot 2 im Intervall [0; 160] ein.



– Lesen Sie aus der obigen Abbildung ab, welches Angebot bei einer Dachfläche von 120 m² kostengünstiger ist.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

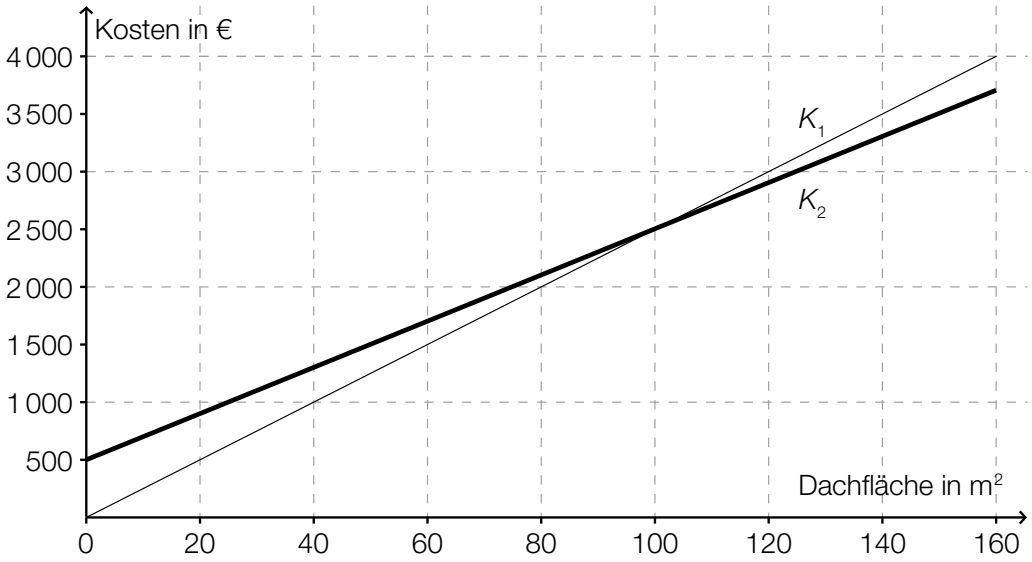
Möglicher Lösungsweg

a) $\alpha = \arctan\left(\frac{h}{\frac{a}{2}}\right)$

$\alpha = \arctan\left(\frac{2{,}2}{3{,}5}\right) = 32{,}15\ldots° \approx 32{,}2°$

b) $b = 6{,}5 \cdot \cos(38°) - 4{,}25$
$b = 0{,}872\ldots \text{ m} \approx 0{,}87 \text{ m}$

c)



Aus der Abbildung entnimmt man, dass für 120 m² Dachfläche das Angebot 2 kostengünstiger ist.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel
1 × B: für die richtige Berechnung des Winkels

b) 1 × A: für den richtigen Ansatz zur Berechnung von b
1 × B: für die richtige Berechnung von b

c) 1 × B: für das richtige Einzeichnen des Graphen
1 × C: für das richtige Ablesen

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Windräder*

Aufgabennummer: A_247

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Die vom Hersteller eines Windrads angegebene Nennleistung kann in einer vereinfachten Form durch folgende Formel berechnet werden:

$P_N = c \cdot A$

P_N ... Nennleistung in Megawatt (MW)
A ... Flächeninhalt der von den Rotoren des Windrads überstrichenen Kreisfläche in Quadratmetern (m^2)
$c = 0{,}169 \cdot 10^{-3}$ MW/m^2

Ein Windrad hat eine Nennleistung von 0,85 MW.

– Berechnen Sie den Durchmesser der von den Rotoren des Windrads überstrichenen Kreisfläche.

b) Die tatsächliche Leistung von Windrädern in Abhängigkeit von der Windgeschwindigkeit v kann näherungsweise durch die Funktion P beschrieben werden.

Der Graph dieser Funktion P und ihr Wendepunkt W sind in der unten stehenden Abbildung 1 dargestellt.

– Skizzieren Sie in der Abbildung 2 den Graphen der zugehörigen Ableitungsfunktion P'.

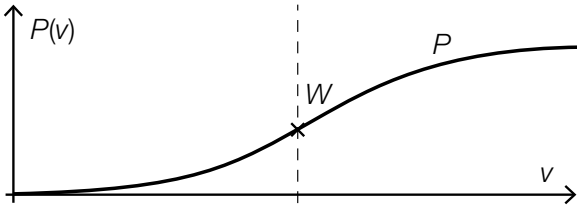


Abbildung 1

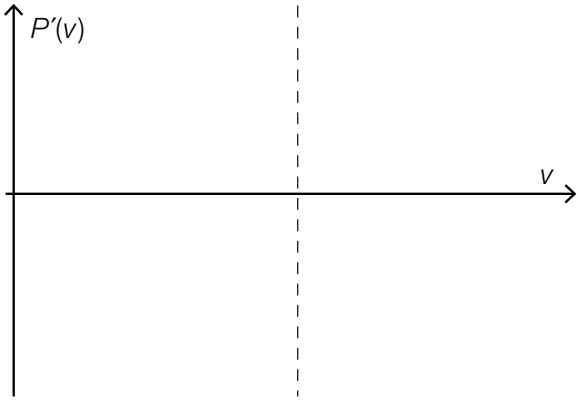


Abbildung 2

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Die tatsächliche Leistung eines bestimmten Windrads in Abhängigkeit von der Windgeschwindigkeit v kann für Windgeschwindigkeiten von 5 m/s bis 10 m/s näherungsweise durch die Polynomfunktion P beschrieben werden.

$P(v) = 0{,}0175 \cdot v^2 - 0{,}0796 \cdot v + 0{,}0391$ mit $5 \leq v \leq 10$

v ... Windgeschwindigkeit in Metern pro Sekunde (m/s)
$P(v)$ ... Leistung bei der Windgeschwindigkeit v in Megawatt (MW)

– Berechnen Sie, bei welcher Windgeschwindigkeit eine Leistung von 0,5 MW erzielt wird.
– Beschreiben Sie, was mit der folgenden Rechnung im gegebenen Sachzusammenhang ermittelt wird:

$$\frac{P(8) - P(7)}{P(7)}$$

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

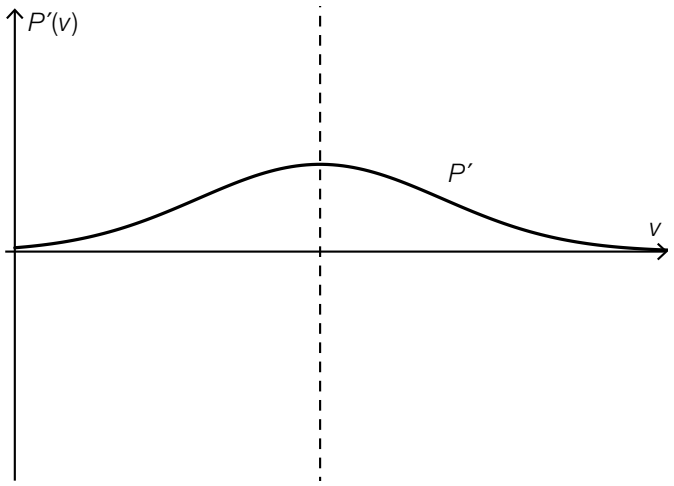
a) $A = \frac{d^2 \cdot \pi}{4} \Rightarrow P_N = c \cdot \frac{d^2 \cdot \pi}{4}$

$0{,}85 = 0{,}169 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{d^2 \cdot \pi}{4}$

$d = 80{,}02\ldots$

Der Durchmesser beträgt rund 80,0 m.

b) zum Beispiel:



c) $0{,}5 = 0{,}0175 \cdot v^2 - 0{,}0796 \cdot v + 0{,}0391$

$v_1 = 7{,}887\ldots$

$(v_2 = -3{,}339\ldots)$

Eine Leistung von 0,5 MW wird bei einer Windgeschwindigkeit von rund 7,89 m/s erzielt.

Es wird die relative Änderung der Leistung des Windrads bei einem Anstieg der Windgeschwindigkeit von 7 m/s auf 8 m/s ermittelt.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für die richtige Berechnung des Durchmessers

b) 1 × A1: für die richtige Darstellung (Wendestelle von P als Maximumstelle von P')
1 × A2: für die richtige Darstellung (Vorzeichen der Ableitungsfunktion $P'(P'(v) > 0)$ und Monotonieverhalten der Ableitungsfunktion P')
Das Krümmungsverhalten von P' ist für die Punktevergabe nicht relevant.

c) 1 × B: für die richtige Berechnung der Windgeschwindigkeit
1 × C: für die richtige Beschreibung im gegebenen Sachzusammenhang

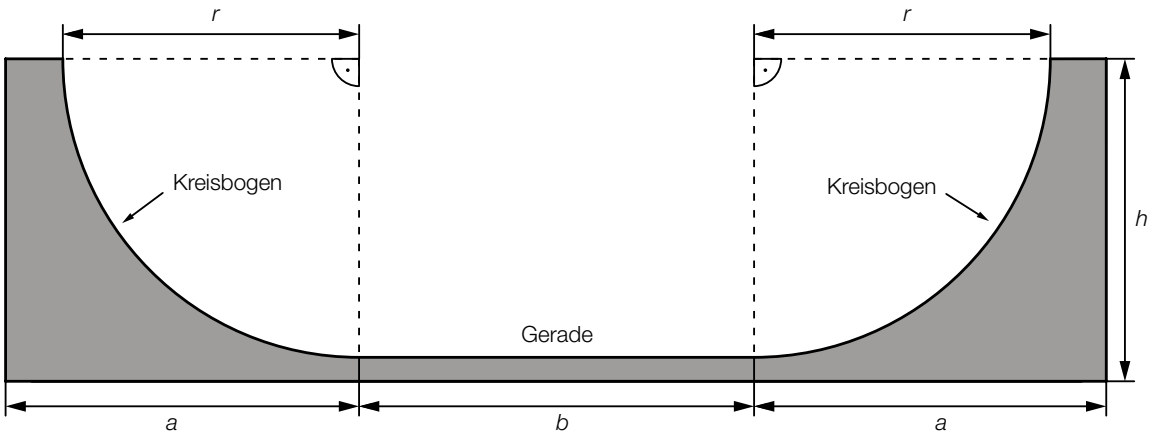
BMB
Bundesministerium
für Bildung

Skatepark (2)*

Aufgabennummer: A_246

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Folgende Grafik zeigt den Entwurf einer Halfpipe im Querschnitt:



– Erstellen Sie eine Formel für die Berechnung des Flächeninhalts A der grauen Fläche (Querschnittsfläche) aus a, b, h und r.

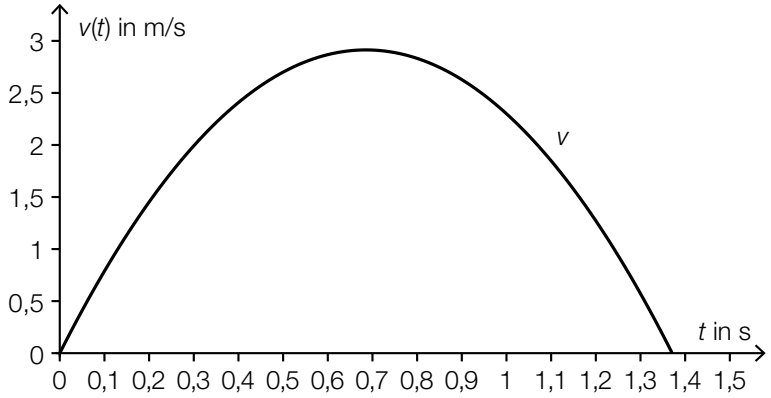
$A =$ _____

Die Halfpipe soll aus Beton gefertigt werden. Die Dichte von Beton wird häufig in den Einheiten Tonnen pro Kubikmeter (t/m³) oder Gramm pro Kubikzentimeter (g/cm³) angegeben.

– Zeigen Sie, dass sich bei der Umwandlung von t/m³ in g/cm³ die Maßzahl nicht verändert.

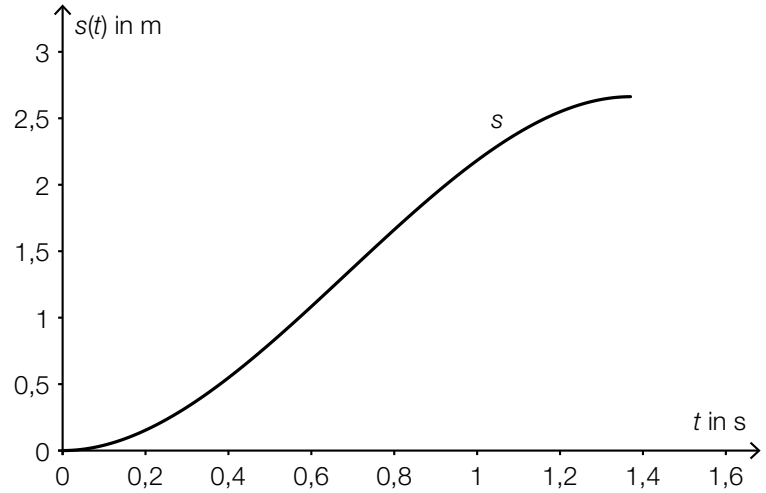
* ehemalige Klausuraufgabe

b) Die Geschwindigkeit einer Skaterin in Abhängigkeit von der Zeit lässt sich näherungsweise mithilfe der Funktion v beschreiben. Der Graph dieser Funktion ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



– Veranschaulichen Sie in der obigen Abbildung denjenigen Weg, den die Skaterin zwischen $t = 0{,}5$ s und $t = 1$ s zurücklegt.
– Beschreiben Sie die Bedeutung von $v'(0{,}3)$ im gegebenen Sachzusammenhang.

c) Der zurückgelegte Weg eines Skaters in Abhängigkeit von der Zeit lässt sich näherungsweise mithilfe der Funktion s beschreiben. Der Graph dieser Funktion ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



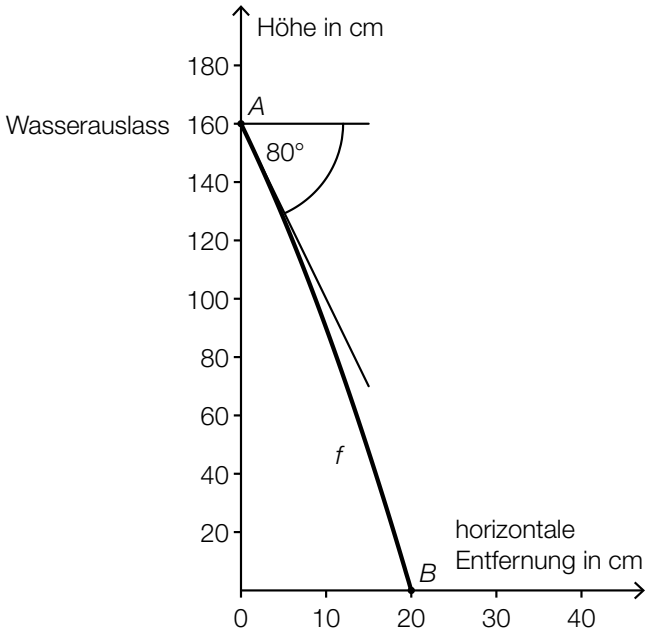
– Ermitteln Sie die mittlere Geschwindigkeit zwischen $t = 0{,}6$ s und $t = 1{,}2$ s.

d) Im Skatepark steht Trinkwasser zur Verfügung. An einer Wand ist ein Wasserauslass montiert, aus dem unter einem Tiefenwinkel von 80° ein Wasserstrahl austritt. Der Verlauf des Wasserstrahls kann näherungsweise durch den Graphen einer Funktion f dargestellt werden:

$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

x ... horizontale Entfernung von der Wand in Zentimetern (cm)
$f(x)$ ... Höhe an der Stelle x in cm

Der Graph der Funktion f ist im nachstehenden Diagramm dargestellt.



– Stellen Sie ein Gleichungssystem auf, mit dem die Koeffizienten a, b und c der Funktion f ermittelt werden können. Verwenden Sie dabei die Punkte A und B sowie den angegebenen Winkel.

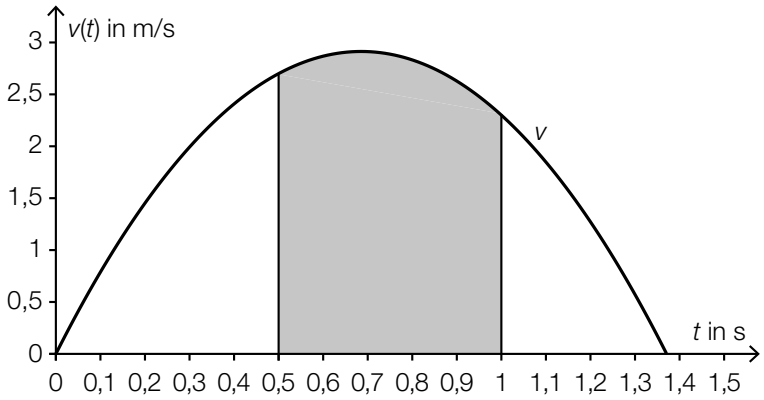
Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $A = (2 \cdot a + b) \cdot h - b \cdot r - \frac{r^2 \cdot \pi}{2}$

$1 \frac{\text{t}}{\text{m}^3} = \frac{10^6 \text{ g}}{10^6 \text{ cm}^3} = 1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$

b)



$v'(0{,}3)$ ist die Beschleunigung der Skaterin zum Zeitpunkt $t = 0{,}3$ s.

c) $\overline{v} = \frac{1{,}5}{0{,}6} = 2{,}5$

Toleranzbereich für $\overline{v}$: [2,1; 2,9]
Die mittlere Geschwindigkeit beträgt rund 2,5 m/s.

d) $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$
$f'(x) = 2 \cdot a \cdot x + b$

$f(0) = 160$		$c = 160$
$f(20) = 0$	*oder:*	$400 \cdot a + 20 \cdot b + c = 0$
$f'(0) = \tan(-80°)$		$b = \tan(-80°)$

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Formel
1 × D: für den richtigen Nachweis

b) 1 × A: für das richtige Veranschaulichen des Weges
1 × C: für die richtige Beschreibung im gegebenen Sachzusammenhang

c) 1 × B: für das richtige Ermitteln der mittleren Geschwindigkeit im Toleranzbereich [2,1; 2,9]

d) 1 × A1: für das richtige Aufstellen der Gleichungen mithilfe der Koordinaten der Punkte *A* und *B*
1 × A2: für das richtige Aufstellen der Gleichung mithilfe des gegebenen Winkels

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Angry Birds (2)*

Aufgabennummer: A_242

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Im Computerspiel *Angry Birds* muss man mithilfe einer Schleuder Schweine treffen. Als Wurfgeschoße stehen verschiedene Vögel zur Verfügung. Einige dieser Vögel haben besondere Funktionen, die durch einen Mausklick ausgelöst werden können. Koordinaten bzw. Abstände sind im Folgenden in Längeneinheiten (LE) angegeben.

a) Die Flugparabel des Vogels *Red* bei einem Wurf kann durch den Graphen der Funktion f beschrieben werden:

$f(x) = -0{,}1 \cdot x^2 + 0{,}9 \cdot x + 1$ mit $x \geq 0$

x ... horizontale Entfernung vom Abschusspunkt in Längeneinheiten (LE)
$f(x)$ ... Flughöhe des Vogels über dem horizontalen Boden an der Stelle x in LE

Red trifft kein Schwein und prallt auf den Boden auf.

– Berechnen Sie, in welcher horizontalen Entfernung vom Abschusspunkt der Vogel auf dem Boden aufprallt.

b) Die Flugbahn des Vogels *Chuck* kann zu Beginn durch den Graphen der Funktion g beschrieben werden:

$g(x) = -0{,}5 \cdot x^2 + 5 \cdot x + 3$ mit $x \geq 0$

x ... horizontale Entfernung vom Abschusspunkt in LE
$g(x)$ ... Flughöhe des Vogels über dem horizontalen Boden an der Stelle x in LE

Der Spieler löst in 3 LE horizontaler Entfernung vom Abschusspunkt durch einen Mausklick eine Spezialfunktion aus. Der Vogel bewegt sich ab diesem Punkt bis zu einer horizontalen Entfernung von 5 LE vom Abschusspunkt entlang der Tangente an den gegebenen Funktionsgraphen.

– Ermitteln Sie eine Gleichung der Tangente im Punkt $P = (3|g(3))$.
– Veranschaulichen Sie die Flugbahn von Chuck vom Abschusspunkt bis zu einer horizontalen Entfernung von 5 LE vom Abschusspunkt mithilfe einer geeigneten Grafik.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Die Flugbahn des Vogels *Matilda* kann durch den Graphen einer Polynomfunktion 3. Grades beschrieben werden.
Der Funktionsgraph schneidet die vertikale Achse bei 12. Er verläuft durch die Punkte $A = (1|16)$ und $B = (5|32)$. A ist ein Hochpunkt des Funktionsgraphen.

– Stellen Sie mithilfe der angegebenen Informationen ein Gleichungssystem auf, mit dem die Koeffizienten dieser Polynomfunktion berechnet werden können.

d) Bei einem anderen Angriff durch den Vogel Matilda kann die Flugbahn durch den Graphen der Funktion h beschrieben werden.

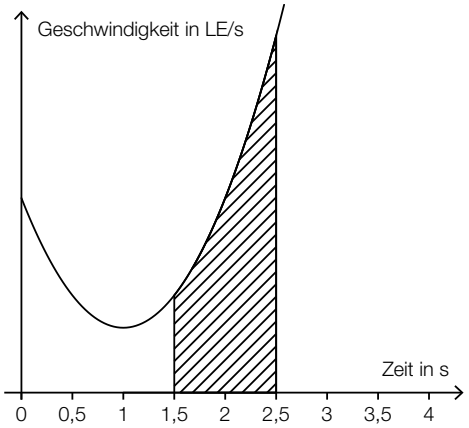
$h(x) = x^3 - 6 \cdot x^2 + 7 \cdot x + 8$ mit $x \geq 0$

x ... horizontale Entfernung vom Abschusspunkt in LE
$h(x)$ ... Flughöhe des Vogels über dem horizontalen Boden an der Stelle x in LE

Ein Schwein befindet sich im Punkt $P = (5|20)$.

– Berechnen Sie den Abstand des Schweins vom Abschusspunkt.
– Überprüfen Sie nachweislich, ob der Punkt P auf Matildas Flugbahn liegt.

e) Die nachstehende Grafik stellt das Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm eines Vogels bei einem Wurf dar.



– Beschreiben Sie die Bedeutung der in der Grafik eingezeichneten Fläche im gegebenen Sachzusammenhang.

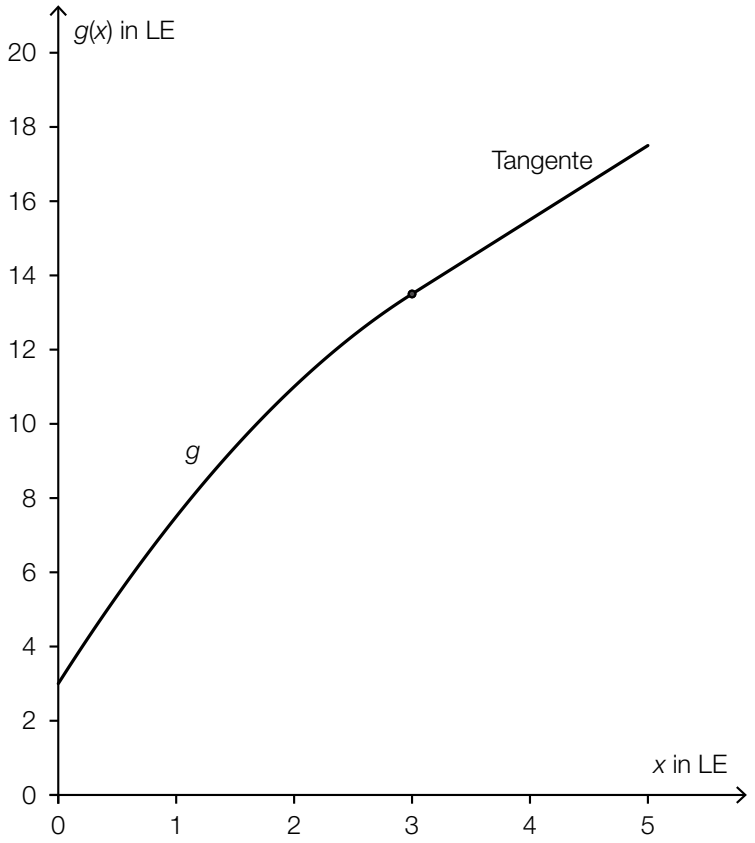
Möglicher Lösungsweg

a) $-0{,}1 \cdot x^2 + 0{,}9 \cdot x + 1 = 0$

Lösung der Gleichung mittels Technologieeinsatz:
($x_1 = -1$)
$x_2 = 10$

Der Vogel prallt in einer horizontalen Entfernung von 10 LE auf den Boden auf.

b) $g(3) = 13{,}5$
$g'(x) = -x + 5 \Rightarrow g'(3) = 2$
$13{,}5 = 2 \cdot 3 + d \Rightarrow d = 7{,}5$
Tangentengleichung: $y = 2 \cdot x + 7{,}5$



c) $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$
$f'(x) = 3a \cdot x^2 + 2b \cdot x + c$

I: $f(0) = 12$
II: $f(1) = 16$
III: $f(5) = 32$
IV: $f'(1) = 0$

d) Koordinaten des Abschusspunkts: $A = (0|8)$
Position des Schweins: $P = (5|20)$

$\sqrt{5^2 + (20 - 8)^2} = 13$

Der Abstand des Schweins vom Abschusspunkt beträgt 13 LE.

$h(5) = 18$

Der Punkt P liegt nicht auf Matildas Flugbahn.

e) Die Fläche unter dem Graphen der Geschwindigkeitsfunktion beschreibt den vom Vogel zurückgelegten Weg im Zeitintervall [1,5 s; 2,5 s] nach dem Abschuss.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für die richtige Berechnung der horizontalen Entfernung

b) 1 × A1: für das richtige Aufstellen der Tangentengleichung
1 × A2: für das richtige Veranschaulichen der Flugbahn
(für $0 \leq x \leq 3$ Graph von g, für $3 \leq x \leq 5$ Tangente)

c) 1 × A1: für das richtige Aufstellen der Gleichungen mithilfe der Koordinaten der Punkte
1 × A2: für das richtige Aufstellen der Gleichung mithilfe der 1. Ableitung

d) 1 × B: für die richtige Berechnung des Abstands
1 × D: für die richtige Überprüfung, ob der Punkt P auf Matildas Flugbahn liegt

e) 1 × C: für die richtige Beschreibung der Bedeutung der Fläche im gegebenen Sachzusammenhang unter Bezugnahme auf das Zeitintervall [1,5 s; 2,5 s]

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Blutgruppen*

Aufgabennummer: A_243

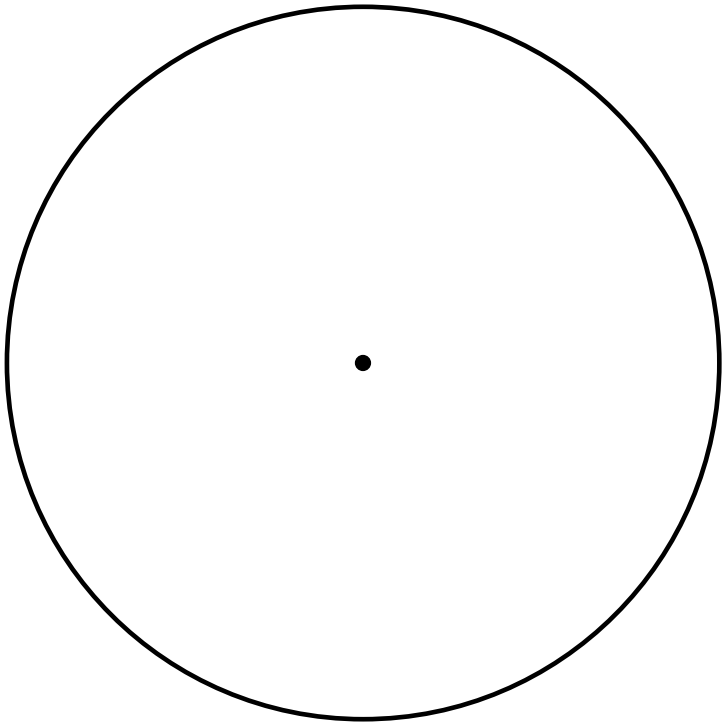
Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Nach Karl Landsteiner unterscheidet man vier Blutgruppen: 0, A, B und AB. Diese kommen in Österreich annähernd mit folgender relativer Häufigkeit vor:

Blutgruppe	0	A	B	AB
relative Häufigkeit	37 %	41 %	15 %	7 %

a) Die Verteilung der Blutgruppen in Österreich soll in einem Kreisdiagramm dargestellt werden.

– Berechnen Sie die Winkel der jeweiligen Sektoren.
– Zeichnen Sie die Sektoren in den nachstehenden Kreis ein.

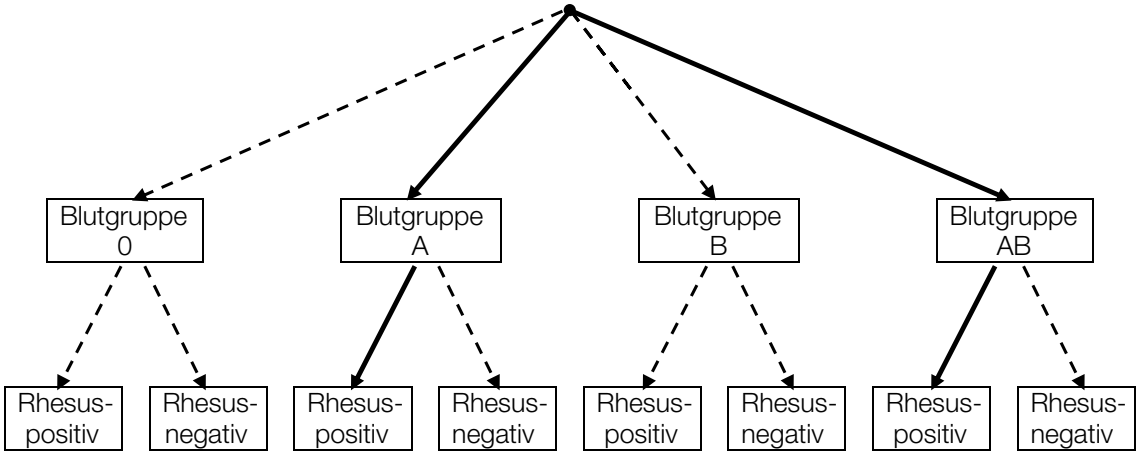


b) – Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit in einer Zufallsstichprobe von 25 Personen in Österreich mindestens 9 Personen die Blutgruppe 0 haben.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Zusätzlich wird je nach Vorliegen eines bestimmten Antigens noch zwischen *Rhesus-positiv* und *Rhesus-negativ* unterschieden. 85 % aller Personen in Österreich sind Rhesus-positiv, alle anderen Rhesus-negativ, wobei die Verteilung bei allen Blutgruppen gleich ist.

Im nachstehenden Baumdiagramm sind alle möglichen Fälle für Blutgruppen mit ihrem Rhesusfaktor aufgelistet.



– Vervollständigen Sie das obige Baumdiagramm, indem Sie die Pfeile mit den jeweiligen Wahrscheinlichkeiten beschriften.
– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Person in Österreich die Blutgruppe B Rhesus-negativ hat.
– Beschreiben Sie, welches Ereignis durch die beiden fett gezeichneten (nicht strichlierten) Pfade angegeben wird.

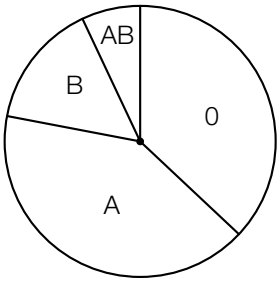
Möglicher Lösungsweg

a) Blutgruppe 0: $\frac{37}{100} \cdot 360° = 133{,}2°$

Blutgruppe A: $\frac{41}{100} \cdot 360° = 147{,}6°$

Blutgruppe B: $\frac{15}{100} \cdot 360° = 54°$

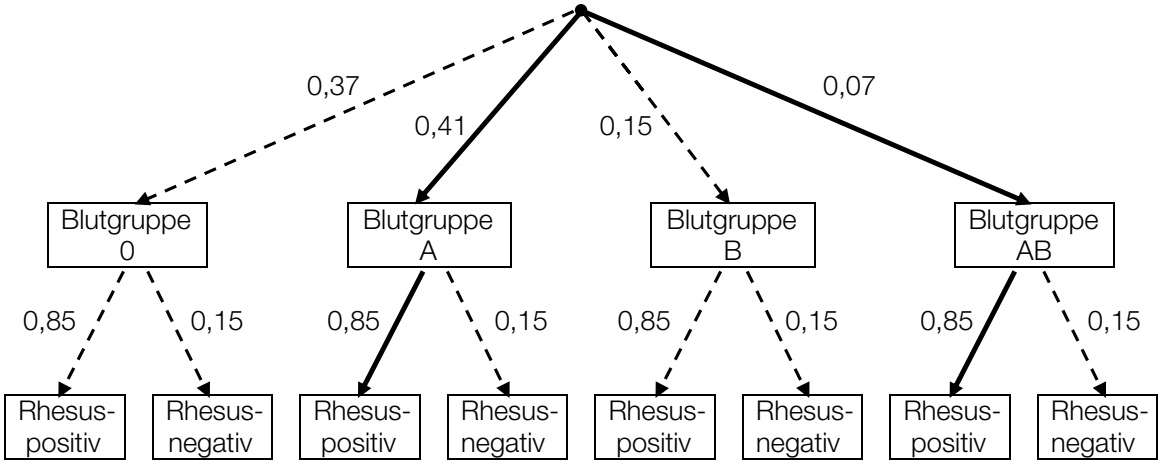
Blutgruppe AB: $360° - 133{,}2° - 147{,}6° - 54° = 25{,}2°$



b) X … Anzahl der Personen mit Blutgruppe 0
Binomialverteilung: $n = 25$, $p = 0{,}37$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$P(X \geq 9) = 1 - P(X \leq 8) = 0{,}61524\ldots \approx 61{,}52\ \%$

c)



P(„Blutgruppe B Rhesus-negativ“) $= 0{,}15 \cdot 0{,}15 = 0{,}0225 = 2{,}25\ \%$

Es wird das Ereignis beschrieben, dass eine (zufällig ausgewählte) Person Blutgruppe A oder AB hat und Rhesus-positiv ist.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für die richtige Berechnung der Winkel der jeweiligen Sektoren
1 × A: für das richtige Veranschaulichen im Kreisdiagramm

b) 1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit

c) 1 × A: für das richtige Vervollständigen des Baumdiagramms
1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit
1 × C: für eine richtige Beschreibung

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Vernetzte Welt*

Aufgabennummer: A_245

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Zu Beginn des Jahres 2005 gab es weltweit 5,5 Millionen Personen, die im Internet ein bestimmtes soziales Netzwerk verwendeten. Die Anzahl der Nutzer/innen nahm exponentiell zu. Zu Beginn des Jahres 2011 verwendeten bereits 820 Millionen Personen dieses soziale Netzwerk. Die Anzahl der Personen, die dieses soziale Netzwerk verwenden, soll durch eine Funktion F beschrieben werden.

– Erstellen Sie eine Gleichung dieser Funktion F.

t ... Zeit in Jahren, $t = 0$ entspricht dem Beginn des Jahres 2005
$F(t)$ ... Anzahl der Personen, die das soziale Netzwerk zur Zeit t verwenden, in Millionen

b) Nach einer Faustregel der Technologiebranche verdoppelt sich die Geschwindigkeit von Computerprozessoren alle 18 Monate. In einem Buch wird behauptet, dass demnach die Computerprozessoren im Jahr 2025 etwa 64-mal so schnell sein werden wie im Jahr 2013.*

– Überprüfen Sie nachweislich, ob diese Behauptung richtig ist.

c) Die Bauteile eines elektronischen Systems haben innerhalb eines Jahres unabhängig voneinander eine konstante Ausfallwahrscheinlichkeit von 2 %.

Das elektronische System fällt aus, wenn mindestens 1 Bauteil ausfällt.

– Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein elektronisches System, in dem 10 Bauteile vernetzt sind, innerhalb eines Jahres ausfällt.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

** Vgl. Schmidt, E. & Cohen, J. (2013). Die Vernetzung der Welt. Ein Blick in unsere Zukunft. Hamburg: Rowohlt. S. 15.*

* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

a) $F(t) = F_0 \cdot a^t$

$F_0 = 5{,}5$
$820 = 5{,}5 \cdot a^6 \Rightarrow a = \sqrt[6]{\frac{820}{5{,}5}} = 2{,}30272\ldots \approx 2{,}3027$
$F(t) = 5{,}5 \cdot 2{,}3027^t$

b) 12 Jahre entsprechen der 8-fachen Verdoppelungszeit $\left(\frac{12}{1{,}5} = 8\right)$.
$2^8 = 256$

Die Behauptung ist daher falsch.

c) Binomialverteilung:
X ... Anzahl der Bauteile, die innerhalb eines Jahres ausfallen
$n = 10$, $p = 0{,}02$

Berechnung mittels Technologieeinsatz: $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 0{,}1829\ldots \approx 18{,}3\ \%$

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Erstellen der Funktionsgleichung

b) 1 × D: für den richtigen Nachweis

c) 1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Teilchenbeschleuniger*

Aufgabennummer: A_239

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Am Forschungsinstitut CERN wird mithilfe moderner Teilchenbeschleuniger physikalische Grundlagenforschung betrieben. In einem Teilchenbeschleuniger werden elektrisch geladene Teilchen auf hohe Geschwindigkeiten beschleunigt.

a) Die Teilchen bewegen sich in einem ringförmigen Tunnel nahezu mit Lichtgeschwindigkeit. Sie machen dabei in einer Sekunde a Umläufe und legen in dieser Zeit rund $3 \cdot 10^8$ m zurück.

– Erstellen Sie eine Formel für die Berechnung der Länge u eines Umlaufs in Kilometern.

$u =$ _____

b) Wenn Teilchen im Teilchenbeschleuniger kollidieren, können neue Teilchen entstehen.

Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Kollision ein Teilchen eines bestimmten Typs entsteht, beträgt 3,4 %.

Die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis E wird mit $P(E) = \binom{500}{2} \cdot 0{,}034^2 \cdot (1 - 0{,}034)^{498}$ berechnet.

– Beschreiben Sie im gegebenen Sachzusammenhang ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit so berechnet wird.
– Berechnen Sie, wie viele dieser Teilchen im Mittel entstehen, wenn 1 000 Kollisionen stattfinden.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Im Zentrum eines Atoms befindet sich der Atomkern. Vereinfacht können sowohl der Atomkern als auch das gesamte Atom als kugelförmig angenommen werden.
In einer Broschüre wird beschrieben, wie klein ein Atomkern im Vergleich zum gesamten Atom ist: „Hätte ein Atomkern 1 cm Durchmesser, so wäre der Durchmesser des gesamten Atoms 100 m."

– Berechnen Sie den Durchmesser eines Atoms, wenn der Durchmesser des Atomkerns 10^{-14} m beträgt.

Jemand liest die Broschüre und behauptet: „Das Volumen des Atomkerns macht dann 0,01 % des Gesamtvolumens eines Atoms aus."

– Begründen Sie, warum diese Behauptung falsch ist.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $u = \frac{3 \cdot 10^8}{a \cdot 10^3}$

b) Es wird die Wahrscheinlichkeit berechnet, dass bei 500 Kollisionen genau 2 Teilchen dieses Typs entstehen.

$1\,000 \cdot 0{,}034 = 34$

Bei 1 000 Kollisionen entstehen im Mittel 34 Teilchen dieses Typs.

c) $\frac{100}{0{,}01} = \frac{d}{10^{-14}} \Rightarrow d = 10^{-10}$

Der Durchmesser des Atoms beträgt 10^{-10} m.

Das Verhältnis der Durchmesser beträgt $1 : 10^4$.
Bei der Berechnung des Volumens tritt die dritte Potenz des Durchmessers auf. Das Verhältnis der Volumina beträgt daher $1 : 10^{12}$. 0,01 % entsprechen dem Verhältnis $1 : 10^4$.

oder:

rechnerisch:

$$\frac{V_{\text{Atomkern}}}{V_{\text{Atom}}} = \frac{\frac{\pi}{6} \cdot (10^{-14})^3}{\frac{\pi}{6} \cdot (10^{-10})^3} = 10^{-12}$$

Das Verhältnis der Volumina beträgt daher $1 : 10^{12}$. 0,01 % entsprechen dem Verhältnis $1 : 10^4$.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Formel

b) 1 × C: für die richtige Beschreibung des Ereignisses
1 × B: für die richtige Berechnung des Erwartungswertes

c) 1 × B: für die richtige Berechnung des Durchmessers
1 × D: für die richtige Begründung (Auch eine Begründung durch Nachrechnen ist als richtig zu werten.)

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Marathon*

Aufgabennummer: A_240

Technologieeinsatz:	möglich ☒	erforderlich ☐

Die Streckenlänge eines Marathons beträgt 42,195 km.

a) Im Laufsport wird als Maß für das Tempo oftmals die *Pace* verwendet. Die für einen Kilometer benötigte Zeit wird dabei in der Schreibweise „Minuten:Sekunden“ angegeben. Eine Pace von 5:25 bedeutet beispielsweise, dass eine Strecke von 1 Kilometer Länge in 5 Minuten und 25 Sekunden zurückgelegt wird.

Die Weltrekordhalterin Paula Radcliffe lief ihren schnellsten Marathon in 2 Stunden, 15 Minuten und 25 Sekunden.

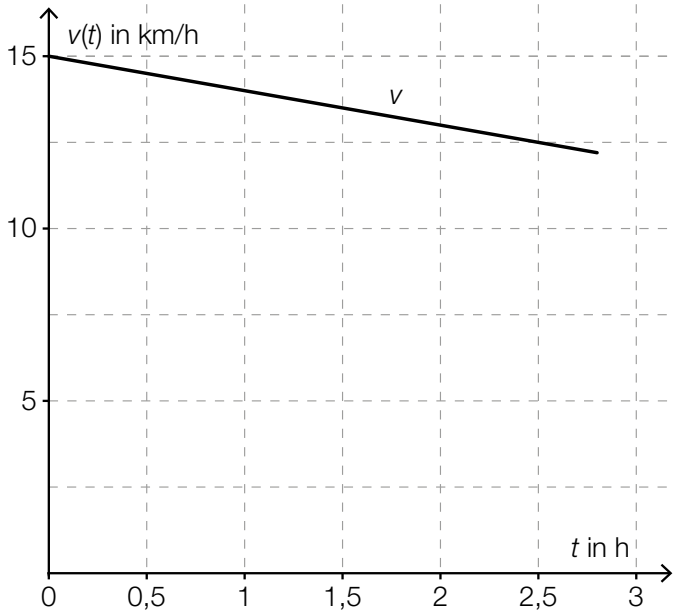
– Berechnen Sie für diesen Lauf ihre mittlere Pace in der beschriebenen Schreibweise.

b) Max und Franz starten gleichzeitig. Max läuft die Marathonstrecke mit einer mittleren Geschwindigkeit von 14 km/h, Franz mit 12 km/h. Max überquert also als Erster der beiden die Ziellinie.

– Berechnen Sie, wie lange Max im Ziel auf Franz warten muss.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Der Verlauf der Geschwindigkeit einer Marathonläuferin lässt sich näherungsweise durch eine lineare Funktion v beschreiben. Der Graph dieser Funktion ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



– Ermitteln Sie aus der obigen Abbildung die Steigung dieser linearen Funktion.
– Interpretieren Sie b in der nachstehenden Gleichung im gegebenen Sachzusammenhang unter Angabe der entsprechenden Einheit.

$$\int_0^b v(t)\,\mathrm{d}t = 42{,}195 \text{ km}$$

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Gesamtdauer in Sekunden:
$2 \cdot 3600 + 15 \cdot 60 + 25 = 8125$

$\frac{8125\ \text{s}}{42{,}195\ \text{km}} = 192{,}55\ldots\ \frac{\text{s}}{\text{km}} \Rightarrow$ 3 Minuten 12,55… Sekunden $\approx$ 3:13

Ihre mittlere Pace beträgt 3:13.

b) $\frac{42{,}195\ \text{km}}{12\ \text{km/h}} - \frac{42{,}195\ \text{km}}{14\ \text{km/h}} = 0{,}50\ldots\ \text{h} \approx 0{,}5\ \text{h}$

Max muss im Ziel rund eine halbe Stunde auf Franz warten.

c) $k = \frac{-2{,}5\ \text{km/h}}{2{,}5\ \text{h}} = -1\ \text{km/h}^2$

Das Angeben der Einheit der Steigung ist für die Punktevergabe nicht erforderlich.

b ist die Laufzeit für die gesamte Marathonstrecke in Stunden.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für die richtige Berechnung der mittleren Pace in der beschriebenen Schreibweise

b) 1 × A: für einen richtigen Ansatz
1 × B: für die richtige Berechnung der Wartezeit

c) 1 × C1: für das richtige Ermitteln der Steigung (Das Angeben der Einheit der Steigung ist für die Punktevergabe nicht erforderlich.)
1 × C2: für die richtige Interpretation von *b* im gegebenen Sachzusammenhang unter Angabe der Einheit

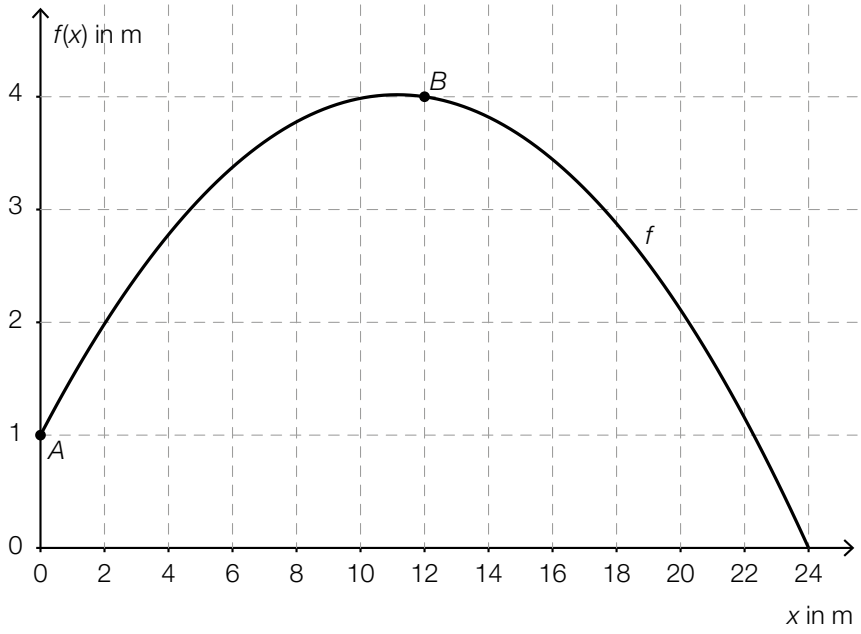
BMB
Bundesministerium
für Bildung

Baseball*

Aufgabennummer: A_237

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Die Flugbahn eines Baseballs kann näherungsweise durch den Graphen einer Funktion f beschrieben werden (siehe nachstehende Abbildung).



– Ermitteln Sie den Steigungswinkel der Geraden durch die Punkte A und B.

Es soll diejenige Stelle x_0 ermittelt werden, an der die Steigung der Tangente an den Graphen von f gleich der Steigung der Geraden durch die Punkte A und B ist.

– Veranschaulichen Sie in der obigen Abbildung, wie man x_0 näherungsweise grafisch ermitteln kann.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Ein Baseball-Verein überlegt, Fan-Shirts über eine Online-Plattform zu vertreiben. Die Kosten für die Herstellung eines T-Shirts belaufen sich auf € 6,40. Für Betreuung und Servermiete der Online-Plattform sind monatlich € 570 zu zahlen.

– Stellen Sie die zugehörige lineare Kostenfunktion K auf.

x ... Anzahl der T-Shirts
$K(x)$ ... monatliche Kosten bei x T-Shirts in Euro (€)

Man rechnet damit, dass 75 T-Shirts pro Monat produziert und auch verkauft werden.

– Bestimmen Sie denjenigen Verkaufspreis pro Stück, ab dem die T-Shirts ohne Verlust verkauft werden können.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

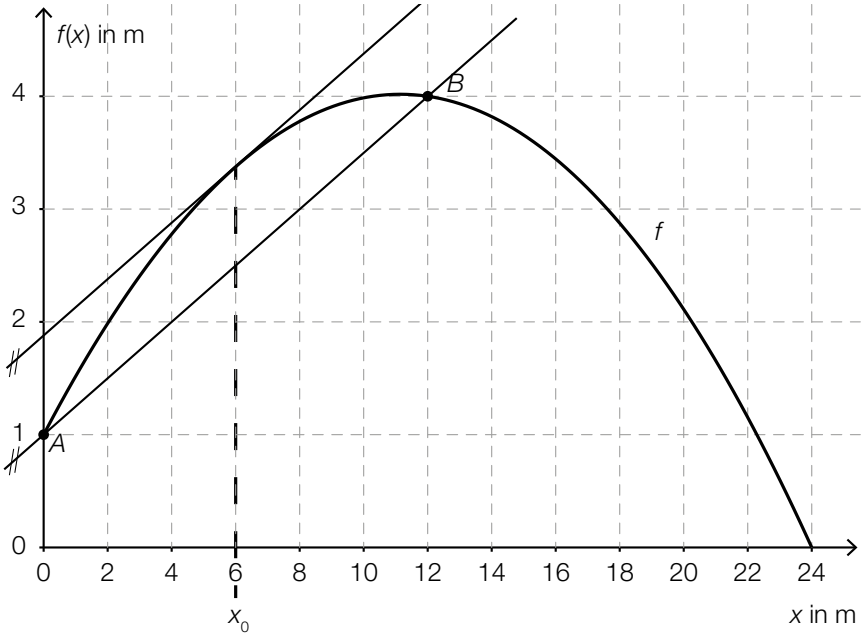
Möglicher Lösungsweg

a) Steigung k der Geraden durch die Punkte A und B:

$k = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

Steigungswinkel α:

$\alpha = \arctan(k) = 14{,}036\ldots° \approx 14{,}04°$



b) $K(x) = 6{,}4 \cdot x + 570$

$K(75) = 6{,}4 \cdot 75 + 570 = 1\,050$

$\frac{1\,050}{75} = 14$

Die T-Shirts können ab einem Verkaufspreis von € 14 pro Stück ohne Verlust verkauft werden.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für die richtige Berechnung des Steigungswinkels
1 × A: für das richtige Veranschaulichen

b) 1 × A: für das richtige Aufstellen der linearen Kostenfunktion K
1 × B: für die richtige Berechnung des Verkaufspreises pro Stück

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Brennofen*

Aufgabennummer: A_236

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Bei einem Keramik-Produzenten werden Krüge hergestellt. Sobald ein Krug aus dem Brennofen genommen wird, beginnt er abzukühlen. Der Temperaturverlauf lässt sich durch die Funktion T beschreiben:

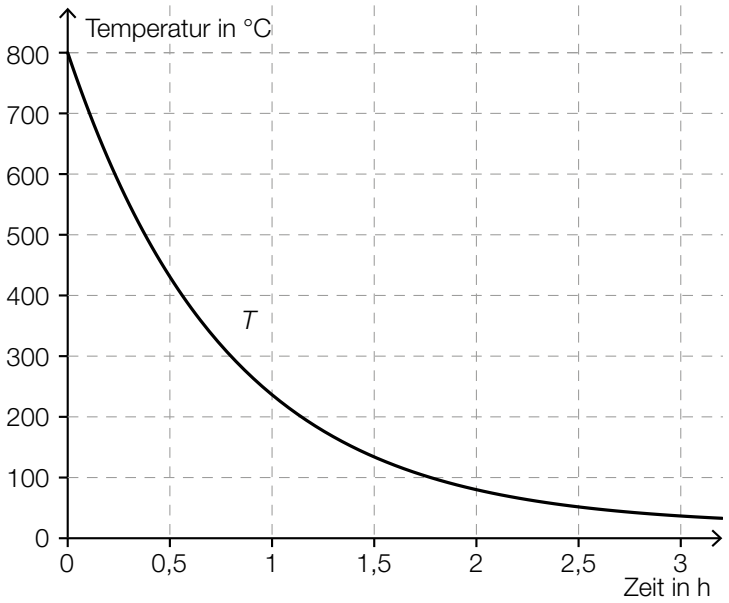
$T(t) = 20 + 780 \cdot e^{-k \cdot t}$

t ... Zeit seit der Entnahme aus dem Brennofen in Stunden (h)
$T(t)$ ... Temperatur des Kruges zur Zeit t in Grad Celsius (°C)
k ... Konstante

a) Ein Krug hat 2 Stunden nach der Entnahme aus dem Brennofen eine Temperatur von 80 °C.

– Berechnen Sie die Temperatur des Kruges 5 Stunden nach der Entnahme aus dem Brennofen.

b) Der Graph der Funktion T ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt:



– Skizzieren Sie in der obigen Abbildung diejenige Tangente an den Funktionsgraphen, deren Ordinatenabschnitt (Achsenabschnitt auf der vertikalen Achse) 600 beträgt.
– Beschreiben Sie, was mit dem folgenden Ausdruck im gegebenen Sachzusammenhang berechnet wird: $\frac{T(3) - T(1)}{2}$

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Ihnen wird folgende fehlerhafte Berechnung der Ableitungsfunktion T' vorgelegt:
$T'(t) = 780 \cdot e^{-k \cdot t}$

– Geben Sie an, welche Ableitungsregel hier vermutlich verletzt wurde.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

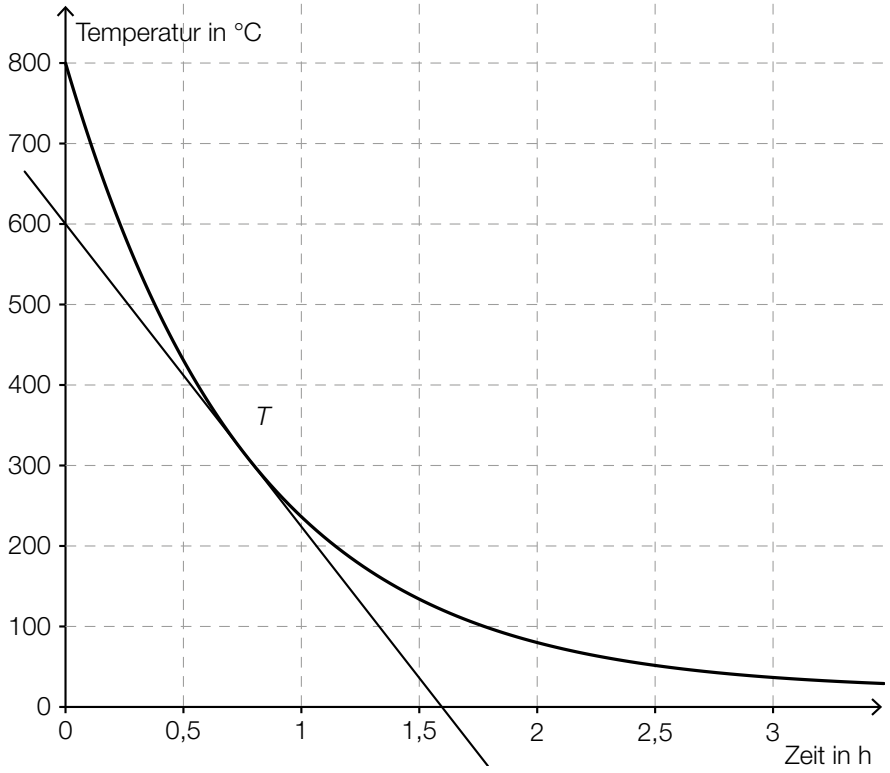
a) $80 = 20 + 780 \cdot e^{-k \cdot 2}$

Lösung mittels Technologieeinsatz: $k = \frac{1}{2} \cdot \ln(13) = 1{,}2824...$

$T(5) = 21{,}2... \approx 21$

Die Temperatur des Kruges beträgt 5 Stunden nach der Entnahme aus dem Brennofen rund 21 °C.

b)



Damit berechnet man die mittlere Änderungsrate der Temperatur im Zeitintervall [1; 3].

c) Die Kettenregel wurde nicht angewendet.

oder:

Die innere Ableitung wurde nicht berücksichtigt.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für die richtige Berechnung der Temperatur

b) 1 × A: für das richtige Skizzieren der Tangente
1 × C: für die richtige Beschreibung im gegebenen Sachzusammenhang

c) 1 × C: für das richtige Angeben der Ableitungsregel oder die richtige Beschreibung

Gürtelproduktion*

Aufgabennummer: B_351

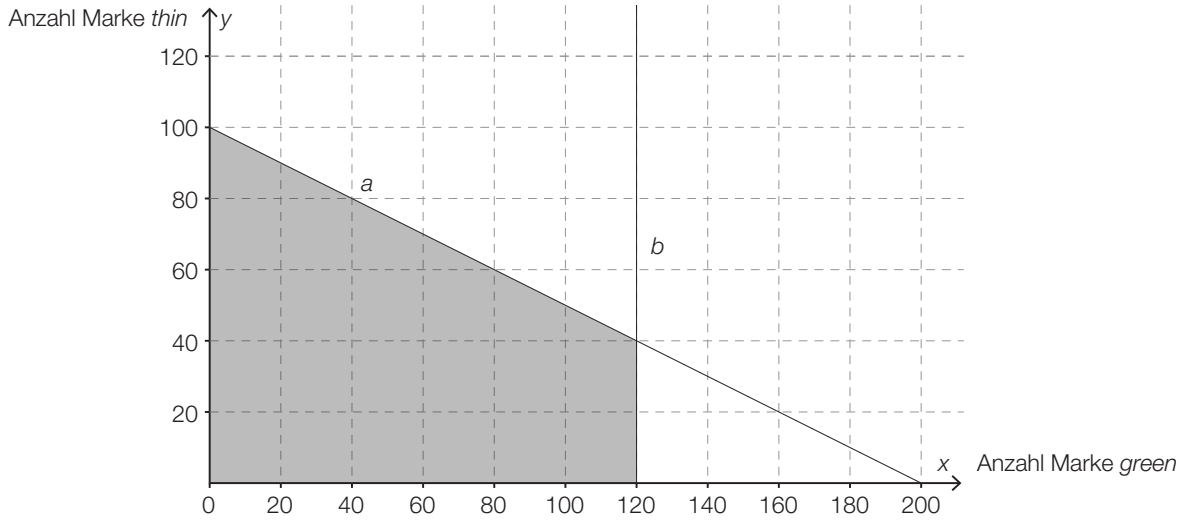
Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Ein Unternehmen stellt unterschiedliche Ledergürtel her.

a) Die Herstellung eines Gürtels der Marke *dark* dauert 5 Minuten, die eines Gürtels der Marke *small* dauert 2 Minuten. Insgesamt stehen pro Tag höchstens 600 Minuten für die Gürtelproduktion zur Verfügung.
Die Lederbelieferung erlaubt nur die Produktion von maximal 200 Gürteln pro Tag (gleich welcher Marke).

– Stellen Sie die beiden Ungleichungen auf, die diese Produktionseinschränkungen für x Gürtel der Marke *dark* und y Gürtel der Marke *small* beschreiben.

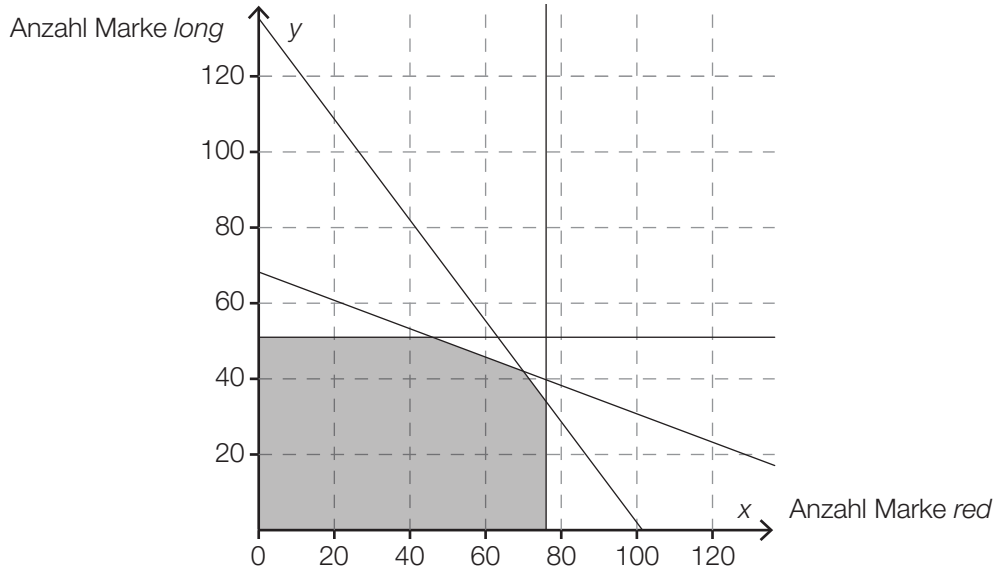
b) In der nachstehenden Grafik ist der Lösungsbereich der Produktionseinschränkungen für die Gürtelproduktion der Marken *green* und *thin* angegeben.



– Stellen Sie die Gleichung der Geraden a auf.
– Stellen Sie die Gleichung der Geraden b auf.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) In der nachstehenden Abbildung ist der Lösungsbereich der Produktionseinschränkungen für die Gürtelproduktion der Marken *red* und *long* dargestellt.



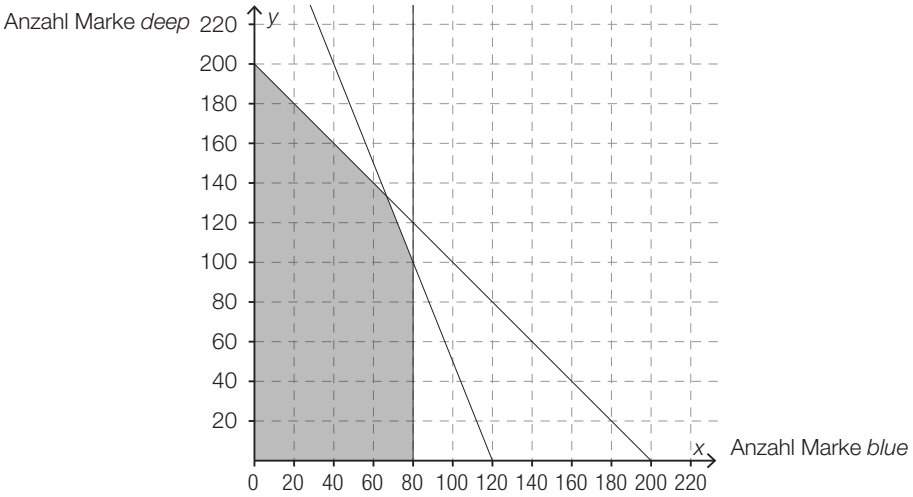
Die Zielfunktion Z beschreibt den Gewinn in Euro: $Z(x, y) = 2 \cdot x + 3 \cdot y$

x ... Anzahl der Gürtel der Marke *red*
y ... Anzahl der Gürtel der Marke *long*

Dieser Gewinn soll maximiert werden.

– Zeichnen Sie diejenige Gerade, für die der optimale Wert der Zielfunktion angenommen wird, in der obigen Abbildung ein.
– Lesen Sie die optimalen Produktionsmengen näherungsweise ab.
– Ermitteln Sie den maximalen Gewinn.

d) In der nachstehenden Abbildung ist der Lösungsbereich der Produktionseinschränkungen für die Gürtelproduktion der Marken *blue* und *deep* dargestellt.



Jemand behauptet, dass der maximale Gewinn erreicht wird, wenn 60 Gürtel der Marke *blue* und 120 Gürtel der Marke *deep* produziert und verkauft werden.

– Erklären Sie, warum man ohne Kenntnis der Zielfunktion beurteilen kann, dass diese Behauptung falsch ist.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

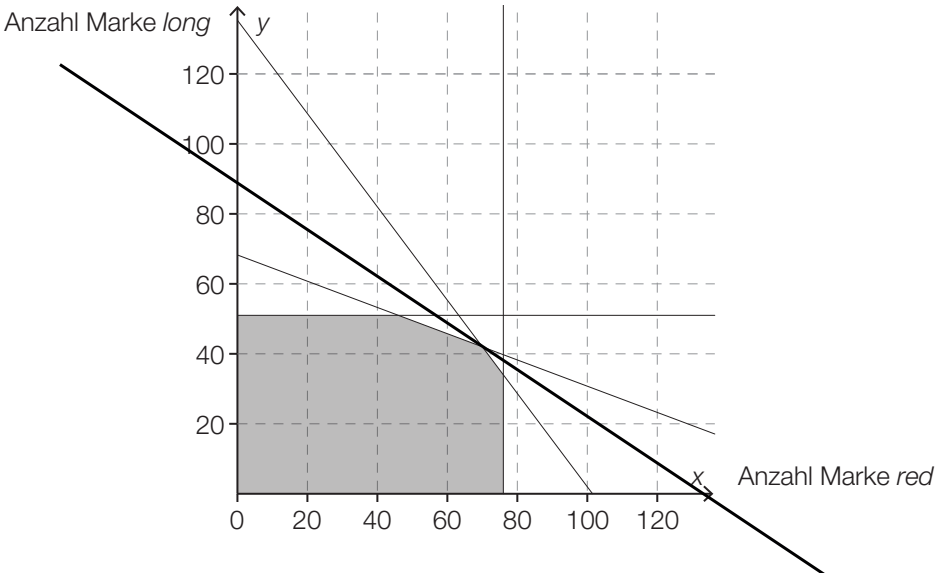
Möglicher Lösungsweg

a) $5 \cdot x + 2 \cdot y \leq 600$
$x + y \leq 200$

b) a: $y = -\frac{1}{2} \cdot x + 100$
b: $x = 120$

Auch eine Angabe als Ungleichung ist als richtig zu werten.

c)



optimale Produktionsmengen:

70 Stück der Marke *red*
Toleranzbereich: [67; 73]

42 Stück der Marke *long*
Toleranzbereich: [41; 45]

$2 \cdot 70 + 3 \cdot 42 = 266$
Der maximale Gewinn beträgt € 266.

d) Wenn 60 Gürtel der Marke *blue* und 120 Gürtel der Marke *deep* produziert und verkauft werden, kann der maximale Gewinn nicht erreicht werden, weil der Punkt (60|120) nicht am Rand des Lösungsbereichs liegt.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A1: für das richtige Aufstellen der Ungleichung mithilfe der Information bezüglich der zur Verfügung stehenden Zeit
1 × A2: für das richtige Aufstellen der Ungleichung mithilfe der Information bezüglich der Belieferungseinschränkung

b) 1 × A1: für das richtige Aufstellen der Gleichung der Geraden *a*
1 × A2: für das richtige Aufstellen der Gleichung der Geraden *b*
Auch eine Angabe als Ungleichung ist als richtig zu werten.

c) 1 × B1: für das richtige Einzeichnen der Geraden, für die der optimale Wert der Zielfunktion angenommen wird
1 × C: für das richtige Ablesen der optimalen Produktionsmengen
(Toleranzbereich: [67; 73] bzw. [41; 45])
1 × B2: für das richtige Ermitteln des maximalen Gewinns

d) 1 × D: für die richtige Erklärung

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Planeten (2)*

Aufgabennummer: A_154

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Die folgenden Daten zu den Planeten unseres Sonnensystems sind gegeben:

	Merkur	Venus	Erde	Mars
große Bahnhalbachse in km	57 909 175	108 208 930	149 597 890	227 936 640
mittlerer Äquatorradius in km	2 440	6 050	6 380	3 400
	Jupiter	**Saturn**	**Uranus**	**Neptun**
große Bahnhalbachse in km	778 412 020	1 426 725 400	2 870 972 200	4 498 252 900
mittlerer Äquatorradius in km	71 490	60 270	25 560	24 760

a) Für eine Astronomie-Ausstellung sollen die Planeten maßstabgetreu verkleinert als Kugelmodelle aufgestellt werden. Die größte vorhandene Kugel hat einen Radius von 42 cm und ist für den Planeten Jupiter reserviert.

– Erklären Sie, warum eine Kugel mit einem Radius von ca. 2 cm für den Planeten Mars passt.

b) Das 3. Kepler'sche Gesetz lautet: „Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich wie die dritten Potenzen der großen Bahnhalbachsen." Daher gilt:

$a_1^3 : a_2^3 = u_1^2 : u_2^2$

a_1 ... große Bahnhalbachse des Planeten 1
a_2 ... große Bahnhalbachse des Planeten 2
u_1 ... Umlaufzeit des Planeten 1
u_2 ... Umlaufzeit des Planeten 2

– Berechnen Sie die Umlaufzeit des Planeten Neptun. (Hinweis: Die Umlaufzeit der Erde beträgt 1 Jahr.)

c) Die großen Bahnhalbachsen zweier Planeten sollen auf einem Zahlenstrahl veranschaulicht werden. Dabei soll 1 cm auf dem Zahlenstrahl einer tatsächlichen Streckenlänge von 10^8 km entsprechen.

– Veranschaulichen Sie auf einem solchen Zahlenstrahl jeweils ausgehend vom Nullpunkt die großen Bahnhalbachsen der Planeten Erde und Saturn.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

* ehemalige Klausuraufgabe

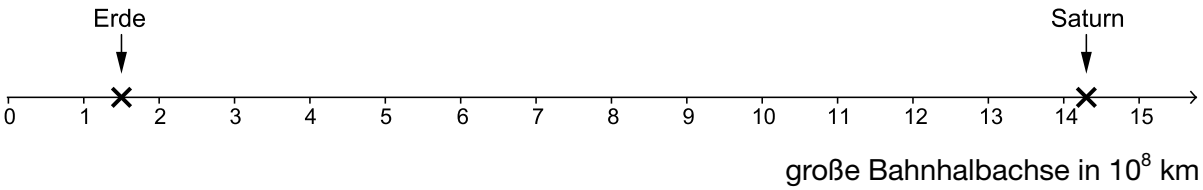
Möglicher Lösungsweg

a) Das Verhältnis der mittleren Äquatorradien von Jupiter und Mars (71 490 : 3 400) entspricht etwa dem Verhältnis der Kugelradien der Modelle (42 : 2).

b) $149\,597\,890^3 : 4\,498\,252\,900^3 = 1 : u_2^2$
$u_2 \approx 165$

Die Umlaufzeit des Planeten Neptun beträgt ca. 165 Jahre.

c) Erde: 149 597 890 km $\triangleq$ 1,49597890 cm $\approx$ 1,5 cm
Saturn: 1 426 725 400 km $\triangleq$ 14,26725400 cm $\approx$ 14,3 cm



Hinweis: Die Skalierung des Zahlenstrahls kann im vorliegenden Ausdruck durch eine unpassende Druckeinstellung gering abweichen.

Lösungsschlüssel

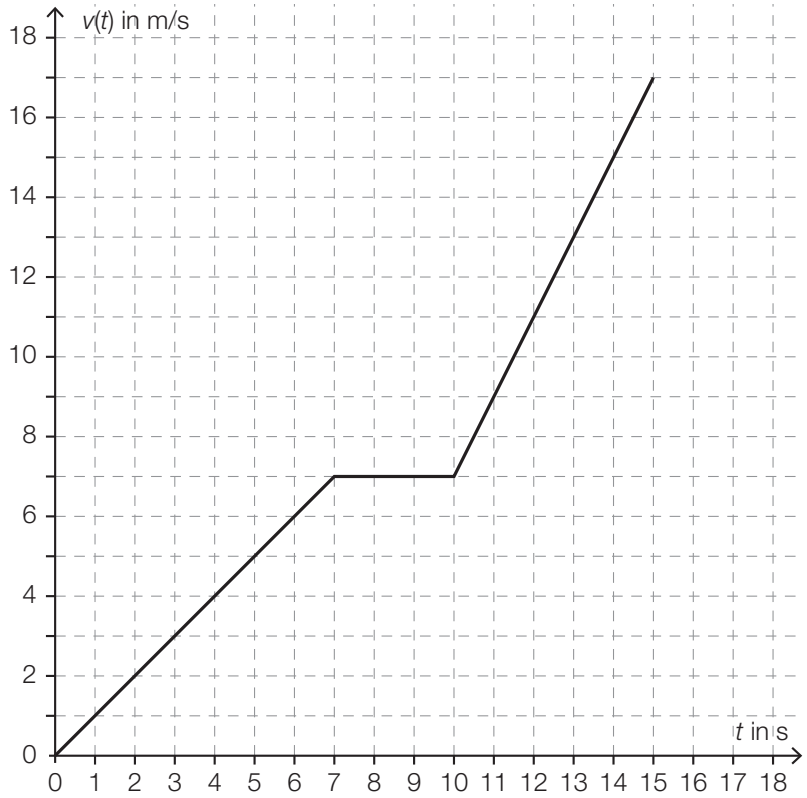
a) 1 × D: für die richtige Erklärung
b) 1 × B: für die richtige Berechnung der Umlaufzeit
c) 1 × A: für das richtige Veranschaulichen beider Planeten auf dem Zahlenstrahl im korrekten Maßstab inklusive richtiger Beschriftung

LKW-Test*

Aufgabennummer: B_339

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

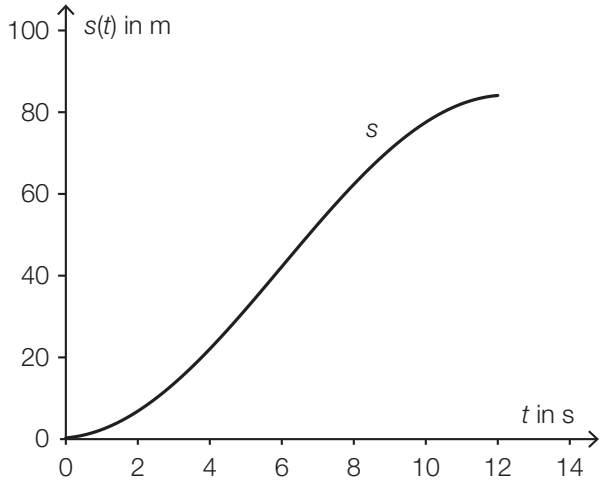
a) Im nachstehenden Diagramm ist der Geschwindigkeitsverlauf einer LKW-Testfahrt vereinfacht dargestellt.



– Interpretieren Sie den Verlauf des Graphen im Zeitintervall]7; 10[im gegebenen Sachzusammenhang.
– Bestimmen Sie den in den ersten 10 Sekunden zurückgelegten Weg.
– Erstellen Sie für das obige Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm das zugehörige Beschleunigung-Zeit-Diagramm.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Bei einem Test eines LKW wird dieser auf einer waagrechten Teststrecke zuerst beschleunigt und unmittelbar danach abgebremst. Dabei ergibt sich das nachstehende Weg-Zeit-Diagramm.



– Begründen Sie, warum die Wendestelle denjenigen Zeitpunkt angibt, zu dem der Bremsvorgang beginnt.

Die dargestellte Kurve ist näherungsweise der Graph der Funktion s mit:

$$s(t) = 42 \cdot \sin\left(\frac{1}{4} \cdot t - 1{,}5\right) + 42{,}2 \quad \text{mit} \quad 0 \le t \le 12$$

t ... Zeit in Sekunden (s)
$s(t)$ ... bis zum Zeitpunkt t zurückgelegter Weg in Metern (m)

– Berechnen Sie, zu welchem Zeitpunkt der Bremsvorgang beginnt.

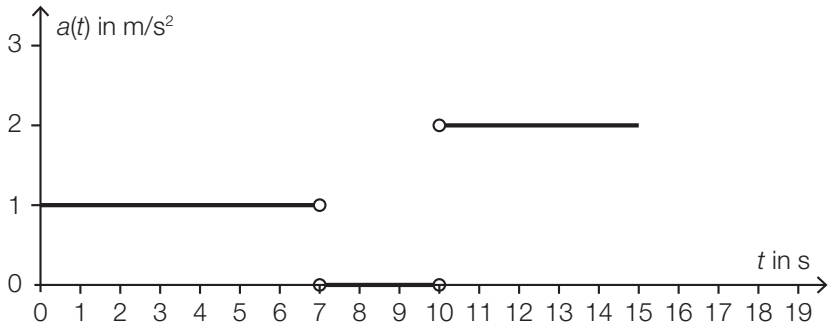
Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Im Zeitintervall]7; 10[fährt der LKW mit konstanter Geschwindigkeit.

$$s = \frac{7 \cdot 7}{2} + 3 \cdot 7 = 45{,}5$$

Der LKW legt in den ersten 10 Sekunden insgesamt 45,5 Meter zurück.



Als Ableitungsfunktion ist die Beschleunigung-Zeit-Funktion an den Sprungstellen nicht definiert. Es ist nicht gefordert, diese Definitionslücken zu berücksichtigen.

b) Der Beginn des Bremsvorgangs ist derjenige Zeitpunkt, zu dem die Geschwindigkeit abzunehmen beginnt. Die Geschwindigkeit entspricht der Steigung der Funktion s. Diese nimmt bis zur Wendestelle zu und anschließend ab.

$s''(t) = -2{,}625 \cdot \sin\left(\frac{1}{4} \cdot t - 1{,}5\right)$
$s''(t) = 0$
$\frac{1}{4} \cdot t - 1{,}5 = 0$
Lösung im Intervall $0 \leq t \leq 12$:
$t = 6$ s

Lösungsschlüssel

a) 1 × C: für die richtige Interpretation als konstante Geschwindigkeit
1 × B: für das richtige Bestimmen des zurückgelegten Weges
1 × A: für das richtige Erstellen des Beschleunigung-Zeit-Diagramms
(Es ist nicht gefordert, die Definitionslücken zu berücksichtigen.)

b) 1 × D: für die richtige Begründung
1 × B: für die richtige Berechnung der Wendestelle

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Körpergröße*

Aufgabennummer: A_244

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

An einer Universität werden Daten zur Körpergröße der männlichen Sport-Studenten erhoben.

a) Die Körpergröße von 10 zufällig ausgewählten Studenten wird gemessen.

Körpergröße in cm	168	169	171	174	179	181	182	183	188	191

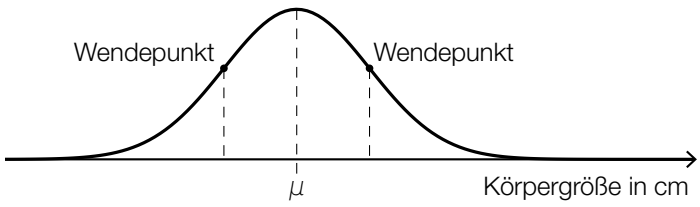
– Berechnen Sie den arithmetischen Mittelwert und die Standardabweichung der Körpergrößen.

Bei der Weiterverarbeitung der Daten wurde aufgrund eines Tippfehlers anstelle eines Messwerts aus der obigen Tabelle eine Körpergröße von mehr als 1 000 cm eingegeben. Dadurch ändert sich der Median von 180,0 cm auf 181,5 cm.

– Geben Sie diejenigen Messwerte an, die für diese fehlerhafte Eingabe in Frage kommen.

b) Man nimmt an, dass die Körpergröße der Studenten mit einem Erwartungswert von $\mu = 178{,}0$ cm und einer Standardabweichung von $\sigma = 6{,}5$ cm annähernd normalverteilt ist.

– Berechnen Sie diejenige Körpergröße, die von einem zufällig ausgewählten Studenten mit einer Wahrscheinlichkeit von 80 % überschritten wird.
– Veranschaulichen Sie in der nachstehenden Abbildung der Dichtefunktion dieser Normalverteilung die Wahrscheinlichkeit, dass die Körpergröße eines zufällig ausgewählten Studenten im Intervall [165; 191] liegt.



Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

* ehemalige Klausuraufgabe

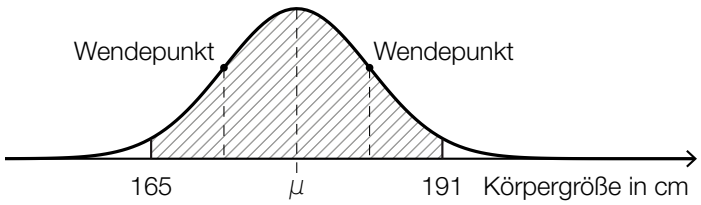
Möglicher Lösungsweg

a) Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$\bar{x} = 178{,}6$ cm
$\sigma = 7{,}499\ldots$ cm $\approx 7{,}5$ cm bzw. $s = 7{,}904\ldots$ cm $\approx 7{,}9$ cm

Messwerte, die für die fehlerhafte Eingabe in Frage kommen: 168, 169, 171, 174, 179

b) X … Körpergröße eines zufällig ausgewählten Studenten in cm
$P(X \geq a) = 0{,}8$
Berechnung von a mittels Technologieeinsatz:
$a = 172{,}52\ldots$ cm

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 80 % wird eine Körpergröße von rund 172,5 cm überschritten.



Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für die richtige Berechnung des arithmetischen Mittelwerts und der Standardabweichung
1 × C: für die richtige Angabe aller Werte, die für die fehlerhafte Eingabe in Frage kommen

b) 1 × B: für die richtige Berechnung der Körpergröße
1 × A: für das richtige Veranschaulichen der Wahrscheinlichkeit in der gegebenen Abbildung (Intervall: $[\mu - 2\sigma; \mu + 2\sigma]$)

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Länge eines Werkstücks

Aufgabennummer: B_309

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

In einer Fertigungsanlage werden Werkstücke erzeugt, deren Längen erfahrungsgemäß normalverteilt sind.

a) Die Länge eines Werkstücks ist normalverteilt mit $\mu = 72{,}3$ mm und $\sigma = 0{,}5$ mm.
Im Rahmen der Qualitätssicherung werden Stichproben vom Umfang $n = 7$ entnommen.

Für jede Stichprobe wird der Mittelwert der Längen bestimmt.

– Geben Sie die Parameter der Verteilung der Stichprobenmittelwerte $\overline{X}$ an.
– Berechnen Sie den zum Erwartungswert symmetrischen Zufallsstreubereich, in dem erwartungsgemäß 95 % aller Stichprobenmittelwerte liegen.
– Beschreiben Sie, wie sich der Stichprobenumfang ändern muss, damit sich die Breite dieses 95-%-Zufallsstreubereichs halbiert.
– Begründen Sie, warum das Maximum der Dichtefunktion der Stichprobenmittelwerte $\overline{X}$ für $n = 7$ größer ist als jenes für $n = 5$.

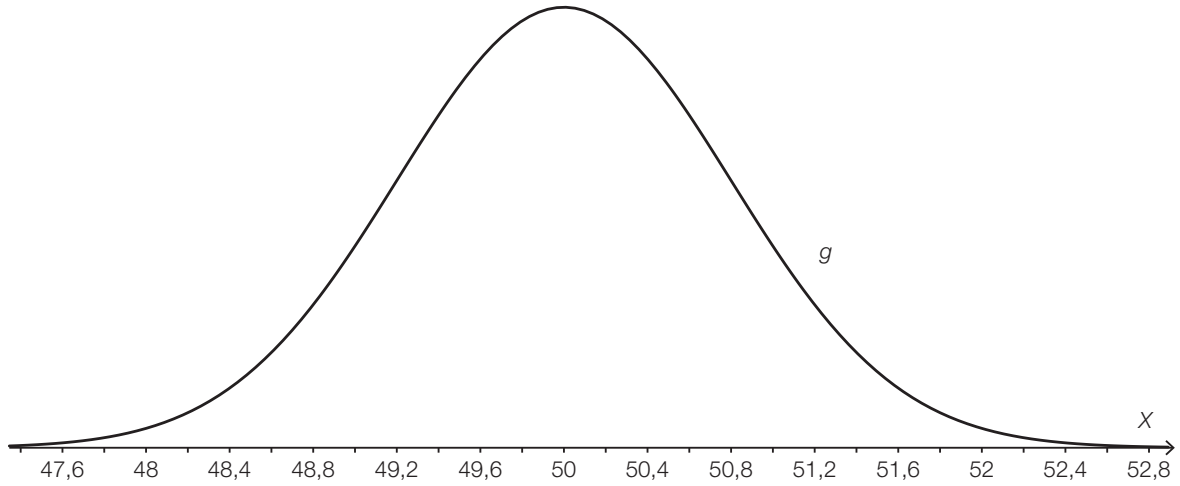
b) Die Länge eines Werkstücks ist normalverteilt mit $\mu = 72{,}3$ mm.
Werkstücke, die zu lang oder zu kurz sind, sind Ausschuss und werden aussortiert.
Abweichungen von bis zu $\pm 0{,}9$ mm vom Erwartungswert werden toleriert.

– Berechnen Sie für eine Standardabweichung von $\sigma = 0{,}5$ mm die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewähltes Werkstück aussortiert wird.
– Berechnen Sie, wie groß die Standardabweichung sein müsste, damit der Ausschussanteil 2 % beträgt.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) In der unten stehenden Abbildung ist der Graph der Dichtefunktion g einer normalverteilten Zufallsvariablen X dargestellt.

– Begründen Sie mithilfe der Dichtefunktion, warum für die zugehörige Verteilungsfunktion G gilt: $G(\mu) = 0{,}5$.
– Veranschaulichen Sie die Wahrscheinlichkeit $1 - G(51)$ in der unten stehenden Abbildung.
– Lesen Sie aus dem Graphen der Dichtefunktion die Standardabweichung σ ab.



Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Die Parameter sind: $\mu_{\bar{X}} = 72{,}3$ mm und $\sigma_{\bar{X}} = \frac{0{,}5}{\sqrt{7}}$ mm.

Zweiseitigen 95-%-Zufallsstreubereich mithilfe der Normalverteilung bestimmen:
$\mu \pm u_{0{,}975} \cdot \sigma_{\bar{X}}$
$u_{0{,}975} = 1{,}959\ldots$
Daraus ergibt sich folgender Zufallsstreubereich in mm: [71,9; 72,7].

Eine Halbierung der Breite erfordert die Vervierfachung des Stichprobenumfangs.

Die Standardabweichung der Stichprobe ist umso kleiner, je größer der Stichprobenumfang n ist. Daher ist der Graph der Dichtefunktion für $n = 7$ schmäler als für $n = 5$. Da der gesamte Flächeninhalt unter dem Graphen der Dichtefunktion immer 1 beträgt, muss das Maximum für $n = 7$ größer sein als für $n = 5$.

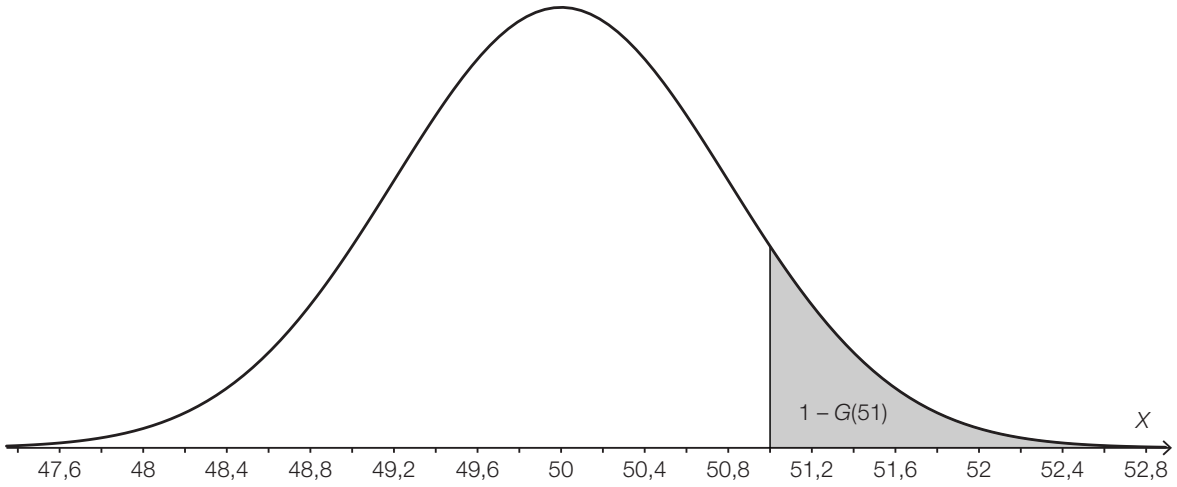
b) $P(\text{„Werkstück wird aussortiert“}) = 1 - P(71{,}4 \leq X \leq 73{,}2) = 0{,}0718\ldots \approx 7{,}2\ \%$

$$\sigma = \frac{x_{ob} - \mu}{u_{0{,}99}} = \frac{73{,}2 - 72{,}3}{2{,}326\ldots} = 0{,}38\ldots \approx 0{,}4$$

Damit der Ausschussanteil 2 % beträgt, müsste die Standardabweichung rund 0,4 mm sein.

c) Der gesamte Flächeninhalt unter dem Graphen der Dichtefunktion beträgt 1. Der Graph der Dichtefunktion ist symmetrisch bezüglich des Erwartungswerts μ.

Daher gilt: $G(\mu) = \int_{-\infty}^{\mu} g(x)\,dx = 0{,}5$.



$\sigma = 0{,}8$ mm
Toleranzbereich: [0,6; 1,0]

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für die richtige Angabe der Parameter
1 × B: für die richtige Berechnung des Zufallsstreubereichs
1 × C: für eine richtige Beschreibung
1 × D: für eine richtige Begründung

b) 1 × B1: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit
1 × B2: für die richtige Berechnung der Standardabweichung

c) 1 × D: für eine richtige Begründung
1 × A: für das richtige Veranschaulichen der Wahrscheinlichkeit als Fläche
1 × C: für das richtige Ablesen der Standardabweichung im Toleranzbereich [0,6; 1,0]

Kosten*

Aufgabennummer: B_319

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

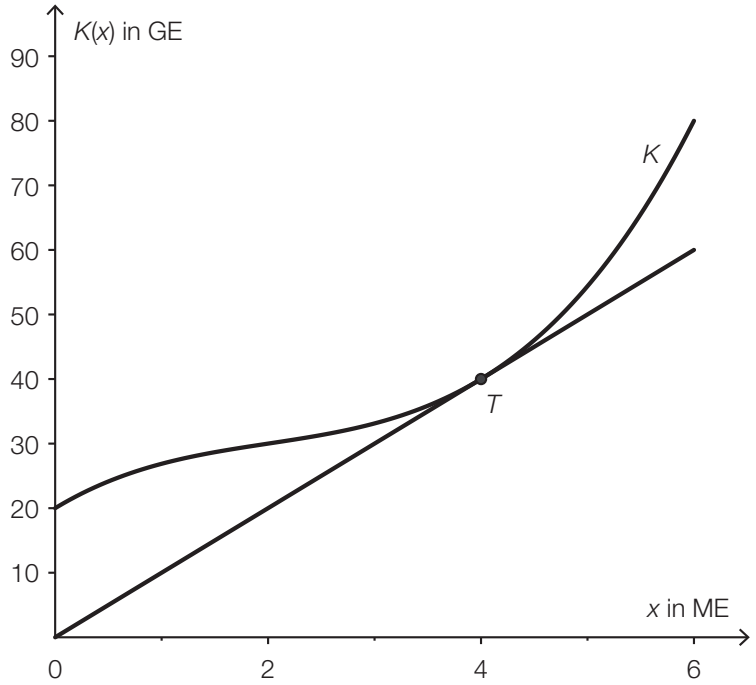
Kostenfunktionen geben den Zusammenhang zwischen der produzierten Menge und den dazugehörigen Gesamtproduktionskosten an.

a) Von einer kubischen Kostenfunktion K mit $K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ kennt man folgende Eigenschaften:

(1) Die Fixkosten betragen 4 GE.
(2) Bei einer Produktionsmenge von 10 ME betragen die Gesamtkosten 2 124 GE.
(3) Das Betriebsoptimum liegt bei 2 ME.
(4) Die langfristige Preisuntergrenze beträgt 14 GE/ME.

– Stellen Sie ein Gleichungssystem zur Ermittlung dieser Kostenfunktion auf.

b) Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen einer anderen Kostenfunktion und die Tangente an diesen Graphen durch den Koordinatenursprung.



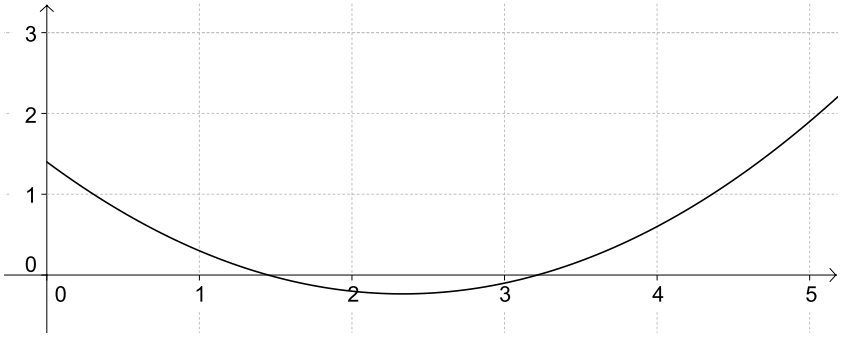
– Interpretieren Sie die Bedeutung der x-Koordinate des Berührpunktes T und der Steigung dieser Tangente im Sachzusammenhang.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Gegeben ist die Kostenfunktion K mit $K(x) = 0{,}1x^3 - 0{,}6x^2 + 5x + 10$ für eine produzierte Menge von $0 \leq x \leq 6$ ME.

– Berechnen Sie die Kostenkehre.
– Geben Sie diejenigen Bereiche an, in denen der Kostenverlauf degressiv bzw. progressiv ist.

d) – Begründen Sie, warum der Funktionsgraph in der nachstehenden Abbildung keine Grenzkostenfunktion einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion beschreiben kann.



Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Stückkostenfunktion: $\overline{K}(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c + \frac{d}{x}$

(1) $K(0) = 4$: $d = 4$

(2) $K(10) = 2\,124$: $2\,124 = 1\,000a + 100b + 10c + d$

(3) $\overline{K}'(2) = 0$: $0 = 4a + b - \frac{d}{4}$

(4) $\overline{K}(2) = 14$: $14 = 4a + 2b + c + \frac{d}{2}$

b) Die x-Koordinate des Berührpunktes T ist das Betriebsoptimum.
Die Steigung dieser Tangente ist die langfristige Preisuntergrenze.

c) $K''(x) = 0$: $0{,}6x - 1{,}2 = 0 \Rightarrow x = 2$
Die Kostenkehre liegt bei 2 ME.

Der Kostenverlauf ist für $x < 2$ ME degressiv.
Der Kostenverlauf ist für $x > 2$ ME progressiv.

d) Der gegebene Funktionsgraph kann keine Grenzkostenfunktion einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion beschreiben, weil eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion streng monoton wachsend ist und daher die Grenzkostenfunktion keine negativen Funktionswerte hat.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A1: für das richtige Aufstellen von Gleichung (1) und (2)
1 × A2: für das richtige Aufstellen von Gleichung (3)
1 × A3: für das richtige Aufstellen von Gleichung (4)

b) 1 × C: für die richtige Interpretation der x-Koordinate und der Steigung im Sachzusammenhang

c) 1 × B: für die richtige Berechnung der Kostenkehre
1 × C: für die Angabe der richtigen degressiven und progressiven Bereiche

d) 1 × D: für die richtige Begründung

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

LED-Lampen (2)*

Aufgabennummer: B_315

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Traditionelle Glühlampen wurden wegen ihrer geringen Energieeffizienz in der EU schrittweise verboten. Als Alternative zu den Glühlampen bieten Hersteller LED-Lampen an.

a) LED-Lampen sind derzeit wesentlich teurer als Glühlampen, zeichnen sich aber durch eine höhere Lebensdauer und durch eine höhere Energieeffizienz aus.

Für eine Lampe, die 1 000 Stunden pro Jahr in Betrieb ist, kann als Leuchtmittel eine Glühlampe oder eine LED-Lampe verwendet werden. Um die dabei anfallenden Kosten zu vergleichen, werden die folgenden Daten benötigt:

	Glühlampe	LED-Lampe
Preis pro Stück	€ 0,75	€ 15,00
Lebensdauer	1 Jahr	25 Jahre
Energiekosten pro Jahr	€ 5	€ 0,60

– Vervollständigen Sie die nachstehende Tabelle für diesen Kostenvergleich.

Verwendungsdauer in Jahren	insgesamt angefallene Kosten bei der Verwendung …	
	von Glühlampen	einer LED-Lampe
1		
2		
3		
4		
5		

– Lesen Sie aus dieser Tabelle ab, nach wie vielen ganzen Jahren die insgesamt angefallenen Kosten bei der Verwendung einer LED-Lampe erstmals geringer sind als bei der Verwendung von Glühlampen.

* ehemalige Klausuraufgabe

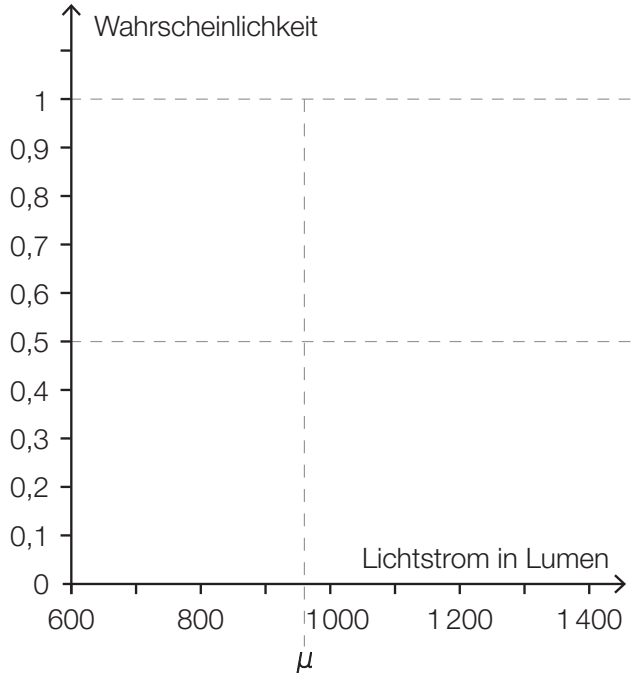
b) Die Helligkeit einer LED-Lampe kann mithilfe des Lichtstroms beschrieben werden. In der nachstehenden Tabelle ist für LED-Lampen mit verschiedenem Lichtstrom der jeweilige Preis angegeben.

Lichtstrom in Lumen	136	300	400	600	800
Preis in Euro / Stück	6,00	9,90	9,99	16,50	23,40

– Ermitteln Sie die Gleichung der zugehörigen linearen Regressionsfunktion. (Der Preis soll in Abhängigkeit vom Lichtstrom beschrieben werden.)
– Interpretieren Sie den Wert der Steigung dieser linearen Regressionsfunktion im gegebenen Sachzusammenhang.
– Berechnen Sie mithilfe dieser Regressionsfunktion denjenigen Preis, der für eine LED-Lampe mit einem Lichtstrom von 500 Lumen zu erwarten ist.

c) Laut einem Ratgeber für LED-Lampen kann der Lichtstrom von 12-Watt-LED-Lampen als annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert μ angenommen werden. Dabei liegen 95 % der Lichtstromwerte in dem um μ symmetrischen Intervall von 780 Lumen bis 1 140 Lumen.

– Berechnen Sie den Erwartungswert μ des Lichtstroms für 12-Watt-LED-Lampen.
– Berechnen Sie die Standardabweichung σ des Lichtstroms für 12-Watt-LED-Lampen.
– Skizzieren Sie den Graphen der zugehörigen Verteilungsfunktion in der nachstehenden Abbildung.



– Veranschaulichen Sie in der obigen Abbildung die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte 12-Watt-LED-Lampe einen Lichtstrom von bis zu 900 Lumen hat.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)

Verwendungsdauer in Jahren	insgesamt angefallene Kosten bei der Verwendung …	
	von Glühlampen	einer LED-Lampe
1	€ 5,75	€ 15,60
2	€ 11,50	€ 16,20
3	€ 17,25	€ 16,80
4	€ 23,00	€ 17,40
5	€ 28,75	€ 18,00

Nach 3 Jahren sind die insgesamt angefallenen Kosten bei der Verwendung einer LED-Lampe erstmals geringer als bei der Verwendung von Glühlampen.

b) Ermitteln der Gleichung der linearen Regressionsfunktion mittels Technologieeinsatz:

$f(x) = 0{,}026 \cdot x + 1{,}534$

x … Lichtstrom in Lumen
$f(x)$ … Preis bei einem Lichtstrom x in Euro / Stück

Die Steigung 0,026 besagt, dass pro zusätzlichem Lumen Lichtstrom der Preis um € 0,026 steigt.

$f(500) \approx 14{,}53$
Für eine LED-Lampe mit 500 Lumen ist ein Preis von € 14,53 pro Stück zu erwarten.

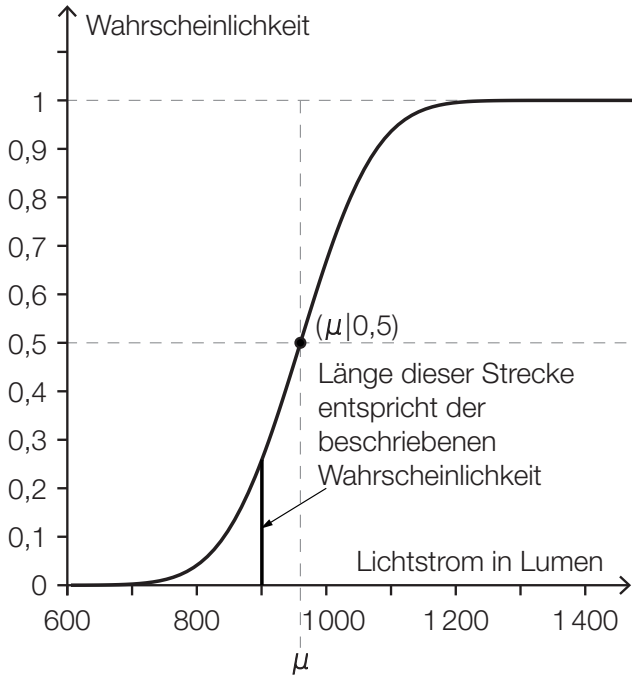
c) $\mu = \frac{780 + 1\,140}{2} = 960$

Der Erwartungswert beträgt 960 Lumen.

Aufgrund der Symmetrie gilt: $P(X \leq 1\,140) = 0{,}975$
$\phi(z) = 0{,}975 \Rightarrow z = 1{,}959\ldots$

$\sigma = \frac{1\,140 - 960}{1{,}959\ldots} = 91{,}8\ldots$

Die Standardabweichung beträgt rund 92 Lumen.



Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Vervollständigen der Tabelle
1 × C: für das richtige Ablesen aus der Tabelle

b) 1 × B1: für das richtige Ermitteln der Gleichung der linearen Regressionsfunktion
1 × C: für die richtige Interpretation des Werts der Steigung im gegebenen Sachzusammenhang
1 × B2: für die richtige Berechnung des Preises pro Stück

c) 1 × B1: für die richtige Berechnung des Erwartungswerts
1 × B2: für die richtige Berechnung der Standardabweichung
1 × A1: für das richtige Skizzieren des Graphen der Verteilungsfunktion (charakteristischer Funktionsverlauf und Funktionswert an der Stelle μ richtig eingezeichnet)
1 × A2: für das richtige Veranschaulichen der Wahrscheinlichkeit in der Abbildung

Am Fluss*

Aufgabennummer: A_229

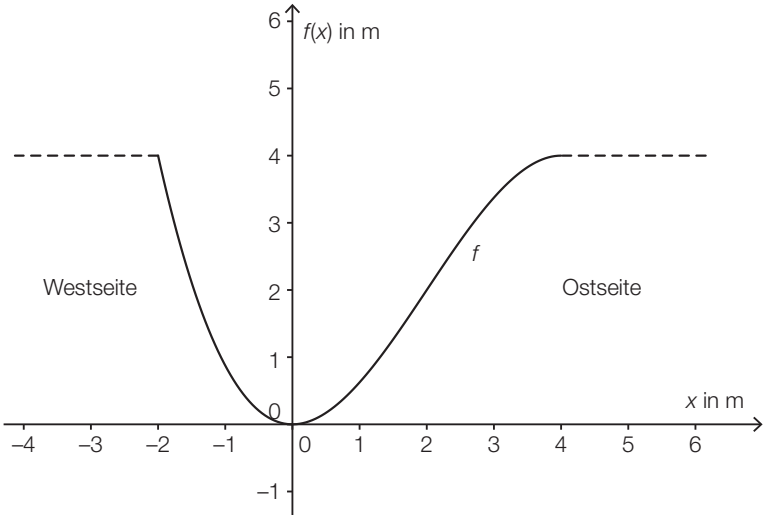
Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Das Querschnittsprofil eines künstlichen Flusslaufes kann annähernd durch den Graphen der Polynomfunktion f beschrieben werden:

$$f(x) = -\frac{1}{8} \cdot x^3 + \frac{3}{4} \cdot x^2 \quad \text{mit} \quad -2 \le x \le 4$$

x, $f(x)$ ... Koordinaten in Metern (m)

Der Graph dieser Funktion ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



– Berechnen Sie diejenige Stelle, an der das Querschnittsprofil auf der Ostseite am stärksten ansteigt.

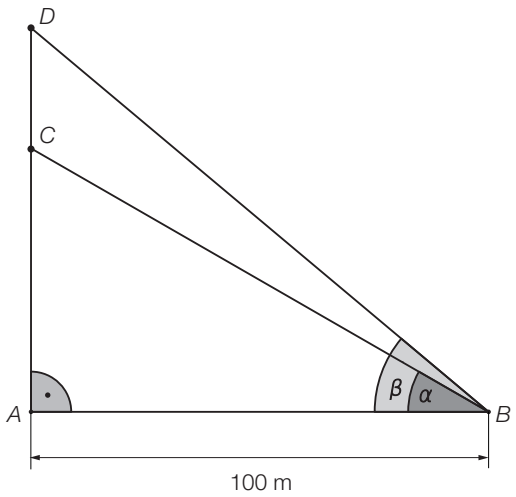
Gegeben ist das folgende Integral:

$$\int_{-2}^{4} (4 - f(x))\,dx$$

– Kennzeichnen Sie in der obigen Abbildung diejenige Fläche, deren Inhalt mithilfe dieses Integrals berechnet werden kann.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Ein von einem Punkt *A* senkrecht aufsteigender Ballon wird von einem Punkt *B* am Flussufer unter dem Höhenwinkel $\alpha = 30°$ gesehen. Etwas später erscheint der Ballon unter dem Höhenwinkel $\beta = 40°$ (siehe nachstehende Skizze).



– Berechnen Sie die Streckenlänge $\overline{CD}$.

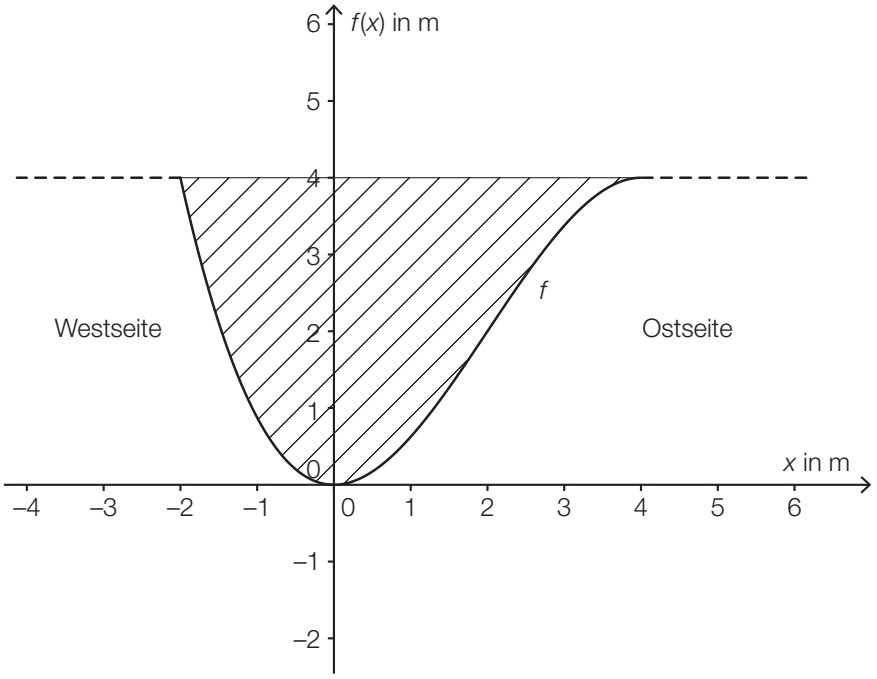
Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $f''(x) = -\frac{3}{4} \cdot x + \frac{3}{2}$

$0 = -\frac{3}{4} \cdot x + \frac{3}{2} \Rightarrow x = 2$

An der Stelle $x = 2$ steigt das Querschnittsprofil auf der Ostseite am stärksten an.



b) $\overline{CD} = \overline{AB} \cdot (\tan(\beta) - \tan(\alpha))$

$\overline{CD} = 26{,}1\ldots \text{ m} \approx 26 \text{ m}$

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für die richtige Berechnung der Wendestelle der Funktion f
(In der Grafik ist klar zu erkennen, dass der Anstieg des Querschnittsprofils an der Ostseite an der Wendestelle am stärksten ist. Eine rechnerische Überprüfung des Steigungsverhaltens der Funktion an der berechneten Stelle sowie eine Überprüfung der Randstellen sind daher nicht erforderlich.)

1 × C: für das richtige Kennzeichnen der Fläche

b) 1 × B: für die richtige Berechnung der Streckenlänge $\overline{CD}$

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Batterien*

Aufgabennummer: A_228

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein Unternehmen produziert Batterien.

a) Ein Händler kauft Batterien bei diesem Unternehmen und erhält die Information, dass erfahrungsgemäß 2 % der gelieferten Batterien defekt sind.

Der Händler entnimmt einer umfangreichen Lieferung eine Zufallsstichprobe von 40 Batterien.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens 2 der entnommenen Batterien defekt sind.

b) Für den Versand der Batterien an Einzelhändler werden diese jeweils in 4er-Packungen verpackt. Ein Einzelhändler erhält eine Lieferung von a 4er-Packungen.
Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Batterie defekt ist, beträgt p.

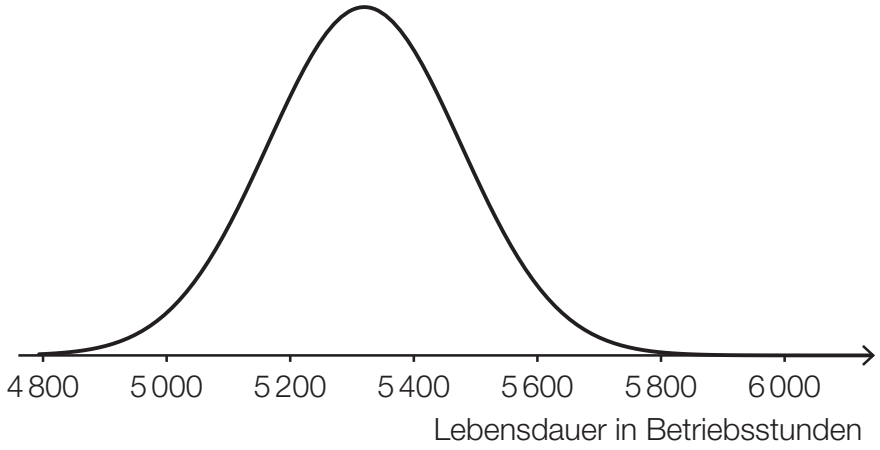
– Beschreiben Sie, was mit dem Ausdruck $4 \cdot a \cdot p$ in diesem Sachzusammenhang berechnet wird.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Das Unternehmen gibt an, dass die Lebensdauer der Batterien annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 5\,320$ Betriebsstunden und der Standardabweichung $\sigma = 156$ Betriebsstunden ist.

– Berechnen Sie dasjenige symmetrische Intervall um μ, in dem die Lebensdauer einer zufällig ausgewählten Batterie mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % liegt.

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Dichtefunktion dieser Normalverteilung dargestellt.



– Veranschaulichen Sie in der obigen Abbildung die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Batterie eine Lebensdauer von maximal 5 200 Betriebsstunden hat.

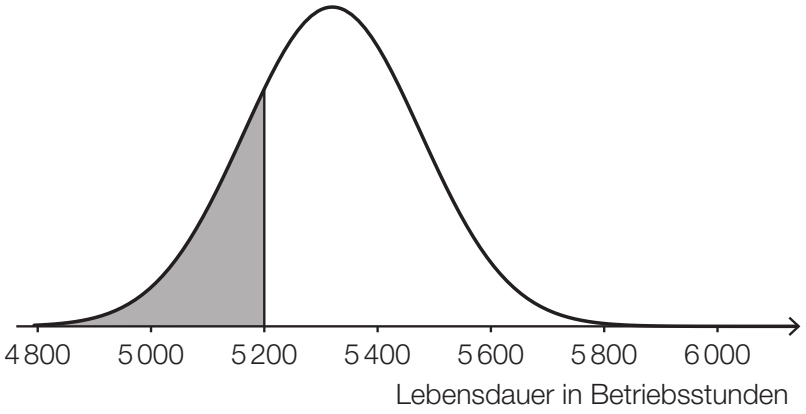
Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Binomialverteilung: $n = 40$, $p = 0{,}02$
Berechnung mittels Technologieeinsatz: $P(X \leq 2) = 0{,}95432\ldots \approx 95{,}43\ \%$

b) Der angegebene Ausdruck gibt den Erwartungswert für die Anzahl der defekten Batterien in dieser Lieferung an.

c) Berechnung des Intervalls mittels Technologieeinsatz:
$P(\mu - a \leq X \leq \mu + a) = 0{,}9 \Rightarrow [5\,063{,}4;\ 5\,576{,}6]$



Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit

b) 1 × C: für die richtige Beschreibung der Bedeutung in diesem Sachzusammenhang

c) 1 × B: für die richtige Berechnung des Intervalls
1 × A: für das richtige Veranschaulichen der Wahrscheinlichkeit

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Blutkreislauf*

Aufgabennummer: A_227

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Blut versorgt die Organe des menschlichen Körpers mit Sauerstoff. Das Herz pumpt das Blut in einem Kreislaufsystem durch den Körper.

a) Im Blut gibt es 3 verschiedene Arten von Blutzellen. Ein erwachsener Mensch hat ca. 5 Liter Blut im Körper. Diese 5 Liter enthalten ca. $25 \cdot 10^{12}$ rote Blutkörperchen, ca. $15 \cdot 10^{11}$ Blutplättchen und ca. $3 \cdot 10^{10}$ weiße Blutkörperchen.

– Berechnen Sie, wie viele Blutzellen (rote Blutkörperchen, Blutplättchen und weiße Blutkörperchen zusammen) sich in 1 Kubikmillimeter Blut befinden.

b) Die Pumpleistung des Herzens (in Litern pro Minute) kann in Abhängigkeit vom Alter (in Jahren) annähernd durch eine lineare Funktion P beschrieben werden. Sie beträgt bei 20-jährigen Personen 5 Liter pro Minute und bei 70-jährigen Personen 2,5 Liter pro Minute.

– Stellen Sie eine Funktionsgleichung von P auf.
– Interpretieren Sie den Wert der Steigung dieser linearen Funktion im gegebenen Sachzusammenhang.

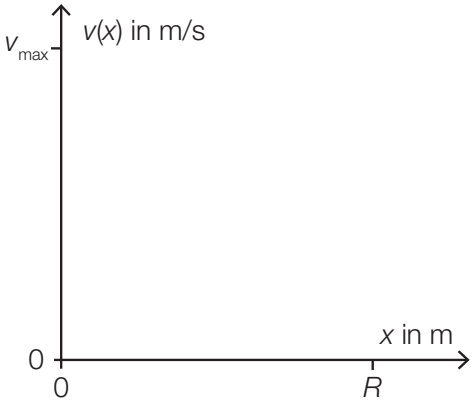
* ehemalige Klausuraufgabe

c) Betrachtet man den Querschnitt eines Blutgefäßes vereinfacht als Kreis, so lässt sich die Strömungsgeschwindigkeit des Blutes in Blutgefäßen näherungsweise durch die Funktion v beschreiben:

$$v(x) = v_{max} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{R^2}\right) \text{ mit } 0 \le x \le R$$

x ... Abstand von der Mitte des Blutgefäßes in Metern (m)
$v(x)$ ... Strömungsgeschwindigkeit des Blutes im Abstand x in m/s
v_{max} ... maximale Geschwindigkeit des Blutes in Metern pro Sekunde (m/s) mit $v_{max} > 0$
R ... Radius des Blutgefäßes in m

– Skizzieren Sie den Graphen dieser Funktion v in der nachstehenden Abbildung.



Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Umwandlung: $5\ \text{L} = 5 \cdot 10^6\ \text{mm}^3$
Blutzellen in $5 \cdot 10^6\ \text{mm}^3$: $25 \cdot 10^{12} + 15 \cdot 10^{11} + 3 \cdot 10^{10} = 2{,}653 \cdot 10^{13}$
Anzahl der Blutzellen pro mm^3: $\frac{2{,}653 \cdot 10^{13}}{5 \cdot 10^6} = 5{,}306 \cdot 10^6$

In 1 Kubikmillimeter Blut befinden sich rund 5,3 Millionen Blutzellen.

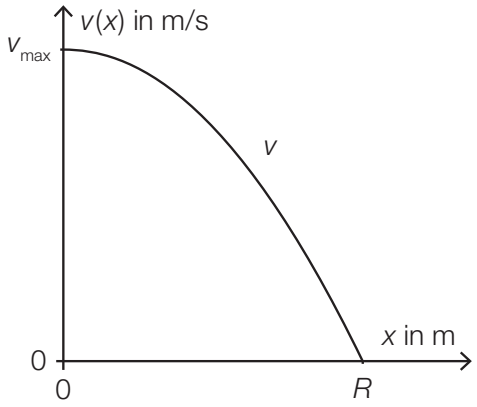
b) $P(t) = k \cdot t + d$

t … Alter in Jahren
$P(t)$ … Pumpleistung des Herzens im Alter t in Litern pro Minute

$k = -\frac{2{,}5}{50} = -0{,}05$
$d = 5 - (-0{,}05) \cdot 20 = 6$
$P(t) = -0{,}05 \cdot t + 6$

Pro Lebensjahr nimmt die Pumpleistung des Herzens um 0,05 Liter pro Minute ab.

c)



Lösungsschlüssel

a) 1 × B1: für die richtige Umwandlung von 5 Litern in mm^3
1 × B2: für die richtige Berechnung der Anzahl der Blutzellen pro mm^3

b) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung
1 × C: für die richtige Interpretation des Wertes der Steigung im gegebenen Sachzusammenhang

c) 1 × A: für das richtige Skizzieren des Funktionsgraphen (Graph einer nach unten offenen quadratischen Funktion mit den richtigen Funktionswerten an den Stellen 0 und R)

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Section-Control*

Aufgabennummer: A_226

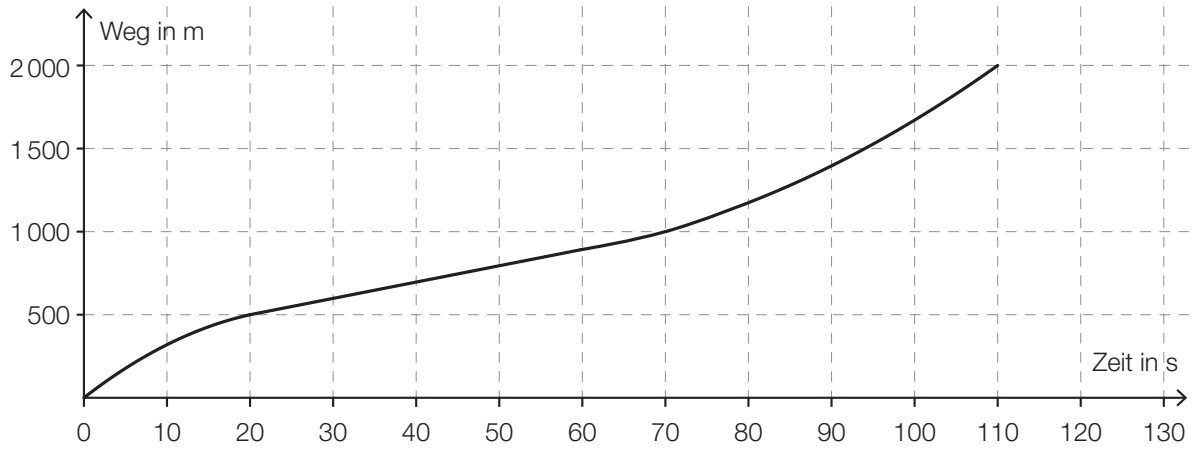
Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Section-Control bezeichnet ein System zur Überwachung der Einhaltung von Tempolimits im Straßenverkehr. Dabei wird nicht die Geschwindigkeit an einem bestimmten Punkt gemessen, sondern die mittlere Geschwindigkeit über eine längere Strecke ermittelt.

a) In einem 6 km langen Baustellenbereich wird eine Section-Control errichtet.
Es gilt eine zulässige Höchstgeschwindigkeit von 60 km/h.
Jemand behauptet: „Wenn ich die zulässige Höchstgeschwindigkeit im gesamten Baustellenbereich um 10 % überschreite, dann verkürzt sich meine Fahrzeit im Baustellenbereich um 10 %."

– Weisen Sie nach, dass diese Behauptung falsch ist.

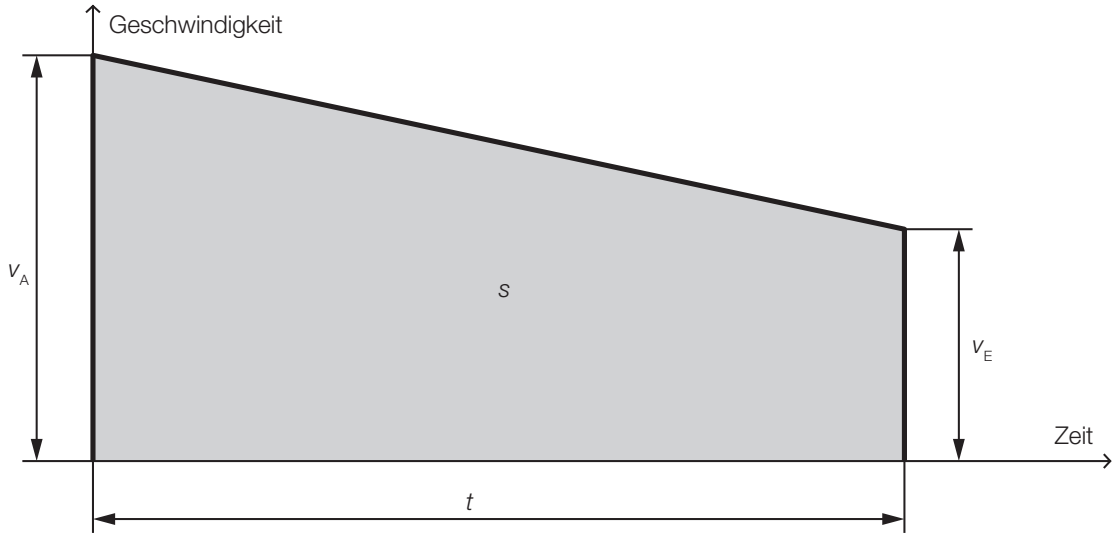
b) Im nachstehenden Weg-Zeit-Diagramm ist die Fahrt eines Fahrzeuges in einem überprüften Bereich dargestellt.



– Ermitteln Sie die mittlere Geschwindigkeit des Fahrzeugs auf der ersten Weghälfte.
– Argumentieren Sie, dass die mittlere Geschwindigkeit auf der ersten Weghälfte kleiner als die mittlere Geschwindigkeit auf der zweiten Weghälfte ist.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Ein Fahrzeug fährt durch einen Bereich, der durch eine Section-Control überwacht wird. Seine Geschwindigkeit nimmt auf diesem Streckenabschnitt linear ab.



Die Endgeschwindigkeit v_E, die Fahrzeit t und der zurückgelegte Weg s sind bekannt.

– Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung der Anfangsgeschwindigkeit v_A des Fahrzeugs:

v_A = _____

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $s = 6$ km

$v_1 = 60$ km/h: $t_1 = \frac{s}{v_1} = 0{,}1$ h

$v_2 = 66$ km/h: $t_2 = \frac{s}{v_2} = 0{,}\overline{09}$ h

90 % von 0,1 h sind exakt 0,09 h. Das ist weniger als t_2.

b) $\overline{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1\,000 \text{ m}}{70 \text{ s}} = 14{,}285... \text{ m/s} \approx 14{,}29 \text{ m/s}$

Die Fahrzeit für die erste Weghälfte beträgt 70 Sekunden. Die Fahrzeit für die zweite Weghälfte beträgt nur 40 Sekunden. Daher ist die mittlere Geschwindigkeit auf der ersten Weghälfte geringer.

c) Der Flächeninhalt des Trapezes entspricht dem zurückgelegten Weg: $s = \frac{v_A + v_E}{2} \cdot t$.

$v_A = 2 \cdot \frac{s}{t} - v_E$

Lösungsschlüssel

a) 1 × D: für einen richtigen Nachweis

b) 1 × B: für das richtige Ermitteln der mittleren Geschwindigkeit auf der ersten Weghälfte
1 × D: für eine richtige Argumentation

c) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel

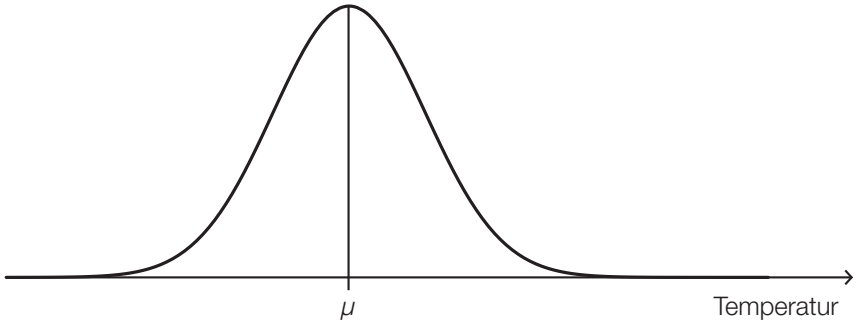
Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Klimawandel und Ozon*

Aufgabennummer: A_225

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Man geht davon aus, dass durch den Klimawandel die Temperaturen steigen. Die mittleren Sommertemperaturen in Wien sind annähernd normalverteilt.*
Der Graph der zugehörigen Dichtefunktion ist im nachstehenden Diagramm dargestellt.



– Skizzieren Sie im obigen Diagramm den Graphen der Dichtefunktion einer Normalverteilung, bei der sowohl der Erwartungswert als auch die Standardabweichung größer als in der gegebenen Darstellung sind.

* Vgl. Kromp-Kolb/Formayer (2005). *Schwarzbuch Klimawandel: Wie viel Zeit bleibt uns noch?* Salzburg: Ecowin. S. 53–55.

b) Bei einer Messstation im Bereich des südlichen Polarkreises kann die Ozonmenge pro Quadratmeter in Abhängigkeit von der Zeit für einen bestimmten Zeitraum näherungsweise durch die Funktion N beschrieben werden:

$N(t) = N_0 \cdot 0{,}9917^t$

t ... Zeit in Jahren
$N(t)$ ... Ozonmenge pro Quadratmeter zur Zeit t
N_0 ... Ozonmenge pro Quadratmeter zur Zeit $t = 0$

– Ermitteln Sie, um wie viel Prozent die Ozonmenge pro Quadratmeter jährlich abnimmt.

Die Gleichung $0{,}5 = 0{,}9917^t$ wird gelöst.

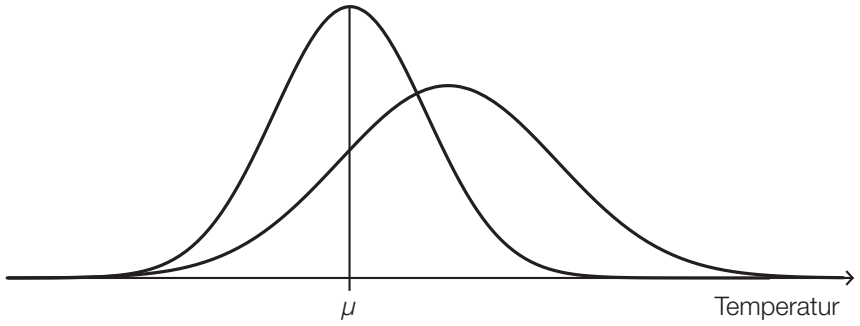
– Beschreiben Sie die Bedeutung der Lösung dieser Gleichung im gegebenen Sachzusammenhang.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

a)



b) 1 – 0,9917 = 0,0083
Die Ozonmenge pro Quadratmeter nimmt jährlich um 0,83 % ab.

Zur berechneten Zeit *t* hat sich die Ozonmenge pro Quadratmeter halbiert (Halbwertszeit).

Lösungsschlüssel

a) 1 × A1: für die richtige Darstellung der Erhöhung des Erwartungswertes
(Maximumstelle weiter rechts)
1 × A2: für die richtige Darstellung der Erhöhung der Standardabweichung
(Maximalwert niedriger und Kurve breiter)

b) 1 × C1: für das richtige Ermitteln der jährlichen Abnahme in Prozent
1 × C2: für die richtige Beschreibung im gegebenen Sachzusammenhang

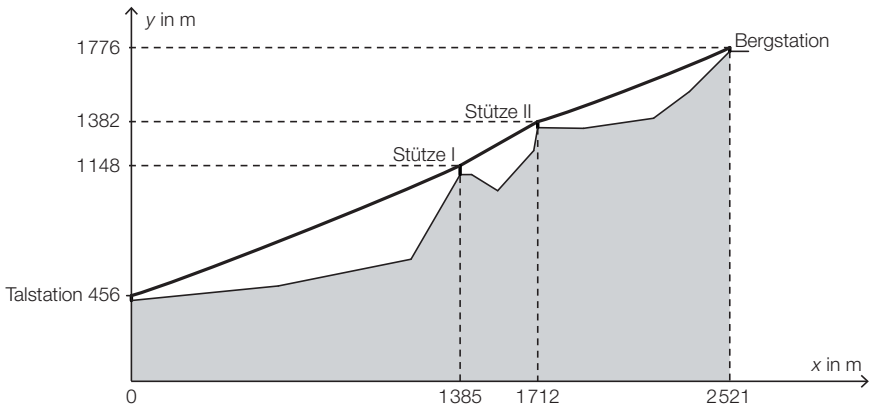
Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Gondelbahn auf den Untersberg*

Aufgabennummer: A_224

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

In nachstehender Abbildung ist der Verlauf des Tragseils der Gondelbahn von St. Leonhard auf den Untersberg vereinfacht dargestellt.



x ... horizontaler Abstand von der Talstation in Metern (m)
y ... Höhe über Meeresniveau in m

a) Es wird folgende Berechnung durchgeführt:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1\,776 - 456}{2\,521 - 0} \approx 0{,}52$$

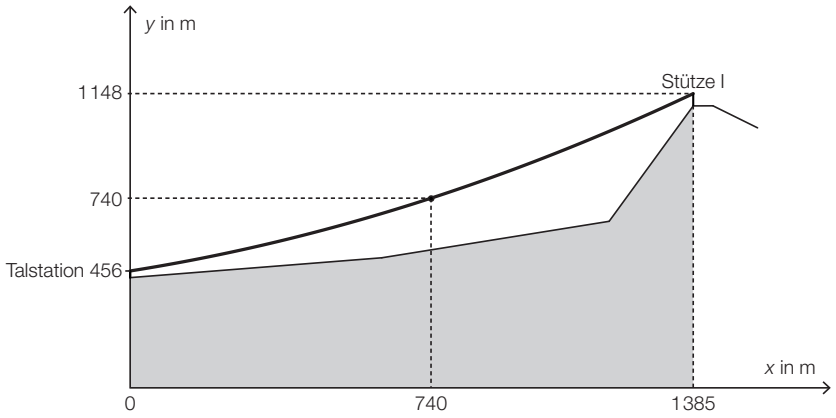
– Beschreiben Sie, was das Ergebnis im gegebenen Sachzusammenhang bedeutet.

b) Der Seilverlauf zwischen Stütze I und Stütze II wird vereinfacht als linear angenommen.

– Überprüfen Sie nachweislich, ob der Steigungswinkel des Seilverlaufs in diesem Abschnitt kleiner als 40° ist.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Aufgrund des Eigengewichts hängt das Tragseil zwischen der Talstation und der Stütze I durch. Sein Verlauf kann näherungsweise als Graph einer quadratischen Funktion mit der Gleichung $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ beschrieben werden (siehe nachstehende Abbildung).



– Stellen Sie ein Gleichungssystem auf, mit dem die Koeffizienten *a*, *b* und *c* ermittelt werden können.
– Ermitteln Sie *a*, *b* und *c*.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Die mittlere Steigung des Tragseils der Gondelbahn auf den Untersberg beträgt rund 0,52.

b) Steigung: $k = \frac{1\,382 - 1\,148}{1\,712 - 1\,385} = 0{,}7155\ldots$
Steigungswinkel: $\alpha = \arctan(k) = 35{,}58\ldots° \approx 35{,}6°$
Der Steigungswinkel des Seilverlaufs in diesem Abschnitt ist kleiner als 40°.

c) Gleichungssystem:
I. $456 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$
II. $740 = a \cdot 740^2 + b \cdot 740 + c$
III. $1\,148 = a \cdot 1\,385^2 + b \cdot 1\,385 + c$

Lösen dieses Gleichungssystems mittels Technologieeinsatz:
$a = 0{,}0001796\ldots \approx 0{,}000180$
$b = 0{,}2508\ldots \approx 0{,}251$
$c = 456$

Lösungsschlüssel

a) 1 × C: für die richtige Beschreibung im gegebenen Sachzusammenhang

b) 1 × D: für die richtige Überprüfung

c) 1 × A: für das richtige Aufstellen des Gleichungssystems
1 × B: für das richtige Ermitteln der Koeffizienten

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Leistung einer Solaranlage*

Aufgabennummer: A_212

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Die Leistung einer Solaranlage lässt sich näherungsweise mithilfe der Funktion P beschreiben:

$$P(t) = \frac{7}{648} \cdot t^4 - \frac{7}{27} \cdot t^3 + a \cdot t^2 \quad \text{mit} \quad 0 \le t \le 12$$

t ... Zeit in Stunden (h), wobei $t = 0$ der Uhrzeit 7 Uhr entspricht
$P(t)$ ... Leistung zur Zeit t in Kilowatt (kW)

Die Leistung ist um 13 Uhr am höchsten.

– Berechnen Sie den Koeffizienten a.

b) Eine andere Solaranlage wird an einem bestimmten Tag von 7 Uhr bis 19 Uhr betrieben und ihre Leistung durch die Funktion P beschrieben, wobei gilt:

$$P(t) = 0{,}007 \cdot t^4 - 0{,}165 \cdot t^3 + 0{,}972 \cdot t^2 + 1{,}221 \quad \text{mit} \quad 0 \le t \le 12$$

t ... Zeit in Stunden (h), wobei $t = 0$ der Uhrzeit 7 Uhr entspricht
$P(t)$ ... Leistung der Solaranlage zur Zeit t in kW

Die in einem Zeitintervall von der Solaranlage gelieferte Energie wird mithilfe des Integrals der Leistung in diesem Zeitintervall berechnet.

– Berechnen Sie die an diesem Tag von der Solaranlage gelieferte Energie.

c) – Begründen Sie mithilfe der Differenzialrechnung, warum eine Polynomfunktion 3. Grades genau 1 Wendestelle hat.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

a) $P'(6) = 0$

$$0 = \frac{7}{162} \cdot 6^3 - \frac{7}{9} \cdot 6^2 + 2 \cdot a \cdot 6$$

$$a = \frac{14}{9}$$

b) $\int_0^{12} (0{,}007 \cdot t^4 - 0{,}165 \cdot t^3 + 0{,}972 \cdot t^2 + 1{,}221)\,\mathrm{d}t = 67{,}5288$

Die Solaranlage liefert an diesem Tag rund 67,53 kWh Energie.

c) An der Wendestelle x_0 einer Funktion f gilt stets: $f''(x_0) = 0$.
Die 2. Ableitung einer Polynomfunktion 3. Grades ist eine lineare Funktion, die genau 1 Nullstelle mit Vorzeichenwechsel hat. Daher hat die Polynomfunktion 3. Grades genau 1 Wendestelle.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für den richtigen Ansatz zur Berechnung des Koeffizienten a
1 × B: für die richtige Berechnung des Koeffizienten a

b) 1 × B: für die richtige Berechnung des Integrals

c) 1 × D: für eine richtige Begründung

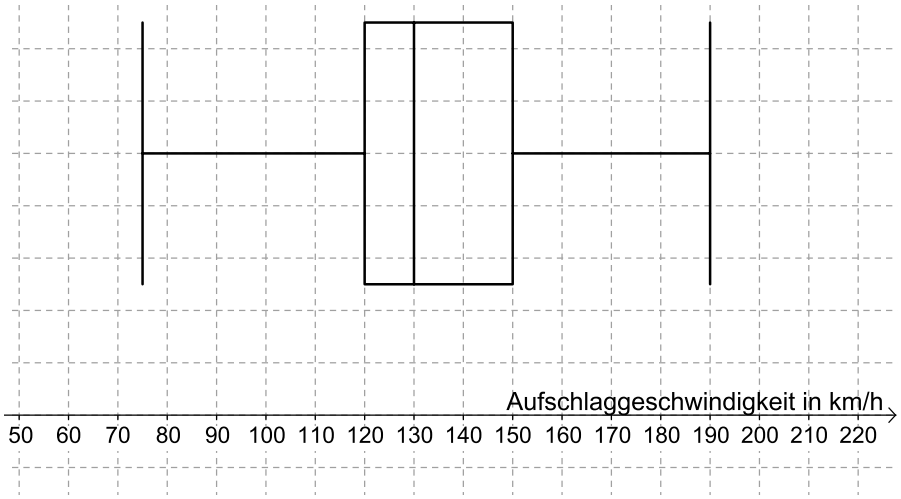
Tennis (2)*

Aufgabennummer: A_211

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Im Rahmen der Nachwuchsförderung wurden die Leistungen der Teilnehmer eines Knaben-Tennisturniers genauer beobachtet.

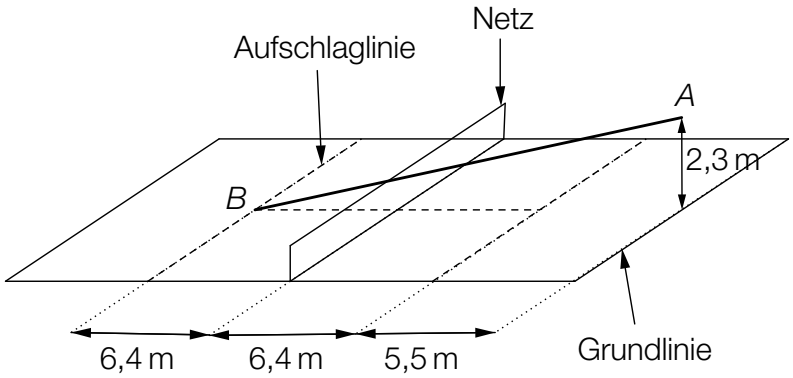
a) Für die Auswertung der Daten der Aufschlaggeschwindigkeit der Teilnehmer wurde der nachstehende Boxplot erstellt.



– Lesen Sie diejenige Aufschlaggeschwindigkeit ab, die von 25 % der Teilnehmer nicht übertroffen wurde.
– Lesen Sie den Quartilsabstand ab.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Ein Spieler trifft beim Aufschlag den Ball in einer Höhe von 2,3 m im Punkt *A* genau über der Mitte der Grundlinie. Er visiert den Punkt *B* (Mitte der Aufschlaglinie) an. Um nicht ins Netz zu gehen, muss der Ball das Netz in einer Höhe von mindestens 1 Meter (über dem Boden) überqueren.
Die Flugbahn des Tennisballes beim Aufschlag kann modellhaft mittels einer Gerade beschrieben werden.



– Überprüfen Sie nachweislich, ob der Ball bei diesem Aufschlag über das Netz geht.

c) Mithilfe einer Videoanalyse wird ein Grundlinienschlag modelliert.
Die Flugbahn zwischen dem Abschlagpunkt und dem Punkt, in dem der Ball auf dem Boden aufkommt, kann durch die Funktion *f* beschrieben werden:

$$f(x) = -\frac{1}{50} \cdot x^2 + \frac{2}{5} \cdot x + \frac{21}{50} \text{ mit } x \geq 0$$

x ... horizontale Entfernung zum Abschlagpunkt in Metern (m)
f(*x*) ... Höhe des Balles an der Stelle *x* über dem Boden in m

– Berechnen Sie den Steigungswinkel der Flugbahn im Abschlagpunkt.

– Interpretieren Sie die Bedeutung der obigen Zahl $\frac{21}{50}$ für die Flugbahn.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Aufschlaggeschwindigkeit, die von 25 % der Teilnehmer nicht übertroffen wurde: 120 km/h

Quartilsabstand: 30 km/h

b) ähnliche Dreiecke:

$$\frac{2{,}3}{6{,}4 + 6{,}4 + 5{,}5} = \frac{h}{6{,}4}$$

$h = 0{,}80\ldots \text{ m} \approx 0{,}8 \text{ m}$

Der Ball ist beim Netz in einer Höhe von rund 0,8 m.
Somit geht der Ball ins Netz.

c) $f'(0) = \frac{2}{5}$

$\arctan\left(\frac{2}{5}\right) = 21{,}801\ldots° \approx 21{,}80°$

Der Ball befindet sich im Abschlagpunkt in einer Höhe von $\frac{21}{50}$ Metern.

Lösungsschlüssel

a) 1 × C1: für das richtige Ablesen der Aufschlaggeschwindigkeit
1 × C2: für das richtige Ablesen des Quartilsabstands

b) 1 × D: für die richtige Überprüfung

c) 1 × B: für die richtige Berechnung des Steigungswinkels
1 × C: für die richtige Interpretation der Zahl $\frac{21}{50}$

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Produktion von Rucksäcken*

Aufgabennummer: A_210

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Bei der Produktion von Rucksäcken treten erfahrungsgemäß 3 verschiedene Fehlerarten unabhängig voneinander auf.

P(„Nahtfehler“) = 2 %

P(„Reißverschlussdefekt“) = 3 %

P(„Farbfehler“) = 1 %

a) Ein Rucksack wird zufällig ausgewählt und überprüft. Die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis E wird mit $P(E) = 0{,}02 \cdot 0{,}97 \cdot 0{,}99$ berechnet.

– Geben Sie ein Ereignis an, dessen Wahrscheinlichkeit so berechnet wird.

b) – Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Rucksack mindestens 1 dieser 3 Fehlerarten aufweist.
– Erklären Sie, warum die Berechnung mittels Gegenwahrscheinlichkeit hier weniger aufwendig ist.

c) – Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Zufallsstichprobe von 100 Stück weniger als 3 Rucksäcke mit Reißverschlussdefekt vorhanden sind.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

a) Es wird die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis berechnet, dass ein zufällig kontrollierter Rucksack Nahtfehler, aber keine der beiden anderen Fehlerarten aufweist.

b) $P(\text{„mindestens 1 Fehler“}) = 1 - P(\text{„kein Fehler“}) = 1 - 0{,}98 \cdot 0{,}97 \cdot 0{,}99 = 0{,}0589... \approx 5{,}9\ \%$

Bei der Berechnung der Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Rucksack mindestens 1 dieser 3 Fehler aufweist, muss bei der Verwendung der Gegenwahrscheinlichkeit nur 1 Ereignis, nämlich das Ereignis, dass kein Fehler auftritt, betrachtet werden. Bei einer direkten Berechnung müssten die Wahrscheinlichkeiten für eine Vielzahl von Ereignissen berechnet und addiert werden.

c) Berechnung mittels Binomialverteilung: $n = 100$ und $p = 0{,}03$
$P(X < 3) = 0{,}41977\ldots \approx 41{,}98\ \%$

Lösungsschlüssel

a) 1 × C: für die richtige Angabe des Ereignisses (es muss auch klar erkennbar sein, dass die beiden anderen Fehlerarten nicht auftreten)

b) 1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit
1 × D: für die richtige Erklärung zur Gegenwahrscheinlichkeit

c) 1 × A: für das Erkennen des richtigen Wahrscheinlichkeitsmodells (Binomialverteilung)
1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Luftdruck – Höhenformel*

Aufgabennummer: A_209

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Der Luftdruck nimmt mit zunehmender Höhe über dem Meeresspiegel (Seehöhe) ab. Der Zusammenhang kann durch Exponentialfunktionen oder näherungsweise durch lineare Funktionen beschrieben werden.

a) Ein Modell zur Beschreibung des Zusammenhangs zwischen der Höhe über dem Meeresspiegel und dem Luftdruck ist die *barometrische Höhenformel*:

$p(h) = p_0 \cdot e^{-\frac{h}{7991}}$

h ... Höhe über dem Meeresspiegel in Metern (m)
$p(h)$ ... Luftdruck in der Höhe h in Hektopascal (hPa)

– Zeigen Sie, dass p_0 der Luftdruck auf der Höhe des Meeresspiegels ist.
– Berechnen Sie diejenige Seehöhe, bei der der Luftdruck genau die Hälfte von p_0 beträgt.

b) Ein vereinfachtes Modell des Zusammenhangs zwischen der Höhe über dem Meeresspiegel und dem Luftdruck nimmt eine konstante Abnahme des Luftdrucks um 10 hPa pro 100 Höhenmeter an. Der Luftdruck auf Höhe des Meeresspiegels beträgt rund 1013 hPa.

Verwenden Sie die folgenden Bezeichnungen:

h ... Höhe über dem Meeresspiegel in m
$f(h)$ ... Luftdruck in der Höhe h in hPa

– Stellen Sie die Gleichung der Funktion f auf, die diesen Zusammenhang im vereinfachten Modell beschreibt.

c) Zu Beginn des Jahres 2013 wurden im Schigebiet Kaprun-Kitzsteinhorn folgende Werte für den Luftdruck gemessen:

Seehöhe	Luftdruck
990 m	1040 hPa
1980 m	930 hPa

– Bestimmen Sie mithilfe eines linearen Modells aus diesen Daten den Luftdruck in einer Höhe von 1300 m über dem Meeresspiegel.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

a) $p(0) = p_0 \cdot e^{-\frac{0}{7991}} = p_0 \cdot 1 = p_0$

$\frac{p_0}{2} = p_0 \cdot e^{-\frac{h}{7991}}$

$h = 7991 \cdot \ln(2) = 5538{,}9\ldots$

Bei einer Seehöhe von rund 5539 m beträgt der Luftdruck genau die Hälfte von p_0.

b) $f(h) = 1013 - \frac{1}{10} \cdot h$

c) Modellierung durch eine lineare Funktion g mit $g(x) = a \cdot x + b$:
$1040 = a \cdot 990 + b$
$930 = a \cdot 1980 + b$

$g(x) = -\frac{1}{9} \cdot x + 1150$

$g(1300) = \frac{9050}{9} \approx 1006$

Der Luftdruck in einer Höhe von 1300 m über dem Meeresspiegel beträgt rund 1006 hPa.

Lösungsschlüssel

a) 1 × D: für einen richtigen Nachweis
1 × A: für den richtigen Lösungsansatz zur Berechnung
1 × B: für die richtige Berechnung der Seehöhe

b) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Funktion

c) 1 × A: für einen richtigen Ansatz (z. B. mithilfe einer linearen Funktion bzw. ähnlicher Dreiecke)
1 × B: für die richtige Bestimmung des Luftdrucks

Strahlenbelastung*

Aufgabennummer: A_207

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Bei einem Zwischenfall in einem Kernkraftwerk wurden in der näheren Umgebung Messungen der Dosisleistung durchgeführt. (Die Dosisleistung ist ein Maß für die Wirkung von Strahlung auf lebendes Gewebe pro Zeiteinheit.)

a) An einem bestimmten Tag wurden folgende Messwerte aufgezeichnet:

Uhrzeit in Stunden (h)	Dosisleistung in Millisievert pro Stunde (mSv/h)
0	0,0092
12	350
24	1 050

Der zeitliche Verlauf der Dosisleistung wird durch die Funktion f beschrieben:

$f(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c$

t ... Uhrzeit in Stunden (h)
$f(t)$ ... Dosisleistung zum Zeitpunkt t in Millisievert pro Stunde (mSv/h)

– Stellen Sie dasjenige Gleichungssystem auf, mit dem Sie die Koeffizienten a, b und c berechnen können.

b) An einer anderen Messstelle wurden ebenfalls Daten für die Dosisleistung in mSv/h erhoben. Dieser zeitliche Verlauf der Dosisleistung kann durch die Funktion g beschrieben werden:

$g(t) = 1{,}36 \cdot t^2 + 20{,}7 \cdot t + 0{,}003$

t ... Zeit in Stunden (h)
$g(t)$ ... Dosisleistung zum Zeitpunkt t in Millisievert pro Stunde (mSv/h)

Die Gesamtdosis in einem Zeitintervall in Millisievert wird mithilfe des Integrals der Dosisleistung in diesem Zeitintervall berechnet.

– Berechnen Sie die Gesamtdosis an diesem Tag, beginnend bei $t = 0$ h.
– Bestimmen Sie das ganzzahlig gerundete Ergebnis in Sievert (Sv).

* ehemalige Klausuraufgabe

c) In einer Zeitungsmeldung wird behauptet: „Nach dem Unfall im japanischen Kraftwerk Fukushima war die Dosisleistung in Fukushima 10 000-mal höher als in Österreich."

Es liegen folgende Vergleichsdaten vor:
- Österreich / Sonnblick: 150 Nanosievert pro Stunde (nSv/h)
- nach dem Zwischenfall im Kernkraftwerk Fukushima: 1 500 Millisievert pro Stunde (mSv/h)

– Überprüfen Sie anhand der Vergleichsdaten die Zeitungsmeldung auf ihre Richtigkeit.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $0{,}0092 = c$
$350 = a \cdot 12^2 + b \cdot 12 + c$
$1\,050 = a \cdot 24^2 + b \cdot 24 + c$

b) $\int_0^{24} g(t)\,\mathrm{d}t = 12\,229$ mSv

Das sind ganzzahlig gerundet 12 Sv.

c) Die Behauptung in der Zeitung ist falsch.
$1\,500$ mSv/h $= 150 \cdot 10^7$ nSv/h
In Fukushima war die Dosisleistung 10 000 000-mal höher als am Sonnblick.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Aufstellen des Gleichungssystems

b) 1 × B1: für die richtige Berechnung der Gesamtdosis mithilfe des Integrals
1 × B2: für das richtige Umrechnen und Runden

c) 1 × D: für die schlüssige Überprüfung

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Thermometergrille*

Aufgabennummer: A_206

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

In den USA gibt es eine Grillenart, die ihre Zirp-Rate abhängig von der Temperatur verändert: Je wärmer es ist, desto öfter zirpt die Grille. Daher wird sie als *Thermometergrille* bezeichnet.

a) Bei 75 °F zirpt eine Thermometergrille 140-mal pro Minute und bei 65 °F 100-mal pro Minute.

– Stellen Sie die Gleichung derjenigen linearen Funktion auf, die die Temperatur in °F in Abhängigkeit von der Anzahl der Zirpgeräusche pro Minute beschreibt.

b) Der Zusammenhang zwischen der Anzahl der Zirpgeräusche pro Minute und der Temperatur wird durch die Modellfunktion T beschrieben:

$$T(N) = 60 + \frac{N - 92}{4{,}7}$$

N ... Anzahl der Zirpgeräusche pro Minute
$T(N)$ ... Temperatur in °F bei N Zirpgeräuschen pro Minute

– Bestimmen Sie, wie oft die Thermometergrille durchschnittlich in 15 Sekunden bei einer Temperatur von 70 °F zirpt.

c) Der Zusammenhang zwischen der Anzahl der Zirpgeräusche pro Minute und der Temperatur wird durch die Modellfunktion T beschrieben:

$$T(N) = 60 + \frac{N - 92}{4{,}7}$$

N ... Anzahl der Zirpgeräusche pro Minute
$T(N)$ ... Temperatur in °F bei N Zirpgeräuschen pro Minute

– Bestimmen Sie den Wert der Steigung.
– Beschreiben Sie, welche Bedeutung der Wert der Steigung in diesem Sachzusammenhang hat.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

a) Informationen aus dem Text: (140|75) und (100|65)

Berechnung von k und d:

$$k = \frac{75 - 65}{140 - 100} = \frac{10}{40} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

$$d = y - k \cdot x = 75 - 0{,}25 \cdot 140 = 40$$

Angabe der Funktion:
$y = 0{,}25 \cdot x + 40$

x ... Anzahl der Zirpgeräusche in 1 Minute
y ... Temperatur in °F

b) $70 = 60 + \frac{N - 92}{4{,}7}$

$N = 139$ Zirpgeräusche in 1 Minute
ca. 35 Zirpgeräusche in 15 Sekunden

c) Steigung: $k = \frac{1}{4{,}7} = 0{,}21$

Wenn die Anzahl der Zirpgeräusche pro Minute um 1 zunimmt, beschreibt das Modell eine Temperaturzunahme um 0,21 °F.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung

b) 1 × B1: für die richtige Berechnung der Anzahl der Zirpgeräusche in 1 Minute
1 × B2: für die richtige Berechnung der Anzahl der Zirpgeräusche während 15 Sekunden

c) 1 × C1: für die richtige Bestimmung der Steigung
1 × C2: für die richtige Beschreibung des Wertes der Steigung

Body-Mass-Index*

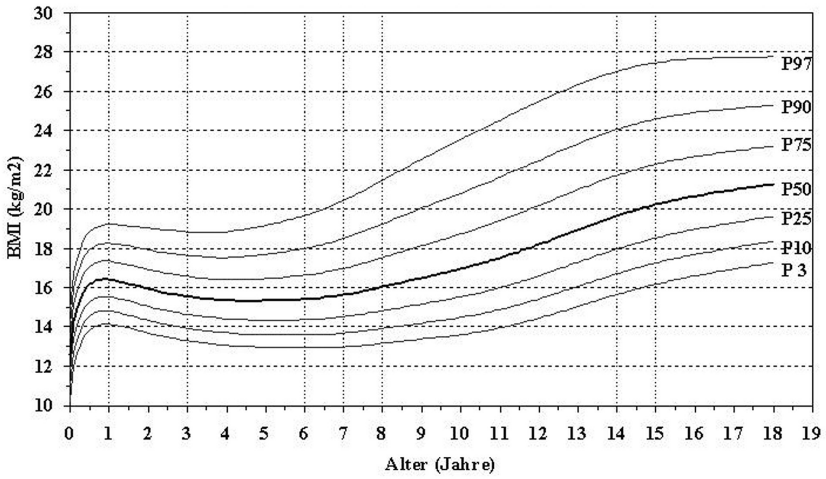
Aufgabennummer: A_205

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Der Body-Mass-Index (BMI) ist eine Maßzahl für die Bewertung der Masse eines Menschen in Relation zu seiner Körpergröße.
Die Formel für die Berechnung des BMI lautet: $BMI = \frac{m}{l^2}$

m ... Masse in Kilogramm (kg)
l ... Körpergröße in Metern (m)

a) Zur Klassifikation der Masse eines Kindes wird von österreichischen Kinderärzten oft folgendes Diagramm verwendet:



Perzentile für den Body-Mass-Index von Mädchen im Alter von 0 bis 18 Jahren
Quelle: http://www.familienhandbuch.de/ernaehrung/von-kindern-und-jugendlichen/mein-kind-ist-zu-dick

Bezeichnungen:

P50 ... Median
P25 ... unteres Quartil
P75 ... oberes Quartil

Die restlichen Bezeichnungen (P3, P10, P90, P97) können Sie unberücksichtigt lassen.

– Lesen Sie aus der oben stehenden Grafik ab, wie viel Prozent der 15-jährigen Mädchen einen höheren BMI als 18,5 $\frac{kg}{m^2}$ haben.

Ein Mädchen ist 3 Jahre alt, 16 kg schwer und 97 cm groß.

– Überprüfen Sie, ob der BMI des Mädchens im oberen Viertel seiner Altersgruppe liegt.

* ehemalige Klausuraufgabe

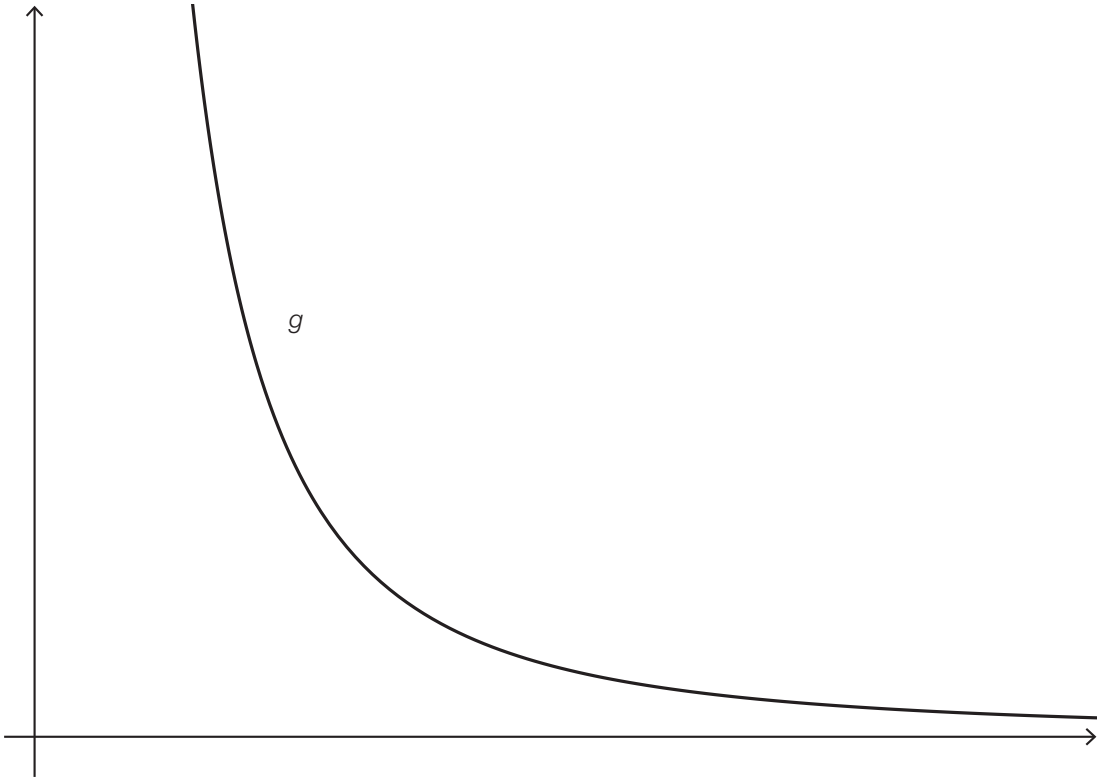
b) Georg ist um 10 % größer als Fritz, sie wiegen aber gleich viel.

- Stellen Sie eine Formel für den BMI von Georg auf, wenn die Masse und die Körpergröße von Fritz bekannt sind.
- Berechnen Sie, um wie viel Prozent Georgs BMI kleiner ist als jener von Fritz.

c) Die Abhängigkeit des BMI von der Körpergröße l wird durch die Funktion g beschrieben:

$$g(l) = \frac{m}{l^2}$$

- Beschriften Sie in der unten dargestellten Abbildung des Funktionsgraphen von g die Koordinatenachsen.
- Erklären Sie, warum der unten dargestellte Funktionsgraph den oben genannten Zusammenhang richtig beschreibt.



Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Ungefähr 75 % aller 15-jährigen Mädchen haben einen BMI, der größer ist als 18,5 $\frac{kg}{m^2}$ (P25 – unteres Quartil).
Toleranzbereich: [70 %; 80 %]

Berechnung des BMI des 3-jährigen Mädchens: $BMI = \frac{16}{0{,}97^2} = 17\ \frac{kg}{m^2}$

Der Wert liegt in der Grafik oberhalb der P75-Kurve. Daher ist der BMI des Mädchens im oberen Viertel ihrer Altersklasse.

b) F … Körpergröße von Fritz in Metern (m)
G … Körpergröße von Georg in Metern (m)
m … Masse von Georg, Masse von Fritz in Kilogramm (kg)

BMI von Fritz: $BMI_{Fritz} = \frac{m}{F^2}$

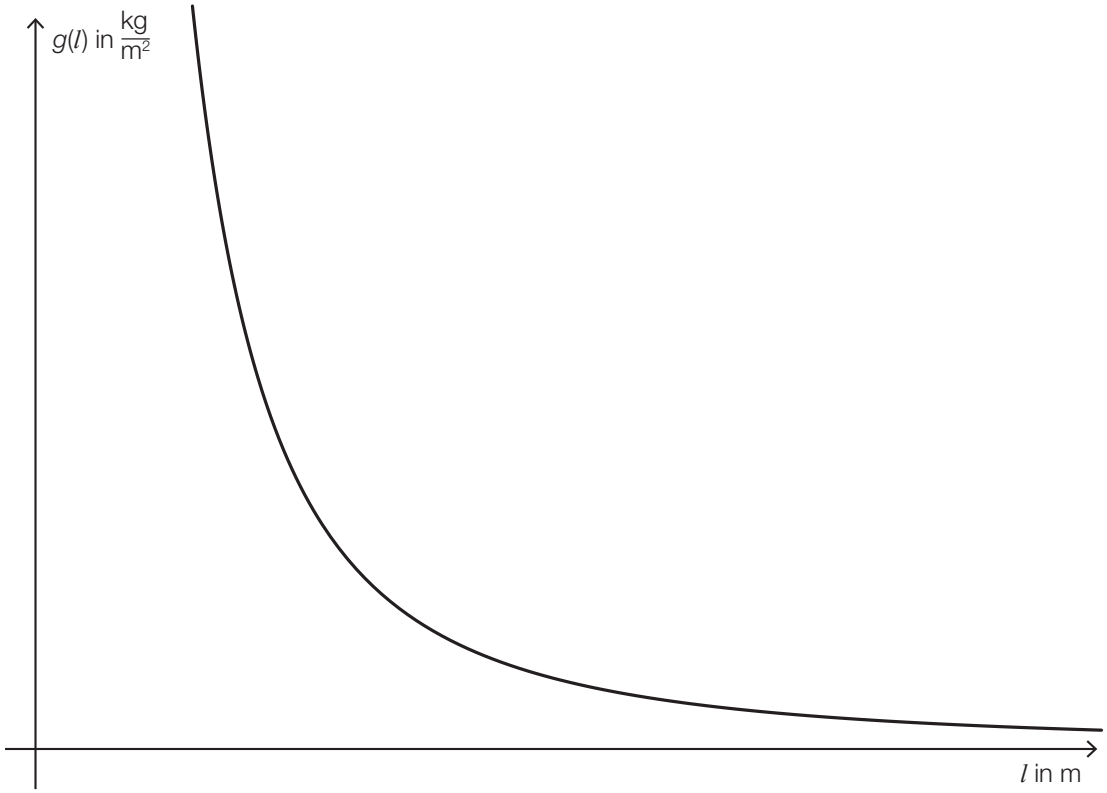
gesuchte Formel: $BMI_{Georg} = \frac{m}{G^2} = \frac{m}{(1{,}1 \cdot F)^2} = \frac{m}{1{,}1^2 \cdot F^2}$

Vergleicht man diese zwei Werte, so sieht man:

$BMI_{Georg} = \frac{1}{1{,}1^2} \cdot BMI_{Fritz} = 0{,}826 \cdot BMI_{Fritz}$

Das bedeutet, dass Georgs BMI um 17,4 % kleiner als jener von Fritz ist.

c) Beschriftung der Koordinatenachsen:



Die Einheiten müssen bei der Beschriftung nicht unbedingt angegeben werden.
Bei der Beschriftung der vertikalen Achse ist auch die Beschriftung „BMI in $\frac{kg}{m^2}$“ *oder eine inhaltlich gleichwertige Form als richtig zu werten.*

Die Körpergröße l ist in der Funktion g die unabhängige Variable.
Die Masse m bleibt konstant.
Es liegt also der allgemeine Funktionstyp $y = \frac{a}{x^2}$ vor.

Dieser typische Funktionsverlauf ist in der Grafik dargestellt.

Lösungsschlüssel

a) 1 × C: für das richtige Ablesen des Prozentwertes aus der Grafik
1 × D: für die richtige Überprüfung

b) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Formel

c) 1 × C: für die richtige Beschriftung der Koordinatenachsen in der Grafik
1 × D: für die richtige Begründung

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Rampe für Rollstühle*

Aufgabennummer: A_204

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Ein Hotel muss zusätzlich zur „normalen“ Treppe eine Rampe für Rollstühle einbauen.

a) Die Rampe soll nicht steiler als 6,5 % sein.

– Ermitteln Sie den maximal erlaubten Steigungswinkel.
– Berechnen Sie, welche Strecke man mit einem Rollstuhl mindestens zurücklegen muss, wenn ein Höhenunterschied von 45 cm überwunden werden muss.

b) – Erklären Sie, warum sich der Steigungswinkel einer Rampe nicht verändert, wenn sowohl der horizontale als auch der vertikale Abstand verdoppelt werden.

c) Beobachtungen zufolge sind 2 % aller Gäste mit einem Rollstuhl unterwegs.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sich in einer Zufallsstichprobe von 50 Gästen mehr als 2 Rollstuhlfahrer/innen befinden.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

a) $\tan(\alpha) = 0{,}065$ $\quad\alpha \approx 3{,}72°$
$\sin(3{,}72°) = \frac{45}{x}$ $\quad x \approx 694$ cm

b) Der Steigungswinkel bleibt gleich, da das Verhältnis der beiden Katheten nicht verändert wird (ähnliche Dreiecke).

c) Ansatz zur Berechnung mithilfe der Binomialverteilung: $n = 50$, $p = 0{,}02$
$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 7{,}84$ %

Lösungsschlüssel

a) 1 × B1: für die richtige Berechnung des Steigungswinkels
1 × B2: für die richtige Berechnung der Länge der Rampe

b) 1 × D: für die richtige Argumentation

c) 1 × A: für den richtigen Ansatz mit der Binomialverteilung
1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Studentenfutter*

Aufgabennummer: A_203

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Die Übungsfirma einer Tourismusschule möchte selbstgemischtes Studentenfutter an Schüler/innen derselben Schule verkaufen.

a) Die Mitarbeiter/innen der Übungsfirma stellen eine Studentenfutter-Mischung aus Rosinen, Mandeln und Walnüssen her. Insgesamt werden 80 kg dieser Mischung hergestellt. Der Einkaufspreis für 1 kg Rosinen beträgt € 6, für 1 kg Mandeln € 12 und für 1 kg Walnüsse € 14. Das Mischungsverhältnis soll so sein, dass der Massenanteil von Rosinen und Mandeln gleich ist.

– Berechnen Sie, wie viele Kilogramm Rosinen, Mandeln und Walnüsse gekauft werden müssen, wenn 1 Kilogramm der Mischung in der Herstellung € 10 kosten soll.

b) Die Übungsfirma führt eine Umfrage in der Schule durch, um festzustellen, welchen Preis die Schüler/innen für eine Packung der Studentenfutter-Mischung zu bezahlen bereit sind. Das Ergebnis der Umfrage ist in der nachstehenden Tabelle dargestellt.

Preis	Anzahl der Schüler/innen
€ 1,20	356
€ 1,50	123
€ 2	41

– Erklären Sie in Worten, wie Sie aus dieser Tabelle das arithmetische Mittel der Preise, die die Schüler/innen zu bezahlen bereit sind, bestimmen können.

c) Die Füllmenge in den Packungen kann näherungsweise als normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 100$ g und der Standardabweichung $\sigma = 5$ g angenommen werden.

– Skizzieren Sie den Graphen der Wahrscheinlichkeitsdichte. Achten Sie dabei auf ein korrektes Einzeichnen des Erwartungswertes μ.
– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Füllmenge einer Packung weniger als 96 g beträgt.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

a) x … Masse der Rosinen oder Mandeln in Kilogramm (kg)
y … Masse der Walnüsse in Kilogramm (kg)

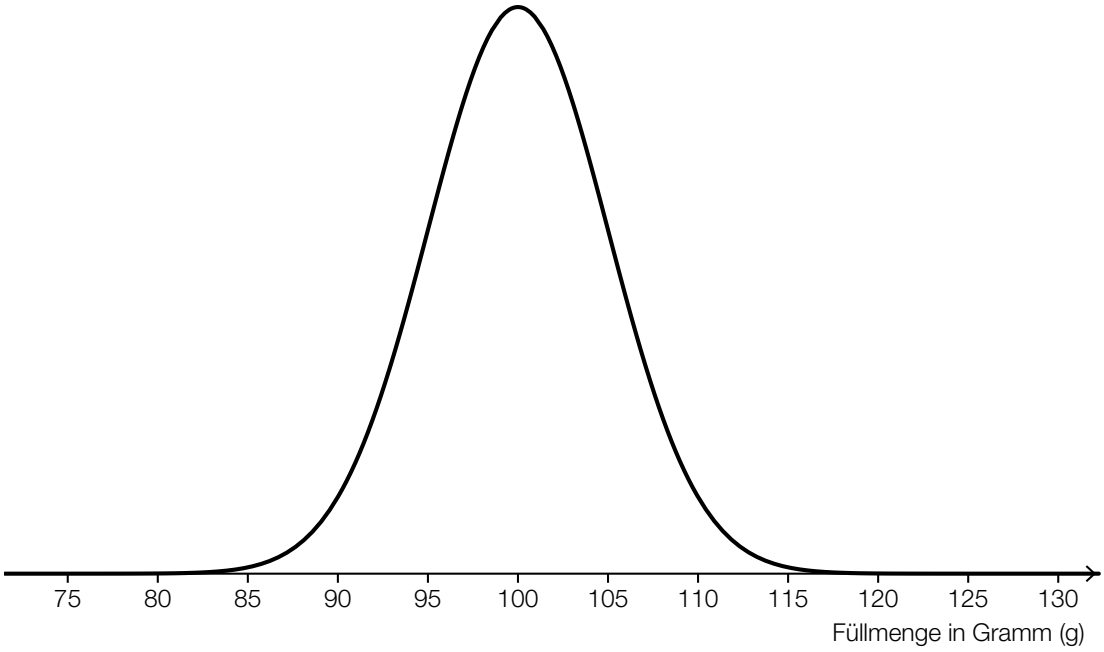
$2 \cdot x + y = 80$
$6 \cdot x + 12 \cdot x + 14 \cdot y = 800$

Das Lösen des Gleichungssystems ergibt:
$x = 32$
$y = 16$

Es müssen je 32 kg Rosinen und Mandeln sowie 16 kg Walnüsse gekauft werden.

b) Das gewichtete arithmetische Mittel aus den Werten in der Tabelle ergibt den Durchschnittspreis; d. h., es müssen die absoluten Häufigkeiten mit den jeweiligen Preisangaben multipliziert und es muss die Summe der Produkte durch die Anzahl der befragten Schüler/innen dividiert werden.

c)



In der Skizze des Graphen der Wahrscheinlichkeitsdichte muss klar ersichtlich sein, dass der Erwartungswert μ bei 100 g liegt.

Lösung mittels Technologieeinsatz:
$P(X < 96) = 21{,}19\ \%$

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für einen richtigen Lösungsansatz
1 × B: für die richtige Berechnung

b) 1 × D: für die richtige Erklärung

c) 1 × A: für das Erstellen einer qualitativ richtigen Skizze
1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit

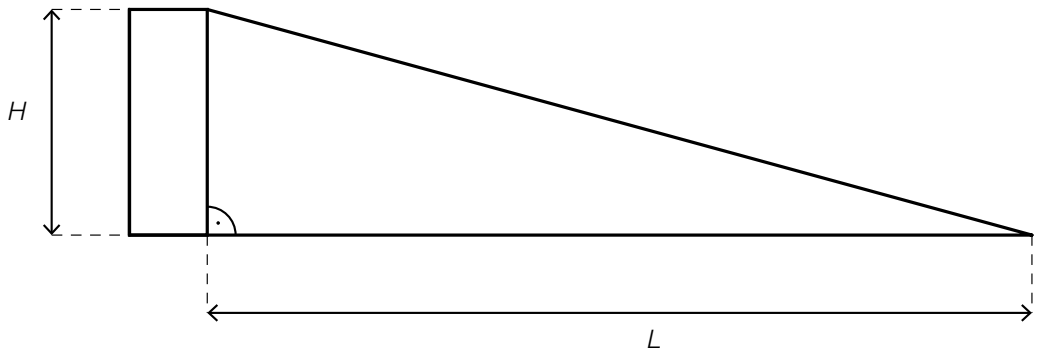
Skatepark (1)*

Aufgabennummer: A_194

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Ein *Skatepark* ist ein speziell für Skater/innen eingerichteter Bereich mit Startrampen und verschiedenen Hindernissen, die befahren werden können.

a) Im einfachsten Fall ist eine Startrampe eine geneigte ebene Fläche.
In der nachstehenden Abbildung ist der Querschnitt einer Startrampe dargestellt.



Ein Hersteller von Startrampen gibt folgende Maße an:

Höhe H: 1,45 m
Länge L: 5,3 m

Eine Norm schreibt vor, dass die Steigung maximal 20 % betragen darf.

– Überprüfen Sie nachweislich, ob diese Norm eingehalten wird.

b) Der Verlauf einer anderen Rampe im Querschnitt kann näherungsweise durch folgende quadratische Funktion f modelliert werden:

$f(x) = \frac{1}{320} \cdot x^2$ mit $0 \le x \le 160$

x ... horizontale Koordinate in Zentimetern (cm)
$f(x)$ ... Höhe an der Stelle x in cm

– Berechnen Sie, in welcher Höhe diese Rampe einen Steigungswinkel von 30° hat.

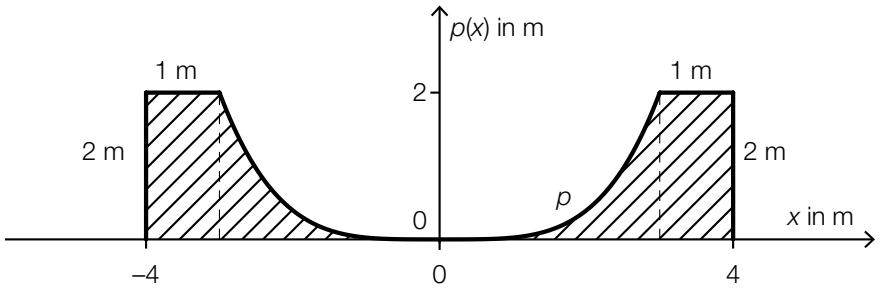
* ehemalige Klausuraufgabe

c) Für eine *Halfpipe* soll in einem Skatepark Material aufgeschüttet werden. Ein Teil des Verlaufs der Halfpipe im Querschnitt lässt sich annähernd durch die Funktion p beschreiben:

$p(x) = \frac{2}{81} \cdot x^4$ mit $-3 \le x \le 3$

x ... horizontale Koordinate in Metern (m)
$p(x)$ ... Höhe an der Stelle x in m

Die nachstehende Abbildung zeigt die Querschnittsfläche der Halfpipe.



– Ermitteln Sie den Inhalt der schraffierten Querschnittsfläche.

d) Eine *Quarterpipe* ist so konstruiert, dass die Skater/innen an der Kante senkrecht nach oben springen können. Die Höhe über der Absprungkante, die sie dabei erreichen, lässt sich durch die Weg-Zeit-Funktion h beschreiben:

$h(t) = v_0 \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2$

t ... Zeit nach dem Absprung in Sekunden (s)
$h(t)$ ... Höhe über der Absprungkante zur Zeit t in m
v_0 ... Geschwindigkeit der Skaterin/des Skaters an der Absprungkante in m/s
g ... Erdbeschleunigung ($g \approx 9{,}81$ m/s²)

In einem Lehrbuch findet man folgende Rechnung ausgeführt:

$h'(t) = v_0 - g \cdot t$
$0 = v_0 - g \cdot T$
$T = \frac{v_0}{g}$
$H = h(T) = \frac{v_0^2}{2 \cdot g}$

– Interpretieren Sie, was mit T und H in diesem Sachzusammenhang berechnet wird.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Steigung: $k = \frac{1,45}{5,3} \approx 0,273...$

Die Rampe hat eine Steigung von über 27 %. Die Norm wird nicht eingehalten.

b) Ansatz zur Berechnung der Stelle, an der die Rampe einen Steigungswinkel von 30° hat:
$\tan(30°) = f'(x)$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{160} \cdot x \Rightarrow x = 160 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$f\left(160 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{80}{3} \approx 26,7$$

Die Rampe hat in einer Höhe von rund 26,7 cm einen Steigungswinkel von 30°.

c) Inhalt der Querschnittsfläche zwischen $x = 0$ und $x = 3$:

$$\int_0^3 \frac{2}{81} \cdot x^4 \, dx = \frac{2}{81} \cdot \frac{x^5}{5} \Big|_0^3 = 1,2$$

Inhalt der gesamten Querschnittsfläche: $A = 2 \cdot (2 + 1,2) = 6,4$

Der Inhalt der Querschnittsfläche beträgt 6,4 m^2.

d) T ist der Zeitpunkt, an dem die Skaterin/der Skater die maximale Höhe erreicht.
H ist die Höhe zum Zeitpunkt T, also die maximale Höhe.

Lösungsschlüssel

a) 1 × D: für eine richtige Überprüfung

b) 1 × A: für den richtigen Ansatz zur Berechnung der Stelle, an der die Funktion einen Steigungswinkel von 30° hat
1 × B: für die richtige Berechnung der Höhe, an der die Funktion einen Steigungswinkel von 30° hat

c) 1 × A: für das richtige Aufstellen des bestimmten Integrals
1 × B: für die richtige Berechnung des Inhalts der schraffierten Querschnittsfläche

d) 1 × C: für die richtige Interpretation von T und H im Sachzusammenhang

Tauchen (2)*

Aufgabennummer: A_193

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Nitrox ist ein beim Tauchen eingesetztes Atemgasgemisch mit erhöhtem Sauerstoffanteil.

Verwendet man Nitrox statt normaler Atemluft, kann man länger unter Wasser bleiben, darf aber nur bis zu einer maximalen Tiefe tauchen. Die maximale Tauchtiefe T hängt vom Sauerstoffanteil im Atemgas ab. Man kann sie mit folgender vereinfachter Formel berechnen:

$$T = \frac{14}{O_2} - 10$$

O_2 ... Sauerstoffanteil (z. B.: bei 32 % Sauerstoffanteil setzt man $O_2 = 0{,}32$ in die Formel ein)
T ... maximale Tauchtiefe in Metern (m)

Ein Taucher möchte mit einem Sauerstoffanteil von 30 % bis zu einer Tiefe von 30 m tauchen.

– Überprüfen Sie nachweislich, ob er das darf.

b) Eine Taucherin benötigt für einen Notaufstieg 40 Sekunden.

Der zurückgelegte Weg s in Abhängigkeit von der Zeit t lässt sich näherungsweise durch folgende Funktion beschreiben:

$s(t) = 0{,}02 \cdot t^2$

t ... Zeit seit Beginn des Notaufstiegs in Sekunden (s)
$s(t)$ ... zurückgelegter Weg zum Zeitpunkt t in Metern (m)

– Berechnen Sie die momentane Geschwindigkeit der Taucherin 3 Sekunden, bevor sie die Oberfläche erreicht.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Die Auftriebskraft F_A eines Körpers in Flüssigkeit ist gleich der Gewichtskraft G der verdrängten Flüssigkeit.

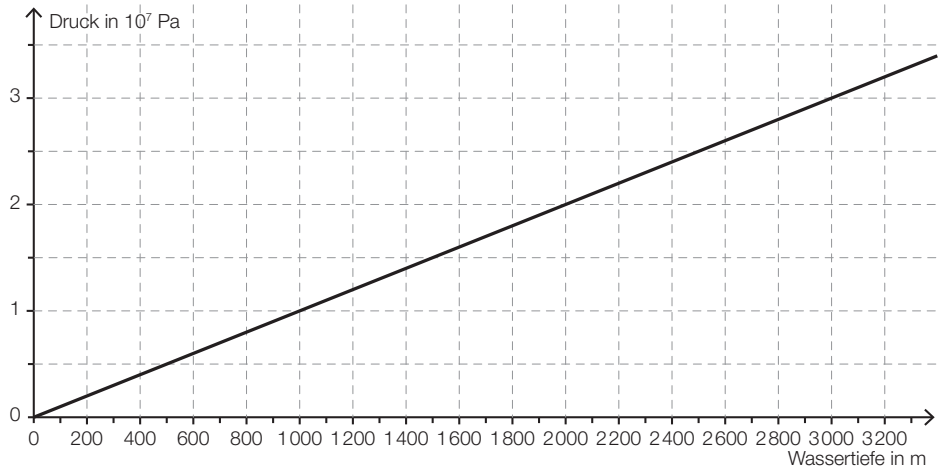
Aus der Physik sind folgende Formeln bekannt:

$$\rho = \frac{m}{V}$$
$$G = m \cdot g$$

Die verwendeten Variablen stehen für:
ρ ... Dichte der Flüssigkeit
m ... Masse der verdrängten Flüssigkeit
V ... Volumen der verdrängten Flüssigkeit
G ... Gewichtskraft der verdrängten Flüssigkeit
g ... Erdbeschleunigung

– Erstellen Sie aus den angegebenen Beziehungen eine Formel für die Auftriebskraft F_A in Abhängigkeit von Dichte, Volumen und Erdbeschleunigung.

d) Mit zunehmender Wassertiefe steigt der Druck. Dieser kann in Bar (bar) oder Pascal (Pa) angegeben werden. 1 bar = 10^5 Pa.
Die nachstehende Grafik zeigt den Druck (in 10^7 Pascal) in Abhängigkeit von der Wassertiefe (in Metern).



Robben erreichen beim Tauchen aufgrund des Drucks eine maximale Tiefe von 700 m. Pottwale können einem um 230 bar größeren maximalen Druck als Robben ausgesetzt sein.

– Lesen Sie aus der obigen Grafik ab, welchem Druck Robben in 700 m Tiefe ausgesetzt sind.
– Ermitteln Sie, welche maximale Tiefe Pottwale erreichen können.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $\frac{14}{0{,}3} - 10 = 36{,}66\ldots \approx 36{,}7$

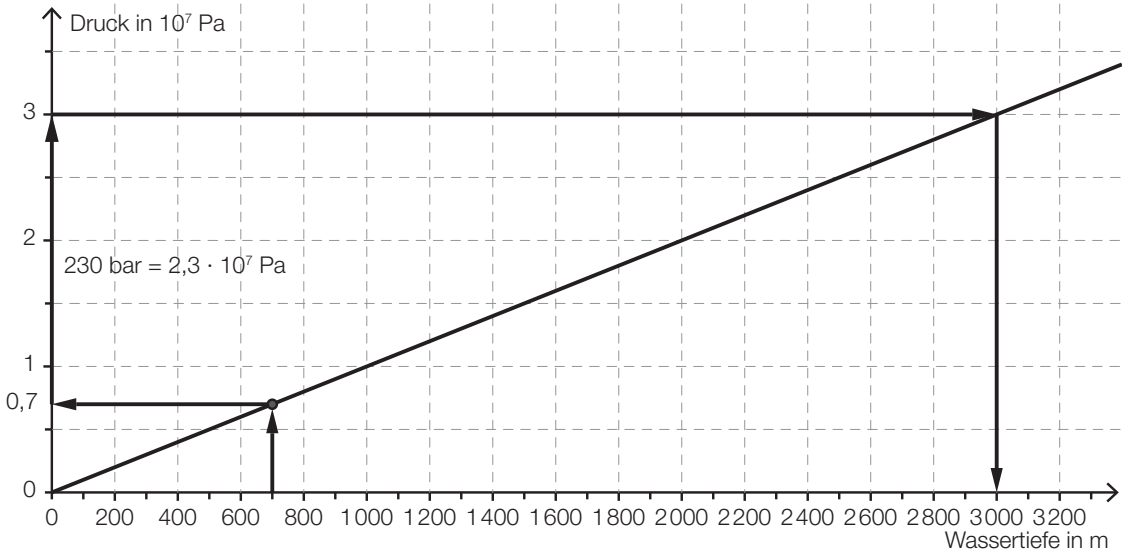
Man darf mit einem Sauerstoffanteil von 30 % bis zu einer Tiefe von mehr als 30 Metern tauchen.

b) $v(t) = s'(t) = 0{,}04 \cdot t$
$s'(37) = 0{,}04 \cdot 37 = 1{,}48$

Die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 37$ s beträgt 1,48 m/s.

c) $F_A = V \cdot \rho \cdot g$

d) Druck in 700 m Tiefe: $0{,}7 \cdot 10^7$ Pa
Toleranzbereich: $[0{,}6 \cdot 10^7; 0{,}8 \cdot 10^7]$



Pottwale können eine maximale Tiefe von 3000 m erreichen.

Lösungsschlüssel

a) 1 × D: für eine richtige Überprüfung

b) 1 × A: für die richtige Verwendung des Modells der Differenzialrechnung
1 × B: für die richtige Berechnung der momentanen Geschwindigkeit bei $t = 37$ s

c) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel

d) 1 × C1: für das richtige Ablesen des Drucks in 700 m Tiefe im Toleranzbereich $[0{,}6 \cdot 10^7; 0{,}8 \cdot 10^7]$
1 × C2: für das richtige Angeben der maximalen Tiefe, die Pottwale erreichen können

Investitionen*

Aufgabennummer: B_296

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Ein Unternehmen überlegt, eine neue Maschine anzuschaffen. Die Anschaffungskosten betragen € 120.000. Die Nutzungsdauer wird mit 5 Jahren angenommen. Nach 5 Jahren kann die Maschine um 40 % des Anschaffungswerts verkauft werden.

Man rechnet bei Ankauf der Maschine mit jährlichen Einnahmen von € 25.000.
Die Kosten für die Wartung betragen jährlich € 5.000. Nach 2 und 4 Jahren muss ein Teil der Maschine ausgetauscht werden. Dieser Austausch kostet jeweils € 1.250.

– Übertragen Sie für den Zeitraum der Nutzungsdauer die Einnahmen und die Ausgaben in die nachstehende Tabelle.

Jahr	Einnahmen	Ausgaben
0		
1		
2		
3		
4		
5		

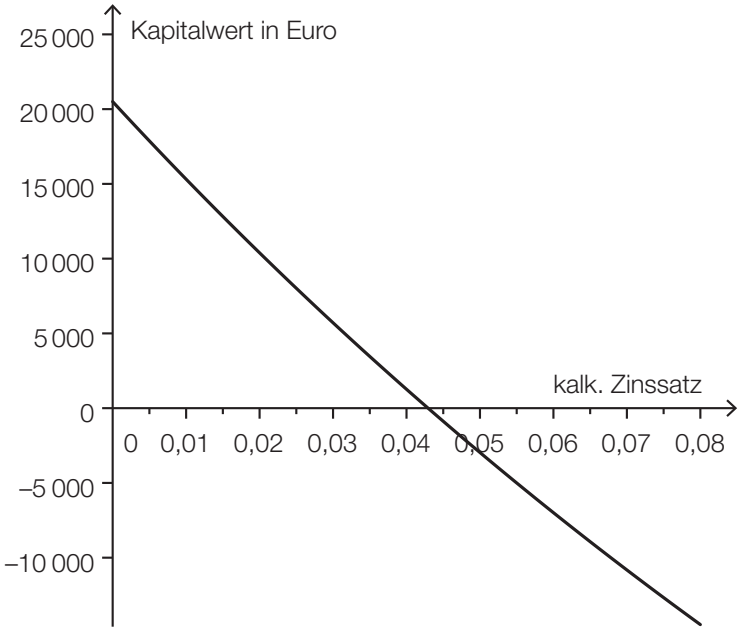
* ehemalige Klausuraufgabe

b) Ein Unternehmen überlegt, eine neue Maschine anzuschaffen. Die Anschaffungskosten betragen € 120.000. Die Nutzungsdauer wird mit 5 Jahren angenommen. Nach 5 Jahren kann die Maschine um 40 % des Anschaffungswerts verkauft werden.

Die Betriebsleiterin kann einen Pauschalvertrag aushandeln, der auch den Austausch von Teilen beinhaltet. Die Wartungskosten betragen € 5.500 pro Jahr. Zusätzlich rechnet sie mit einmaligen Einschulungskosten von € 5.000 am Beginn. Die jährlichen Einnahmen werden mit € 25.000 angenommen. Der Wiederverkaufswert bleibt gleich. Man rechnet mit einem kalkulatorischen Zinssatz von 2,5 %.

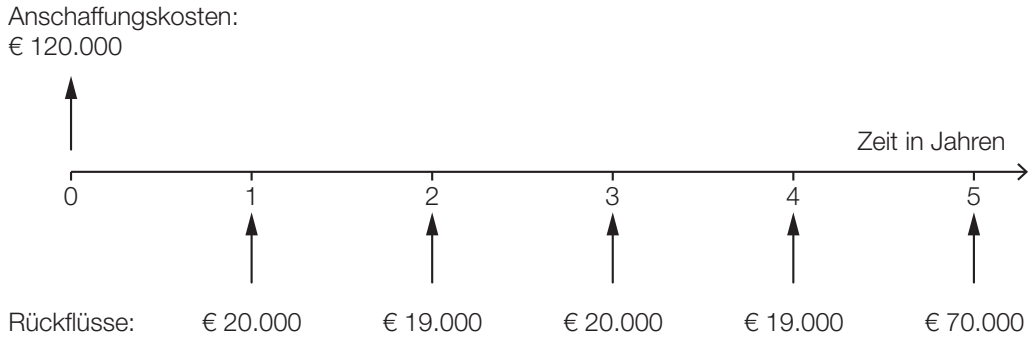
– Berechnen Sie den Kapitalwert dieser Investition.

In der nachstehenden Abbildung ist der Kapitalwert dieser Investition in Abhängigkeit vom kalkulatorischen Zinssatz dargestellt.



– Lesen Sie den internen Zinssatz dieser Investition ab.
– Begründen Sie, warum diese Investition vorteilhaft ist.

c) Die Anschaffungskosten und Rückflüsse einer anderen Investition sind in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



Die Nutzungsdauer wird mit 5 Jahren angenommen. Die Rückflüsse können zu einem Zinssatz von 3 % wiederveranlagt werden.

– Berechnen Sie den Endwert der wiederveranlagten Rückflüsse.
– Berechnen Sie den modifizierten internen Zinssatz.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a)

Jahr	Einnahmen	Ausgaben
0		€ 120.000
1	€ 25.000	€ 5.000
2	€ 25.000	€ 6.250
3	€ 25.000	€ 5.000
4	€ 25.000	€ 6.250
5	€ 73.000	€ 5.000

b) Barwert der Einnahmen: $25000 \cdot \frac{1{,}025^5 - 1}{0{,}025} \cdot \frac{1}{1{,}025^5} + 48000 \cdot \frac{1}{1{,}025^5} = 158570{,}718\ldots$

Barwert der Ausgaben: $120000 + 5000 + 5500 \cdot \frac{1{,}025^5 - 1}{0{,}025} \cdot \frac{1}{1{,}025^5} = 150552{,}056\ldots$

Kapitalwert: € 8.018,66

interner Zinssatz: 4,3 %
Toleranzbereich: [4,2 %; 4,4 %]

Diese Investition ist vorteilhaft, weil der Kapitalwert positiv ist.

oder:

Diese Investition ist vorteilhaft, weil der interne Zinssatz höher ist als der Kalkulationszinssatz.

c) $20000 \cdot 1{,}03^4 + 19000 \cdot 1{,}03^3 + 20000 \cdot 1{,}03^2 + 19000 \cdot 1{,}03 + 70000 = 154059{,}989\ldots$

$i_{mod} = \sqrt[5]{\frac{154059{,}989...}{120000}} - 1 = 0{,}0512\ldots$

Der modifizierte interne Zinssatz beträgt rund 5,1 %.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A1: für das richtige Übertragen der Einnahmen
1 × A2: für das richtige Übertragen der Ausgaben

b) 1 × B: für die richtige Berechnung des Kapitalwerts
1 × C: für das richtige Ablesen des internen Zinssatzes im Toleranzbereich [4,2 %; 4,4 %]
1 × D: für eine richtige Begründung zur Vorteilhaftigkeit dieser Investition

c) 1 × B1: für die richtige Berechnung des Endwerts
1 × B2: für die richtige Berechnung des modifizierten internen Zinssatzes

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Wachstum von Holzbeständen*

Aufgabennummer: A_192

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Bauer Waldner weiß, dass sich der Holzbestand seines Waldes um ca. 2,7 % pro Jahr bezogen auf das jeweilige Vorjahr vermehrt. Zum Zeitpunkt $t = 0$ beträgt der Holzbestand 36 000 m³.

– Stellen Sie eine Funktionsgleichung für diejenige Funktion f auf, die den Holzbestand in Abhängigkeit von der Zeit in Jahren angibt.
– Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f im Zeitintervall [0; 50].

b) Der Holzbestand eines anderen Waldes kann näherungsweise mithilfe der Funktion g beschrieben werden:

$g(t) = 31\,800 \cdot 1{,}025^t$

t ... Zeit in Jahren
$g(t)$ ... Holzbestand zum Zeitpunkt t in Kubikmetern (m³)

Wenn der Holzbestand auf 33 000 m³ angewachsen ist, wird so viel geschlägert, dass wieder der Holzbestand zum Zeitpunkt $t = 0$ vorliegt.

Für den Verkauf dieses geschlägerten Holzes betragen die Einnahmen € 96.000.

– Berechnen Sie den durchschnittlichen Verkaufspreis für 1 m³ Holz.
– Berechnen Sie, nach welcher Zeit der Holzbestand auf 33 000 m³ angewachsen ist.

c) Ein Student behauptet: „Um die relative Änderung r des Holzbestandes von einem Zeitpunkt t_1 bis zu einem späteren Zeitpunkt t_2 zu berechnen, subtrahiere ich vom Holzbestand zum Zeitpunkt t_2 den Holzbestand zum Zeitpunkt t_1 und dividiere die Differenz durch den Holzbestand zum Zeitpunkt t_1."

– Übersetzen Sie die Rechenanleitung des Studenten in eine Formel.

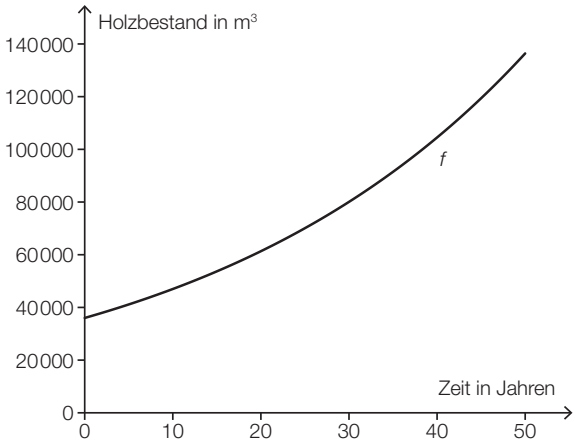
Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

a) $f(t) = 36\,000 \cdot 1{,}027^t$

t … Zeit in Jahren
$f(t)$ … Holzbestand zum Zeitpunkt t in m³



b) Verkauft wurden 1 200 m³, daher betrug der durchschnittliche Preis pro Kubikmeter € 80.

$33\,000 = 31\,800 \cdot 1{,}025^t$

$t = \dfrac{\ln(33\,000) - \ln(31\,800)}{\ln(1{,}025)} = 1{,}50\ldots$

Nach etwa 1,5 Jahren beträgt der Holzbestand 33 000 m³.

c) $r = \dfrac{h(t_2) - h(t_1)}{h(t_1)}$

r … relative Änderung
t_1, t_2 … Zeitpunkte
$h(t_1)$, $h(t_2)$ … Holzbestand zum Zeitpunkt t_1 bzw. t_2

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung
1 × B: für das richtige Zeichnen des Funktionsgraphen

b) 1 × B1: für die richtige Berechnung des durchschnittlichen Preises pro Kubikmeter
1 × B2: für die richtige Berechnung der Zeit, nach der der Holzbestand auf 33 000 m³ angewachsen ist

c) 1 × A: für die richtige Übersetzung der Rechenanleitung in eine Formel

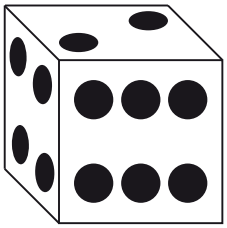
Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Würfelspiele*

Aufgabennummer: A_191

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Würfelspiele sind seit Jahrtausenden auf der ganzen Welt bekannt und beliebt.
Die im Folgenden beschriebenen Spiele werden mit herkömmlichen fairen Spielwürfeln gespielt, bei denen die Augenzahlen 1 bis 6 jeweils mit gleicher Wahrscheinlichkeit als Würfelergebnis auftreten.



a) Eines der beliebtesten Gesellschaftsspiele ist *Mensch ärgere Dich nicht*. Um eine Figur ins Spiel zu bringen, muss ein Sechser gewürfelt werden. In der 1. Runde darf jede Spielerin/jeder Spieler mit einem Würfel 3-mal würfeln.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei 3-maligem Würfeln mindestens 1 Sechser auftritt.

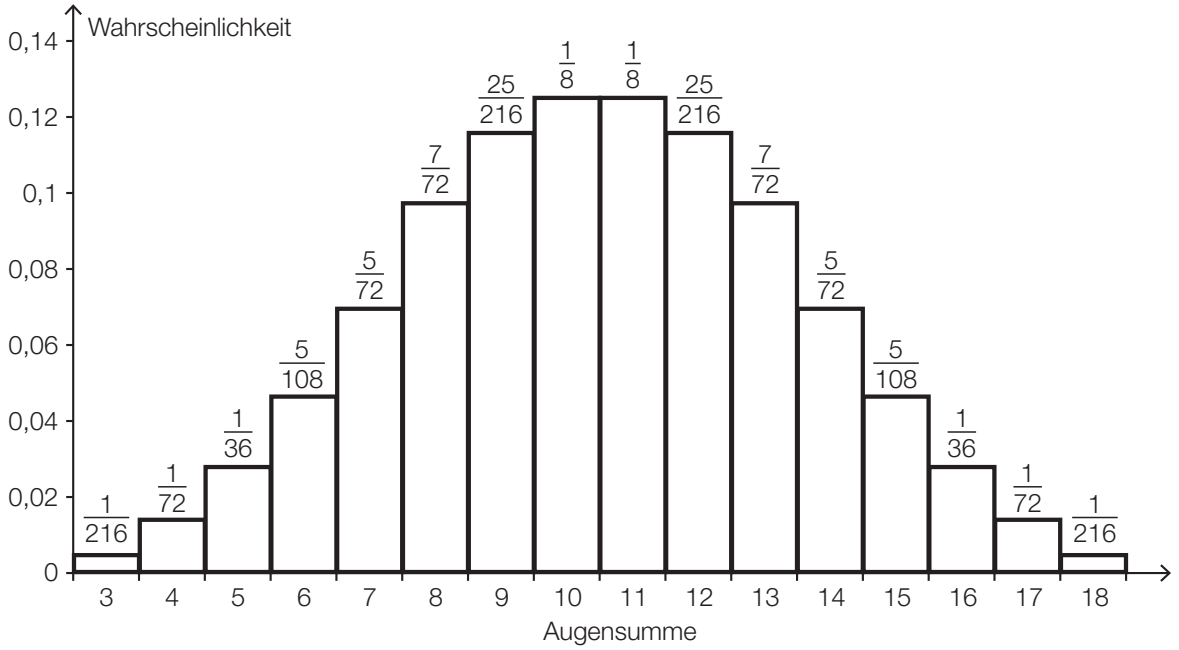
b) Beim Spiel *Siedler von Catan* wird mit 2 Würfeln gespielt. Wird die Augensumme 7 gewürfelt, tritt die Figur des Räubers in Aktion.

– Zeigen Sie, dass beim Werfen mit 2 Würfeln die Augensumme 7 häufiger auftritt als jede andere Augensumme.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Beim *Paschen* werden 3 Würfel geworfen und es wird die Augensumme ermittelt.

Im folgenden Diagramm ist zu jeder beim Werfen mit 3 Würfeln möglichen Augensumme die entsprechende Wahrscheinlichkeit dargestellt:



– Ermitteln Sie aus dem Diagramm, mit welcher Wahrscheinlichkeit eine Augensumme größer als 10 auftritt.

d) Das chinesische Spiel *Pat Cha* („Griff nach acht“) wird mit 8 Würfeln gespielt. Jede Spielerin / jeder Spieler setzt auf eine der 6 Augenzahlen. Eine Spielerin / ein Spieler gewinnt, wenn mindestens 3 der 8 Würfel die gesetzte Zahl zeigen.

Martin setzt auf die Augenzahl 6.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Martin gewinnt.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Berechnung mithilfe der Gegenwahrscheinlichkeit: $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{91}{216} \approx 0{,}4213$

b) Tabelle:
(1, 1) (1, 2) (1, 3) (1, 4) (1, 5) (1, 6)
(2, 1) ...
...
(6, 1) (6, 2) ... (6, 6)

Die Augensumme 7 ergibt sich aus den 6 günstigen Ausgängen (1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2) und (6, 1).
Für alle anderen Augensummen gibt es weniger günstige Ausgänge.

c) Aufgrund der Symmetrie der Wahrscheinlichkeitsfunktion beträgt die gesuchte Wahrscheinlichkeit genau 50 %.

oder:

Addition der Wahrscheinlichkeiten: $P(X = 11) + ... + P(X = 18) = 0{,}5$

d) Berechnung mittels Binomialverteilung: $n = 8$; $p = \frac{1}{6}$
$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 0{,}1348\ldots$

Die Wahrscheinlichkeit, dass Martin gewinnt, beträgt rund 13,5 %.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für die Verwendung eines richtigen Modells (Gegenwahrscheinlichkeit oder Additionssatz)
1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit

b) 1 × D: für einen richtigen Nachweis

c) 1 × B: für das richtige Ermitteln der Wahrscheinlichkeit

d) 1 × A: für das Erkennen des richtigen Wahrscheinlichkeitsmodells (Binomialverteilung)
1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Ölbohrungen*

Aufgabennummer: B_221

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Eine Ölgesellschaft führt Probebohrungen in Texas und in Alaska durch. Erfahrungsgemäß findet man bei einer Bohrung in Texas mit einer Wahrscheinlichkeit von 85 % und bei einer Bohrung in Alaska mit einer Wahrscheinlichkeit von 65 % Öl.

a) – Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass nur in Texas oder nur in Alaska Öl gefunden wird, wenn die beiden Bohrungen unabhängig voneinander sind.

b) – Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, in höchstens einem der beiden US-Bundesstaaten Öl zu finden, wenn die beiden Bohrungen unabhängig voneinander sind.
– Erklären Sie, welchen Vorteil eine Berechnung mittels Gegenwahrscheinlichkeit hier hat.

c) – Berechnen Sie, wie viele Bohrungen in Alaska zumindest notwendig sind, um mit mindestens 99%iger Wahrscheinlichkeit Öl zu finden.
– Beschreiben Sie, wie sich die gesuchte Anzahl der Bohrungen verändert, wenn eine 95%ige Wahrscheinlichkeit, Öl zu finden, ausreichend ist.

d) Von allen Arbeiter/innen der Ölgesellschaft arbeiten 30 % in Alaska, die übrigen bei Bohrungen in Texas. Insgesamt sprechen 65 % aller Arbeiter/innen Spanisch. Ein Sechstel aller in Alaska tätigen Arbeiter/innen spricht Spanisch.

– Übertragen Sie die Werte der Angabe in die entsprechenden Felder der untenstehenden Vierfeldertafel.
– Ermitteln Sie die Werte der restlichen Felder und tragen Sie diese in die entsprechenden Felder ein.

	Arbeiter/innen in Alaska	Arbeiter/innen in Texas	Summe
Spanisch sprechend			
nicht Spanisch sprechend			
Summe			

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

a) $P(T \cap A') + P(T' \cap A) = 0{,}85 \cdot 0{,}35 + 0{,}15 \cdot 0{,}65 = 0{,}395 = 39{,}5\ \%$

Die Wahrscheinlichkeit, dass nur in Texas oder nur in Alaska Öl gefunden wird, beträgt 39,5 %.

b) $1 - P(T \cap A) = 1 - 0{,}85 \cdot 0{,}65 = 0{,}4475 = 44{,}75\ \%$
Die Wahrscheinlichkeit, in höchstens einem der beiden US-Bundesstaaten Öl zu finden, beträgt 44,75 %.
Bei einer Berechnung mithilfe der Gegenwahrscheinlichkeit hat man den Vorteil, dass man nur die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis – nämlich das Ereignis, dass bei beiden Bohrungen Öl gefunden wird – berechnen muss.

c) $1 - 0{,}35^n = 0{,}99$
Berechnung mithilfe von Technologie: $n \approx 4{,}4$

Es sind zumindest 5 Bohrungen in Alaska notwendig, um mit mindestens 99%iger Wahrscheinlichkeit Öl zu finden.
Ist nur eine 95%ige Sicherheit gefordert, so ist die Anzahl der notwendigen Bohrungen geringer.

d)

	Arbeiter/innen in Alaska	Arbeiter/innen in Texas	Summe
Spanisch sprechend	**5 %**	60 %	**65 %**
nicht Spanisch sprechend	25 %	10 %	35 %
Summe	**30 %**	70 %	

Die hervorgehobenen Werte in der obenstehenden Tabelle sind diejenigen, die aus der Angabe übertragen wurden.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit
b) 1 × B für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit
1 × D für die richtige Erklärung zur Gegenwahrscheinlichkeit
c) 1 × B für die richtige Berechnung der Anzahl der notwendigen Bohrungen
1 × C für die richtige Beschreibung zur Veränderung der notwendigen Bohrungen
d) 1 × A für das richtige Übertragen der Werte in die Vierfeldertafel
1 × B für das richtige Ermitteln der fehlenden Werte

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

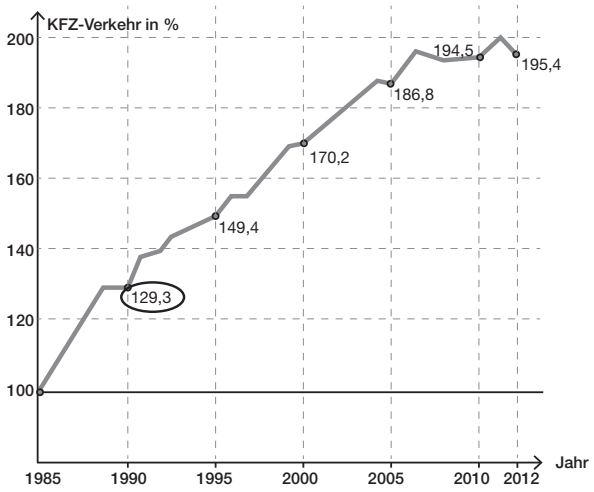
Straßenverkehr in Tirol*

Aufgabennummer: B_209

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Das Verkehrsaufkommen wird seit vielen Jahren statistisch erfasst.

a) Die nachstehende Grafik zeigt die Entwicklung des KFZ-Verkehrs von 1985 bis 2012 in Tirol.



– Interpretieren Sie die Bedeutung der in der Grafik markierten Zahl 129,3 in diesem Sachzusammenhang.
– Interpretieren Sie die Bedeutung des folgenden Rechenausdrucks in diesem Sachzusammenhang:

$$\sqrt[10]{\frac{170{,}2}{129{,}3}} - 1 \approx 0{,}0279$$

– Erstellen Sie basierend auf den Daten der Grafik eine quadratische Regressionsfunktion. Wählen Sie dabei für das Jahr 1985 den Zeitpunkt $t = 0$.
– Ermitteln Sie mithilfe dieser Regressionsfunktion eine Prognose für den KFZ-Verkehr im Jahr 2013.

b) Die Anzahl der durchschnittlichen täglichen KFZ-Fahrten auf der Brennerautobahn kann für den Zeitraum 2000 bis 2007 durch die lineare Regressionsfunktion f beschrieben werden:

$f(t) = 617 \cdot t + 28017$

t ... Zeit in Jahren mit $t = 0$ im Jahr 2000
$f(t)$ ... Anzahl der durchschnittlichen täglichen KFZ-Fahrten zur Zeit t

– Interpretieren Sie die Bedeutung des Koeffizienten 617 in diesem Sachzusammenhang.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Auf einer österreichischen Transitroute wurden im Jahr 2003 insgesamt 1 700 000 Fahrten gezählt. Im Jahr 2011 waren es bereits 2 006 000 Fahrten.

– Stellen Sie diejenige Funktionsgleichung auf, die die Entwicklung der Anzahl der Fahrten auf dieser Route mit einer Exponentialfunktion der Form $y(t) = a \cdot b^t$ beschreibt.

t ... Zeit in Jahren mit $t = 0$ im Jahr 2003
$y(t)$ ... Zahl der jährlichen Fahrten zur Zeit t

– Erklären Sie den Unterschied zwischen exponentiellem und linearem Wachstum.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) 129,3 bedeutet, dass der Verkehr im Jahr 1990 gegenüber dem Jahr 1985 um 29,3 % zugenommen hat.

Der gegebene Rechenausdruck gibt an, um wie viel Prozent das KFZ-Verkehrsaufkommen durchschnittlich jeweils von einem zum nächsten Jahr im Zeitraum 1990 bis 2000 zugenommen hat.

quadratische Regression: $r(t) = -0{,}09 \cdot t^2 + 6{,}11 \cdot t + 99{,}93$
2013 entspricht $t = 28$: $r(28) = 197{,}50... \approx 197{,}5$.

Die Regressionsfunktion prognostiziert ein KFZ-Verkehrsaufkommen von rund 197,5 % bezogen auf das KFZ-Verkehrsaufkommen im Jahr 1985.

b) 617 entspricht der jährlichen Zunahme der durchschnittlichen täglichen KFZ-Fahrten auf der Brennerautobahn.

c) $a = 1\,700\,000$

$b = \sqrt[8]{\frac{2\,006\,000}{1\,700\,000}} = 1{,}0209... \approx 1{,}021$

$y(t) = 1\,700\,000 \cdot 1{,}021^t$

Bei einem linearen Modell ist die absolute Änderung pro Zeiteinheit konstant. Bei einem exponentiellen Modell ändert sich die Größe in jeweils gleichen Zeitschritten immer um denselben Faktor.

Lösungsschlüssel

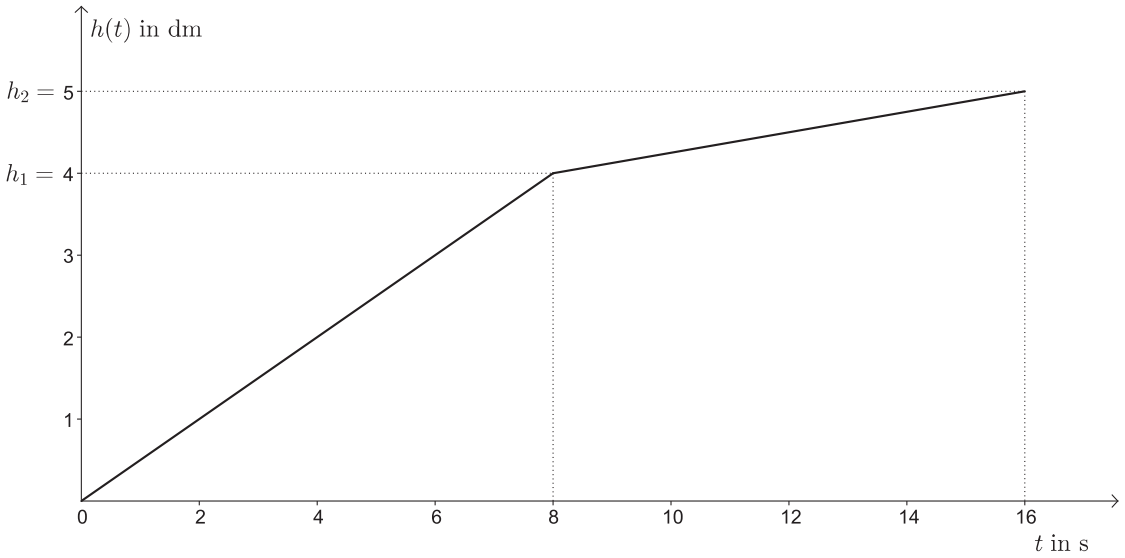
a) 1 × C1: für die richtige Interpretation der markierten Zahl
1 × C2: für die richtige Interpretation des Rechenausdrucks
1 × A: für das richtige Erstellen der Regressionsfunktion
1 × B: für das richtige Ermitteln der Prognose für das Jahr 2013
b) 1 × C: für die richtige Interpretation des Koeffizienten
c) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung
1 × D: für die richtige Erklärung

Füllstandmessung*

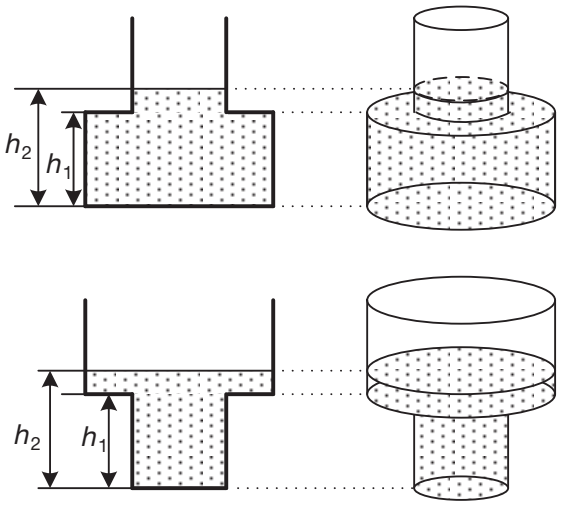
Aufgabennummer: A_024

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Ein Wasserauffanggefäß hat die Form zweier übereinandergestellter gleich hoher Zylinder.
Es wird durch einen konstanten Zufluss von 1 Liter pro Sekunde befüllt.
Der nachstehende Graph der Funktion *h* beschreibt die Füllhöhe des Gefäßes in Abhängigkeit von der Zeit.



Es stehen 2 Gefäße entsprechend der folgenden Abbildung zur Auswahl (Gefäß *B* entspricht dem „umgedrehten“ Gefäß *A*):



Gefäß *A*

Gefäß *B*

* ehemalige Klausuraufgabe (Cluster 9)

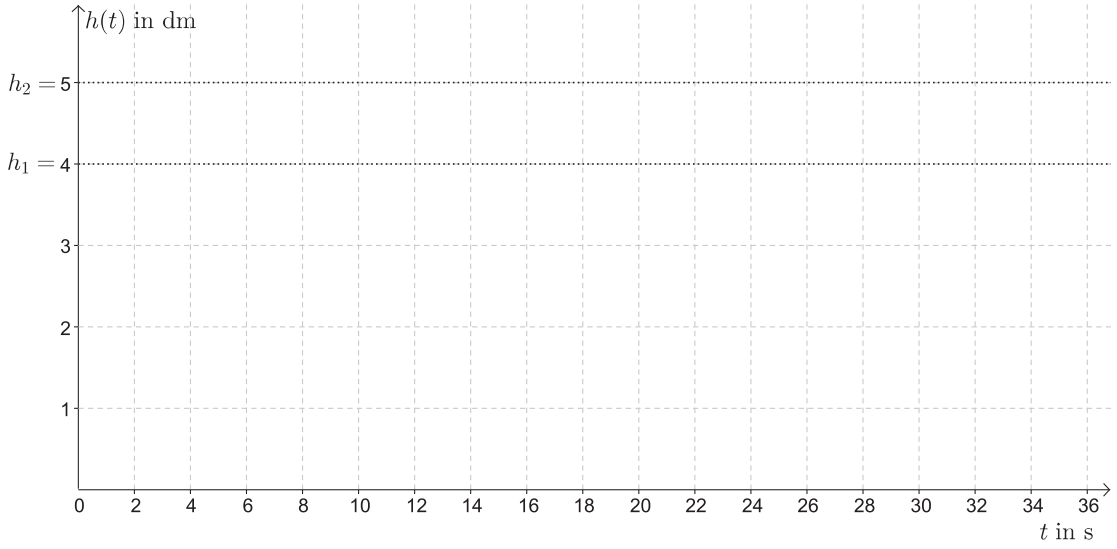
a) Der oben stehende Graph gibt die Füllhöhe *h* eines der beiden Gefäße richtig wieder.

– Begründen Sie, warum das Gefäß *B* zum angegebenen Graphen passt.

b) Das Gefäß *A* wird mit demselben konstanten Zufluss bis zu einer Höhe von 5 dm befüllt. Die Funktion *h* beschreibt die Füllhöhe des Gefäßes in Abhängigkeit von der Zeit.

t ... Zeit in Sekunden (s)
h(*t*) ... Füllhöhe zur Zeit *t* in Dezimetern (dm)

– Zeichnen Sie den Graphen dieser Funktion in das unten stehende Koordinatensystem ein.



c) Bei der Befüllung mit einem konstanten Zufluss von 1 Liter pro Sekunde wird der untere Zylinder des Gefäßes *B* innerhalb von 8 Sekunden bis zur Höhe h_1 = 4 dm befüllt.

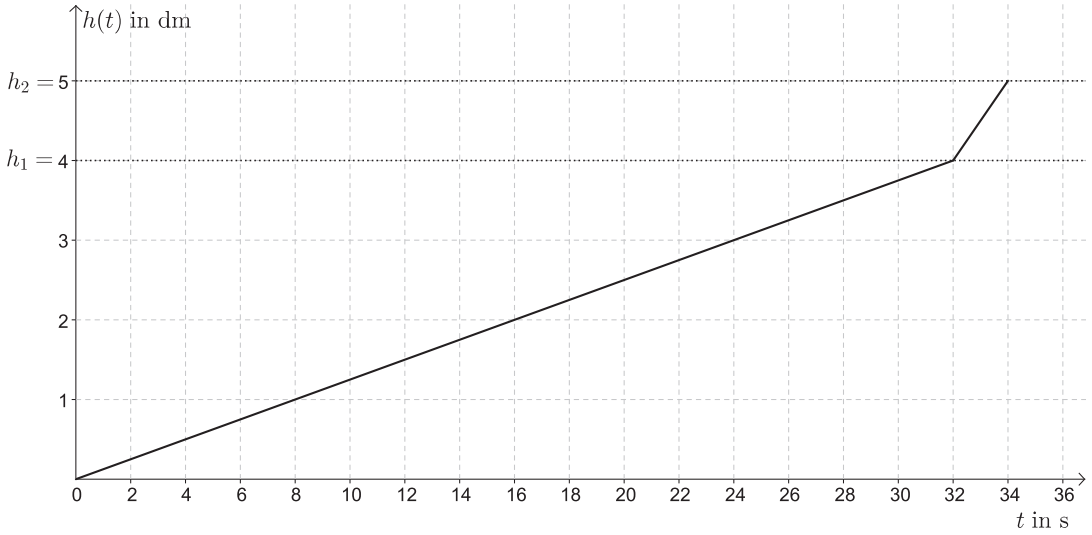
– Berechnen Sie den Radius dieses Zylinders.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Im Intervall [0; 8] steigt der Füllstand schneller als im Intervall [8; 16]. Bei einer kleinen Querschnittsfläche steigt der Füllstand schneller. Folglich wird bei dem dargestellten Füllprozess zuerst der Zylinder mit der kleineren Querschnittsfläche befüllt, also Gefäß *B*.

b)



c) Bei einem konstanten Zufluss von 1 Liter pro Sekunde sind nach 8 Sekunden insgesamt 8 Liter zugeflossen.

$V = r^2 \cdot \pi \cdot h$
$8 = r^2 \cdot \pi \cdot 4$

$r = \sqrt{\frac{2}{\pi}} = 0{,}79... \Rightarrow r \approx 0{,}8 \text{ dm}$

Lösungsschlüssel

a) 1 × D: für die richtige Begründung, warum das Gefäß *B* zum angegebenen Graphen passt
b) 1 × A1: für das richtige Einzeichnen des Graphen für den ersten Abschnitt (bis 32 s)
1 × A2: für das richtige Einzeichnen des Graphen für den zweiten Abschnitt (ab 32 s)
c) 1 × A: für den richtigen Ansatz (Volumen als Produkt von Zeit und Zufluss)
1 × B: für die richtige Berechnung des Radius

Joghurtbecher*

Aufgabennummer: A_105

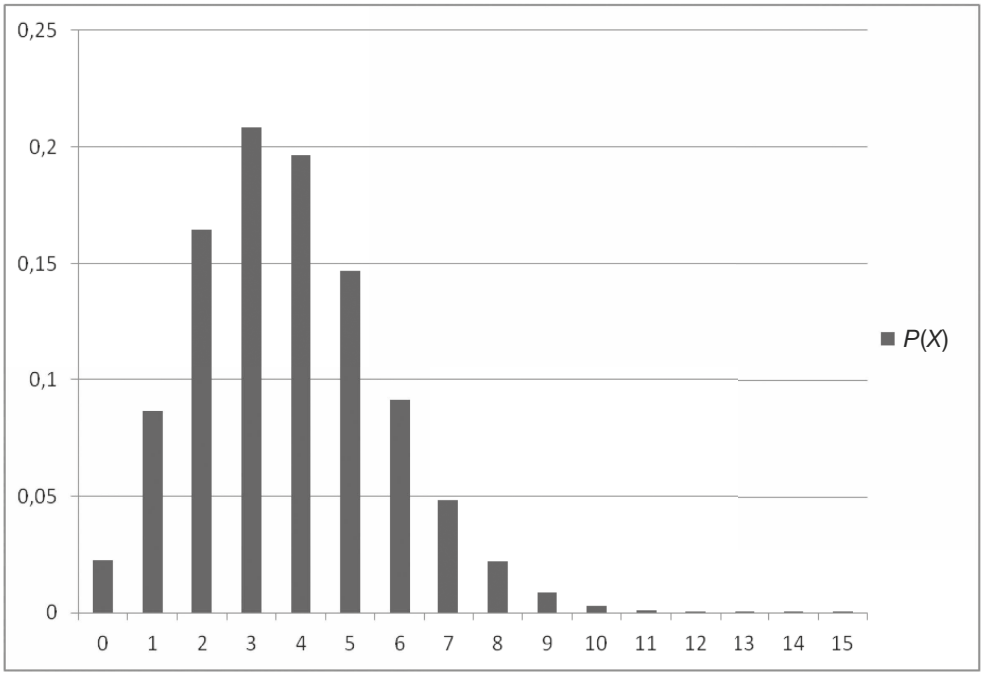
Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Erfahrungsgemäß enthalten 4 % aller Joghurtbecher eine Woche nach dem Ablaufdatum bereits verdorbene Ware. Im Lager einer Lebensmittelkette befinden sich noch 200 Joghurtbecher, deren Ablaufdatum um eine Woche überschritten ist.

a) – Berechnen Sie den Erwartungswert der Anzahl der Becher mit verdorbenem Joghurt.

b) – Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in höchstens 5 der 200 Joghurtbecher verdorbene Ware enthalten ist.

c) In der folgenden Grafik ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung für eine Zufallsvariable X dargestellt:



X ... Anzahl der Joghurtbecher mit Verpackungsfehler
$P(X)$ ... Wahrscheinlichkeit für X Joghurtbecher mit Verpackungsfehler

– Erklären Sie, wie Sie aus der Grafik die Wahrscheinlichkeit ablesen können, dass mindestens 4 Joghurtbecher einen Verpackungsfehler aufweisen.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

a) Berechnung des Erwartungswertes: $200 \cdot 4\ \% = 8$

b) Mit Technologie wird die Wahrscheinlichkeit berechnet, dass höchstens 5 Becherinhalte verdorben sind, also die Summe der Wahrscheinlichkeiten, dass 0,1, 2, 3, 4 oder 5 Becherinhalte verdorben sind.

$P(X \leq 5)) = 18{,}56\ \%$

c) Die Wahrscheinlichkeit kann mittels der Gegenwahrscheinlichkeit ermittelt werden. Dazu wird die kumulierte Wahrscheinlichkeit für $X = 0, 1, 2$ oder 3 Becher mit Verpackungsfehler abgelesen.

P(„mindestens 4“) = 1 – P(„höchstens 3“)

Eine Lösungsvariante ohne Gegenwahrscheinlichkeit (die nicht sichtbaren Wahrscheinlichkeiten werden vernachlässigt) ist auch zulässig.

Lösungsschlüssel

a) 1 x B für die richtige Berechnung des Erwartungswertes
b) 1 x B für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit
c) 1 x D für die richtige Erklärung

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Gold*

Aufgabennummer: A_160

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Das Edelmetall Gold gilt als besonders wertvoll, weil es selten vorkommt, leicht zu Schmuck verarbeitet werden kann und sehr beständig ist.

a) Der *World Gold Council*, eine globale Lobby-Organisation der Goldminenindustrie, schätzt die bis zum Jahr 2012 weltweit geförderte Goldmenge auf rund $1{,}713 \cdot 10^8$ Kilogramm (kg). Gold hat eine Dichte von 19,3 Gramm pro Kubikzentimeter (g/cm^3). Die Masse ist das Produkt von Volumen und Dichte.

Stellen Sie sich vor, dass die gesamte weltweit geförderte Goldmenge in einen Würfel gegossen wird.

– Berechnen Sie die Kantenlänge dieses Würfels in Metern.

b) Gold kommt in der Natur auch in der Form von Nuggets (Goldklumpen) vor. Es wird in der Einheit *Feinunze* (oz) gehandelt, die einer Masse von 31,1035 Gramm (g) reinen Goldes entspricht.

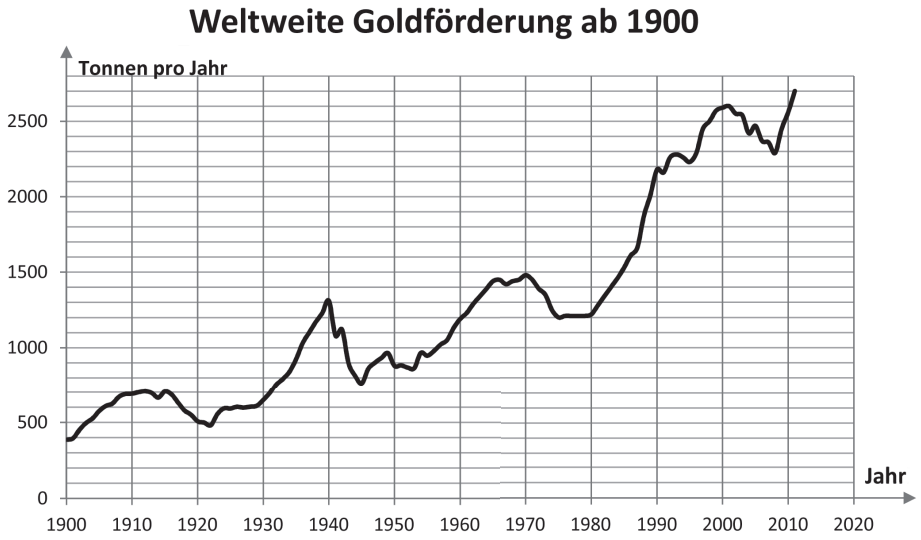
Gesucht ist der Wert W eines Nuggets in Euro, wenn folgende Größen bekannt sind:

m ... Masse des Nuggets in Gramm (g)
p ... Preis in Euro für eine Feinunze Gold

– Erstellen Sie eine Formel für W.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Die nachstehende Grafik zeigt die weltweite jährliche Förderung von Gold ab dem Jahr 1900 in Tonnen.



Quelle: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Goldfoerderung.png [29.08.2013] (adaptiert)

– Lesen Sie aus der obigen Grafik ab, in welchem Jahrzehnt die weltweite Förderung absolut am stärksten gestiegen ist.

d) In einer Zeitung wird folgende Analyse veröffentlicht: „Der Wert der Ein-Unzen-Krugerrand-Goldmünze ist im Jahr 2010 um 20 % gestiegen. Im Jahr 2011 stieg der Wert nochmals um 10 %. Also ist der Wert der Münze in diesen beiden Jahren insgesamt um 30 % gestiegen."

– Begründen Sie, warum diese Aussage über die Wertentwicklung nicht richtig ist.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Kantenlänge des Würfels: $a = \sqrt[3]{V} = \sqrt[3]{\frac{1{,}713 \cdot 10^{11}\ \text{g}}{19{,}3\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}}} = 2\,070{,}4\ldots\ \text{cm}$

Der Würfel hat eine Kantenlänge von rund 20,7 Metern.

b) $W = \frac{m \cdot p}{31{,}1035}$

c) Die weltweite jährliche Förderung ist zwischen 1980 und 1990 absolut am stärksten gestiegen.

d) Die angegebenen Prozentsätze dürfen nicht addiert werden, weil sie sich nicht auf denselben Grundwert beziehen.
Der Wert der Goldmünze ist um den Faktor 1,2 · 1,1 = 1,32 gestiegen, also um 32 %.

Lösungsschüssel

a) 1 × B: für die richtige Berechnung der Kantenlänge in Metern
b) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel
c) 1 × C: für das richtige Ablesen des Jahrzehnts mit dem stärksten Anstieg
d) 1 × D: für die richtige Begründung, warum die angegebene Wertsteigerung nicht richtig ist, oder die Angabe des richtigen Prozentsatzes

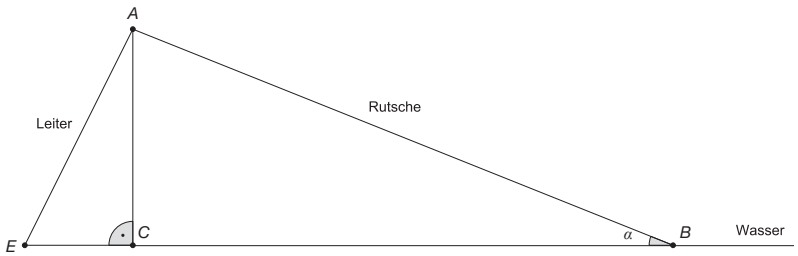
Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Schwimmbad*

Aufgabennummer: A_156

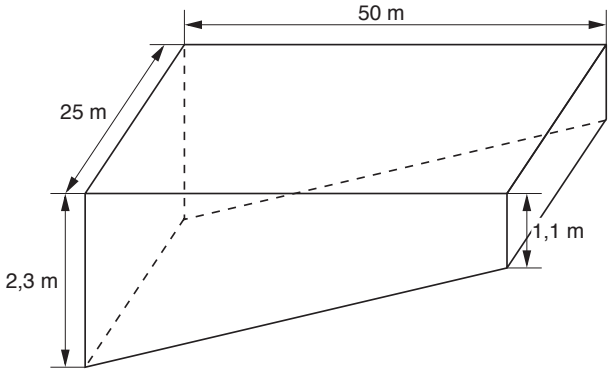
Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Im Kinderbereich eines Schwimmbads soll eine Kinderrutsche errichtet werden.
Die unten stehende, stark vereinfachte Abbildung veranschaulicht den Aufbau dieser Kinderrutsche (nicht maßstabgetreu).
Die Rutsche taucht unter einem Winkel von $\alpha = 20°$ bei Punkt B ins Wasser ein und ist 3 Meter lang ($\overline{AB}$). Der Abstand zwischen den Punkten E und C beträgt 0,5 Meter.



– Berechnen Sie die Länge der Leiter $\overline{AE}$, die für diese Kinderrutsche benötigt wird.

b) In der nachstehenden Abbildung sind die Abmessungen eines Schwimmbeckens eingezeichnet (nicht maßstabgetreu):



Dieses Schwimmbecken soll vollständig befüllt werden. Die Hygienevorschriften sehen vor, dass pro Liter Wasser 0,3 Milligramm eines bestimmten Desinfektionsmittels zugefügt werden müssen.

– Berechnen Sie, wie viel Kilogramm dieses Desinfektionsmittels zugefügt werden müssen.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Zur Reinigung eines Schwimmbeckens muss das Wasser abgelassen werden. Zu Beginn sind 2 Millionen Liter Wasser im Becken. Mithilfe von Pumpen werden gleichmäßig 5 000 Liter pro Minute abgesaugt.

– Stellen Sie diejenige Funktionsgleichung auf, die die noch im Becken vorhandene Wassermenge in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt.
– Berechnen Sie, wie lange das Abpumpen der gesamten Wassermenge dauert.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Ansatz zur Berechnung der Länge $\overline{AC}$:

$\sin(20°) = \frac{\overline{AC}}{3}$

$\overline{AC} \approx 1{,}03$ m

Berechnung der Länge der Leiter mithilfe des Lehrsatzes von Pythagoras:

$\overline{AE} = \sqrt{(0{,}5^2 + \overline{AC}^2)} = 1{,}141... \approx 1{,}14$

Die Leiter ist 1,14 m lang.

b) Volumen des Prismas: $V = \frac{(2{,}3 + 1{,}1) \cdot 50}{2} \cdot 25 = 2\,125$

Das vollständig befüllte Schwimmbecken fasst 2 125 m³.

$2\,125$ m³ $= 2\,125\,000$ L

Masse des Desinfektionsmittels:

$0{,}3 \cdot 10^{-6} \cdot 2\,125\,000 = 0{,}6375$

Es müssen 0,6375 kg Desinfektionsmittel zugefügt werden.

c) $f(t) = 2\,000\,000 - 5\,000 \cdot t$

t ... Zeit in Minuten (min)

$f(t)$ ... vorhandene Wassermenge zum Zeitpunkt t in Litern (L)

Berechnung der Nullstelle dieser Funktion:

$2\,000\,000 - 5\,000 \cdot t = 0$

$t = 400$

Es dauert 400 Minuten, bis die gesamte Wassermenge abgepumpt ist.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für den richtigen trigonometrischen Ansatz
1 × B: für die richtige Berechnung der Länge der Leiter

b) 1 × A: für den richtigen Ansatz (Modell für die Berechnung des Volumens)
1 × B: für die richtige Berechnung der Masse des Desinfektionsmittels

c) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung
1 × B: für die richtige Berechnung der Zeitdauer

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Bevölkerungswachstum und -abnahme*

Aufgabennummer: A_152

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Die Entwicklung der Einwohnerzahl eines Landes kann näherungsweise durch eine Exponentialfunktion modelliert werden.

a) Für Deutschland wird die Anzahl der Einwohner/innen näherungsweise durch die Funktion N modelliert:

$N(t) = 82{,}5 \cdot e^{-0{,}00043347 \cdot t}$

t ... Anzahl der vergangenen Jahre seit 2005
$N(t)$ ... Einwohnerzahl nach t Jahren in Millionen

– Interpretieren Sie die Bedeutung des negativen Vorzeichens der Hochzahl in diesem Sachzusammenhang.

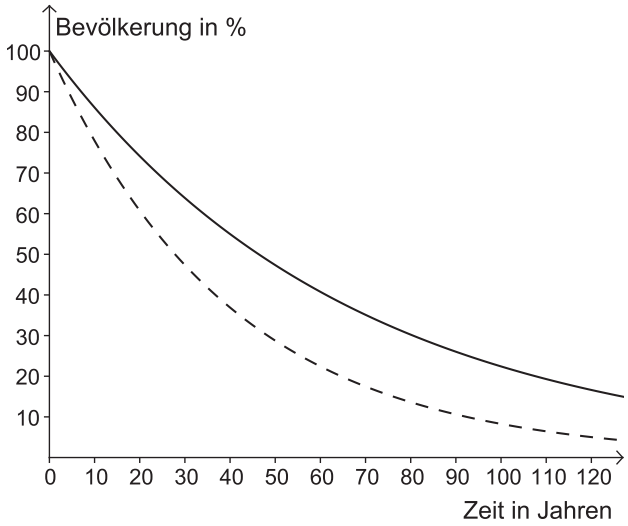
b) Mit Stand 1. Jänner 2011 lebten in Österreich 8,402 Millionen Menschen. Die Bevölkerung wächst jedes Jahr um jeweils 0,3 % des Vorjahreswertes.

– Stellen Sie eine Funktionsgleichung auf, die die Entwicklung der Bevölkerung in Österreich ab 1. Jänner 2011 modelliert.
– Berechnen Sie, für welches Kalenderjahr das Modell erstmals eine Bevölkerungszahl von mehr als 10 Millionen vorhersagt.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Zwei verschiedene Modelle für die Bevölkerungsentwicklung einer Region sind im unten stehenden Diagramm dargestellt. Diese beiden Modelle prognostizieren unterschiedliche Zeitpunkte, zu denen die Bevölkerung auf 50 % des Ausgangswertes gesunken ist.

– Kennzeichnen Sie im nachstehenden Diagramm die Zeitdifferenz zwischen diesen beiden Zeitpunkten.



d) Beim Logarithmieren von Gleichung (1) ist ein Fehler passiert:

(1) $N = 8 \cdot 1{,}02^t$
(2) $\ln(N) = \ln(8) \cdot t \cdot \ln(1{,}02)$

– Stellen Sie die logarithmierte Gleichung (2) richtig.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Das negative Vorzeichen der Hochzahl hat zur Folge, dass das Modell eine Abnahme der Einwohnerzahl beschreibt.

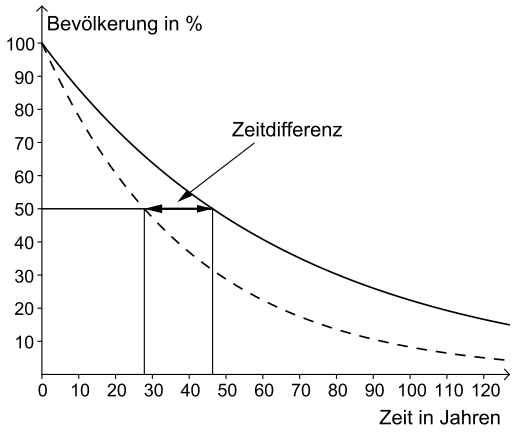
b) $A(t) = 8{,}402 \cdot 1{,}003^t$

t ... Anzahl der vergangenen Jahre seit dem 1. Jänner 2011
$A(t)$ ... Einwohnerzahl nach t Jahren in Millionen

$8{,}402 \cdot 1{,}003^t = 10$
$t \approx 58{,}13$

Für das Jahr 2069 prognostiziert das Modell erstmals eine Bevölkerungszahl von mehr als 10 Millionen.

c)



d) $\ln(N) = \ln(8) + t \cdot \ln(1{,}02)$

Lösungsschlüssel

a) 1 × C: für die richtige Interpretation
b) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung
1 × B: für die richtige Berechnung des Kalenderjahrs
c) 1 × C: für das richtige Kennzeichnen der Zeitdifferenz
d) 1 × B: für das Richtigstellen der logarithmierten Gleichung (2)

Zugfahrt*

Aufgabennummer: A_149

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

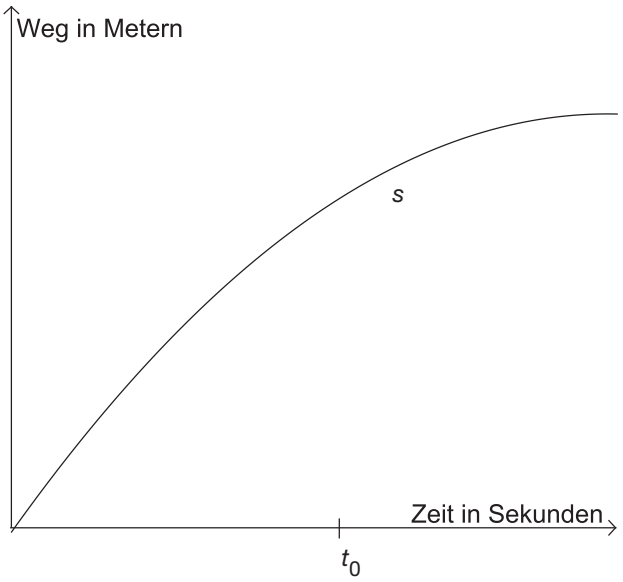
a) Ein Zug fährt ohne Zwischenstopps von der Station *Liesing* zur Station *Mödling*. Die Geschwindigkeit des Zuges auf dieser Strecke kann durch die Funktion v beschrieben werden:

$v(t) = -0{,}16 \cdot t^2 + 0{,}75 \cdot t$

t ... Zeit in Minuten (min), seitdem der Zug die Station *Liesing* verlassen hat
$v(t)$ ... Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t in Kilometern pro Minute (km/min)

– Berechnen Sie die Fahrtdauer in Minuten.

b) Der zwischen zwei anderen Stationen zurückgelegte Weg eines Zuges kann durch den Funktionsgraphen im nachstehenden Weg-Zeit-Diagramm beschrieben werden.



– Zeichnen Sie die Tangente im Punkt $P = (t_0 | s(t_0))$ im obenstehenden Diagramm ein.
– Erklären Sie die Bedeutung der Steigung dieser Tangente im Sachzusammenhang.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Im Folgenden wird modellhaft von einer konstanten Geschwindigkeit (gemessen in km/h) eines Zuges und einer Schnellbahn ausgegangen.
Die Entfernung von Ort *A* nach Ort *B* auf einer geradlinigen Streckenführung beträgt 20 km. Der Zug fährt mit der Geschwindigkeit v_1 von Ort *A* nach Ort *B*. Die Schnellbahn, deren Geschwindigkeit um ein Drittel geringer ist, fährt in die entgegengesetzte Richtung. Der Zug passiert Ort *A* zum selben Zeitpunkt wie die Schnellbahn Ort *B*. Sie begegnen einander nach 10 Minuten.

– Berechnen Sie die Geschwindigkeit v_1 des Zuges.

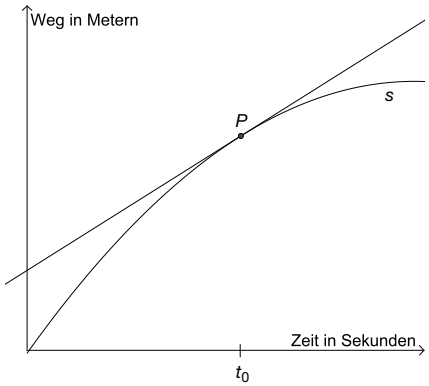
Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $-0{,}16 \cdot t^2 + 0{,}75 \cdot t = 0$

$t_1 = 0$ Abfahrt
$t_2 = 4{,}69$ Ankunft in Mödling nach 4,69 min

b)



Der Anstieg der Tangente ist die Momentangeschwindigkeit des Zuges zum Zeitpunkt t_0.

Als richtig zu werten ist auch der Begriff „Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t_0“, aber nicht „Durchschnittsgeschwindigkeit“.

c) Ansatz (z. B.: Gleichungssystem):

v_2 ... Geschwindigkeit der Schnellbahn

I: $v_2 = \frac{2}{3} \cdot v_1$

II: $\frac{v_1}{6} + \frac{v_2}{6} = 20$

$\frac{v_1}{6} + \frac{v_1}{9} = 20$

$v_1 = 72$ km/h

Die Geschwindigkeit des Zuges beträgt 72 km/h.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A für das Erkennen des richtigen Modells (Berechnen der Nullstellen)
1 × B für die richtige Berechnung der Fahrzeit

b) 1 × B für das richtige Einzeichnen der Tangente
1 × D für die richtige Erklärung im Sachzusammenhang

c) 1 × A für einen richtigen Lösungsansatz
1 × B für die richtige Berechnung von v_1

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

U-Bahn*

Aufgabennummer: A_103

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Für die Strecke zwischen der Haltestelle *Rathaus* und der Haltestelle *Volkstheater* benötigt ein Zug der U-Bahn-Linie U2 in Wien durchschnittlich 60 Sekunden. Der zurückgelegte Weg des Zugs zwischen diesen beiden Haltestellen lässt sich annähernd durch die Zeit-Weg-Funktion s wie folgt beschreiben:

$$s(t) = -\frac{1}{180} \cdot t^3 + \frac{1}{2} \cdot t^2$$

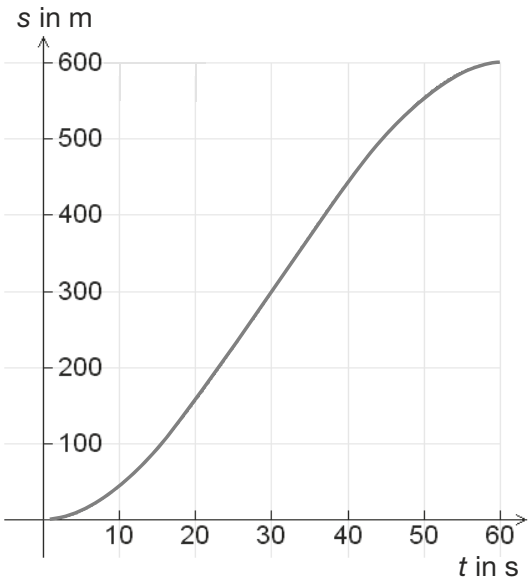
t … Zeit nach der Abfahrt in Sekunden (s), $0 \le t \le 60$
$s(t)$ … zurückgelegter Weg in Metern zum Zeitpunkt t

a) – Berechnen Sie die Strecke s in Metern, die der U-Bahn-Zug zwischen den beiden Haltestellen zurücklegt.

b) – Berechnen Sie die mittlere Geschwindigkeit des U-Bahn-Zugs in m/s für das Zeitintervall [30; 45].

c) – Berechnen Sie die Momentangeschwindigkeit des U-Bahn-Zugs in m/s für $t = 45$ s.

d) – Erklären Sie, wie am unten abgebildeten Zeit-Weg-Diagramm die Momentangeschwindigkeit abgelesen werden kann.
– Lesen Sie näherungsweise den Zeitpunkt ab, zu dem die Momentangeschwindigkeit maximal ist.



Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

a) $s(60) = 600$

Die Strecke zwischen den beiden Haltestellen beträgt 600 m.

b) mittlere Geschwindigkeit im Zeitintervall $[t_1; t_2]$: $\overline{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$

für [30; 45]: $\overline{v} = \frac{506{,}25 - 300}{45 - 30} = 13{,}75$

Die mittlere Geschwindigkeit beträgt 13,75 m/s.

c) Momentangeschwindigkeit $v(t) = s'(t) = -\frac{1}{60} \cdot t^2 + t$
$v(45) = 11{,}25$

Die Momentangeschwindigkeit für $t = 45$ beträgt 11,25 m/s.

d) Die Momentangeschwindigkeit ist die (momentane) Änderungsrate der Weg-Zeit-Funktion und entspricht geometrisch der Steigung des Graphen der Weg-Zeit-Funktion.
Der Graph der Weg-Zeit-Funktion hat die größte Steigung und damit die maximale Momentangeschwindigkeit im Wendepunkt bei 30 Sekunden.

Lösungsschlüssel

a) 1 x B für die richtige Berechnung
b) 1 x A für den richtigen Ansatz (Verwendung des Differenzenquotienten)
1 x B für die richtige Berechnung
c) 1 x A für den richtigen Ansatz (Verwendung der 1. Ableitung)
1 x B für die richtige Berechnung
d) 1 x D für die richtige Erklärung
1 x C für das richtige Ablesen des Zeitpunkts mit maximaler Momentangeschwindigkeit

Leuchtmittel*

Aufgabennummer: A_109

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

In einem Betrieb werden Leuchtmittel erzeugt. Untersuchungen haben ergeben, dass 5 % der erzeugten Leuchtmittel fehlerhaft sind. Die übrigen Leuchtmittel funktionieren einwandfrei. Nun wird eine Stichprobe vom Umfang $n = 100$ untersucht.

a) – Erklären Sie, warum die Binomialverteilung hier als Modell zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten verwendet werden kann.

b) – Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass 6 oder 7 fehlerhafte Leuchtmittel in der Stichprobe zu finden sind.

c) – Beschreiben Sie, welche Wahrscheinlichkeit durch den Ausdruck

$$0{,}05^4 \cdot 0{,}95^{96} \cdot \binom{100}{4}$$

berechnet wird.

d) Die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Stichprobe 5 fehlerhafte Leuchtmittel gefunden werden, beträgt 18 %.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in 2 unabhängigen Stichproben gleichen Umfangs jeweils 5 fehlerhafte Leuchtmittel gefunden werden.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

a) Es gibt genau 2 Möglichkeiten des Ausgangs: „fehlerhaft“ oder „nicht fehlerhaft“.
Die Versuche sind voneinander unabhängig.
Die Wahrscheinlichkeiten bleiben konstant.

b) $P(X = 6) + P(X = 7) = 0{,}1500 + 0{,}1060 = 0{,}2560$
Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt 25,60 %.

c) Durch diesen Ausdruck kann man die Wahrscheinlichkeit berechnen, dass in der Stichprobe genau 4 fehlerhafte Leuchtmittel gefunden werden.

d) Nach dem Multiplikationssatz für unabhängige Ereignisse ergibt sich für die gesuchte Wahrscheinlichkeit: $0{,}18 \cdot 0{,}18 = 0{,}0324 \approx 3{,}24\ \%$.

Lösungsschlüssel

a) 1 × D für die richtigen Erklärungen zur Verwendung der Binomialverteilung
b) 1 × B für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit
c) 1 × C für die richtige Beschreibung zur berechneten Wahrscheinlichkeit
d) 1 × B für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Diabetes*

Aufgabennummer: A_155

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

In Österreich leiden 4,6 % der Bevölkerung an Diabetes („Zuckerkrankheit“).

a) Im Jahr 2014 hatte Österreich 8,5 Millionen Einwohner/innen.

– Berechnen Sie, wie viele Personen in Österreich im Jahr 2014 an Diabetes leiden.

b) – Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass von 30 nach dem Zufallsprinzip ausgewählten Österreicherinnen/Österreichern mindestens 2 an Diabetes leiden.

c) Die Wirksamkeit eines neuen Medikaments soll an 120 Personen getestet werden. 70 Personen erhalten das Medikament, der Rest erhält ein Placebo (Medikament ohne Wirkstoff).

Von den 120 Personen werden 2 nach dem Zufallsprinzip ausgewählt. Die Wahrscheinlichkeit, dass genau eine von ihnen ein Placebo erhält, kann man folgendermaßen berechnen:

$$\frac{70}{120} \cdot \frac{50}{119} \cdot 2$$

– Erklären Sie die Bedeutung der beiden Brüche in diesem Sachzusammenhang.
– Erklären Sie die Bedeutung des Faktors 2 in diesem Sachzusammenhang.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

a) $8{,}5 \cdot 0{,}046 = 0{,}391$

In Österreich gab es im Jahr 2014 in etwa 391 000 Personen mit Diabetes.

b) Ansatz zur Berechnung mithilfe der Binomialverteilung: $n = 30$, $p = 0{,}046$
$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 0{,}40433... \approx 40{,}43\ \%$

c) $\frac{70}{120}$: Wahrscheinlichkeit, eine Person, die das Medikament bekommen hat, aus der Gesamtheit von 120 Personen zu wählen

$\frac{50}{119}$: Wahrscheinlichkeit, eine Person, die das Placebo bekommen hat, aus der restlichen Gesamtheit von 119 Personen zu wählen

Der Faktor 2 rührt daher, dass es egal ist, ob die erste oder die zweite ausgewählte Person das Placebo bekommen hat.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für die richtige Berechnung
b) 1 × A: für das Erkennen des richtigen Wahrscheinlichkeitsmodells (Binomialverteilung)
1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit
c) 1 × D: für die richtige Erklärung der Bedeutung der beiden Brüche
1 × D: für die richtige Erklärung des Faktors 2

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Mathematikwettbewerb*

Aufgabennummer: A_148

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Eine Schülergruppe hat an einem Mathematikwettbewerb teilgenommen.

a) Die 12 Burschen der Schülergruppe haben folgende Punktezahlen erreicht:

32; 38; 40; 52; 53; 54; 56; 60; 61; 64; 66; 84

Nun sollen die Ergebnisse übersichtlich dargestellt werden. Dazu wird die folgende Klasseneinteilung verwendet:

A	30 bis 39
B	40 bis 49
C	50 bis 59
D	60 bis 69
E	70 bis 79
F	80 bis 89

– Erstellen Sie ein Säulen- oder Balkendiagramm, in welchem die Häufigkeiten der jeweiligen Klassen *A* bis *F* dargestellt sind.

b) Das arithmetische Mittel und der Median für die Punktezahlen der Burschen betragen 55 Punkte.
Die 12 Mädchen der Schülergruppe haben folgende Punktezahlen erreicht:

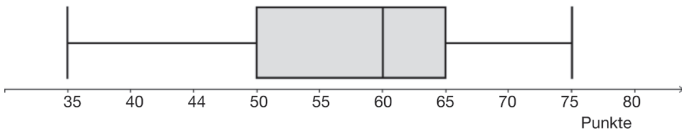
37; 38; 44; 53; 54; 57; 59; 60; 61; 62; 63; 65

Die Mädchen behaupten, dass sie sowohl beim arithmetischen Mittel als auch beim Median eine größere Punktezahl als die Burschen erreicht haben.

– Überprüfen Sie nachvollziehbar, ob diese Behauptung richtig ist.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Die Punkteverteilung einer anderen Schülergruppe ist in dem nachstehenden Boxplot dargestellt.

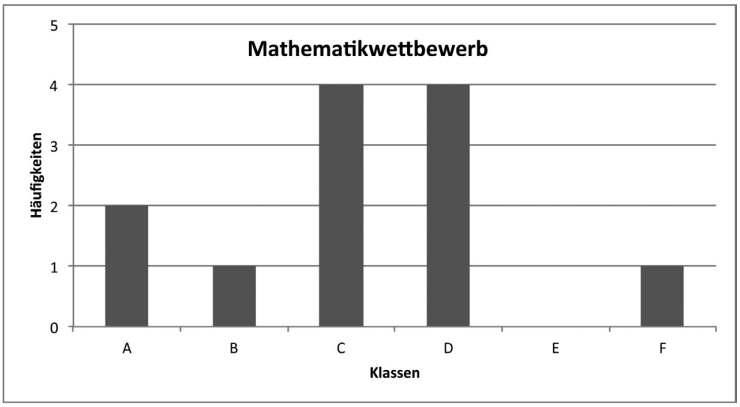


– Lesen Sie ab, wie viel Prozent der Schüler/innen mindestens 50 Punkte erreicht haben.
– Ermitteln Sie die Spannweite der Punktezahlen.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



b) Punktezahlen der Mädchen:
– arithmetisches Mittel: 54,4 Punkte
– Median: 58 Punkte

Die Behauptung ist also falsch.

c) Die Punktezahl 50 ist das 1. Quartil. Das heißt: 75 % der Schüler/innen haben mindestens 50 Punkte erreicht.

Spannweite: 75 – 35 = 40.
Die Spannweite beträgt 40 Punkte.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A für das richtige Erstellen des Säulen- oder Balkendiagramms mit korrekter Beschriftung
b) 1 × D für die richtige Überprüfung der Behauptung
c) 1 × C für das richtige Ablesen des Prozentsatzes
1 × B für das richtige Ermitteln der Spannweite

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Leuchtturm*

Aufgabennummer: A_102

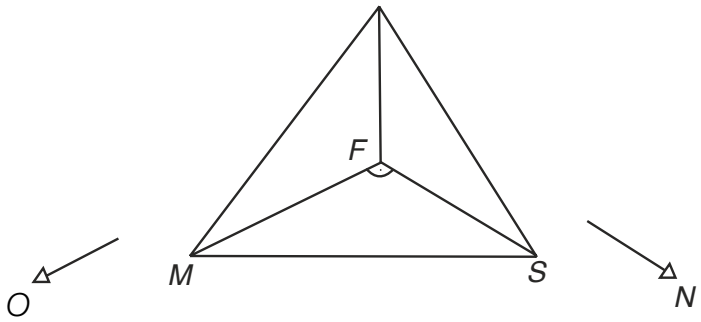
Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Eine Schülergruppe besucht einen Leuchtturm.

a) Eine Schülergruppe soll im Rahmen des Projektunterrichts die Höhe der Leuchtturmspitze über dem Meeresspiegel bestimmen. Dabei gehen die Schüler/innen folgendermaßen vor: Mit einem gecharterten Motorboot steuern sie mit 10 km/h geradlinig auf die Insel zu. Die Gruppe sieht die Leuchtturmspitze der Insel unter dem Höhenwinkel α, 1 Minute später unter dem Höhenwinkel β.

– Erstellen Sie eine Skizze des Sachverhalts, der man die gegebenen Größen entnehmen kann.

b) Von der Spitze (*Sp*) des Leuchtturms in 108 Metern Höhe (*h*) über dem Meeresspiegel sieht man eine Motoryacht (*M*) im Osten unter dem Tiefenwinkel von 38,45° und ein Segelboot (*S*) in nördlicher Richtung unter dem Tiefenwinkel von 27,73°.



F ... Fußpunkt des Leuchtturms
O ... Osten
N ... Norden

– Interpretieren Sie die obenstehende Abbildung, indem Sie die gegebenen Größen in die Abbildung eintragen.
– Berechnen Sie die Entfernung der beiden Boote zueinander zum Zeitpunkt der Beobachtung.

c) Der Lehrer will die Schülergruppe testen und behauptet: „Wenn wir unsere Entfernung zum Fußpunkt des Leuchtturms verdoppeln, halbiert sich der Höhenwinkel, unter dem wir die Leuchtturmspitze sehen."

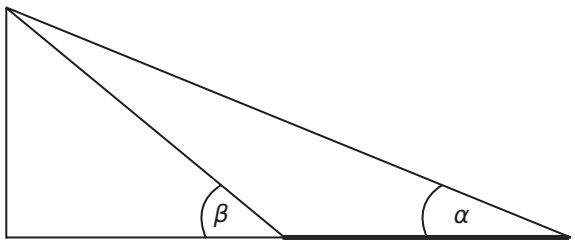
– Erklären Sie, warum die Behauptung des Lehrers richtig bzw. falsch ist.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

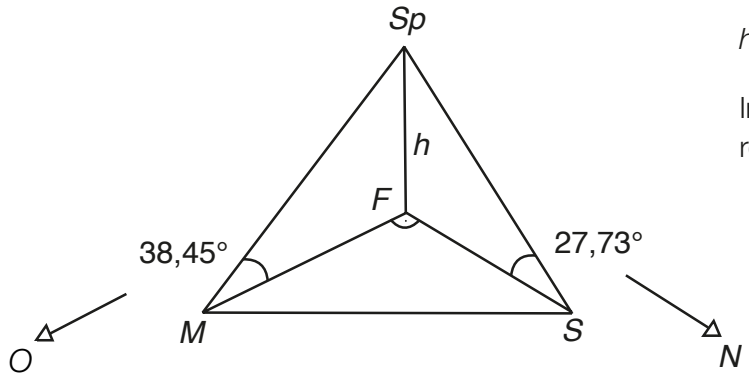
* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

a)



b)



h ... Höhe des Leuchtturms

In der hinteren Ecke F sind drei rechte Winkel.

h = 108 m

Entfernung $\overline{MF}$: $\tan 38{,}45° = \frac{108}{\overline{MF}}$ $\quad \overline{MF} = 136{,}018$

Entfernung $\overline{SF}$: $\tan 27{,}73° = \frac{108}{\overline{SF}}$ $\quad \overline{SF} = 205{,}448$

$\overline{MS} = \sqrt{(\overline{MF})^2 + (\overline{SF})^2} = 246{,}393$

Entfernung der beiden Boote: 246 m

c) $\tan \alpha = GK/AK$
$GK/(2AK) = (\tan \alpha)/2 \neq \tan(\alpha/2)$

Auch andere logisch richtige Argumentationen sind zulässig.

Lösungsschlüssel

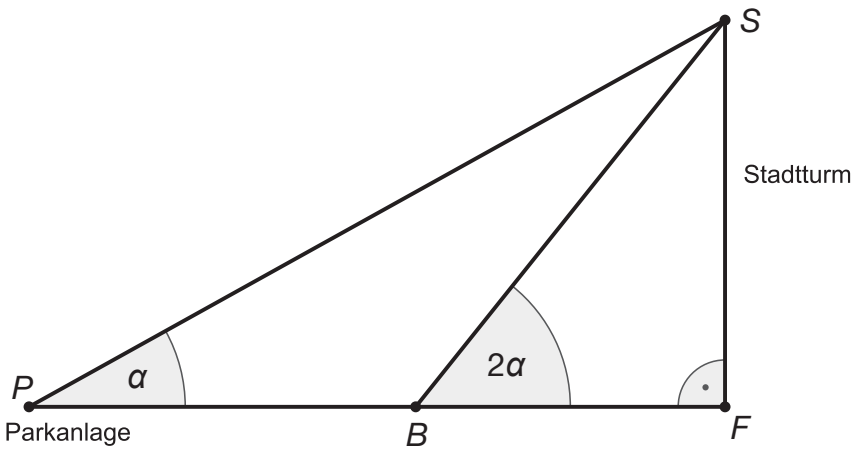
a) 1 x A für die richtige Erstellung und Beschriftung der Skizze
b) 1 x C für die richtige Beschriftung der Skizze
   1 x A für den richtigen Ansatz mit Winkelfunktionen und Satz von Pythagoras
   1 x B für die korrekte Berechnung
c) 1 x D für die logisch richtige Argumentation

Stadtturm*

Aufgabennummer: A_161

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Von einer neuen Parkanlage sieht man die Spitze des 51 m hohen Stadtturms unter dem Höhenwinkel $\alpha = 38{,}2°$.



– Berechnen Sie, um wie viel Meter man sich dem Stadtturm entlang der Strecke *PF* nähern muss, damit dieser unter dem doppelten Höhenwinkel zu sehen ist (siehe oben stehende Skizze).

b) Der Stadtturm mit einer Höhe *h* wirft zu einem bestimmten Zeitpunkt einen Schatten der Länge *b*, wobei *b* und *h* normal aufeinander stehen.

– Stellen Sie eine Formel zur Berechnung des Höhenwinkels α, unter dem die Sonne zu diesem Zeitpunkt in dieser Stadt erscheint, auf.

$\alpha =$ _____

c) Der 51 m hohe Stadtturm hat die Form eines Quaders mit quadratischer Grundfläche; die Seitenlänge dieses Quadrats beträgt 4 m. Zwei gegenüberliegende Seitenwände des Stadtturms sollen mit Glasplatten verkleidet werden. Pro Quadratmeter beträgt die Masse der verwendeten Glasplatten 30 Kilogramm.

– Dokumentieren Sie, wie Sie die Gesamtmasse der Glasverkleidung in Tonnen berechnen können.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

* ehemalige Klausuraufgabe (adaptiert)

Möglicher Lösungsweg

a) $\frac{51}{\tan(\alpha)} - \frac{51}{\tan(2\alpha)} = 52{,}471\ldots \approx 52{,}47$

Man muss sich um rund 52,47 m annähern.

b) Der Höhenwinkel α ($0° < \alpha < 90°$) kann bestimmt werden durch:

$\alpha = \arctan\left(\frac{h}{b}\right)$

c) Die einzukleidende Fläche setzt sich aus 2 Rechtecken (Seitenlängen 51 m und 4 m) zusammen. Um die Gesamtmasse der Glasverkleidung in Tonnen zu erhalten, muss der Gesamt-Flächeninhalt dieser beiden Rechtecke in Quadratmetern mit der Masse von 30 Kilogramm pro Quadratmeter multipliziert und anschließend durch 1 000 dividiert werden.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für die Verwendung eines richtigen Modells zur Berechnung
1 × B: für die richtige Berechnung der Streckenlänge $\overline{PB}$
b) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Formel zur Berechnung des Höhenwinkels
c) 1 × C: für die richtige Dokumentation zur Berechnung der Gesamtmasse in Tonnen

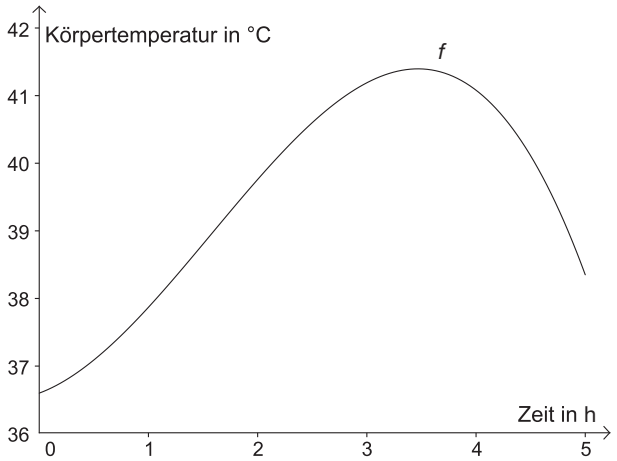
Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Ganzkörperhyperthermie*

Aufgabennummer: A_158

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Bei einem Therapieverfahren wird die Körpertemperatur bewusst stark erhöht (künstliches Fieber). Die nebenstehende Grafik dokumentiert näherungsweise den Verlauf des künstlichen Fiebers bei einer solchen Behandlung.



Die Funktion f beschreibt den Zusammenhang zwischen Zeit und Körpertemperatur:

$f(t) = -0{,}18 \cdot t^3 + 0{,}85 \cdot t^2 + 0{,}6 \cdot t + 36{,}6$

t ... Zeit in Stunden (h) mit $0 \le t \le 5$
$f(t)$ ... Körpertemperatur zur Zeit t in °C

a) – Berechnen Sie denjenigen Zeitpunkt, zu dem die Körpertemperatur 37 °C beträgt.

b) – Dokumentieren Sie, wie die maximale Körpertemperatur im angegebenen Zeitintervall mithilfe der Differenzialrechnung berechnet werden kann.
– Begründen Sie, warum der Graph einer Polynomfunktion 3. Grades höchstens 2 Extrempunkte haben kann.

c) – Berechnen Sie den Zeitpunkt der maximalen Temperaturzunahme.

d) Die mittlere Körpertemperatur $\overline{f}$ während der 5 Stunden andauernden Behandlung soll ermittelt werden.

Die mittlere Körpertemperatur in einem Zeitintervall $[t_1; t_2]$ ist:
$\overline{f} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt$

– Berechnen Sie die mittlere Körpertemperatur $\overline{f}$ im Intervall [0; 5].

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

a) $-0{,}18 \cdot t^3 + 0{,}85 \cdot t^2 + 0{,}6 \cdot t + 36{,}6 = 37$

Lösung der Gleichung mittels Technologieeinsatz: $t = 0{,}429... \Rightarrow t \approx 0{,}43$ h

b) Dazu muss das Maximum der Funktion f ermittelt werden: Man berechnet die Nullstellen der 1. Ableitung f'. Dann berechnet man die Funktionswerte an diesen Stellen und den Randstellen. Die größte dieser Zahlen ist der maximale Funktionswert.

Die 1. Ableitung einer Polynomfunktion 3. Grades ist eine quadratische Funktion. Eine quadratische Funktion hat höchstens 2 Nullstellen. Daher kann der Graph der Polynomfunktion 3. Grades nur höchstens 2 Extrempunkte haben.

c) Die stärkste Temperaturzunahme erfolgt an der Maximumstelle von f':
$f''(t) = -1{,}08t + 1{,}7$
$-1{,}08t + 1{,}7 = 0 \Rightarrow t = 1{,}57... \approx 1{,}6$

Rund 1,6 Stunden nach Beginn der Therapie ist die Temperaturzunahme am größten.

d) $\overline{f} = \frac{1}{5} \cdot \int_0^5 f(t)\,dt = 39{,}55... \approx 39{,}6$

Die mittlere Körpertemperatur beträgt rund 39,6 °C.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für die richtige Berechnung des Zeitpunktes
b) 1 × C: für die richtige Dokumentation zur Berechnung der maximalen Körpertemperatur
(In der Grafik ist klar zu erkennen, dass der Extremwert der maximalen Körpertemperatur entspricht. Daher sind eine Überprüfung mithilfe der 2. Ableitung und eine Überprüfung der Randstellen nicht erforderlich.)
1 × D: für die richtige Begründung
c) 1 × A: für die richtige Modellbildung (Ermittlung der Wendestelle)
1 × B: für die korrekte Berechnung des Zeitpunktes der maximalen Temperaturzunahme
(In der Grafik ist klar zu erkennen, dass an der Stelle der maximalen Temperaturänderung eine Temperaturzunahme vorliegt. Daher ist eine rechnerische Überprüfung, ob an der berechneten Stelle eine Zu- oder Abnahme erfolgt, nicht erforderlich.)
d) 1 × B: für die richtige Berechnung der mittleren Körpertemperatur

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Heimkino*

Aufgabennummer: A_147

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Peter richtet in seinem Zimmer ein Heimkino ein.

a) Der Bildschirm seines Fernsehers hat ein Seitenverhältnis (Breite : Höhe) von 16 : 9 und eine Bildschirmhöhe von 57,28 cm.

– Berechnen Sie die Bildschirmbreite in Zentimetern.
– Berechnen Sie die Länge der Diagonale des Bildschirms in Zoll (1 Zoll = 2,54 cm).

b) Der quadratische Boden von Peters Zimmer wird für das Heimkino mit einem schalldämmenden Teppich ausgelegt. Er misst die Diagonale d des Zimmerbodens.
Beim Verlegen des Teppichs ist ein Verschnitt von 15 % einzurechnen.

– Stellen Sie die Funktionsgleichung für die Fläche A des zu kaufenden Teppichs in Abhängigkeit von der Diagonale d auf.

c) Peter überlegt, wo er den Fernsehsessel positionieren soll, sodass die horizontale Entfernung x zum Fernseher optimal ist. Ideal ist es, in einem Winkel $\alpha = 5°$ auf die Bildschirmmitte hinaufzuschauen. Die Höhe vom Boden zur Bildschirmmitte ist h_1 und die Höhe vom Boden zu Peters Augen ist h_2.

– Erstellen Sie eine beschriftete Skizze, die diesen Sachverhalt darstellt.
– Stellen Sie eine Formel zur Berechnung der idealen Entfernung x auf.
– Beschreiben Sie, wie sich der Winkel α verändert, wenn man die Entfernung x zum Fernseher vergrößert.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

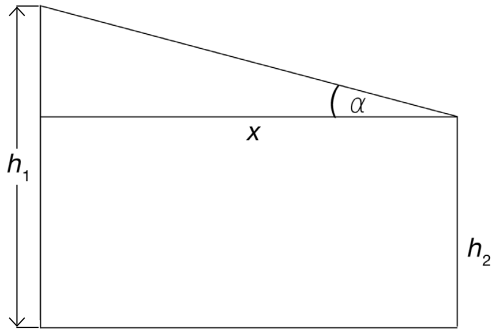
a) $\frac{16}{9} = \frac{l}{57{,}28}$

$l = 101{,}83$ cm

$d = \sqrt{57{,}28^2 + 101{,}83^2} = 116{,}83$ cm ≈ 46 Zoll

b) $A(d) = 1{,}15 \cdot \frac{d^2}{2}$

c)



$x = \frac{h_1 - h_2}{\tan(5°)}$

Wenn sich die Entfernung x zum Fernseher vergrößert, wird der Winkel α kleiner.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B1 für die richtige Berechnung der Bildschirmbreite
1 × B2 für die richtige Berechnung der Länge der Diagonale in Zoll

b) 1 × A für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung

c) 1 × A1 für das richtige Erstellen der Skizze mit korrekter Beschriftung
1 × A2 für das richtige Aufstellen der Formel; Formel muss nicht nach x aufgelöst sein
1 × C für das richtige Beschreiben der Veränderung des Winkels

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Impfstoff*

Aufgabennummer: A_107

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Verschiedene Pharmaunternehmen produzieren Impfstoffe, die in Packungen verkauft werden.

a) Unternehmen *A* hat einen neuen Impfstoff entwickelt. Unternehmen *B* möchte diesen Impfstoff auch vertreiben.
Es stehen 2 Möglichkeiten für diesen Vertrieb zur Auswahl:

1. Unternehmen *B* kauft die Rechte von Unternehmen *A* um € 10 Millionen. Außerdem fallen laufende Produktionskosten in Höhe von € 25 pro Packung an.
2. Unternehmen *B* kauft das Produkt direkt von Unternehmen *A* um € 50 pro Packung.

– Stellen Sie die beiden Funktionsgleichungen auf, die den Zusammenhang zwischen der Anzahl der erzeugten Packungen x und den entstehenden Gesamtkosten K (in Euro) für Unternehmen *B* beschreiben.

b) Ein weiteres Pharmaunternehmen untersucht ebenfalls 2 Möglichkeiten des Vertriebs eines Impfstoffes. Dabei liegen die folgenden Gewinnfunktionen vor:

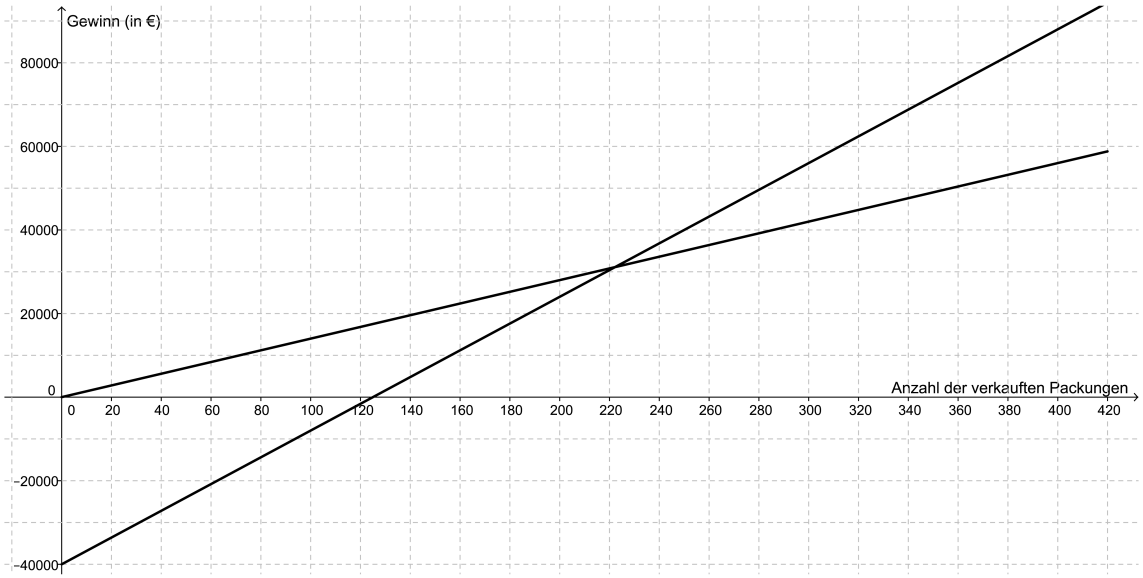
$G_1(x) = 120x$
$G_2(x) = 250x - 750\,000$

x ... Anzahl der verkauften Packungen
$G_1(x)$, $G_2(x)$ ... Gewinn bei x verkauften Packungen in Euro

– Stellen Sie diejenige Gleichung auf, mit der berechnet werden kann, bei welcher Anzahl an verkauften Packungen des Impfstoffes die Gewinne gleich sind.
– Berechnen Sie, ab welcher Anzahl an verkauften Packungen die Gewinnfunktion G_2 für das Unternehmen besser ist als die Gewinnfunktion G_1.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) In der untenstehenden Abbildung sind die Graphen von 2 Gewinnfunktionen dargestellt.



– Lesen Sie ab, für welche Anzahl von verkauften Packungen der Unterschied der Gewinnwerte € 10.000 beträgt.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) 1. Möglichkeit: $K_1(x) = 25x + 10\,000\,000$
2. Möglichkeit: $K_2(x) = 50x$

b) Ansatz: $120x = 250x - 750\,000$
$x = 5\,769{,}23$
Ab 5 770 verkauften Packungen ist die Gewinnfunktion G_2 für das Unternehmen besser.

Lösungen wie „5 769,23“ oder „5 769“ sind als falsch zu werten.

c) Bei ca. 165 und ca. 280 verkauften Packungen beträgt der Unterschied der Gewinnwerte € 10.000.

Toleranzintervall: [160; 170] bzw. [275; 285]

Lösungsschlüssel

a) 1 × A für das richtige Modellieren von Möglichkeit 1
1 × A für das richtige Modellieren von Möglichkeit 2

b) 1 × A für das richtige Aufstellen der Gleichung
1 × B für die richtige Berechnung der Packungsanzahl und die exakte Angabe der verkauften Packungen

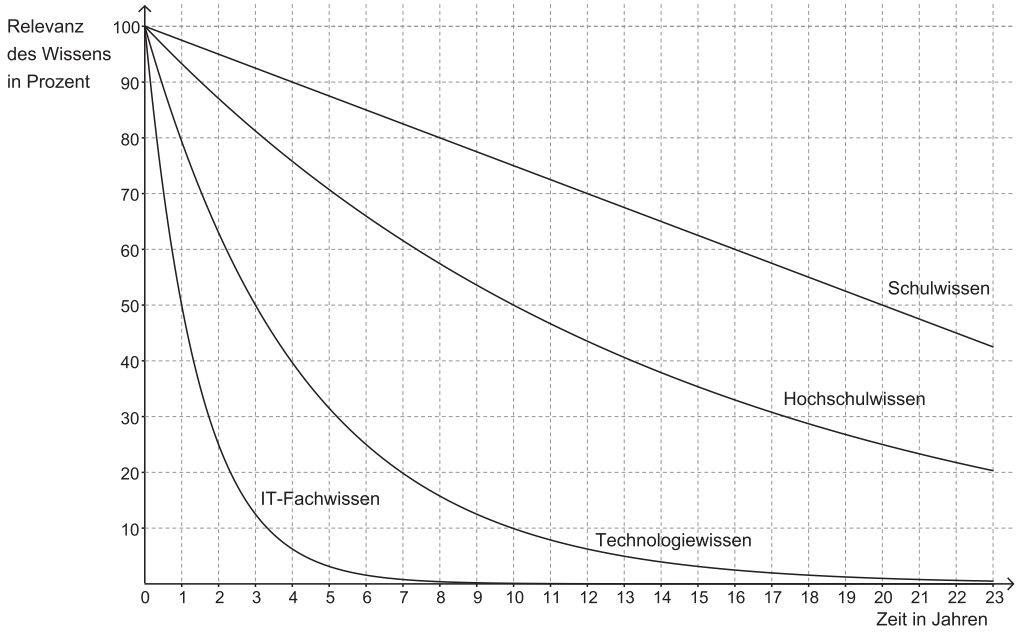
c) 1 × C für das richtige Ablesen der beiden Werte mit Gewinnunterschied € 10.000

Halbwertszeit des Wissens*

Aufgabennummer: A_159

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Das zu einem bestimmten Zeitpunkt erworbene Wissen verliert im Laufe der Zeit aufgrund gesellschaftlicher Veränderungen, technologischer Neuerungen etc. an Aktualität und Gültigkeit („Relevanz“). Die nachstehende Abbildung beschreibt die Abnahme der Relevanz des Wissens in verschiedenen Fachbereichen. Für jedes Jahr wird angegeben, wie viel Prozent des ursprünglichen Wissens noch relevant sind.



a) Man geht davon aus, dass die Relevanz des beruflichen Fachwissens exponentiell abfällt und eine Halbwertszeit von 5 Jahren hat.

– Zeichnen Sie in die Abbildung der Angabe den Verlauf der Relevanz des beruflichen Fachwissens im Intervall [0; 15] ein.

b) Die Relevanz von Technologiewissen nimmt mit einer Halbwertszeit von 3 Jahren exponentiell ab.

– Stellen Sie diejenige Exponentialfunktion auf, die die Relevanz des Technologiewissens in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt.
– Berechnen Sie, nach welcher Zeit die Relevanz des Technologiewissens auf 1 % der anfänglichen Relevanz abgesunken ist.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Die Relevanz des Hochschulwissens lässt sich durch folgende Funktion N beschreiben:

$N(t) = 100 \cdot e^{-0{,}0693 \cdot t}$

t ... Zeit in Jahren
$N(t)$ ... Relevanz des Hochschulwissens zur Zeit t in % des anfänglichen Hochschulwissens

– Berechnen Sie, um wie viel Prozent die Relevanz des Hochschulwissens nach 7 Jahren bereits abgenommen hat.

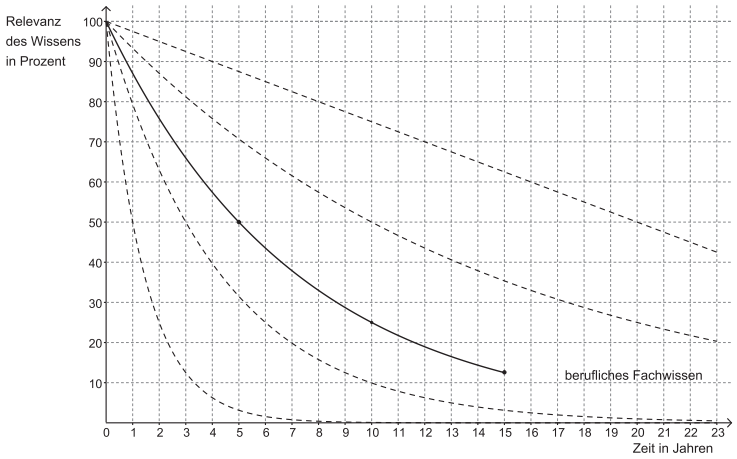
d) Die Relevanz des Schulwissens kann in den ersten Jahrzehnten durch eine lineare Funktion beschrieben werden.

– Lesen Sie aus der Abbildung in der Angabe die Steigung dieser linearen Funktion ab.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



b) Aufstellen der Exponentialfunktion:

$T(t) = 100 \cdot 2^{-\frac{t}{3}}$

t ... Zeit in Jahren
$T(t)$ ... Relevanz des Technologiewissens zur Zeit t in Prozent der anfänglichen Relevanz des Wissens

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$1 = 100 \cdot 2^{-\frac{t}{3}} \Rightarrow t = 19{,}9... \approx 20$

Nach rund 20 Jahren ist die Relevanz des Technologiewissens auf 1 % der anfänglichen Relevanz gesunken.

c) $100 - N(7) = 100 - 100 \cdot e^{-0{,}0693 \cdot 7} = 38{,}4... \approx 38$

Die Relevanz des Hochschulwissens hat um rund 38 % abgenommen.

d) $k = -\frac{5}{2}$

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Einzeichnen des Funktionsgraphen im Intervall [0; 15] (dabei müssen die Werte nach 5, 10 bzw. 15 Jahren als 50 %, 25 % bzw. 12,5 % erkennbar sein)
b) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Exponentialfunktion
1 × B: für die richtige Berechnung der Zeitdauer
c) 1 × B: für die richtige Berechnung des Prozentsatzes
d) 1 × C: für das richtige Ablesen der Steigung

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Farbenfrohe Gummibären*

Aufgabennummer: A_157

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

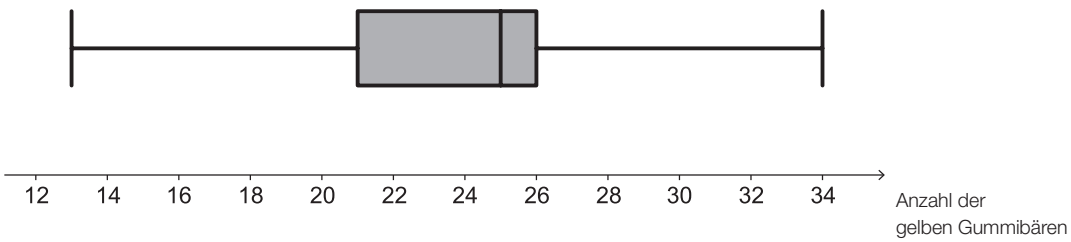
Gummibären werden in 5 unterschiedlichen Farben bzw. 6 unterschiedlichen Geschmacksrichtungen hergestellt: rot (Himbeere und Erdbeere), gelb (Zitrone), grün (Apfel), orange (Orange) und weiß (Ananas).

a) Die nachstehende Tabelle enthält eine Auflistung, wie viele weiße Gummibären in den untersuchten Packungen waren.

Anzahl weißer Gummibären pro Packung	17	20	21	22	24
Anzahl der Packungen	2	3	3	1	4

– Berechnen Sie das arithmetische Mittel der Anzahlen weißer Gummibären pro Packung.

b) Mehrere Packungen wurden hinsichtlich der Anzahl der gelben Gummibären pro Packung untersucht. Das Ergebnis dieser Untersuchung ist im nachstehenden Boxplot dargestellt.



Eine der untersuchten Packungen wird zufällig ausgewählt. Sie gehört zu jenem Viertel aller untersuchten Packungen, in dem die meisten gelben Gummibären zu finden waren.

– Lesen Sie aus dem Boxplot ab, in welchem Bereich die Anzahl der gelben Gummibären in der ausgewählten Packung liegen muss.

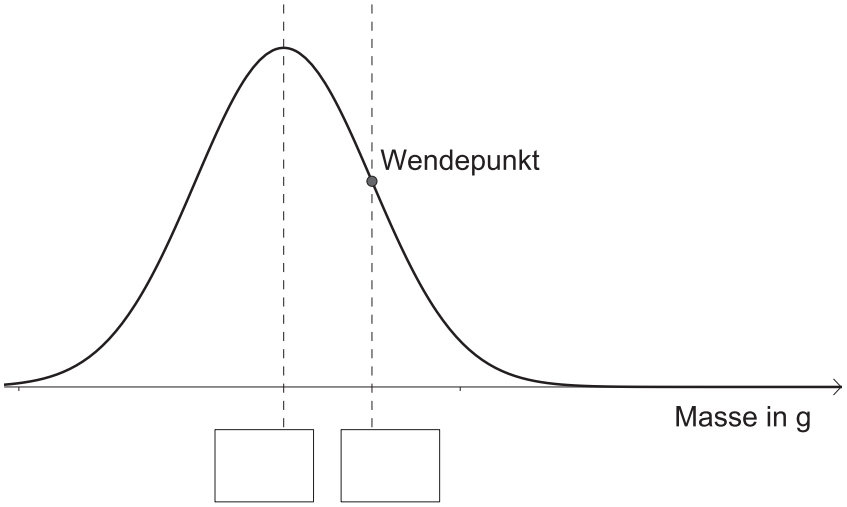
c) In einer Packung sind alle Geschmacksrichtungen in gleichen Anteilen zu finden.

– Berechnen Sie, wie viel Prozent der Gummibären in dieser Packung die Farbe Rot haben.

* ehemalige Klausuraufgabe

d) Die Masse von Gummibären ist annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 2{,}3$ g und der Standardabweichung $\sigma = 0{,}1$ g. Der Graph der Wahrscheinlichkeitsdichte ist in der unten stehenden Abbildung dargestellt.

– Tragen Sie die fehlenden Beschriftungen in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.



Gummibären, die zu leicht oder zu schwer sind, werden aussortiert. Abweichungen von bis zu ± 0,25 g vom Erwartungswert werden toleriert.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der ein zufällig ausgewählter Gummibär aussortiert wird.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

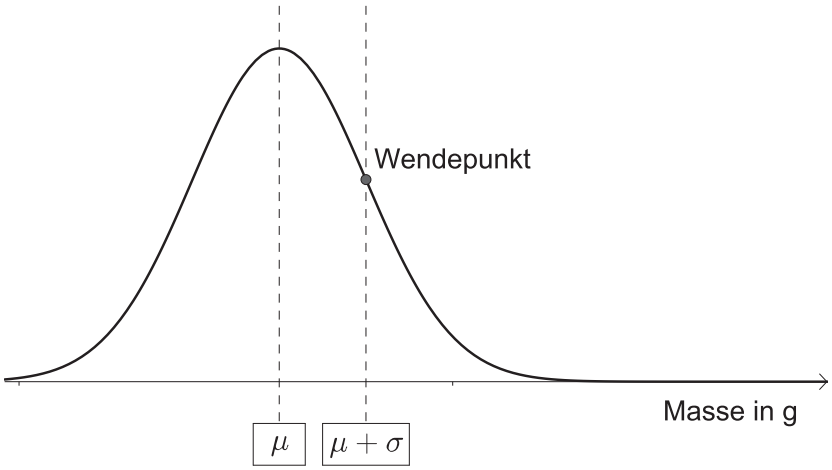
a) $\bar{x} = \frac{17 \cdot 2 + 20 \cdot 3 + 21 \cdot 3 + 22 \cdot 1 + 24 \cdot 4}{2 + 3 + 3 + 1 + 4} = 21{,}153... \approx 21{,}15$

b) Diese Packung enthält mindestens 26 und höchstens 34 gelbe Gummibären.

c) Anteil einer Geschmacksrichtung: $\frac{1}{6}$

Da die Farbe Rot 2-mal vorkommt: $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \approx 33{,}33\ \%$.

d)



P(„Gummibär wird aussortiert“) = 1 – $P(2{,}05 \leq X \leq 2{,}55)$ = 0,01241... ≈ 0,0124

Ein zufällig ausgewählter Gummibär wird mit einer Wahrscheinlichkeit von rund 1,24 % aussortiert.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für die richtige Berechnung des arithmetischen Mittels
b) 1 × C: für das richtige Ablesen des Bereichs
c) 1 × B: für die richtige Berechnung des Prozentsatzes
d) 1 × A: für das richtige Eintragen der fehlenden Beschriftungen (μ und $\mu + \sigma$ bzw. die entsprechenden Werte 2,3 und 2,4)
1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Infusion*

Aufgabennummer: A_150

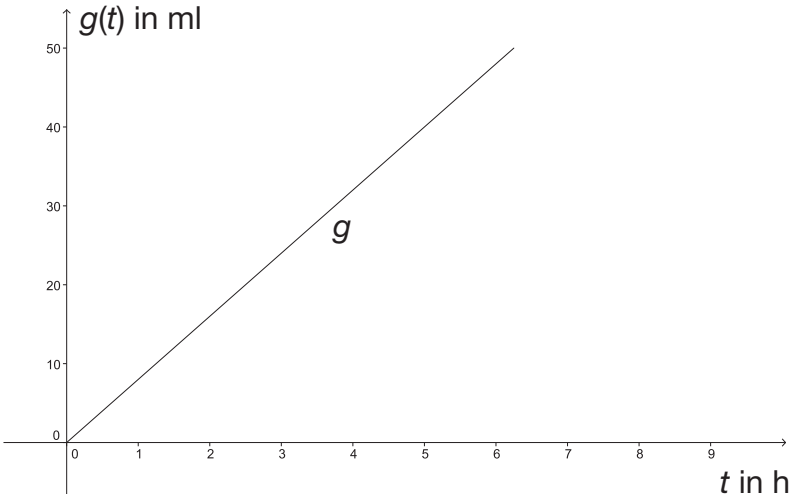
Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Eine Patientin soll 50 ml Infusionslösung erhalten. Die Tropfgeschwindigkeit des Infusionsgeräts wird zu Beginn auf 8 Milliliter pro Stunde (ml/h) eingestellt.
Nach 3 Stunden verändert der Arzt die Tropfgeschwindigkeit, damit die Infusionsflasche nach weiteren 5 Stunden leer ist.

– Berechnen Sie, auf welche neue Tropfgeschwindigkeit in ml/h der Arzt das Gerät einstellen muss.
– Stellen Sie diejenige Funktionsgleichung auf, die den Inhalt in der Infusionsflasche in Abhängigkeit von der Zeit nach Veränderung der Tropfgeschwindigkeit beschreibt.

b) Ein Patient soll 50 ml Infusionslösung erhalten. Die Tropfgeschwindigkeit des Infusionsgeräts wird auf 8 ml/h eingestellt.

– Beschreiben Sie die Bedeutung des nachstehenden Funktionsgraphen g in diesem Sachzusammenhang.



* ehemalige Klausuraufgabe

c) Die verbleibende Infusionslösung in einer anderen Flasche wird durch die Funktion *f* beschrieben:

$f(t) = 24 - 3{,}3 \cdot t$

t ... Zeit in Stunden (h) seit 16 Uhr
$f(t)$ ... verbleibende Infusionslösung zum Zeitpunkt t in Millilitern (ml)

– Berechnen Sie, wie viel Infusionslösung in ml die Flasche um 18:20 Uhr enthält.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Nach 3 Stunden wurden bereits 24 ml verabreicht, d. h., es sind noch 26 ml in der Flasche.

$\frac{26}{5} = 5{,}2$

Die neue Tropfgeschwindigkeit beträgt 5,2 ml/h.

Aufstellen der Funktionsgleichung:

t ... Zeit in Stunden nach Neueinstellung durch den Arzt
$f(t)$ ... verbleibende Menge in der Infusionsflasche in ml zur Zeit t
$f(t) = 26 - 5{,}2 \cdot t$

b) Der Funktionsgraph beschreibt die Menge in ml, die der Patient nach t Stunden erhalten hat.

c) vergangene Zeit: 2 h 20 min, also $\frac{7}{3}$ h

$f\left(\frac{7}{3}\right) = 24 - 3{,}3 \cdot \frac{7}{3} = 16{,}3$

Um 18:20 Uhr sind noch 16,3 ml in der Flasche.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B für die richtige Berechnung der neuen Tropfgeschwindigkeit
1 × A für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung
b) 1 × C für die richtige Beschreibung der Bedeutung des Funktionsgraphen
c) 1 × B für die richtige Berechnung der verbleibenden Infusionslösung

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Tauchen (1)*

Aufgabennummer: A_104

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Das Organ, das beim Tauchen am meisten gefährdet ist, ist die Lunge: Die menschliche Lunge hat ein durchschnittliches Fassungsvermögen von 6 Litern. Wenn die aufgenommene Luftmenge das Fassungsvermögen übersteigt, besteht die Gefahr eines Lungenrisses.

a) Je tiefer man taucht, desto höher wird der Druck auf die Lunge. Alle 10 Meter nimmt der Druck um 1 Bar zu. In 30 Metern Tiefe beträgt er bereits 4 Bar.

– Modellieren Sie diesen Zusammenhang durch eine Funktion P.

n ... Tauchtiefe in Metern
$P(n)$ ... Druck in Bar in n Metern Tiefe

– Ermitteln Sie, welcher Druck auf die Lunge in einer Tiefe von 32,5 Metern herrscht.

b) Das Volumen der in der Lunge befindlichen Luft ändert sich beim Tauchen nach folgender Formel:

$$V_n = \frac{10 \cdot V_0}{10 + n}$$

n ... Tauchtiefe in Metern
V_0 ... Volumen in Litern gemessen an der Wasseroberfläche ($n = 0$)
V_n ... Volumen in Litern gemessen in n Metern Tiefe

– Erklären Sie mithilfe der Formel, was mit der Lunge passieren würde, wenn man von 10 Metern Tiefe mit 4 Litern Luft in der Lunge zur Oberfläche auftaucht und dabei die Luft anhält.

c) Unter Wasser erscheint alles um ein Drittel länger und um ein Viertel näher als in Wirklichkeit. Ein Taucher beobachtet einen Hecht. Für ihn scheint der Hecht L m lang zu sein und in einer Entfernung von d cm vorbeizuschwimmen.

– Erstellen Sie ein Modell für die Berechnung der tatsächlichen Länge des Hechts.
– Erstellen Sie ein Modell für die Berechnung der tatsächlichen Entfernung des Hechts zum Taucher.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

a) Da es sich um eine konstante Zunahme handelt, kann man diesen Zusammenhang mit einer linearen Funktion darstellen: $P(n) = k \cdot n + d$.

Pro Meter nimmt der Druck um $\frac{1}{10}$ Bar zu, das heißt: $k = \frac{1}{10}$.

Man setzt den Punkt $P(30) = 4$ ein:

$4 = \frac{1}{10} \cdot 30 + d$

$d = 1$

Die Funktion lautet daher: $P(n) = \frac{1}{10} \cdot n + 1$.

Somit hat man in einer Tiefe von 32,5 Metern den Druck $P(32{,}5) = 4{,}25$ Bar.

b) $V_{10} = 4$
Man muss die oben gegebene Formel nach V_0 umformen und erhält dann die Formel $V_0 = \frac{V_n \cdot (10 + n)}{10}$.

Setzt man in diese Formel mit $n = 10$ und $V_{10} = 4$ ein, so erhält man ein Lungenvolumen an der Wasseroberfläche von $V_0 = \frac{4 \cdot 20}{10} = 8$ Litern.

Laut obiger Angabe hat die Lunge aber nur eine Kapazität von 6 Litern. Es besteht also die Gefahr eines Lungenrisses.

c) tatsächliche Länge: x
scheinbare Länge unter Wasser: $\frac{4}{3}x = L$

tatsächliche Entfernung: y
scheinbare Entfernung im Wasser: $\frac{3}{4}y = d$

Lösungsschlüssel

a) 1 x A für das richtige Modell mit den richtigen Parameterwerten
1 x B für die richtige Berechnung des Drucks
b) 1 x D für die logisch richtige Argumentation mithilfe der Formel
c) 1 x A für die richtige Formel für die Länge
1 x A für die richtige Formel für die Entfernung

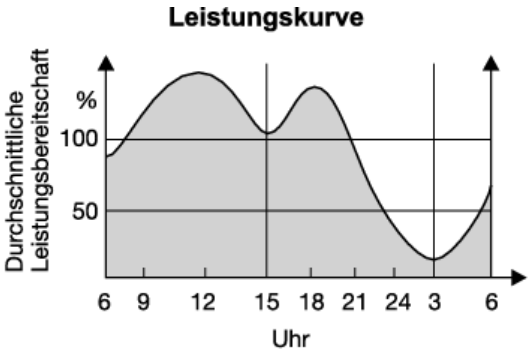
Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Leistungskurve*

Aufgabennummer: A_108

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Die *Leistungskurve*, auch *Arbeitskurve* genannt, ist die Darstellung der Arbeitsleistung einer Arbeitnehmerin/eines Arbeitnehmers in Abhängigkeit von der Tageszeit unter Berücksichtigung seiner Durchschnittsleistung (100 Prozent). Auf einer Webseite findet man folgende Grafik:



Quelle: http://wirtschaftslexikon.gabler.de/Archiv/85252/leistungskurve-v9.html [30.05.2014]

a) – Lesen Sie ab, in welchen Zeitintervallen die Leistungsbereitschaft abnimmt.

b) – Skizzieren Sie den Graphen der 1. Ableitungsfunktion der Leistungsbereitschaft im Zeitintervall von 15 Uhr bis 3 Uhr. Achten Sie dabei auf ein korrektes Einzeichnen der Extremstellen und des Monotonieverhaltens.

c) Um 9 Uhr beträgt die Leistungsbereitschaft einer Arbeitnehmerin 110 %. Um 12 Uhr beträgt sie 140 %. Im Zeitintervall von 12 Uhr bis 14 Uhr beträgt die mittlere Änderungsrate der Leistungsbereitschaft –12 % pro Stunde.

– Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate der Leistungsbereitschaft im Zeitintervall von 9 Uhr bis 12 Uhr.
– Berechnen Sie die Leistungsbereitschaft um 14 Uhr.

d) Die Leistungsbereitschaft eines Arbeitnehmers kann im Zeitintervall von 0 Uhr bis 6 Uhr durch die Funktion f beschrieben werden. Dabei gilt:

$$f(t) = \frac{10}{3} \cdot t^2 - 20 \cdot t + 40$$

t ... Zeit in Stunden, $0 \le t \le 6$
$f(t)$ ... Leistungsbereitschaft zur Zeit t in Prozent

– Berechnen Sie die 1. Ableitung der Leistungsbereitschaft um 2:30 Uhr.
– Erklären Sie die Bedeutung der 1. Ableitung im Sachzusammenhang.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

* ehemalige Klausuraufgabe

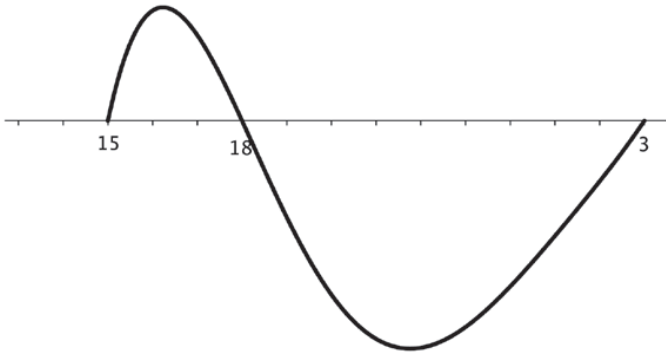
Möglicher Lösungsweg

a) Eine Abnahme der Leistungsbereitschaft liegt im Zeitintervall von ca. 12 Uhr bis ca. 15 Uhr sowie im Zeitintervall von ca. 18 Uhr bis ca. 3 Uhr vor.

Toleranzintervall: ± 0,5 h

b) Jede Skizze, die für die Ableitungsfunktion die richtigen Nullstellen (bei 15 Uhr, bei ca. 18 bis 19 Uhr und bei 3 Uhr) und das richtige Vorzeichen zeigt, gilt als richtige Lösung.
Auf das Einzeichnen von Einheiten auf der *y*-Achse darf verzichtet werden.

Zum Beispiel:



c) mittlere Änderungsrate: $\frac{140 - 110}{12 - 9} = 10 \rightarrow +\ 10\ \%$ pro Stunde

Leistungsbereitschaft um 14 Uhr: $140 - 2 \cdot 12 = 116 \rightarrow 116\ \%$

d) $f'(t) = \frac{20}{3} \cdot t - 20$

$f'(2{,}5) = -\frac{10}{3} \approx -3{,}33$

Die 1. Ableitung der Funktion zeigt die momentane Änderungsrate der Leistungsbereitschaft in Prozent pro Stunde an.
Diese momentane Änderungsrate um 2:30 Uhr beträgt –3,33 % (der Durchschnittsleistung) pro Stunde.

Lösungsschlüssel

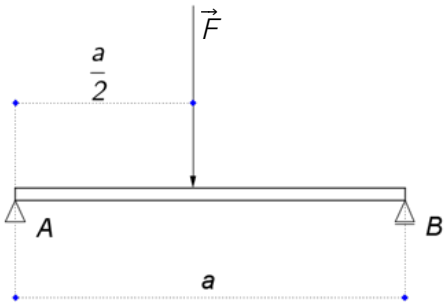
a) 1 × C für das richtige Ablesen der Zeitintervalle
b) 1 × A für die richtige Darstellung der Nullstellen der Ableitungsfunktion
1 × A für die richtige Darstellung des Monotonieverhaltens
c) 1 × B für die richtige Berechnung der mittleren Änderungsrate
1 × B für die richtige Berechnung der Leistungsbereitschaft um 14 Uhr
d) 1 × B für die richtige Berechnung der 1. Ableitung zur angegebenen Uhrzeit
1 × D für die richtige Erklärung der Bedeutung der 1. Ableitung im Sachzusammenhang

Biegeversuch

Aufgabennummer: B_010

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein Holzträger mit rechteckigem Querschnitt mit der Breite b, der Höhe h und der Länge a = 300 mm ruht auf 2 Auflagerpunkten A und B und wird in seiner Mitte mit einer Einzelkraft $\vec{F}$ senkrecht belastet.



a) Der Biegeversuch dient zur Ermittlung der Biegespannung $\sigma_B = \frac{3 \cdot F \cdot a}{2 \cdot b \cdot h^2}$.

F … Betrag der Kraft $\vec{F}$ in Newton (N)

– Zeigen Sie, dass sich die obige Formel für die Biegespannung aus dem Quotienten des maximalen Moments $M = F \cdot \frac{a}{4}$ und des Widerstandsmoments W_x mit der Formel

$$W_x = \frac{\frac{2}{3}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left(\frac{h}{2}\right)^3 \mathrm{d}x}{\frac{h}{2}}$$

entwickeln lässt.

b) Die allgemeine Funktion der Biegelinie für den beschriebenen Belastungsfall lautet:

$$y(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$$

$y(x)$ … Durchbiegung in mm im Abstand x vom Auflagerpunkt A
x … Abstand vom Auflagerpunkt A in mm ($150 \leq x \leq 300$)

Der Graph der Biegelinie hat an der Stelle x = 150 mm die größte Durchbiegung von 1,875 mm.
Die Nullstelle bei x = 300 mm ist der Wendepunkt der Biegelinie.

– Stellen Sie dasjenige Gleichungssystem auf, das zur Ermittlung von a, b, c und d benötigt wird.
– Berechnen Sie die Funktionsgleichung.

c) Für einen Biegeversuch an Holzträgern sind die Daten der Biegespannung σ_B und der Dichte ρ in der folgenden Tabelle zusammengefasst:

σ_B in N/mm^2	112,5	84,4	112,5	93,9	95,6	83,8	66,9	100,1	109,7	121,5
ρ in g/cm^3	0,52	0,46	0,51	0,49	0,48	0,48	0,50	0,44	0,50	0,55

– Erstellen Sie die Gleichung der Regressionsgeraden.
– Ermitteln Sie den Korrelationskoeffizienten *r*.
– Stellen Sie die Punktwolke und die Regressionsgerade grafisch dar.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $W_x = \dfrac{\frac{2}{3}\cdot\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\left(\frac{h}{2}\right)^3 \mathrm{d}x}{\frac{h}{2}} = \dfrac{\left[\frac{2}{3}\cdot\frac{h^3}{8}\cdot x\right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}}{\frac{h}{2}} = \dfrac{\frac{1}{12}\cdot b\cdot h^3}{\frac{h}{2}} = \dfrac{b\cdot h^2}{6}$

$\sigma_B = \dfrac{F\cdot\frac{a}{4}}{W_x} = \dfrac{F\cdot\frac{a}{4}}{\frac{b\cdot h^2}{6}} = \dfrac{3\cdot F\cdot a}{2\cdot b\cdot h^2}$

b) $y(x) = a\cdot x^3 + b\cdot x^2 + c\cdot x + d$
$y'(x) = 3\cdot a\cdot x^2 + 2\cdot b\cdot x + c$
$y''(x) = 6\cdot a\cdot x + 2\cdot b$

I	$y'(150) = 0$	$3\cdot a\cdot 150^2 + 2\cdot b\cdot 150 + c = 0$
II	$y(150) = 1{,}875$	$a\cdot 150^3 + b\cdot 150^2 + c\cdot 150 + d = 1{,}875$
III	$y''(300) = 0$	$6\cdot a\cdot 300 + 2\cdot b = 0$
IV	$y(300) = 0$	$a\cdot 300^3 + b\cdot 300^2 + c\cdot 300 + d = 0$

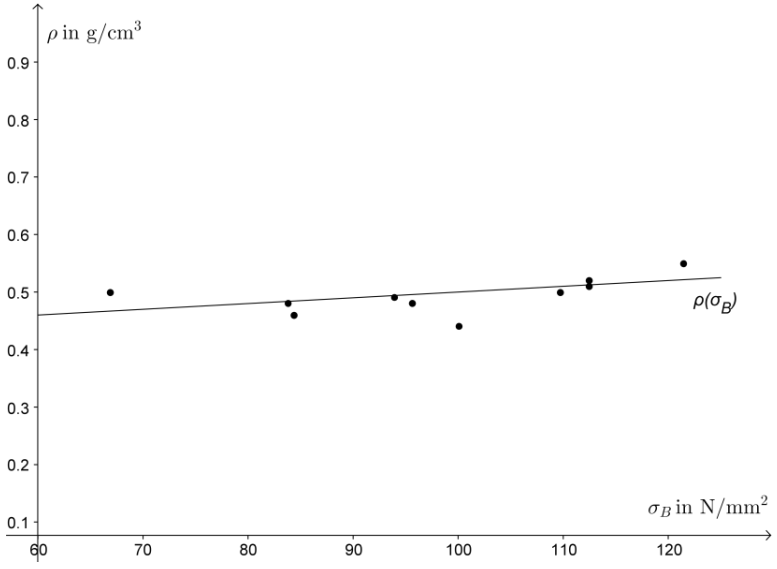
I	$y'(150) = 0$	waagrechte Tangente an der Stelle $x = 150$
II	$y(150) = 1{,}875$	Funktionswert von 1,875 an der Stelle $x = 150$
III	$y''(300) = 0$	Wendepunkt an der Stelle $x = 300$
IV	$y(300) = 0$	Nullstelle an der Stelle $x = 300$

Die Angabe der Definitionen ist nicht erforderlich.

Die Funktionsgleichung wird zum Beispiel mittels Technologieeinsatz bestimmt und lautet:
$y(x) = 2{,}\dot{7}\cdot 10^{-7}\cdot x^3 - 0{,}00025\cdot x^2 + 0{,}05625\cdot x - 1{,}875$

c) Regressionsgerade: $\rho(\sigma_B) = 9{,}7\cdot 10^{-4}\cdot\sigma_B + 0{,}4$ (mittels Technologieeinsatz ermittelt)

Der Korrelationskoeffizient beträgt $\approx 0{,}52$.



Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 4 Analysis
c) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) A Modellieren und Transferieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) –
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) –

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) leicht
c) leicht

Punkteanzahl:

a) 2
b) 4
c) 3

Thema: Holztechnik

Quellen: –

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Der Tee ist zu heiß!

Aufgabennummer: B_009

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

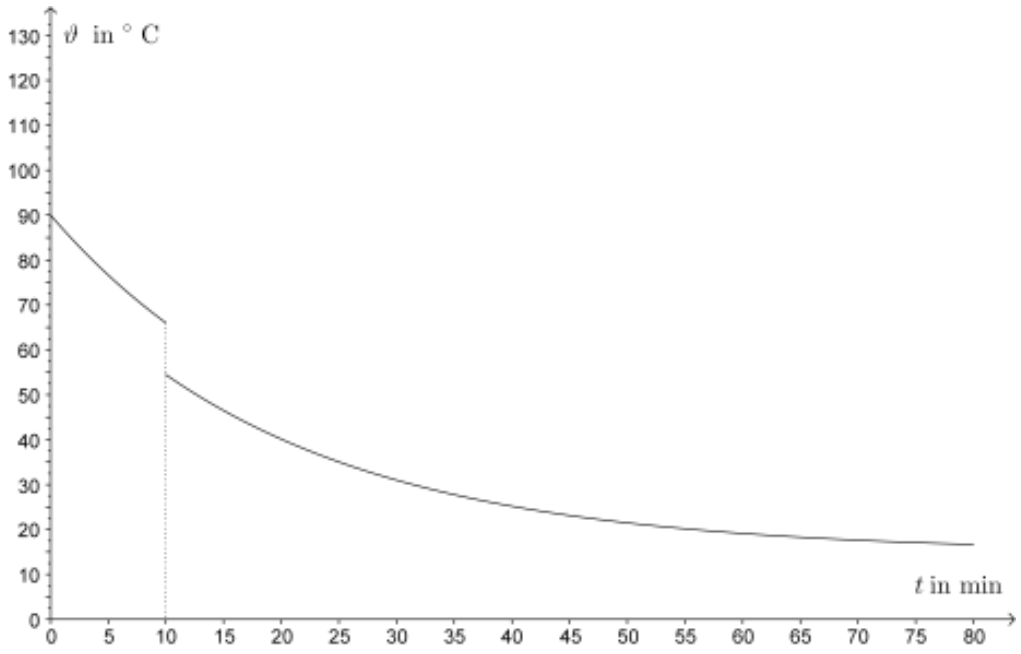
Susanne und Samuel trinken zum Frühstück aus zwei unterschiedlich geformten Tassen Tee. Die Temperatur des Tees in beiden Tassen beträgt um 6:00 Uhr 90 Grad Celsius (°C). Die Umgebungstemperatur beträgt 24 °C.

a) Die Abkühlung des Tees in der Tasse von Susanne kann näherungsweise durch eine exponentielle Abklingfunktion beschrieben werden. Die Temperatur des Tees nimmt nach 27 Minuten (min) um 50 % ab.

– Skizzieren Sie den Temperaturverlauf während der ersten 30 min in ein Koordinatensystem.
– Lesen Sie aus der Grafik ab, welche Temperatur der Tee von Susanne um 6:15 Uhr erreicht hat.

b) Susanne ist der Ansicht: „Der Tee ist zu heiß!“ Ihre Mutter gießt um 6:10 Uhr kalten Apfelsaft in den Tee, aufgrund dessen die Temperatur um 11 °C fällt.

– Erklären Sie, warum die folgende Grafik diesen Temperaturverlauf nicht korrekt beschreibt.



c) Der Tee von Samuel kühlt in seiner Tasse in 15 min von 90 °C auf 50,5 °C ab. Dieser Abkühlungsvorgang lässt sich durch folgende Funktion beschreiben:

$$\vartheta(t) = (\vartheta_A - \vartheta_U) \cdot e^{-k \cdot t} + \vartheta_U$$

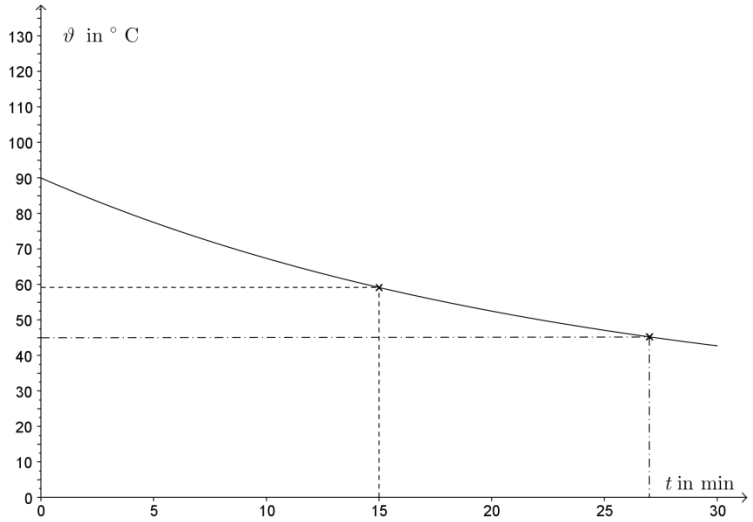
t … Zeit nach Beobachtungsbeginn in min
ϑ_A … Anfangstemperatur in °C
ϑ_U … Umgebungstemperatur in °C
k … Zeitkonstante des Abkühlungskörpers (Tasse) in min^{-1}
$\vartheta(t)$ … Temperatur des Tees in °C t min nach Beobachtungsbeginn

– Berechnen Sie *k.*
– Erstellen Sie diejenige Funktionsgleichung, die die Temperatur des Tees in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt.
– Erklären Sie die Bedeutung des Differenzialquotienten $\frac{d\vartheta(t)}{dt}$ in Bezug auf die Abkühlung.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



Die Tasse Tee von Susanne hat nach 15 min eine Temperatur von ca. 59 °C erreicht.

Eine angemessene Ungenauigkeit beim Ablesen der Werte wird toleriert.

b) Aus der Grafik kann man ablesen, dass die Temperatur des Tees auf unter 24 °C fällt.

Auch andere, gleichwertige Argumentationen sind zulässig.

c) $50{,}5 = (90 - 24) \cdot e^{-k \cdot 15} + 24$

$\frac{26{,}5}{66} = e^{-k \cdot 15}$

$\ln(\frac{26{,}5}{66}) = -k \cdot 15 \cdot \ln(e)$

$k \approx 0{,}061\ \text{min}^{-1}$

$\vartheta(t) = 66 \cdot e^{-0{,}061 \cdot t} + 24$

Der Differenzialquotient $\frac{d\vartheta(t)}{dt}$ beschreibt die Abkühlungsgeschwindigkeit des Tees (momentane Temperaturänderung pro Minute) in der Tasse.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) 2 Algebra und Geometrie

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) –
c) C Interpretieren und Dokumentieren, A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) leicht

Punkteanzahl:

a) 2
b) 1
c) 3

Thema: Alltag

Quellen: –

Usain Bolt

Aufgabennummer: B_007

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Bei den Olympischen Sommerspielen 2012 in London sprintete Usain Bolt im 100-Meter-Finallauf mit einer Zeit von 9,63 Sekunden (s) durch das Ziel.

Die bei diesem Lauf gemessenen Geschwindigkeiten in Kilometern pro Stunde (km/h) sind in folgender Tabelle festgehalten:

Geschwindigkeit in km/h	23,54	34,22	39,07	41,27	42,27	42,72	42,93	43,02	43,064
Zeit in s	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Die Laufgeschwindigkeit kann annähernd durch die Funktion v beschrieben werden:

$v(t) = 43{,}1 \cdot (1 - e^{b \cdot t})$

t ... Laufzeit in s
$v(t)$ ... Geschwindigkeit in km/h zum Zeitpunkt t

– Stellen Sie die Daten der Tabelle in einem kartesischen Koordinatensystem dar.
– Ermitteln Sie unter Zuhilfenahme eines beliebigen Messwertes der Tabelle den Parameter b der Funktion v (auf 2 Dezimalstellen gerundet).

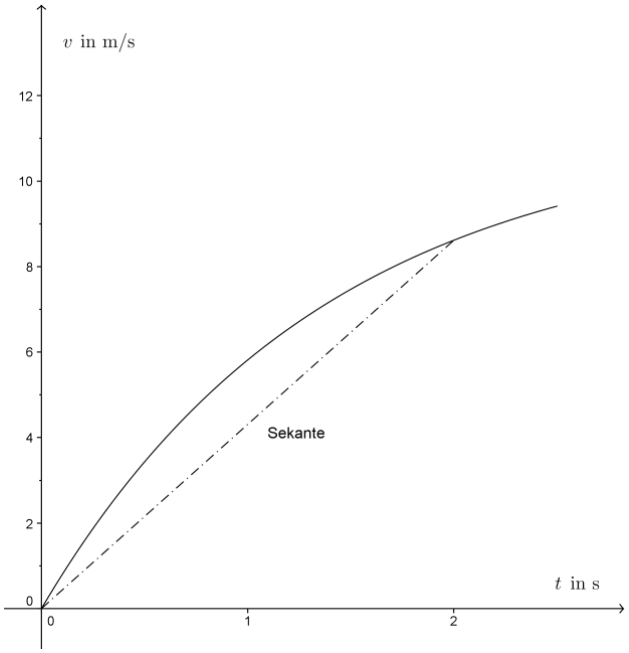
b) Die Geschwindigkeit, mit der Usain Bolt 2009 den Weltrekord über 200 m lief, lässt sich annähernd durch folgende Funktion v beschreiben:

$v(t) = \frac{101}{9} \cdot (1 - e^{-0{,}73 \cdot t})$

t ... Laufzeit in s
$v(t)$ ... Geschwindigkeit in m/s zum Zeitpunkt t

– Stellen Sie die Funktion des Weges s in Abhängigkeit von der Zeit t auf.
– Berechnen Sie, in welcher Zeit Usain Bolt die ersten 100 m zurücklegte (auf 2 Dezimalstellen gerundet).

c) Die Laufgeschwindigkeit während der ersten 2 Sekunden des Weltrekordlaufs über 200 m ist in der nachstehenden Grafik dargestellt.



– Lesen Sie die Steigung der eingezeichneten Sekante ab.
– Interpretieren Sie diese Steigung physikalisch.

d) Zwei Läufer treten gegeneinander an.
Der vom ersten Läufer zurückgelegte Weg s_1 in Metern (m) kann durch die Funktion $s_1(t) = 15 \cdot e^{-0,72 \cdot t} + 11 \cdot t - 15$ beschrieben werden.
Der vom zweiten Läufer zurückgelegte Weg s_2 in Metern (m) kann durch die Funktion $s_2(t) = 16 \cdot e^{-0,72 \cdot t} + 11 \cdot t - 16$ beschrieben werden.

Mit der folgenden Gleichung wird diejenige Zeit t berechnet, nach der der Abstand zwischen den beiden Läufern 95 cm beträgt.

(1) $15 \cdot e^{-0,72 \cdot t} + 11 \cdot t - 15 = 16 \cdot e^{-0,72 \cdot t} + 11 \cdot t - 16 + 0,95$
(2) $0,05 = 16 \cdot e^{-0,72 \cdot t} - 15 \cdot e^{-0,72 \cdot t}$
(3) $0,05 = e^{-0,72 \cdot t} \cdot (16 - 15)$
(4) $\ln(0,05) = 0,72 - t + \ln(1)$
(5) $\ln(0,05) - 0,72 = -t$
(6) $t \approx 3,7$ s

In der Rechnung befindet sich ein Umformungsfehler.

– Bestimmen Sie diejenige Zeile, in der der Umformungsfehler passiert ist.
– Stellen Sie die Rechnung richtig.
– Erklären Sie, worin der Umformungsfehler besteht.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

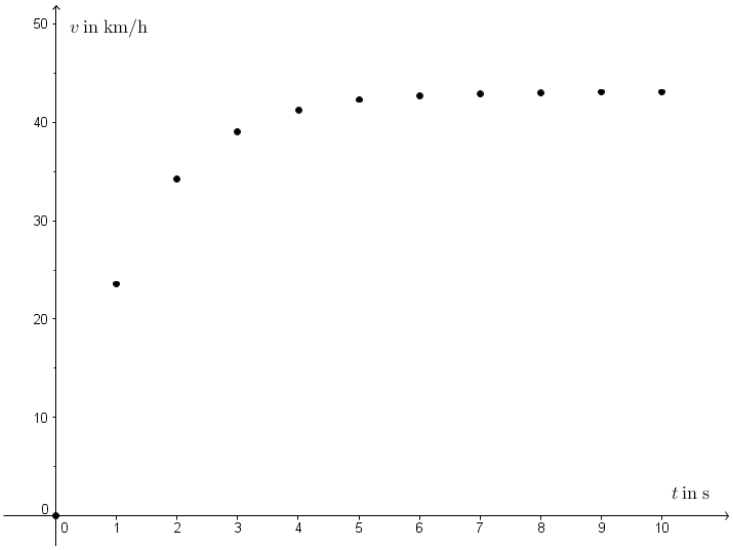
Möglicher Lösungsweg

a) **Parameter *b*:**
Einsetzen eines Punktes
z. B. (1|23,54)

$23{,}54 = 43{,}1 \cdot (1 - e^{b \cdot 1})$

$\Rightarrow b \approx -0{,}79$

$v(t) = 43{,}1 \cdot (1 - e^{-0{,}79 \cdot t})$



b) Die Funktion *v* ist die Ableitung der Weg-Zeit-Funktion. Der zurückgelegte Weg wird daher mittels Integration der Geschwindigkeit-Zeit-Funktion über den entsprechenden Zeitraum ermittelt:

$$s(t) = \int_0^t \frac{101}{9} \cdot \left(1 - e^{-0{,}73 \cdot x}\right) dx = \frac{101}{9} \cdot \left(x - \frac{e^{-0{,}73 \cdot x}}{-0{,}73}\right)\Big|_0^t = 15{,}3729 \cdot e^{-0{,}73 \cdot t} + \frac{101}{9} \cdot t - 15{,}3729$$

Lösen der Gleichung mit Technologieeinsatz:
$15{,}3729 \cdot e^{-0{,}73 \cdot t} + \frac{101}{9} \cdot t - 15{,}3729 = 100$

$\Rightarrow t \approx 10{,}28$ s

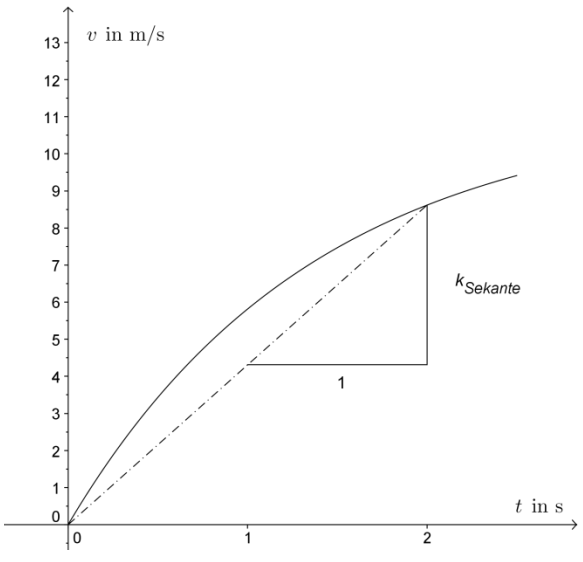
Die ersten 100 m lief Usain Bolt in 10,28 s.

c) Steigung der Sekante:

1. Art: $k_{\text{Sekante}} = 4{,}3$
2. Art: $k_{\text{Sekante}} = \frac{8{,}6}{2} = 4{,}3$

Die Steigung der Sekante gibt die mittlere Beschleunigung während der ersten 2 Sekunden an und beträgt 4,3 m/s².

Eine angemessene Ungenauigkeit beim Ablesen der Werte wird toleriert.



d) $\ln(x^y) = y \cdot \ln(x)$ Logarithmusfunktionen führen eine Potenz in ein Produkt über.
$\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$ Logarithmusfunktionen führen ein Produkt in eine Summe über.

(1) $15 \cdot e^{-0,72 \cdot t} + 11 \cdot t - 15 = 16 \cdot e^{-0,72 \cdot t} + 11 \cdot t - 16 + 0,95$
(2) $0,05 = 16 \cdot e^{-0,72 \cdot t} - 15 \cdot e^{-0,72 \cdot t}$
(3) $0,05 = e^{-0,72 \cdot t} \cdot (16 - 15)$
(4) $\ln(0,05) = 0,72 - t + \ln(1)$ $\ln(0,05) = -0,72 \cdot t \cdot \ln(e) + \ln(1)$
(5) $\ln(0,05) - 0,72 = -t$
(6) $t \approx 3,7$ s

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 4 Analysis
c) 4 Analysis
d) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) –
d) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) A Modellieren und Transferieren
c) C Interpretieren und Dokumentieren
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) –
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) –
d) C Interpretieren und Dokumentieren, D Argumentieren und Kommunizieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) schwer
c) mittel
d) leicht

Punkteanzahl:

a) 2
b) 4
c) 2
d) 3

Thema: Sport

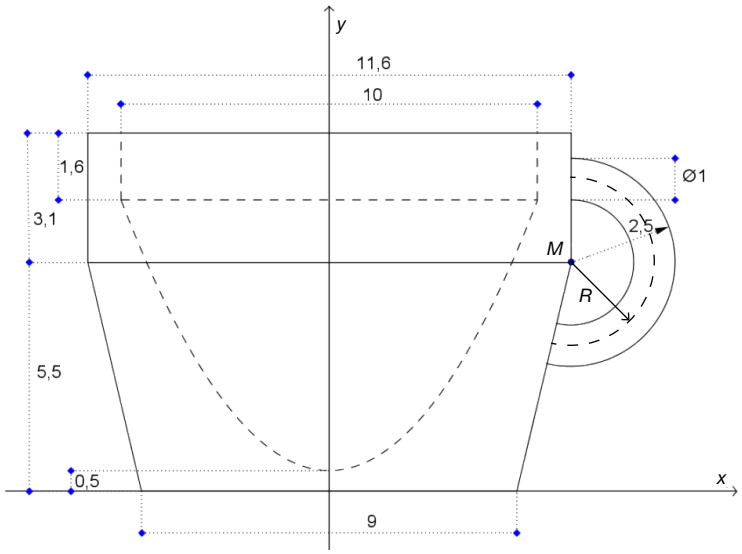
Quellen: –

Designertasse

Aufgabennummer: B_005

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Eine Designertasse wird aus Glas mit einer Dichte von 2 500 kg/m^3 hergestellt. Sie hat die Form eines quadratischen Pyramidenstumpfs mit einem aufgesetzten Quader. Der Hohlraum der Tasse hat die Form eines Drehparaboloids mit aufgesetztem Drehzylinder.



(Maße in cm)

a) Der Tassengriff hat die Form eines Ringkörpers (Torus).

Volumsformel für den Torus: $V = 2 \cdot \pi^2 \cdot R \cdot r^2$
R ... Radius der Kreislinie des Torus
r ... Radius der Querschnittsfläche des Torus

– Berechnen Sie unter Verwendung der angegebenen Skizze die Masse des Tassengriffs.

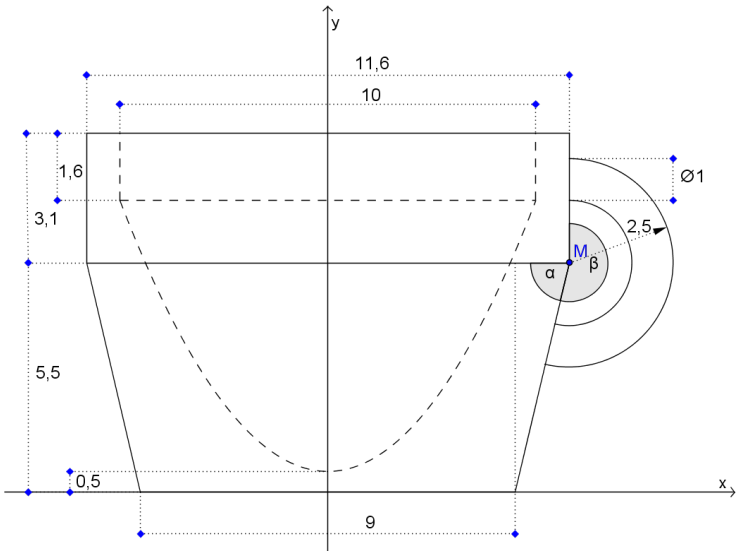
b) Die bis zum Rand gefüllte Tasse fasst ein Volumen von 380,918 ml.
– Berechnen Sie das Glasvolumen, das zur Herstellung der dargestellten Designertasse ohne Tassengriff notwendig ist.

c) Alle Abmessungen der Querschnittsfläche in x-Richtung werden um 5 % vergrößert. Die Abmessungen in y-Richtung bleiben unverändert.
– Argumentieren Sie, warum das Volumen des Hohlraumes nicht um 5 % zunimmt.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



$\tan \alpha = \frac{5,5}{1,3}$
$\alpha \approx 76,7°$
$\beta = 180° + (90° - 76,7°) = 193,3°$

$R = 2$ cm
$b = R \cdot \pi \cdot \frac{\beta}{180}$
$b = 6,747\ldots$ cm

$r = 0,5$ cm
$A = r^2 \cdot \pi$
$V = A \cdot b$
$V \approx 5,3$ cm^3

$\rho = 2,5$ g/cm^3
$m = V \cdot \rho$
$m = 13,25$ g

Die Masse des Tassengriffs beträgt 13,25 g.

b) Volumen des quadratischen Pyramidenstumpfs

$V_1 = \frac{h}{3} \cdot (A_1 + \sqrt{A_1 \cdot A_2} + A_2)$
$A_1 = 11,6^2 = 134,56$ cm^2
$A_2 = 9^2 = 81$ cm^2
$V_1 = 586,59\dot{3}$ cm^3

Volumen des Quaders

$V_2 = a^2 \cdot h = 11,6^2 \cdot 3,1$
$V_2 = 417,136$ cm^3
$V = V_1 + V_2 - 380,918 = 622,811\ldots$ cm^3

Das zur Herstellung notwendige Glasvolumen der Designertasse ohne den Tassengriff beträgt ungefähr 622,81 cm^3.

c) Drehparaboloid:

Wird der Radius des Drehparaboloids um 5 % vergrößert, so nimmt der Flächeninhalt um 10,25 % zu, weil sich der Radius quadratisch im Flächeninhalt auswirkt. Die Abmessungen entlang der y-Achse bleiben gleich. Das Volumen des Drehparaboloids nimmt deshalb um 10,25 % zu.

Drehzylinder:

Wird der Radius des Drehzylinders um 5 % vergrößert, so nimmt der Flächeninhalt um 10,25 % zu, weil sich der Radius quadratisch im Flächeninhalt auswirkt. Da die Abmessungen entlang der y-Achse gleich bleiben, nimmt auch das Volumen des Drehzylinders um 10,25 % zu.

Das Volumen des Hohlraumes nimmt um 10,25 % zu.

Auch andere gleichwertige Argumentationen sind zulässig.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) D Argumentieren und Kommunizieren

Nebenhandlungsdimension:

a) –
b) –
c) A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:

a) schwer
b) mittel
c) schwer

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2
c) 3

Thema: Design

Quellen: –

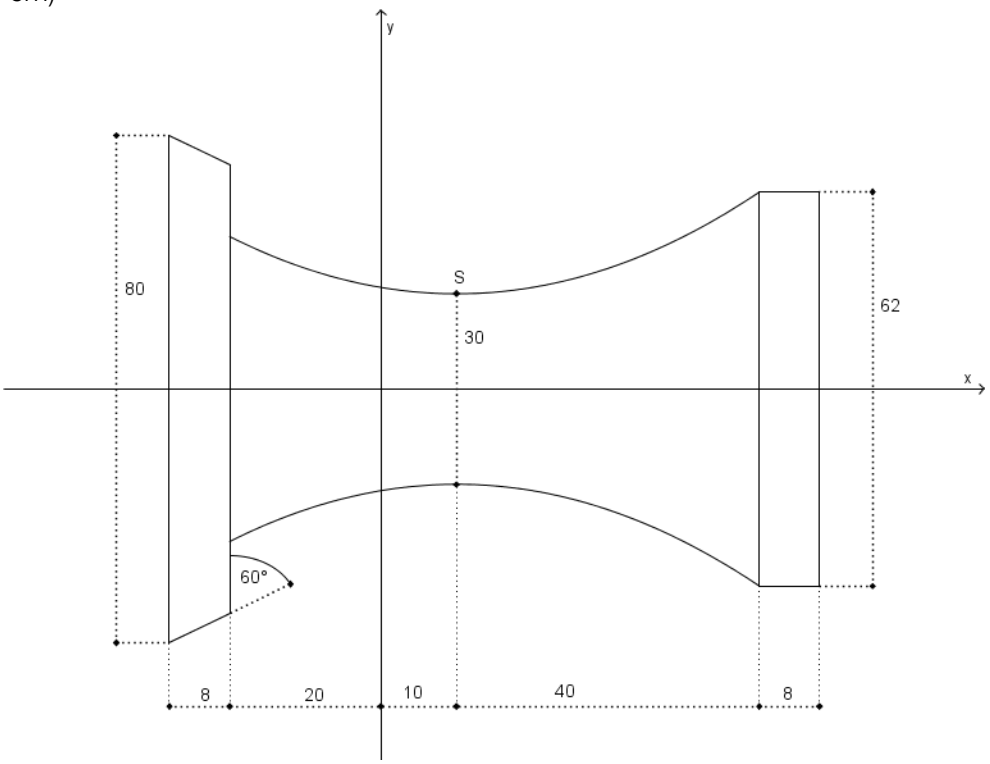
Drechseln

Aufgabennummer: B_003

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Die folgende Abbildung zeigt den Längsschnitt eines rotationssymmetrischen Körpers, der durch eine um die x-Achse drehende Parabel mit einem aufgesetzten Drehkegelstumpf und einem Drehzylinder entsteht. Die Formgebung erfolgt durch Drechseln eines Holzzylinders.

(Maße in cm)



a) – Ermitteln Sie eine Funktionsgleichung der Parabel. Wählen Sie einen anderen Ursprung des Koordinatensystems als in der Abbildung dargestellt.

b) – Berechnen Sie die Bogenlänge der oben dargestellten Parabel, die durch die Funktion $y(x) = \frac{1}{100} \cdot x^2 - 0{,}2 \cdot x + 16$ beschrieben wird.

Bogenlänge: $s = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx$

c) – Berechnen Sie den Abfall in Prozent, der bei der Herstellung des Drehteils anfällt, wenn der Rohling einen Durchmesser $d = 8{,}5$ dm hat und die Parabel durch die Funktion $y(x) = \frac{1}{100} \cdot x^2 - 0{,}2 \cdot x + 16$ beschrieben wird.

d) Gegeben sind folgende Funktionen:

$f(x) = \frac{1}{100} \cdot x^2 - 0{,}2 \cdot x + 16$ und $g(x) = -\frac{9}{490} \cdot x^2 + \frac{319}{490} \cdot x + \frac{2\,174}{49}$

Bei Rotation von Flächenstücken um die x-Achse entstehen Rotationskörper, deren Volumina durch folgende Formeln berechnet werden können:

$V_1 = \pi \cdot \int_{-20}^{50} (g(x) - f(x))^2 \, dx$

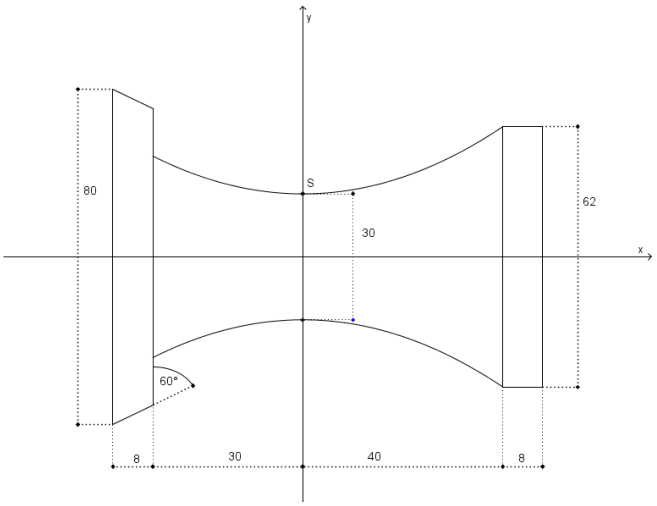
$V_2 = \pi \cdot \int_{-20}^{50} [(g(x))^2 - (f(x))^2] \, dx$

– Stellen Sie für jede der beiden Volumsformeln das rotierende Flächenstück grafisch dar.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Wahl des Ursprungs des Koordinatensystems – siehe Abbildung rechts



$S = (0|15)$, $h(x) = a \cdot x^2 + n$

$n = 15$
$P = (40|31)$
$31 = a \cdot 40^2 + 15 \Rightarrow a = \frac{1}{100}$

$h(x) = \frac{1}{100} \cdot x^2 + 15$

Mit einer anderen Wahl des Ursprungs des Koordinatensystems sind weitere Funktionsgleichungen der Parabel möglich.

b) $y(x) = \frac{1}{100} \cdot x^2 - 0{,}2 \cdot x + 16$; $y'(x) = \frac{1}{50} \cdot x - 0{,}2$
$s = \int_{-20}^{50} \sqrt{1 + y'^2} \approx 75{,}64$ cm

Die Bogenlänge der Parabel beträgt 75,64 cm.

c) Drehkegelstumpf:
$\tan 30 = \frac{r_1 - r_2}{8} \Rightarrow r_1 - r_2 = 4{,}618\ldots \approx 4{,}62$ cm
$V_{\text{Drehkegelstumpf}} = \frac{\pi \cdot h}{3} \cdot (r_1^2 + r_1 \cdot r_2 + r_2^2)$
$V_{\text{Drehkegelstumpf}} \approx 35{,}75$ dm^3

Drehzylinder:
$V_{\text{Drehzylinder}} = r^2 \cdot \pi \cdot h$
$V_{\text{Drehzylinder}} = 24\,152{,}56\ldots$ cm$^3 \approx 24{,}15$ dm^3

Parabel:
$y(x) = \frac{1}{100} \cdot x^2 - 0{,}2 \cdot x + 16$
$V_{\text{Parabel}} = \pi \cdot \int_{-20}^{50} (y(x))^2 \, dx$
$V_{\text{Parabel}} = \pi \cdot 27\,384 = 86\,029{,}37\ldots$ cm$^3 \approx 86{,}03$ dm^3

$V = V_{\text{Drehkegelstumpf}} + V_{\text{Drehzylinder}} + V_{\text{Parabel}} \approx 145{,}93$ dm^3

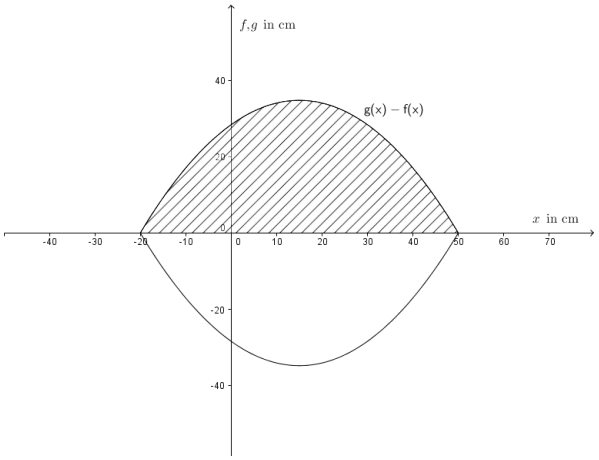
Rohling:
$V_{\text{Rohling}} = \frac{d^2 \cdot \pi}{4} \cdot h$
$V_{\text{Rohling}} = 488\,007{,}14\ldots$ cm$^3 \approx 488{,}01$ dm^3

Abfall in Prozent:
$1 - \frac{145{,}932}{488{,}01} = 0{,}7009 \approx 70{,}1\ \%$
Bei der Herstellung des Drehteils fallen 70,1 % Abfall an.

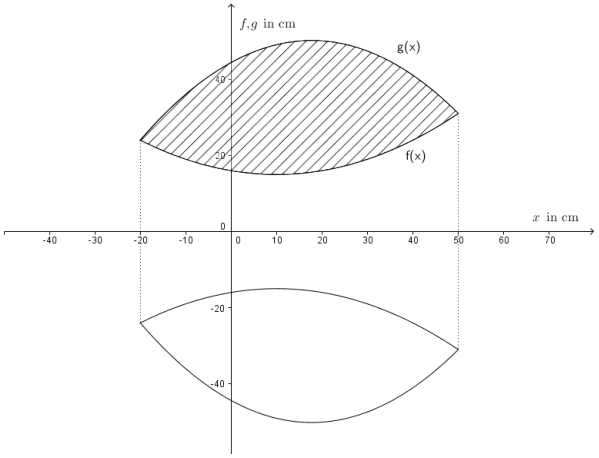
d) Die Volumsformeln ergeben die folgenden schraffierten Flächenstücke, die um die x-Achse rotieren:

$$f(x) = \frac{1}{100} \cdot x^2 - 0{,}2 \cdot x + 16 \quad \text{und} \quad g(x) = -\frac{9}{490} \cdot x^2 + \frac{319}{490} \cdot x + \frac{2\,174}{49}$$

$$V_1 = \pi \cdot \int_{-20}^{50} (g(x) - f(x))^2 \, dx$$



$$V_2 = \pi \cdot \int_{-20}^{50} [(g(x))^2 - (f(x))^2] \, dx$$



Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 4 Analysis
d) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) 4 Analysis
c) 1 Zahlen und Maße
d) 2 Algebra und Geometrie

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) —
c) A Modellieren und Transferieren
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel
d) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2
c) 4
d) 4

Thema: Maschinenbau

Quellen: —

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Ausstellung

Aufgabennummer: B_001

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

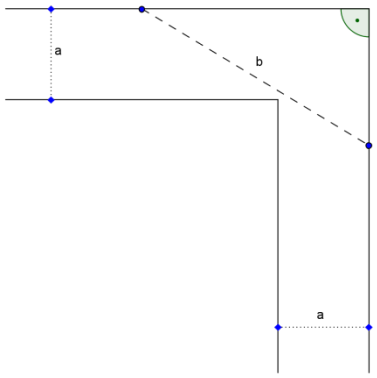
Für eine Ausstellung werden Bilder transportiert und an der Wand platziert.

a) In der Ausstellung werden *b* cm hohe Bilder so an der Wand platziert, dass sich der untere Rand *a* cm über der Augenhöhe *h* befindet. Die Besucher/innen werden auf einem parallel zur Wand verlaufenden Weg im Abstand *x* von der Wand an den Bildern vorbeigeführt.

α … Höhenwinkel zum oberen Rand der Bilder
β … Höhenwinkel zum unteren Rand der Bilder

– Erstellen Sie eine Skizze und beschriften Sie diese mit den angegebenen Größen.

b) Um ein Bild zum Aufstellungsort zu bringen, muss es auf Transportrollen durch einen Gang geschoben werden, der rechtwinkelig in einen gleich breiten Gang mündet. Das Bild muss um die Ecke transportiert werden und kann dabei nicht gekippt werden. Die Stärke der Bilder bleibt unberücksichtigt. (Siehe Abbildung rechts.)



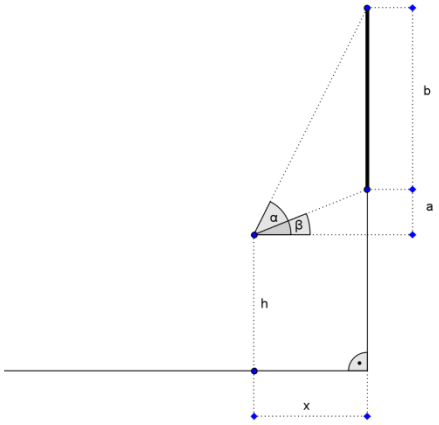
Bei konstanter Gangbreite *a* liegt der kritische Winkel bei $\alpha = 45°$. Hier zeigt sich, ob das Bild nicht zu lange ist. Bei diesem Winkel $\alpha = 45°$ befindet sich die maximal mögliche Bildlänge.

– Stellen Sie diejenige Funktion auf, die bei diesem Winkel die Abhängigkeit der maximalen Bildlänge *b* von der Gangbreite beschreibt.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

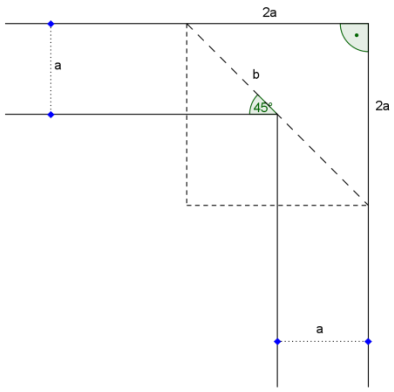
a)



b) Bei gleicher Gangbreite a ist die Diagonale eines Quadrats mit der Seite $2a$ die maximale Bildlänge und deshalb der Winkel $\alpha = 45°$.
Die Bildlänge b ergibt sich durch:

$$b(a) = \sqrt{(2 \cdot a)^2 + (2 \cdot a)^2}$$

$$b(a) = \sqrt{2} \cdot 2 \cdot a$$



Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) 3 Funktionale Zusammenhänge

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) –
b) D Argumentieren und Kommunizieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) schwer

Punkteanzahl:

a) 1
c) 2

Thema: Alltag

Quellen: –

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

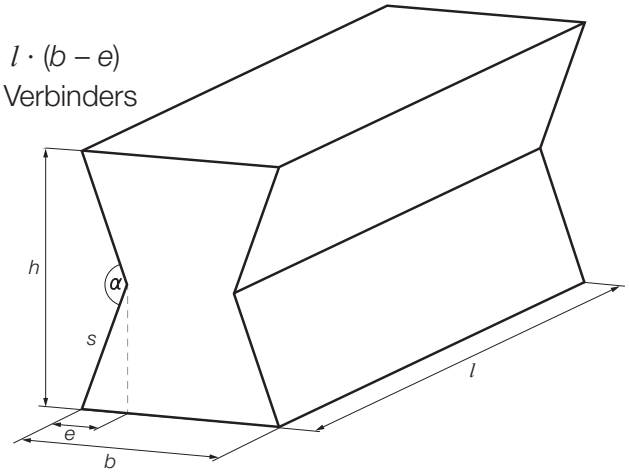
Verbinder

Aufgabennummer: B_274

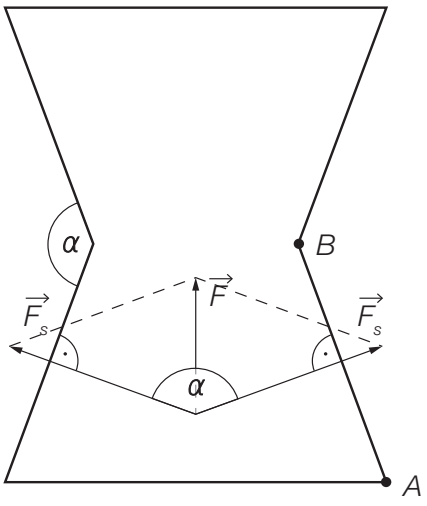
Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Symmetrische Verbinder in Doppelkeilform dienen zum sicheren und schnellen Verbinden zweier Holzteile.

a) – Zeigen Sie, wie man die Formel $V = h \cdot l \cdot (b - e)$ für die Berechnung des Volumens des Verbinders erhält.
– Berechnen Sie die Länge der Kante s für die Höhe $h = 7$ mm und den Winkel $\alpha = 140°$.



b) In der nebenstehenden Abbildung sind die Querschnittsfläche des Verbinders und auftretende Kräfte dargestellt.



– Stellen Sie eine Formel zur Berechnung des Betrags der Kraft $\vec{F}_s$ anhand des Kräfteparallelogramms in der nebenstehenden Abbildung in Abhängigkeit vom Winkel α und vom Betrag der Kraft $\vec{F}$ auf.

F_s = _____

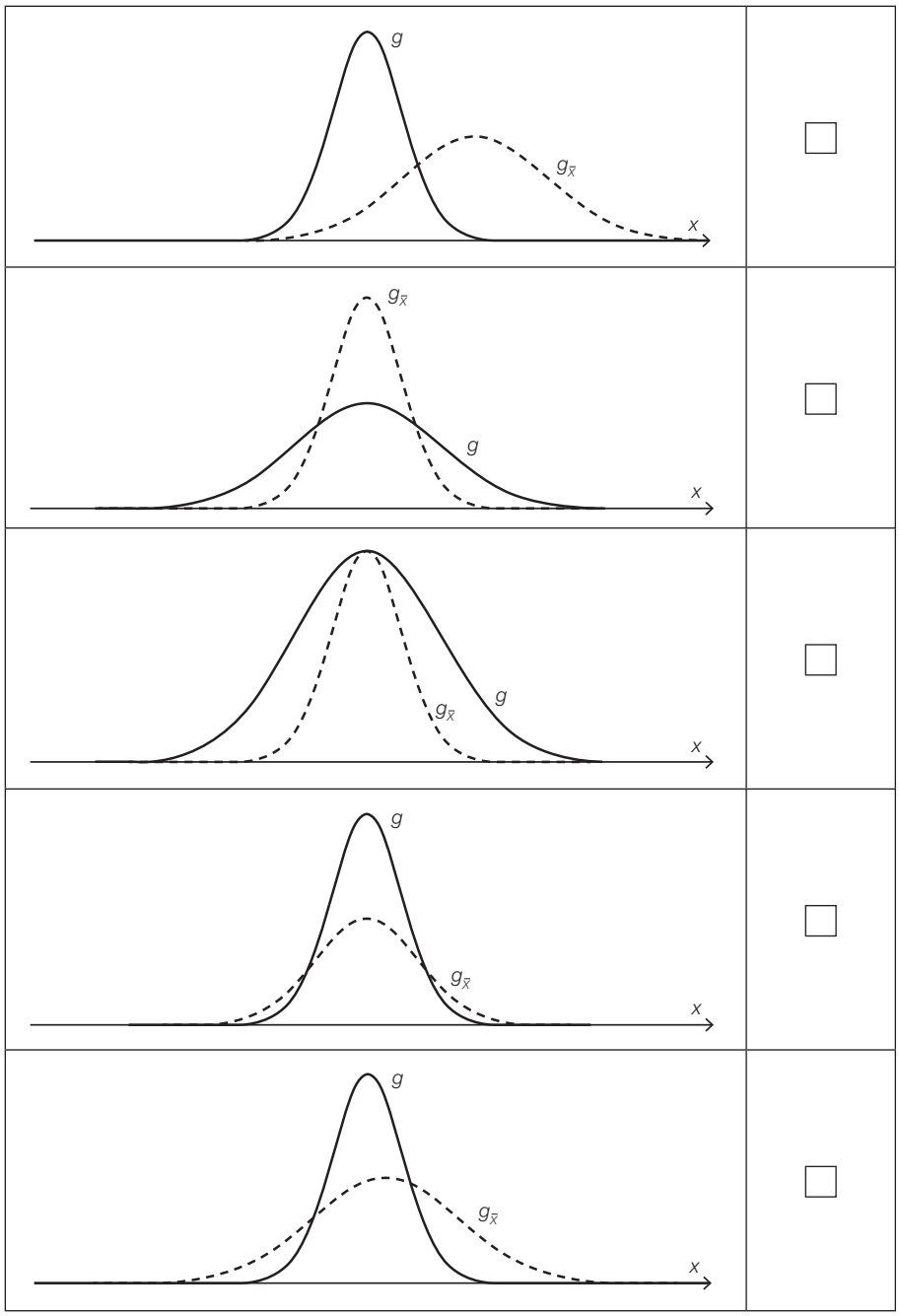
– Argumentieren Sie anhand dieser Formel, wie sich eine Verkleinerung des Winkel α auf F_s auswirkt.

c) Die Breiten der Verbinder eines bestimmten Herstellers sind normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 5{,}5$ mm und der Standardabweichung $\sigma = 0{,}5$ mm. Einer umfangreichen Lieferung solcher Verbinder werden Zufallsstichproben vom Umfang $n = 20$ entnommen und es werden die Stichprobenwerte ermittelt.

– Berechnen Sie den zum Erwartungswert symmetrischen Zufallsstreubereich, in dem erwartungsgemäß 95 % aller Stichprobenmittelwerte liegen.

d) Nachstehend sind der Graph der Dichtefunktion g einer normalverteilten Grundgesamtheit und der Graph der Dichtefunktion $g_{\bar{X}}$ der zugehörigen Verteilung der Stichprobenmittelwerte von Stichproben mit $n = 20$ dargestellt.

– Kreuzen Sie diejenige Grafik an, in der die beiden Funktionsgraphen zueinander passend dargestellt sind. *[1 aus 5]*



Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Die Querschnittsfläche des Verbinders ist ein Rechteck reduziert um zwei Dreiecke.

$$A = b \cdot h - 2 \cdot \frac{h \cdot e}{2}$$

$$V = \left(b \cdot h - 2 \cdot \frac{h \cdot e}{2}\right) \cdot l = b \cdot h \cdot l - h \cdot e \cdot l = h \cdot l \cdot (b - e)$$

Länge der Kante s:

$$s = \frac{h}{2 \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = 3{,}72\ldots$$

Die Länge der Kante s beträgt rund 3,7 mm.

b) $$F_S^2 = F^2 + F_S^2 - 2 \cdot F \cdot F_S \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

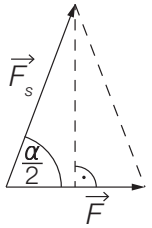
$$2 \cdot F \cdot F_S \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = F^2$$

$$F = 2 \cdot F_S \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{F}{2 \cdot F_S}$$

$$F_S = \frac{F}{2 \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

oder



$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\frac{F}{2}}{F_S}$$

$$F_S = \frac{F}{2 \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

Bei einem kleineren Winkel α wird F_S kleiner, da die Funktionswerte von $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ größer werden und der Quotient $\frac{F}{2 \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$ kleiner wird.

c) $\mu = 5{,}5$ mm

$$\sigma_{\overline{X}} = \frac{0{,}5}{\sqrt{20}}\ \text{mm}$$

Zweiseitigen 95-%-Zufallsstreubereich mithilfe der Normalverteilung bestimmen:

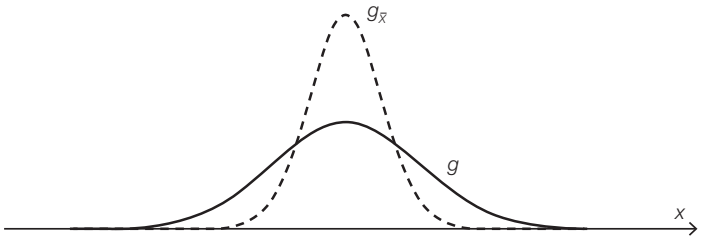
$$\mu \pm u_{0{,}975} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$5{,}5 \pm 1{,}959\ldots \cdot \frac{0{,}5}{\sqrt{20}}$$

$$5{,}2808\ldots \leq \overline{X} \leq 5{,}7191\ldots$$

Der Mittelwert einer zufällig ausgewählten Stichprobe liegt mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % im Bereich von 5,28 mm bis 5,72 mm.

d)

[…]	
	☒
[…]	
[…]	
[…]	

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 5 Stochastik
d) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) A Modellieren und Transferieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) A Modellieren und Transferieren
d) —

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) mittel
d) mittel

Punkteanzahl:

a) 3
b) 2
c) 2
d) 1

Thema: Sonstiges

Quellen: —

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Flugverkehr

Aufgabennummer: A_172

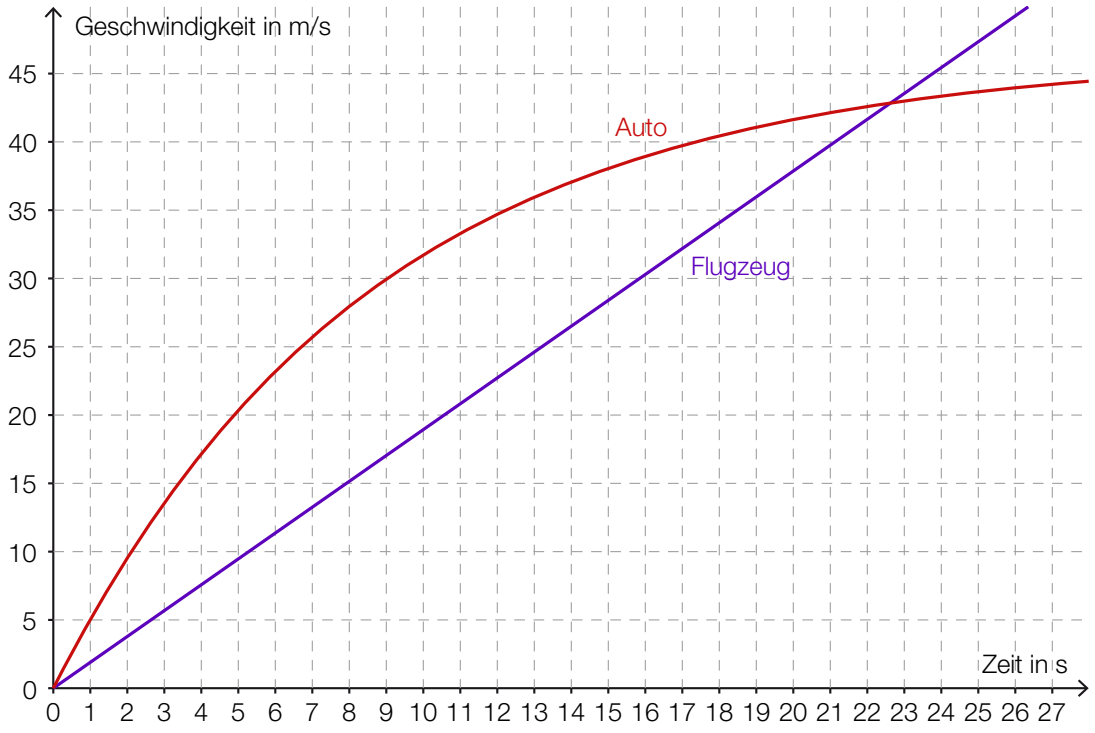
Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Der Flugverkehr gilt als zeitsparende, relativ komfortable und verlässliche Möglichkeit längere Strecken zu bewältigen.

a) 1 kg Kerosin liefert etwa 40 Megajoule (MJ) an Energie.
Im Vergleich liefert 1 t Rapskörner durchschnittlich 24,48 Gigajoule (GJ) an Energie.

– Berechnen Sie, wie viel Kilogramm Rapskörner notwendig sind, um die Energie von 1 kg Kerosin zu liefern.

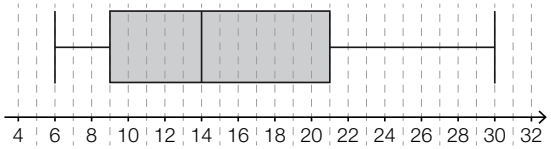
b) Aus der Darstellung der Geschwindigkeit eines Autos und eines Flugzeugs in der nachstehenden Grafik erkennt man die abnehmende Beschleunigung des Autos und die gleichbleibende Beschleunigung des Flugzeugs ab dem Start.



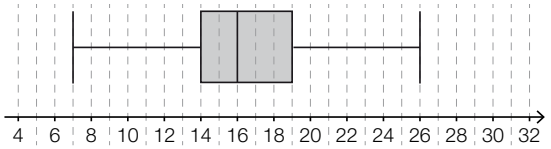
– Stellen Sie die momentane Beschleunigung des Autos nach 3 Sekunden in dieser Abbildung grafisch dar.
– Argumentieren Sie, in welchem Zeitintervall ab dem Start die durchschnittliche Beschleunigung des Autos gleich der Beschleunigung des Flugzeugs ist.

c) Auf zwei Linienflugstrecken wurde die Anzahl der Vegetarier/innen unter den Fluggästen erhoben. Die Ergebnisse sind in den nachstehenden Boxplots dargestellt.

– Ordnen Sie den beiden Boxplots jeweils diejenige Aussage aus A bis D zu, die daraus mit Sicherheit abgelesen werden kann. *[2 aus 4]*



Anzahl der Vegetarier/innen pro Flug auf Flugstrecke 1



Anzahl der Vegetarier/innen pro Flug auf Flugstrecke 2

A	Auf drei Viertel der Flüge waren genau 14 Vegetarier/innen.
B	Auf mindestens der Hälfte der Flüge waren höchstens 14 Vegetarier/innen.
C	Auf der Hälfte der Flüge waren genau 14 Vegetarier/innen.
D	Auf mindestens drei Viertel der Flüge waren mindestens 14 Vegetarier/innen.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

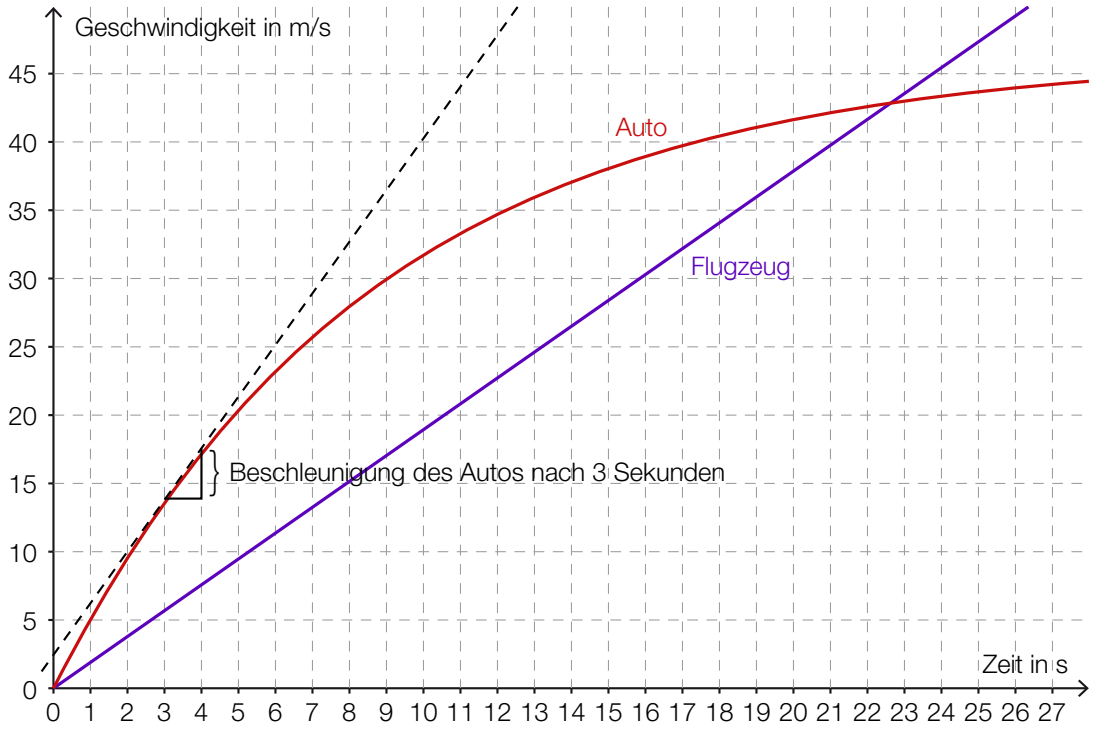
Möglicher Lösungsweg

a) 1 t Rapskörner liefert etwa 24,48 GJ ⇒ 1 kg Rapskörner liefert etwa 0,02448 GJ.
0,02448 GJ = 24,48 MJ

$\frac{40}{24{,}48} = 1{,}63398\ldots$

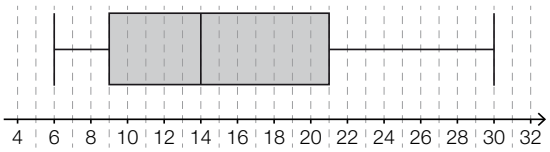
Man benötigt ungefähr 1,6 kg Rapskörner.

b)



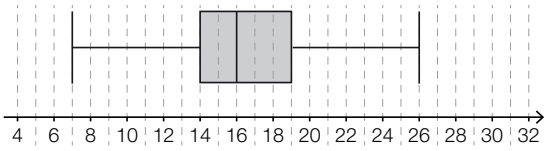
Im Intervall von 0 s bis ca. 22,5 s ist die durchschnittliche Beschleunigung des Autos gleich der konstanten Beschleunigung des Flugzeugs.
Begründung: In diesem Intervall hat die Sekante des Geschwindigkeit-Zeit-Diagramms des Autos dieselbe Steigung wie die Geschwindigkeit-Zeit-Funktion des Flugzeugs (die Sekante und der lineare Graph fallen sogar zusammen).

c)



Anzahl der Vegetarier/innen pro Flug auf Flugstrecke 1

B



Anzahl der Vegetarier/innen pro Flug auf Flugstrecke 2

D

A	Auf drei Viertel der Flüge waren genau 14 Vegetarier/innen.
B	Auf mindestens der Hälfte der Flüge waren höchstens 14 Vegetarier/innen.
C	Auf der Hälfte der Flüge waren genau 14 Vegetarier/innen.
D	Auf mindestens drei Viertel der Flüge waren mindestens 14 Vegetarier/innen.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 1 Zahlen und Maße
b) 4 Analysis
c) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) —

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 1
b) 2
c) 1

Thema: Sonstiges

Quellen: http://www.agrarplus.at/heizwerte-aequivalente.html

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Erdbebenstärke

Aufgabennummer: A_182

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Die Stärke eines Erdbebens wird oft mithilfe der „Richter-Skala“ in sogenannten „Magnituden“ M angegeben.
Aus messtechnischen Gründen ist die Richter-Skala nach oben hin mit 6,5 Magnituden begrenzt. Ab ungefähr einer Magnitude von 3 ist ein Beben spürbar.
Die Funktion W beschreibt den Zusammenhang zwischen der Energie eines Erdbebens und dessen Magnitude M:

$W(M) = 10^{1{,}5 \cdot M - 3}$

M … Magnitude
$W(M)$ … äquivalente Energie bei Magnitude M des Sprengstoffs TNT in Tonnen

a) Bei bekannter Energie W ist die Magnitude M zu berechnen.

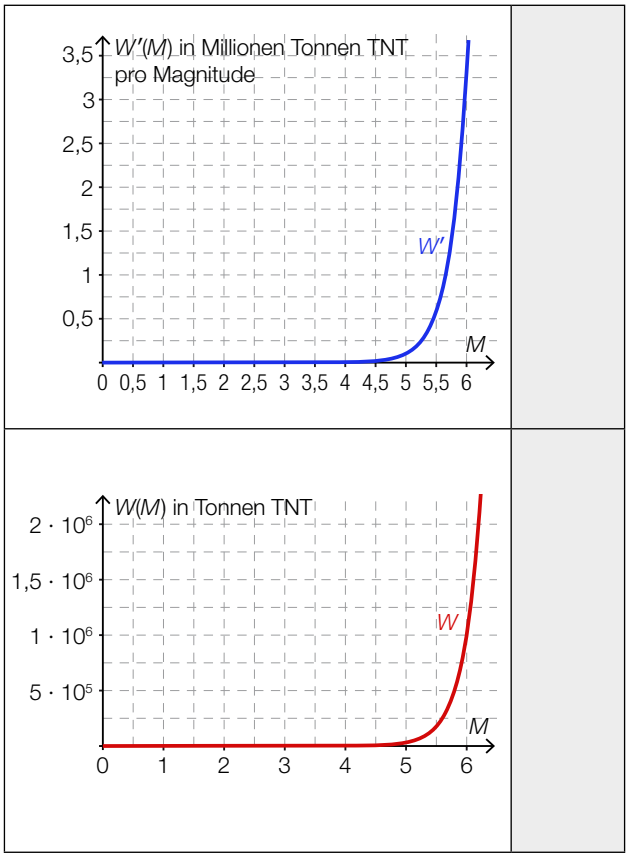
– Berechnen Sie, welcher Magnitude M die Energie einer Bombe mit 13 000 Tonnen TNT entspricht.

b) In der nachstehenden Tabelle sind die Häufigkeiten von Erdbeben bestimmter Magnitudenbereiche weltweit pro Jahr angegeben.

Magnitude	[3; 4[	[4; 5[	[5; 6,5[
geschätzte Häufigkeit des Auftretens pro Jahr weltweit	49 000	6 200	800

– Veranschaulichen Sie die relativen Häufigkeiten der Erdbeben der verschiedenen Magnitudenbereiche durch ein Säulendiagramm.
– Erklären Sie, warum der Median der Magnituden der in der Tabelle festgehaltenen Erdbeben nicht 4 sein kann.

c) – Ordnen Sie den Grafiken jeweils die richtige Aussage aus A bis D zu. *[2 aus 4]*



A	Die lokale Änderungsrate der Energie bei $M = 6$ beträgt ungefähr 10^6 Tonnen TNT pro Magnitude.
B	Die mittlere Änderungsrate der Energie zwischen $M = 5{,}5$ und $M = 6$ beträgt 5,6 Millionen Tonnen TNT pro Magnitude.
C	Die mittlere Änderungsrate der Energie zwischen $M = 5{,}5$ und $M = 6$ beträgt $1{,}6 \cdot 10^6$ Tonnen TNT pro Magnitude.
D	Die lokale Änderungsrate der Energie ist bei $M = 6$ ungefähr 14-mal so groß wie bei $M = 5{,}25$.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

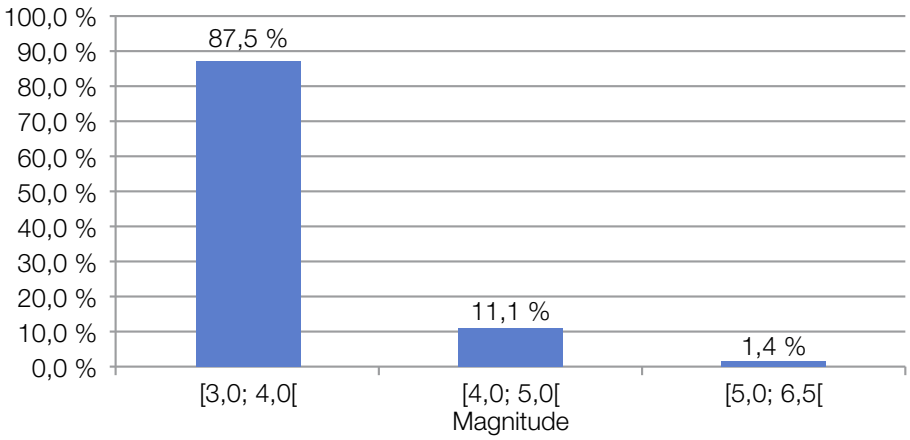
a) $13\,000 = 10^{1{,}5 \cdot M - 3}$

$\log_{10}(13\,000) = (1{,}5 \cdot M - 3) \cdot \log_{10}(10)$

$M = \dfrac{\log_{10}(13\,000) + 3}{1{,}5} = 4{,}74\ldots$

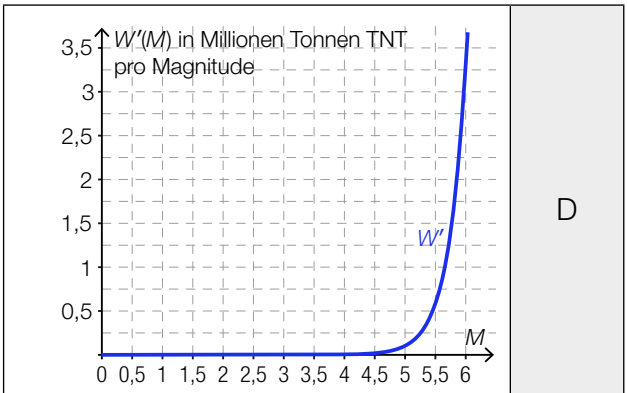
Die Energie der Bombe entspricht ungefähr einer Magnitude von 4,7.

b)

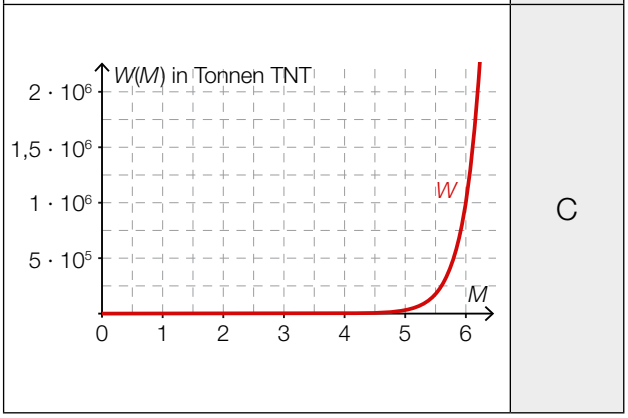


Der Median kann nicht 4 sein, da weniger als 50 % der Erdbeben eine Magnitude von 4 oder höher haben.

c)



D



C

A	Die lokale Änderungsrate der Energie bei $M = 6$ beträgt ungefähr 10^6 Tonnen TNT pro Magnitude.
B	Die mittlere Änderungsrate der Energie zwischen $M = 5{,}5$ und $M = 6$ beträgt 5,6 Millionen Tonnen TNT pro Magnitude.
C	Die mittlere Änderungsrate der Energie zwischen $M = 5{,}5$ und $M = 6$ beträgt $1{,}6 \cdot 10^6$ Tonnen TNT pro Magnitude.
D	Die lokale Änderungsrate der Energie ist bei $M = 6$ ungefähr 14-mal so groß wie bei $M = 5{,}25$.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 5 Stochastik
c) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) A Modellieren und Transferieren
c) —

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 1
b) 2
c) 1

Thema: Sonstiges

Quellen: http://de.wikipedia.org/wiki/Richterskala
http://de.wikipedia.org/wiki/Momenten-Magnituden-Skala

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Werbedruck

Aufgabennummer: A_173

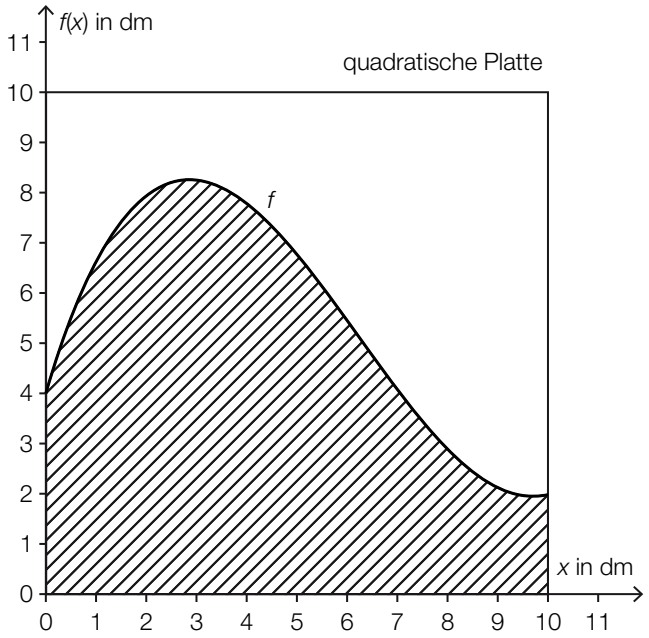
Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Eine Großbank erteilt einer Druckerei den Auftrag, ihre Bankenlogos anzufertigen.

a) Das Logo wird auf quadratische Platten gedruckt. Die Begrenzungslinie des Logos wird durch die Funktion f beschrieben.

$$f(x) = \frac{1}{25} \cdot x^3 - \frac{3}{4} \cdot x^2 + \frac{33}{10} \cdot x + 4$$

x, $f(x)$ ... Koordinaten in dm



– Berechnen Sie den Flächeninhalt der schraffierten Fläche.

b) Für die Druckerei fallen bei der Produktion des Bankenlogos folgende Kosten an:

produzierte Stückzahl x	0	10	20
Gesamtkosten K in Euro	500	600	640

Die Kosten werden mit einer quadratischen Funktion modelliert:

$K(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

x … produzierte Stückzahl
$K(x)$ … Gesamtkosten für x Stück in Euro

– Stellen Sie mithilfe der Informationen aus der gegebenen Tabelle ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten a, b und c auf.

Ersetzen Sie in der Tabelle den Betrag von 600 Euro durch 570 Euro.

– Argumentieren Sie mithilfe des Differenzenquotienten, warum nun ein lineares Modell zur Beschreibung geeignet ist.

c) Für jedes produzierte Stück beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass es unbrauchbar ist, 3 %. Täglich werden 80 Stück unabhängig voneinander hergestellt.

– Beschreiben Sie, welche Wahrscheinlichkeit mit dem Ausdruck $1 - 0{,}97^{80}$ berechnet wird.

d) Die Druckerei bietet zwei qualitativ unterschiedliche Drucktechniken A und B an.
Der Verbrauch an Druckfarbe pro Farbpunkt wird wie folgt angegeben:
Drucktechnik A: $8 \cdot 10^{-9}$ Liter
Drucktechnik B: 0,000000012 Liter

– Geben Sie diese beiden Verbrauchswerte in Nanolitern an.
– Berechnen Sie, wie viel Prozent Druckfarbe durch die sparsamere Drucktechnik gespart werden kann.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $A = \int_0^{10} \left(\frac{1}{25} \cdot x^3 - \frac{3}{4} \cdot x^2 + \frac{33}{10} \cdot x + 4 \right) \mathrm{d}x = 55 \text{ dm}^2$

b) $K(0) = 500 \Rightarrow 500 = c$
$K(10) = 600 \Rightarrow 600 = 100 \cdot a + 10 \cdot b + c$
$K(20) = 640 \Rightarrow 640 = 400 \cdot a + 20 \cdot b + c$

Differenzenquotient im Intervall [0; 10]:
$\frac{570 - 500}{10 - 0} = \frac{70}{10} = 7$

Differenzenquotient im Intervall [10; 20]:
$\frac{640 - 570}{20 - 10} = \frac{70}{10} = 7$

Alternative Argumentation in Worten:
Wenn die Produktion jeweils um 10 Stück steigt, steigen die Kosten jeweils um 70 Euro, bzw. konstanter Differenzenquotient 7.

c) Es wird die Wahrscheinlichkeit berechnet, dass mindestens 1 Stück einer Tagesproduktion unbrauchbar ist.

d) Drucktechnik *A*: 8 Nanoliter
Drucktechnik *B*: 12 Nanoliter

$\frac{8 - 12}{12} = -0{,}333...$

Es können rund 33 % Druckerfarbe gespart werden.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 5 Stochastik
d) 1 Zahlen und Maße

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) A Modellieren und Transferieren
c) C Interpretieren und Dokumentieren
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) —
d) —

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) mittel
d) leicht

Punkteanzahl:

a) 1
b) 2
c) 1
d) 2

Thema: Wirtschaft

Quellen: —

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Temperaturumrechnung

Aufgabennummer: A_198

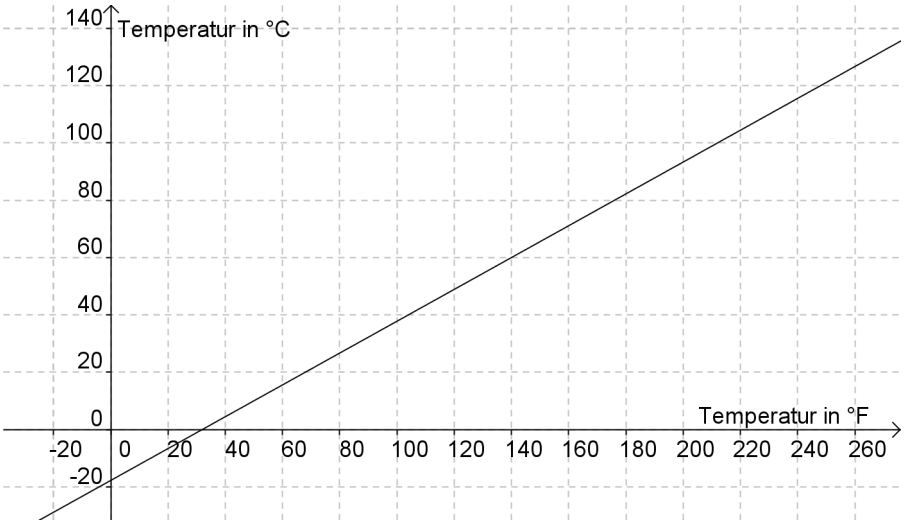
Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Zur Temperaturmessung werden verschiedene Temperaturskalen verwendet. Zwei gängige Temperaturskalen sind die Celsius-Skala und die Fahrenheit-Skala.

a) Eine Rechenvorschrift für die Umrechnung der Temperatur in °C (Celsius) in eine Temperaturangabe in °F (Fahrenheit) lässt sich so formulieren:
„Erhöhen Sie die Temperaturangabe um 40, multiplizieren Sie das erhaltene Ergebnis mit 1,8 und vermindern Sie das Ergebnis um 40."

– Stellen Sie eine Formel auf, die dieser beschriebenen Umrechnung der Temperaturangabe von °C in °F entspricht.

b) Folgender Funktionsgraph zeigt den Zusammenhang zwischen der Temperatur in °F und der Temperatur in °C:



Eine Formel für diese Temperaturangabenumrechnung lautet $C = \frac{F - 32}{1{,}8}$.

C ... Temperatur in °C
F ... Temperatur in °F

– Weisen Sie nach, dass die obige Abbildung eine grafische Darstellung der angegebenen Formel ist.

c) Für Ihre weiteren Berechnungen verwenden Sie die Formel $F = \frac{9}{5} \cdot C + 32$.

C ... Temperatur in °C
F ... Temperatur in °F

– Berechnen Sie denjenigen Zahlenwert, für den die Temperaturangabe in °C (*C*) und die Temperaturangabe in °F (*F*) den gleichen Wert haben.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Variablenbenennungen: C ... Temperatur in °C, F ... Temperatur in °F

$F = (C + 40) \cdot 1{,}8 - 40$

Andere Bezeichungen für die Variablen sind zulässig.

b) Aus der Formel werden zwei Wertepaare für $(C|F)$ berechnet und es wird gezeigt, dass diese zwei Punkte auf der Geraden liegen.

oder

Auf der Geraden werden zwei Punkte ausgewählt und die Wertepaare $(C|F)$ werden in die Gleichung eingesetzt und die Gleichheit wird verifiziert.

c) Gesucht ist die Temperatur, für die $F = C$ gilt, also die Lösung der Gleichung $F = \frac{9}{5} \cdot F + 32$: $F = -40$.

Die gleiche Temperaturangabe gilt für $F = -40$ °F und $C = -40$ °C.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Beziehung $F = (C + 40) \cdot 1{,}8 - 40$ oder äquivalenter Ausdrücke

b) 1 × D: für einen Nachweis

c) 1 × A: für den Ansatz $F = C$
1 × B: für die richtige Lösung

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

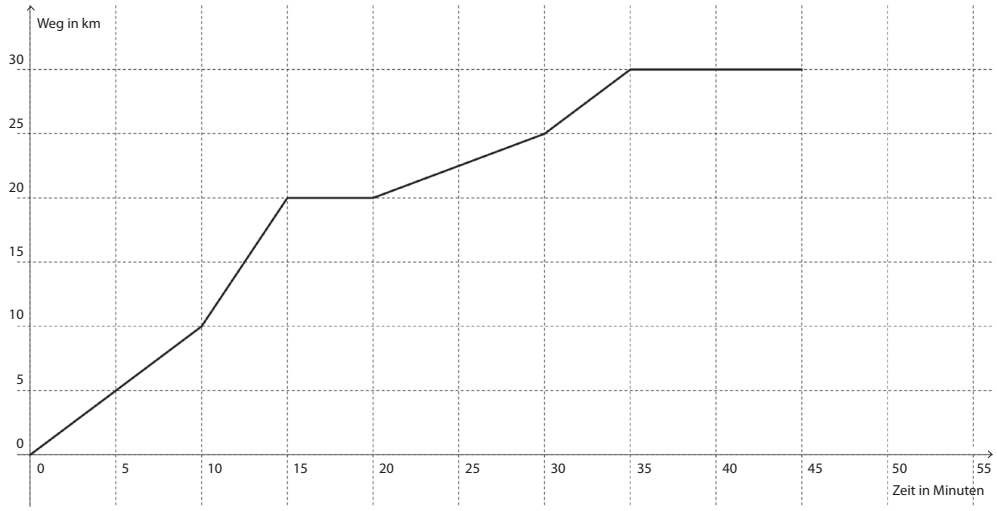
Autofahrt (2)

Aufgabennummer: A_200

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Frau Maier ist beruflich sehr viel mit dem Auto unterwegs und benutzt ihren Bordcomputer, um zurückgelegte Strecken, die mittlere Geschwindigkeit und den mittleren Kraftstoffverbrauch zu ermitteln.

a) Im Folgenden sehen Sie ein Weg-Zeit-Diagramm, das näherungsweise Frau Maiers Fahrverhalten an einem ihrer Arbeitstage beschreibt:



– Bestimmen Sie, in welchem Zeitintervall Frau Maier mit einer konstanten Geschwindigkeit von 30 km/h unterwegs ist.

b) Frau Maiers Bordcomputer kann die seit Fahrtbeginn verbrauchte Benzinmenge anzeigen. Intern berechnet der Computer für eine der Fahrten von Frau Maier die verbrauchte Benzinmenge in Abhängigkeit vom bisher zurückgelegten Weg mithilfe folgender Funktion:

$$f(x) = 0{,}0000006x^3 + 0{,}0002x^2 + 0{,}08x$$

x ... Strecke in Kilometern (km), die seit Fahrtbeginn zurückgelegt wurde
$f(x)$ ... verbrauchte Benzinmenge in Litern (L) nach x zurückgelegten Kilometern

– Stellen Sie eine Formel auf, mit der man den mittleren Benzinverbrauch pro Kilometer für ein beliebiges Wegintervall $[x_1; x_2]$ berechnen kann.
– Berechnen Sie den mittleren Benzinverbrauch pro Kilometer im Wegintervall [50 km; 100 km].

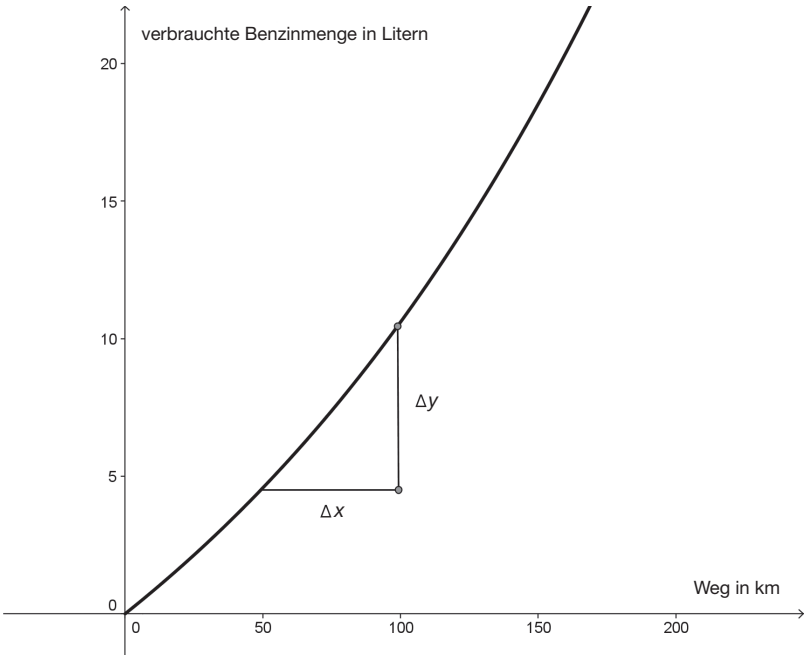
c) Die seit Fahrtbeginn verbrauchte Benzinmenge wird näherungsweise durch folgende Funktion beschrieben:

$$f(x) = 0{,}0000006x^3 + 0{,}0002x^2 + 0{,}08x$$

x ... Strecke in km, die seit Fahrtbeginn zurückgelegt wurde
$f(x)$ ... die seit Fahrtbeginn verbrauchte Benzinmenge in Litern nach x zurückgelegten Kilometern

– Geben Sie an, mit welcher Rechenoperation man den momentanen Benzinverbrauch bei x Kilometern berechnen kann.
– Berechnen Sie den momentanen Benzinverbrauch bei 50 Kilometern in Litern pro Kilometer (L/km).

d) – Erklären Sie anhand der unten stehenden Grafik, welche Größe man mithilfe des Steigungsdreiecks berechnet.
– Erläutern Sie, welche Größe man erhält, wenn Δx gegen null geht.



Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Es handelt sich um das Zeitintervall von 20 min bis 30 min.

Ein möglicher Lösungsweg wäre:

$$\text{Geschwindigkeit} = \frac{\text{zurückgelegter Weg}}{\text{vergangene Zeit}}$$

Für das Intervall von 20 min bis 30 min ergibt dies $\frac{5}{10}$ km/min = 30 km/h.

b) Formel:
Für ein allgemeines Intervall $[x_1; x_2]$ gilt:

$$\text{mittlerer Benzinverbrauch} = \frac{\text{verbrauchte Benzinmenge}}{\text{zurückgelegte km}} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$\text{mittlerer Benzinverbrauch} = \frac{\text{verbrauchte Benzinmenge}}{\text{zurückgelegte km}} = \frac{f(100) - f(50)}{100 - 50}$$

$f(100) = 10{,}6$
$f(50) = 4{,}575$

$$\text{mittlerer Benzinverbrauch} = \frac{f(100) - f(50)}{100 - 50} = \frac{10{,}6 - 4{,}575}{100 - 50} = 0{,}1205$$

Frau Maier hat im angegebenen Wegintervall durchschnittlich 0,1205 L Benzin pro km gebraucht.

c) Man berechnet den momentanen Benzinverbrauch bei x km durch $f'(x)$.

Der momentane Benzinverbrauch bei Kilometer 50 ist die Ableitung $f'(50)$.

$f'(x) = 0{,}0000018x^2 + 0{,}0004x + 0{,}08$
$f'(50) = 0{,}1045$

Der momentane Benzinverbrauch bei Kilometer 50 beträgt also 0,1045 L/km.

d) Mithilfe des Steigungsdreiecks berechnet man den mittleren Benzinverbrauch im Intervall [50 km; 100 km] (Differenzenquotient).

Wenn Δx gegen null geht, erhält man den momentanen Benzinverbrauch für $x = 50$ km (Differenzialquotient).

Lösungsschlüssel

a) 1 × C: für die richtige Angabe des Zeitintervalls

b) 1 × A: für die Aufstellung des richtigen Modells (Differenzenquotient)
1 × B: für die richtige Berechnung des durchschnittlichen Benzinverbrauchs

c) 1 × A: für die korrekte Beschreibung des momentanen Benzinverbrauchs durch die 1. Ableitung an der Stelle x
1 × B: für die richtige Berechnung des momentanen Benzinverbrauchs bei Kilometer 50

d) 1 × D: für die richtige Erklärung
1 × D: für die richtige Erklärung

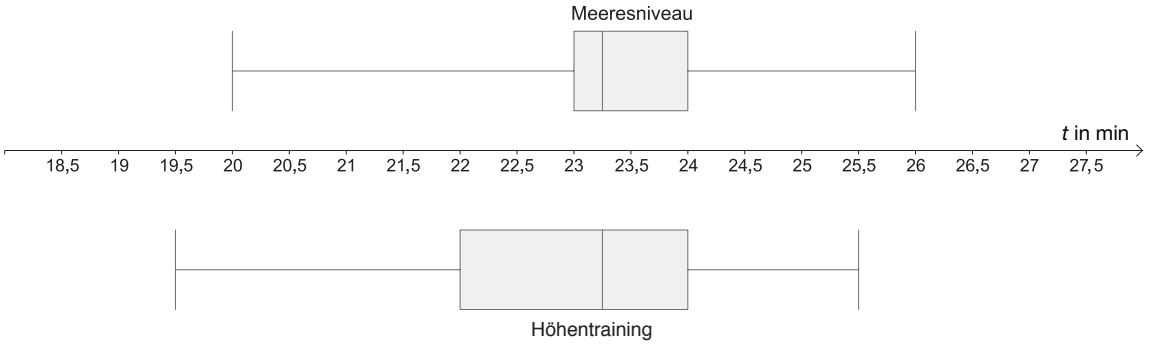
Höhentraining

Aufgabennummer: A_202

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Eine Nachwuchsfußballmannschaft führte ein Experiment durch, bei dem die eine Hälfte der Mannschaft ein Trainingslager auf Meeresniveau und die andere Hälfte der Mannschaft ein Höhentrainingslager absolvierte.

a) Nach der Rückkehr vom Trainingslager mussten beide Gruppen mehrere Tests absolvieren. Bei einem Querfeldeinlauf wurden die Zeiten verglichen und statistisch ausgewertet:



– Vergleichen Sie die beiden Boxplots in Bezug auf die Zeit des schnellsten Läufers und die Spannweite.

Leo behauptet: „Etwa 50 % der Teilnehmer des Trainings auf Meeresniveau hatten eine kürzere Laufzeit als 23 Minuten."

– Überprüfen Sie anhand des passenden Boxplots, ob diese Aussage richtig ist.

b) Der Median und der arithmetische Mittelwert sind statistische Kenngrößen.

– Erklären Sie allgemein den Unterschied zwischen dem Median und dem arithmetischen Mittelwert. (Gehen Sie dabei auf die Art der Berechnung und auf den Einfluss von Ausreißerwerten ein.)

c) Bei einem 100-m-Lauf waren die Ergebnisse annähernd normalverteilt. Der Erwartungswert lag bei 11,9 Sekunden mit einer Standardabweichung von 0,3 Sekunden.

– Ermitteln Sie diejenige Zeit, die man höchstens laufen durfte, um zu den besten 10 % der Gruppe zu gehören.

d) Um die Treffsicherheit unter Belastung zu testen, musste ein Ball nach Überwindung einiger Hindernisse in einer Torwand versenkt werden. Einer der besten Spieler der Mannschaft erzielte bei diesem Test eine Treffsicherheit von 70 %.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass dieser Spieler bei 10 Versuchen mindestens 8-mal den Ball in der Torwand versenken kann.
– Geben Sie die für diese Problemstellung passende Wahrscheinlichkeitsverteilung an.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) – Gruppe *Meeresniveau*:
Die schnellste Zeit betrug 20 Minuten, die langsamste Zeit 26 Minuten. Somit ist die Spannweite 6 Minuten.
Gruppe *Höhentraining*:
Die schnellste Zeit betrug 19,5 Minuten, die langsamste Zeit 25,5 Minuten. Somit ist die Spannweite 6 Minuten.

– Die Aussage von Leo ist nicht richtig. Bei einer Laufzeit von 23 Minuten liegt das untere Quartil. Daher haben nur etwa 25 % der Teilnehmer des Camps auf Meeresniveau eine kürzere Laufzeit als 23 Minuten.

b) Unterschied *arithmetischer Mittelwert – Median*:

– *Arithmetischer Mittelwert:* Hier werden alle Werte addiert und das Ergebnis wird durch die Anzahl der Werte dividiert. Daher fallen hier Ausreißer ins Gewicht.
– *Median:* Der Median einer Anzahl von Werten ist die Zahl, die an der mittleren Stelle steht, wenn man die Werte nach Größe sortiert. Die Werte auf beiden Seiten des Medians werden sonst nicht berücksichtigt. Der Median reagiert daher nicht auf Ausreißer.

c) $\mu = 11{,}9 \qquad \sigma = 0{,}3$

$P(X \leq u) = 0{,}1$

$\Phi\left(\frac{u-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}1$

$\Phi\left(\frac{\mu-u}{\sigma}\right) = 0{,}9$

$u = \mu - 1{,}2816 \cdot \sigma = 11{,}51$

Man darf höchstens 11,51 s laufen, um zu den besten 10 % der Gruppe zu gehören.

d) Wahrscheinlichkeit für einen Treffer: $p = 0{,}7$
Wahrscheinlichkeit für keinen Treffer: $q = 0{,}3$

X ... Anzahl der Treffer

„Mindestens 8 Mal treffen“ bedeutet entweder 8 Treffer oder 9 Treffer oder 10 Treffer.

$P(X = 8) = 0{,}7^8 \cdot 0{,}3^2 \cdot \binom{10}{8} = 0{,}2335$

$P(X = 9) = 0{,}7^9 \cdot 0{,}3 \cdot \binom{10}{9} = 0{,}1211$

$P(X = 10) = 0{,}7^{10} = 0{,}0282$

$P(X \geq 8) = P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) = 0{,}2335 + 0{,}1211 + 0{,}0282 = 0{,}3828$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt 38,28 %.

Die Binomialverteilung ist das richtige Modell.

Lösungsschlüssel

a) 1 × C: für das richtige Ablesen der Spannweiten und der schnellsten Zeit
1 × D: für die richtige Erklärung, dass Leos Aussage falsch ist

b) 1 × C: für die richtige Beschreibung der Berechnungsart
1 × D: für die richtige Erklärung des Einflusses von Ausreißern

c) 1 × B: für die richtige Berechnung der gesuchten Zeit

d) 1 × A: für das Erkennen bzw. Nennen des richtigen Modells
1 × B: für die Berechnung der richtigen Wahrscheinlichkeit

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Baikalsee

Aufgabennummer: A_201

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Der Baikalsee stellte bis 1996 (Ernennung zum Weltnaturerbe) mit 20 % der gesamten Süßwasservorräte der Erde unser größtes Süßwasserreservoir dar. Die Fläche des Sees betrug zu dieser Zeit ca. das 44-Fache der Fläche des Bodensees.
Durch Kraftwerke und die Entnahme von Wasser aus manchen Zuflüssen verringerte sich seither der Inhalt des Baikalsees um ca. 25 %, der nunmehrige Inhalt V beträgt ca. 18 400 km^3.

a) – Berechnen Sie die gesamten Süßwasservorräte V_g der Erde im Jahr 1996.
– Stellen Sie das Ergebnis in km^3 in der Gleitkommadarstellung der Form $a \cdot 10^k$ mit $1 \leq a < 10$ und $k \in \mathbb{Z}$ dar.

b) – Stellen Sie eine Formel auf, mit der man die Fläche $F_{Bodensee}$ im Jahr 1996 mithilfe der damaligen Fläche $F_{Baikalsee}$ berechnen kann.

$F_{Bodensee}$ = _____

c) Sie lesen in einer Zeitung die folgende Aussage:
Mit dem Süßwasser des Baikalsees (V = 18 400 km^3) können 7 Milliarden Menschen 50 Jahre lang mit Wasser versorgt werden. Man geht davon aus, dass jeder Mensch täglich 150 Liter (L) Wasser benötigt.

– Beurteilen Sie den Wahrheitsgehalt dieser Aussage unter Zuhilfenahme einer Rechnung.

d) Modelliert man die Erde als Kugel mit dem Radius R, so hat sie folgendes Volumen:

$$V_E = \frac{4 \cdot R^3 \cdot \pi}{3}$$

Verteilt man das gesamte Wasservolumen V des Baikalsees gleichmäßig über diese Kugel, so vergrößert sich der Radius der Kugel um h.

– Stellen Sie eine Formel zur Berechnung von h in Abhängigkeit von R, V und V_E auf.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) 18 400 km^3 entspricht 75 % der ursprünglichen Süßwassermenge des Baikalsees.
18 400 km^3 : 0,75 = 24 533,33 km^3
Daher hatte der Baikalsee ursprünglich 24 533,33 km^3 Süßwasser.
20 % = $\frac{1}{5}$ der gesamten Süßwasservorräte,
auf der Erde betrugen die Süßwasservorräte V_g = 122 666,67 km^3.

Die gesamten Süßwasservorräte der Erde machen ungefähr 1,23 · 10^5 km^3 aus.

b) $F_{Bodensee} = \frac{1}{44} \cdot F_{Baikalsee}$

c) 7 · 10^9 · 150 · 365 · 50 L = 1,91625 · 10^{16} L
1 km^3 = 1 · 10^{12} L
1,91625 · 10^{16} : 10^{12} = 19 162,5

Die gesamte Menschheit verbräuchte demnach 19 162,5 km^3 Süßwasser, daher stimmt diese Behauptung nicht.

d) Es geht um die Differenz zwischen dem Volumen einer vergrößerten Kugel V_g mit $R_g = R + h$ und dem Volumen der Erde V_E mit dem Radius R.

$V_g = V_E + V$

$\frac{4}{3} \cdot R_g^3 \cdot \pi = V_E + V$

$R_g^3 = \frac{3 \cdot (V_E + V)}{4 \cdot \pi}$

$R_g = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot (V_E + V)}{4 \cdot \pi}}$

$h = R_g - R$

$h = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot (V_E + V)}{4 \cdot \pi}} - R$

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für die richtige Berechung der gesamten Süßwasservorräte
1 × B: für die richtige Angabe in Gleitkommadarstellung

b) 1 × A: für die richtige Formel

c) 1 × B: für die richtige Berechnung des Wasserverbrauchs
1 × D: für die richtige Begründung

d) 1 × A: für die Erkenntnis, dass es um die Differenz zweier Kugelvolumina geht (oder anderer richtiger Lösungsansatz)
1 × B: für die richtige Formel

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Koffein

Aufgabennummer: A_199

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Die Abbaurate von Koffein kann von Person zu Person stark variieren.

a) Für Lena liegt die Halbwertszeit bei 1,5 Stunden.

– Modellieren Sie den Abbau von 80 mg Koffein in Abhängigkeit von der Zeit t (in Stunden) mithilfe einer Exponentialfunktion.

b) Klara hat eine große Prüfung vor sich und muss dafür lernen. Um beim Lernen „fit“ zu sein, trinkt sie um 16 Uhr einen Energydrink, der 80 mg Koffein enthält. Um 17:30 Uhr isst sie eine Tafel Bitterschokolade, die 90 mg Koffein enthält.

Der Abbau von Koffein in Klaras Körper wird durch folgende Funktion näherungsweise beschrieben:

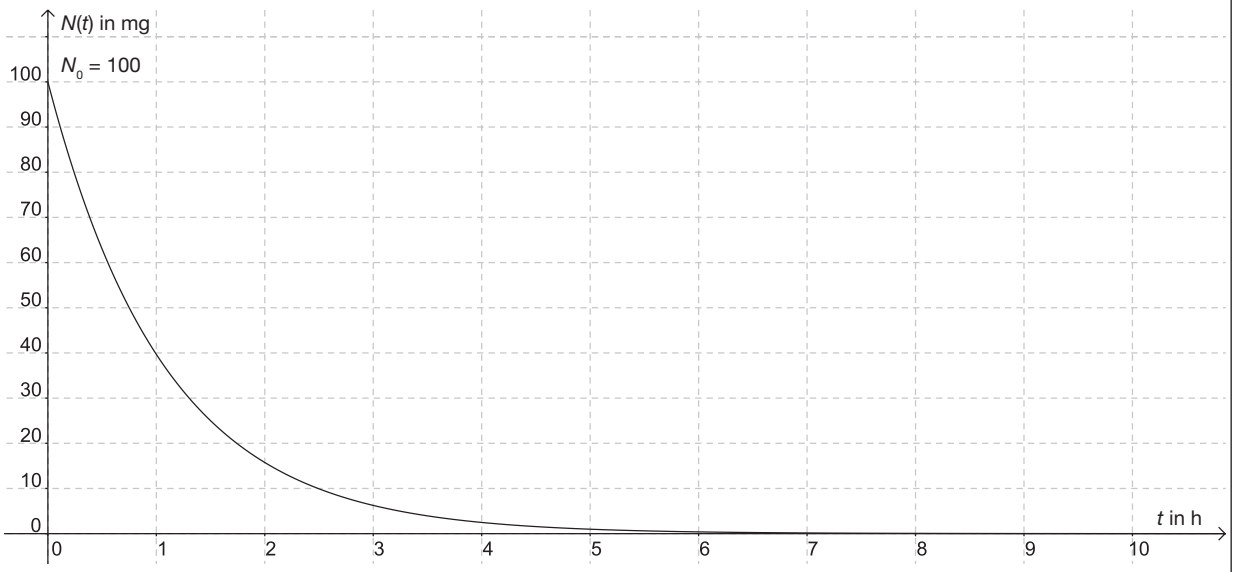
$$N(t) = N_0 \cdot 0{,}39685^t$$

$N(t)$ ... Koffeinmenge in Milligramm (mg) zur Zeit t
N_0 ... Koffeinmenge in mg zur Zeit $t = 0$
t ... Zeit in Stunden (h)

– Berechnen Sie, wie viel Koffein Klara um 20 Uhr in ihrem Körper hat.

c) Die unten stehende Grafik zeigt den exponentiellen Abbau von Koffein im Körper einer Person.

– Skizzieren Sie in die Grafik den Verlauf der Exponentialfunktion für Sabine, die 100 mg Koffein zu sich nimmt und mit einer Halbwertszeit von 6 Stunden abbaut.



d) Der Abbau von Koffein in Klaras Körper wird durch folgende Funktion beschrieben:

$$N(t) = N_0 \cdot 0{,}39685^t$$

$N(t)$ ... Koffeinmenge in mg zur Zeit t
N_0 ... Koffeinmenge in mg zur Zeit $t = 0$
t ... Zeit in Stunden

Eine Menge von 500 mg Koffein kann z. B. Schlafstörungen, Unruhe und Nervosität hervorrufen.

– Berechnen Sie, wie viele ganze Dosen Energydrink (zu 200 ml mit 80 mg Koffein) Klara eine halbe Stunde vor dem Zubettgehen mindestens trinken müsste, sodass sie Schlafstörungen wegen des Koffeins hat.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Halbwertszeit: 1,5 h

Exponentialfunktion mit Basis e:

$$t_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln(2)}{\lambda}$$

Umformung liefert $\lambda = 0{,}4621$

$N(t) = N_0 \cdot e^{-0{,}4621 \cdot t} = 80 \cdot e^{-0{,}4621 \cdot t}$
$N(t)$ ... Koffeinmenge in mg zur Zeit t
t ... Zeit in Stunden

Exponentialfunktion mit Basis a:
$0{,}5 = a^{1{,}5}$
$a = 0{,}62996$

$N(t) = 80 \cdot 0{,}62996^t$
$N(t)$ ... Koffeinmenge in mg zur Zeit t
t ... Zeit in Stunden

b) 80 mg Koffein im Energydrink um 16 Uhr:
$t = 4$ h
$N_0 = 80$ mg
$N(4) = 80 \cdot 0{,}39685^4 = 1{,}98424$

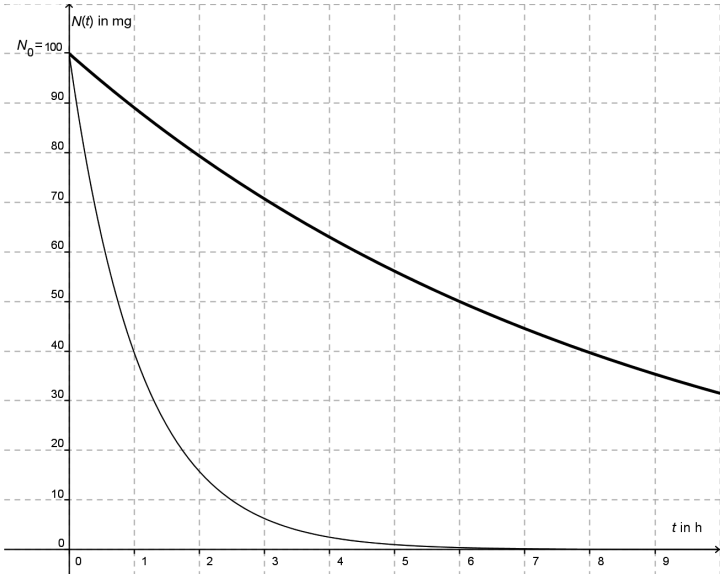
90 mg Koffein in der Bitterschokolade um 17:30 Uhr:
$t = 2{,}5$ h
$N_0 = 90$ mg
$N(2{,}5) = 90 \cdot 0{,}39685^{2{,}5} = 8{,}92911$

Gesamtkoffein im Körper um 20 Uhr: 1,98424 + 8,92911= 10,91335

Um 20 Uhr hat Klara 10,9 mg Koffein in ihrem Körper.

Andere korrekte Lösungswege sind ebenfalls zulässig.

c) Die Kurve muss VIEL flacher verlaufen – korrekt, wenn die Kurve im Punkt (0|100) beginnt und z. B. durch den Punkt (6|50) geht.



d) $500 = N_0 \cdot 0{,}39685^{0{,}5}$

$$N_0 = \frac{500}{0{,}39685^{0{,}5}} = 793{,}7$$

$$\frac{793{,}7}{80} = 9{,}921$$

Sie müsste ca. 10 Dosen Energydrink trinken.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das Auffinden des korrekten Modells (Funktionsgleichung)
1 × B: für die korrekte Berechnung des Parameters und die korrekte und vollständige Angabe der Funktionsgleichung

b) 1 × A: für die Berücksichtigung der unterschiedlichen Bezugszeitpunkte
1 × B: für die korrekte Berechnung

c) 1 × A: wenn aus dem Graphen klar ersichtlich ist, dass die Abnahme pro Zeiteinheit geringer wird; der Graph muss durch den Punkt (6|50) gehen

d) 1 × B: für die korrekte Berechnung von N_0
1 × B: für die korrekte Berechnung und das korrekte Runden der Dosenzahl

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Getränkeproduktion

Aufgabennummer: B_147

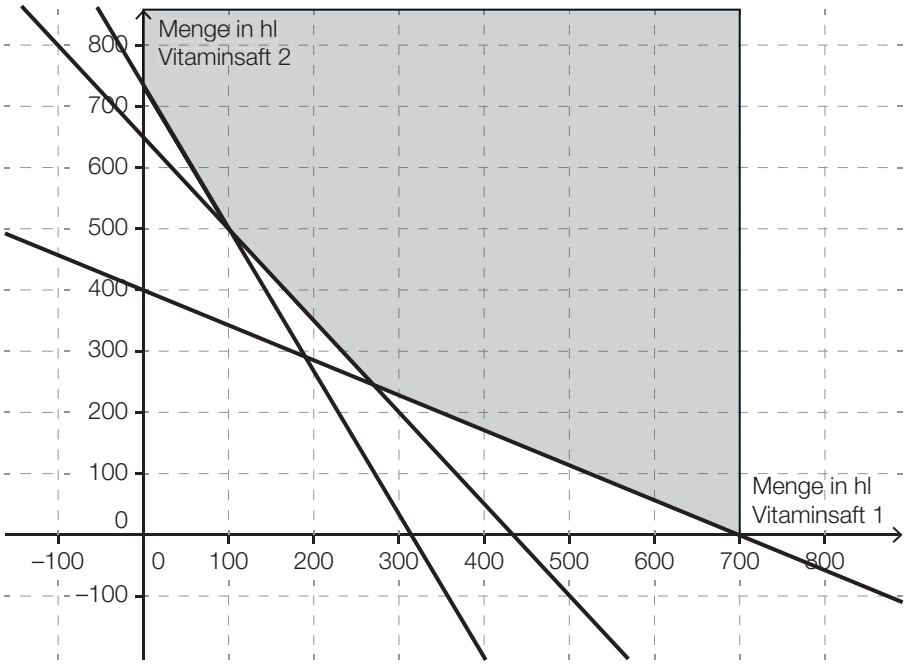
Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein Getränkehersteller produziert verschiedene Fruchtsäfte.

a) Das Unternehmen stellt zwei Sorten von Nektar her. Sorte 1 enthält 60 % Kirschsaft und 25 % Apfelsaft, Sorte 2 enthält 40 % Kirschsaft und 45 % Apfelsaft.
Man hat maximal 400 Hektoliter (hl) Kirschsaft und 310 hl Apfelsaft zur Verfügung.

– Übertragen Sie die Anteile und die jeweiligen Maximalmengen der beiden Sorten in eine Tabelle.
– Erstellen Sie ein Ungleichungssystem, das den Bereich der möglichen Herstellungsmengen der beiden Sorten beschreibt.
– Stellen Sie den Lösungsbereich des Ungleichungssystems in einem Koordinatensystem grafisch dar.

b) Das Unternehmen stellt aus 2 hochwertigen Vitamingetränken eine neue Mischung her, die bestimmte Mindestmengen von 3 Inhaltsstoffen enthalten muss. Die in der nachstehenden Grafik dargestellte Lösungsmenge erfüllt diese Bedingungen.
Der 1. Vitaminsaft kostet dem Unternehmen € 300 pro hl, der 2. Saft € 150 pro hl.



Die neue Mischung soll möglichst kostengünstig sein.

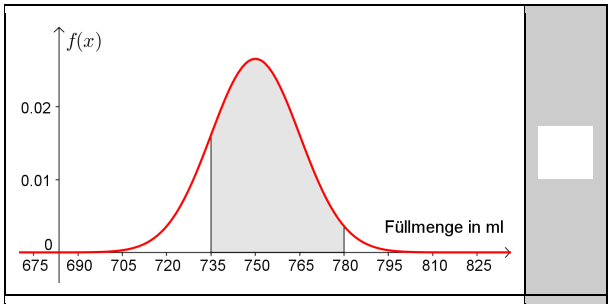
– Stellen Sie die Zielfunktion K für die Kosten auf.
– Zeichnen Sie die Gerade, für die der optimale Wert der Zielfunktion angenommen wird, in die obige Grafik ein.
– Ermitteln Sie, für welche Mischung die Kosten minimal sind.
– Berechnen Sie die minimalen Kosten.

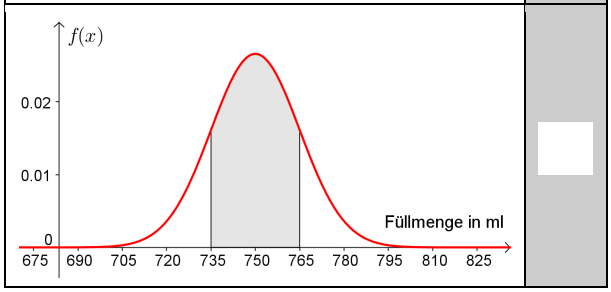
c) Die Säfte werden auf 2 Maschinen in Flaschen abgefüllt. Die Füllmenge pro Flasche kann als annähernd normalverteilt angenommen werden.
Zum Ausschuss zählen diejenigen Flaschen, die die jeweils tolerierte Mindestfüllmenge unterschreiten.
Die Füllmenge an der 1. Maschine weist einen Erwartungswert von 750 Millilitern (ml) und eine Standardabweichung von 15 ml auf. Der Ausschuss an der 1. Maschine beträgt erfahrungsgemäß 2,5 %.
Die 2. Maschine füllt ebenfalls mit einem Erwartungswert von 750 ml ab, aber mit einer Standardabweichung von 10 ml.

– Berechnen Sie die tolerierte Mindestfüllmenge an der 1. Maschine.
– Argumentieren Sie, welche der beiden Maschinen weniger Ausschussware produziert, wenn man von der gleichen Mindestfüllmenge für beide Maschinen ausgeht.

Die nachstehenden Grafiken zeigen Wahrscheinlichkeiten für Füllmengenbereiche von Maschine 1.

– Ordnen Sie den beiden grafischen Darstellungen jeweils die zutreffende Wahrscheinlichkeit aus A bis D zu. *[2 zu 4]*





A	$P(X \geq \mu - \sigma)$
B	$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma)$
C	$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma)$
D	$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + \sigma)$

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)

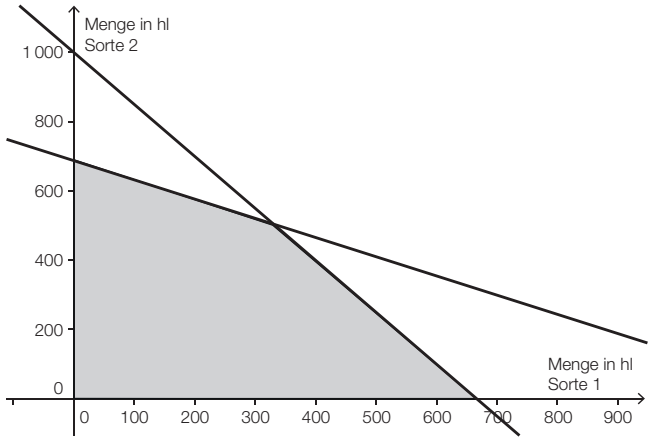
	Kirschsaft	Apfelsaft
Sorte 1 (x hl)	60 %	25 %
Sorte 2 (y hl)	40 %	45 %
Maximalmenge	400 hl	310 hl

I: $0{,}6x + 0{,}4y \leq 400$

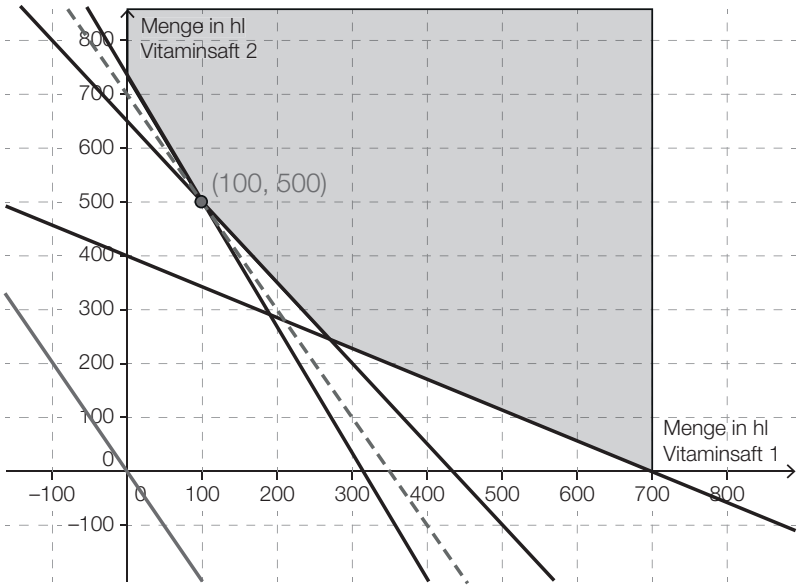
II: $0{,}25x + 0{,}45y \leq 310$

III: $x \geq 0$

IV: $y \geq 0$



b) $K(x, y) = 300x + 150y$ ... Zielfunktion



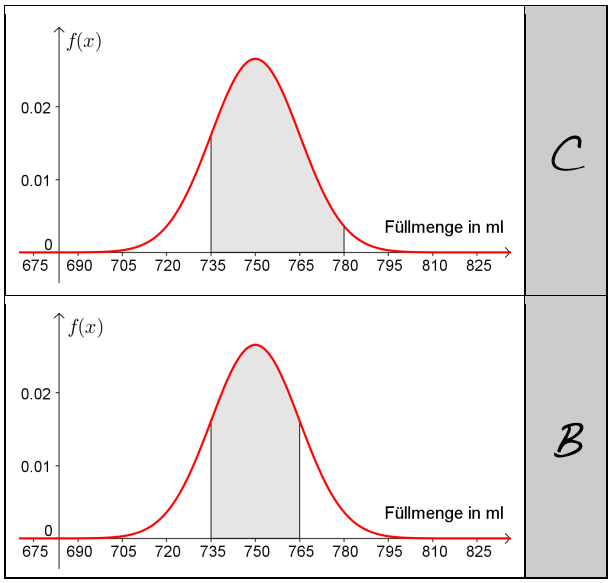
100 hl Vitaminsaft 1 gemischt mit 500 hl Vitaminsaft 2 sind am günstigsten.

$K_{min} = 300 \cdot 100 + 150 \cdot 500$
Die minimalen Kosten betragen € 105.000.

c) Lösung mittels Technologie oder über die folgende Gleichung:
$P(X \leq a) = 0{,}025$
$\Phi\left(\frac{a-750}{15}\right) = 0{,}025$
$a = \Phi^{-1}(0{,}025) \cdot 15 + 750$
$a = -1{,}96 \cdot 15 + 750 \approx 720{,}605...$

Die Mindestfüllmenge beträgt rund 721 ml.

Bei gleicher Mindestfüllmenge der 2. Maschine, aber einer geringeren Standardabweichung bedeutet das, dass die Dichtefunktion steiler und schmäler verläuft. Unterhalb der Mindestfüllmenge und oberhalb der maximal zulässigen Füllmenge ist die Fläche jeweils kleiner.
Daher füllt die 2. Maschine präziser ab als die 1. Maschine.



C

B

A	$P(X \geq \mu - \sigma)$
B	$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma)$
C	$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma)$
D	$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + \sigma)$

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) A Modellieren und Transferieren, C Interpretieren und Dokumentieren
c) D Argumentieren und Kommunizieren, B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 3
b) 4
c) 3

Thema: Wirtschaft

Quellen: –

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

USB-Sticks

Aufgabennummer: B_191

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein Unternehmen bringt USB-Sticks auf den Markt.

a) Für bestimmte USB-Sticks werden die in der nachstehenden Tabelle aufgelisteten Gewinne G in Abhängigkeit von der Absatzmenge x der Ware ermittelt:

x	0	10	20
$G(x)$	–1,4	6,4	1,4

x … Absatzmenge in Mengeneinheiten (ME)
$G(x)$ … Gewinn in Geldeinheiten (GE) bei einer Absatzmenge von x ME

Die Gewinnfunktion G wird beschrieben mit:

$$G(x) = ax^2 + bx + c \text{ mit } a, b, c \in \mathbb{R}$$

– Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Parameter a, b und c.
– Ermitteln Sie die Gleichung dieser Gewinnfunktion.
– Beschreiben Sie, was der Parameter c in Bezug auf die Kosten aussagt.
– Erklären Sie, wo sich der Break-even-Point auf dem Graphen der Gewinnfunktion befindet.

b) Die Erlösfunktion E beim Verkauf von USB-Sticks wird beschrieben mit:

$$E(x) = -1{,}25x^2 + 21x$$

x … Absatzmenge in Mengeneinheiten (ME)
$E(x)$ … Erlös in Geldeinheiten (GE) bei einem Absatz von x ME

– Ermitteln Sie den relevanten Definitionsbereich der Erlösfunktion.
– Erstellen Sie die Gleichung zur Berechnung der mittleren Änderungsrate der Erlösfunktion im Intervall [9; 15].
– Berechnen Sie den maximalen Erlös.
– Dokumentieren Sie, wie man mithilfe der Differenzialrechnung den Nachweis für ein lokales Maximum erbringt.

c) Ein spezieller Typ von USB-Sticks hat den Höchstpreis von 6 GE/ME und eine Sättigungsmenge von 18 ME.

– Kreuzen Sie diejenige Darstellung der Preisfunktion p in Abhängigkeit von der Absatzmenge x an, die diese Kriterien erfüllt. *[1 aus 5]*

x … Absatzmenge in Mengeneinheiten (ME)
$p(x)$ … Preis in Geldeinheiten pro Mengeneinheiten (GE/ME) bei einem Absatz von x in ME

$p(x) = \frac{1}{3} \cdot (18 - 6x)$	☐
$p(x) = 6 - \frac{x}{18}$	☐
$p(x) = 6 - \frac{x^2}{54}$	☐
$p(x) = 6 - \frac{x^2}{18}$	☐
$p(x) = 6 - \frac{x}{90} - \frac{x^3}{900}$	☐

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.
Beachten Sie, dass die Funktionen – wie in der Wirtschaftsmathematik üblich – näherungsweise als stetig angenommen werden, obwohl es sich um diskrete Werte handelt.

Möglicher Lösungsweg

a) Mit Einsetzen in $G(x) = ax^2 + bx + c$ erhält man folgendes Gleichungssystem:
$G(0) = -1{,}4$: $c = -1{,}4$
$G(10) = 6{,}4$: $10^2a + 10b = 6{,}4 + 1{,}4$
$G(20) = 1{,}4$: $\underline{20^2a + 20b = 1{,}4 + 1{,}4}$

Lösung mittels Technologieeinsatz:
$a = -0{,}064 \quad b = 1{,}42 \quad c = -1{,}4$
Gewinnfunktion G mit: $G(x) = -0{,}064x^2 + 1{,}42x - 1{,}4$

$|c|$ gibt die Fixkosten an, die bei der Produktion der USB-Sticks anfallen.

Der Graph der quadratischen Gewinnfunktion schneidet die x-Achse an 2 Stellen. Die erste (linke) Nullstelle von G markiert die Schwelle in den Gewinnbereich und heißt „Break-even-Point".

b) Der Erlös kann nicht negativ sein. Positive Funktionswerte liegen zwischen den beiden Nullstellen der Funktion.
Nullstellen der Erlösfunktion: $-1{,}25x^2 + 21x = 0$,
$x_1 = 0$ (untere Erlösgrenze), $x_2 = 16{,}8$ (obere Erlösgrenze) $\Rightarrow$ $D = [0; 16{,}8]$

mittlere Änderungsrate:
$$\frac{\Delta E}{\Delta x} = \frac{E(15) - E(9)}{15 - 9}$$

$E(x) = -1{,}25x^2 + 21x$
$E'(x) = -2{,}5x + 21 = 0$
$x = \frac{21}{2{,}5} = 8{,}4$
$E(8{,}4) = 88{,}2$

Der maximale Erlös beträgt 88,2 GE.

Diese Aufgabe kann auch nur mit Berechnung des Parabelscheitels ohne Differenzieren gerechnet werden, wenn erkannt wird, dass es eine nach unten geöffnete Parabel ist. Dieser Lösungsweg ist ebenfalls zulässig.

Zum Nachweis eines lokalen Maximums dient die 2. Ableitung der Funktion an der berechneten Extremstelle. Ist die 2. Ableitung an dieser Stelle negativ, dann liegt ein Maximum vor.
(Hinweis: Die zweimalige Differenzierbarkeit der Funktion an der Extremstelle wird vorausgesetzt.)

c)

[…]	
[…]	
$p(x) = 6 - \frac{x^2}{54}$	☒
[…]	
[…]	

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 4 Analysis
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) –

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 4
b) 4
c) 1

Thema: Wirtschaft

Quellen: –

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Sonneneinstrahlung am Hafelekar (2)

Aufgabennummer: B_004

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Die Intensität der Sonneneinstrahlung am Hafelekar in Innsbruck kann näherungsweise durch die folgenden Funktionen f_1 und f_2 beschrieben werden, wobei gilt:

$$f_1(t) = -\frac{7}{1\,152} \cdot t^2 + \frac{2\,555}{288} \cdot t - \frac{811\,615}{288},\ 490 \le t \le 970 \qquad \text{für den 19. Jänner}$$

$$f_2(t) = -\frac{81}{18\,490} \cdot t^2 + \frac{11\,826}{1\,849} \cdot t - \frac{2\,726\,350}{1\,849},\ 300 \le t \le 1\,160 \qquad \text{für den 3. Mai}$$

t … Ortszeit in Minuten (min)

$f_1(t)$, $f_2(t)$ … Intensität der Sonneneinstrahlung zum Zeitpunkt t in Watt pro Quadratmeter $\left(\frac{\text{W}}{\text{m}^2}\right)$

a) – Ermitteln Sie denjenigen Zeitpunkt, zu dem die Intensität der Sonneneinstrahlung am 3. Mai maximal ist.

Mithilfe des Integrals $\int_{t_1}^{t_2} f_2(t)\,\mathrm{d}t$ berechnet man den Energieeintrag im Zeitintervall t_1 bis t_2.

– Berechnen Sie ein symmetrisches Zeitintervall um diesen Zeitpunkt so, dass der Energieeintrag 100 $\frac{\text{kW} \cdot \text{min}}{\text{m}^2}$ beträgt.

b) – Zeichnen Sie den Graphen, der die momentane Änderungsrate der Intensität der Sonneneinstrahlung für den 3. Mai in Abhängigkeit von der Ortszeit im Intervall [300 min; 1160 min] darstellt.

c) In der nachstehenden Tabelle sind die theoretisch möglichen Energieeinträge pro Stunde für den 19. Jänner und den 3. Mai in Millionen Joule pro Quadratmeter $\left(\frac{\text{J}}{\text{m}^2}\right)$ angegeben.

Ortszeit in min	19. Jänner	3. Mai
540 – 600	0,945	2,688
600 – 660	1,287	2,934
660 – 720	1,47	3,066
720 – 780	1,497	3,085
780 – 840	1,365	2,990
840 – 900	1,077	2,782

– Erstellen Sie ein Stabdiagramm mithilfe der Daten in der Tabelle.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Berechnung des Hochpunkts der Funktion f_2:

$f'_2(t) = 0 \Rightarrow t_{\text{Hochpunkt}} = 730 \text{ min}$

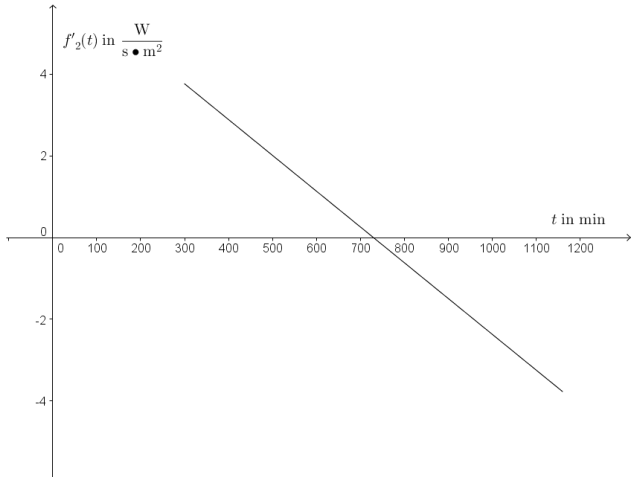
Berechnung des symmetrischen Zeitintervalls um den Hochpunkt:

$$10^5 = \int_{730-a}^{730+a} f_2(t)\,dt$$

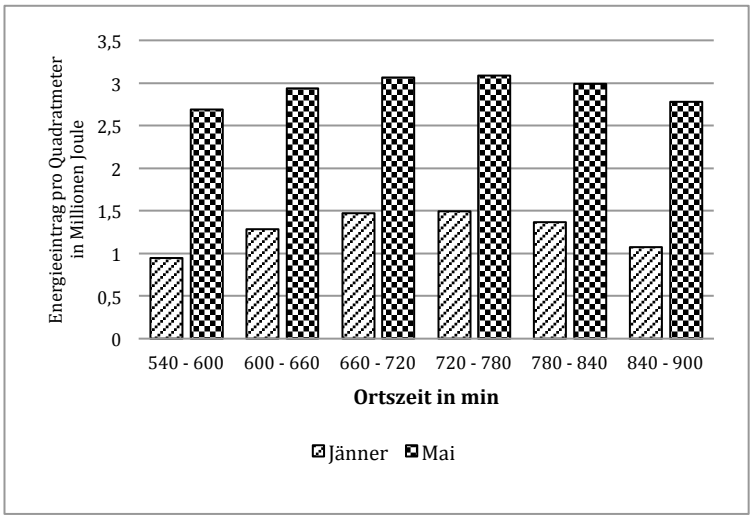
$\Rightarrow a \approx 58{,}5 \text{ min}$

Die Intensität der Sonneneinstrahlung am 3. Mai ist zum Zeitpunkt 730 min maximal.
Im Zeitintervall [671,5 min; 788,5 min] beträgt der Energieeintrag 100 $\frac{\text{kW} \cdot \text{min}}{\text{m}^2}$.

b) $f'_2(t) = -\frac{81}{9\,245} \cdot t + \frac{11\,826}{1\,849}$



c)



Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 4 Analysis
c) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) A Modellieren und Transferieren
c) —

Schwierigkeitsgrad:

a) schwer
b) mittel
c) leicht

Punkteanzahl:

a) 4
b) 2
c) 1

Thema: Geografie

Quelle: eigene Messung

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Wetter

Aufgabennummer: A_070

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

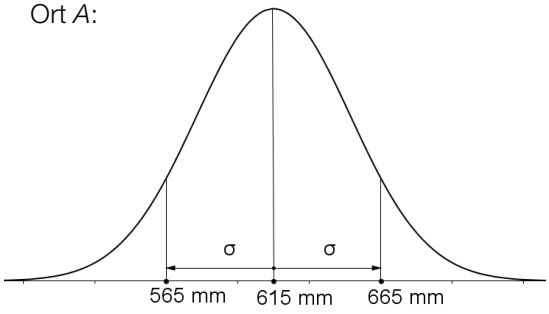
Statistiken aus meteorologischen Daten sind die Grundlage für die Wettervorhersage. Das aktuelle Wetter stimmt nur mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit mit der jeweiligen Prognose überein.

a) Man kann davon ausgehen, dass die jährliche Niederschlagsmenge an einem bestimmten Ort annähernd normalverteilt ist.
Für einen Ort in Niederösterreich ist der Erwartungswert der Jahresniederschlagsmenge 615 mm bei einer Standardabweichung von 50 mm.

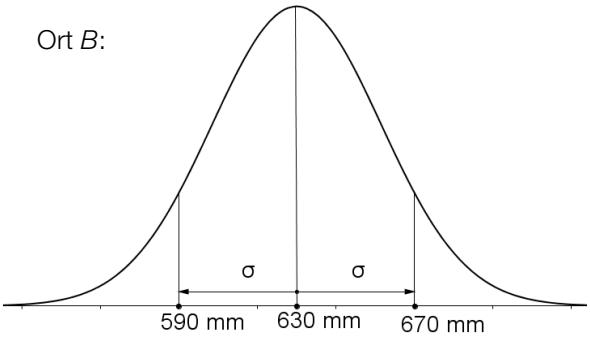
– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit in Prozent, dass die Niederschlagsmenge in einem bestimmten Jahr zwischen 650 mm und 700 mm liegt.

b) Die beiden untenstehenden Grafiken zeigen die errechneten Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen der langjährig statistisch festgehaltenen Jahresniederschlagsmengen an 2 verschiedenen Orten. (Man geht davon aus, dass die Jahresniederschlagsmenge normalverteilt ist.)

Ort *A*:



Ort *B*:



– Vergleichen Sie die jährlichen Niederschlagsmengen mithilfe der ablesbaren Parameter der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $P(650 \leq X \leq 700) = P(X \leq 700) - P(X \leq 650)$

z-Wert für 700 mm: $z = \frac{700 - 615}{50} = 1{,}7$

z-Wert für 650 mm: $z = \frac{650 - 615}{50} = 0{,}7$

$\Phi(1{,}7) - \Phi(0{,}7) = 0{,}9554 - 0{,}7580 = 0{,}1974$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt 19,74 %.

Die Berechnung kann auch mit Technologie erfolgen.

b) Der größere Erwartungswert bei Ort *B* besagt, dass dort der Mittelwert der gefallenen Regenmenge größer ist als bei Ort *A*.
Die kleinere Standardabweichung besagt allerdings, dass bei Ort *B* die Regenmengen nicht so stark vom Mittelwert abgewichen sind wie bei Ort *A*.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) –
b) –

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) leicht

Punkteanzahl:

a) 1
b) 2

Thema: Umwelt

Quellen: –

Geländewagen

Aufgabennummer: A_053

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Ein Geländewagen fährt auf einer Bergstraße. Die Messwerte für ein Bergstraßenprofil sind in folgender Tabelle festgehalten:

x in km	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
$g(x)$ in km	0	0,04	0,09	0,15	0,2	0,23

x … horizontale Entfernung vom Ausgangspunkt in Kilometern (km)
$g(x)$ … Höhenunterschied zum Ausgangspunkt an der Stelle x in Kilometern (km)

a) – Ermitteln Sie anhand der gegebenen Daten die durchschnittlichen Steigungen der einzelnen Abschnitte.
– Erläutern Sie, welche Bedingungen gegeben sein müssen, damit ein Geländewagen, der eine Steigung von bis zu 30 % schafft, den Berg hinaufkommt.

b) Das Bergstraßenprofil wird im Intervall [0 km; 1 km] durch die Funktion f modelliert.

$$f(x) = -0{,}35x^3 + 0{,}45x^2 + 0{,}075x + 0{,}0075$$

x … horizontale Entfernung vom Ausgangspunkt in km
$f(x)$ … Höhenunterschied zum Ausgangspunkt an der Stelle x in km

– Stellen Sie die Daten der obigen Tabelle und den Graphen der Funktion f in einem kartesischen Koordinatensystem dar.
– Prüfen Sie anhand der Grafik, ob das Funktionsmodell zu den in der obigen Tabelle gegebenen Daten passt.

c) Das Bergstraßenprofil kann im Intervall [0 km; 1 km] sehr gut durch folgende Funktion modelliert werden:

$$f(x) = -0{,}3x^3 + 0{,}45x^2 + 0{,}075x + 0{,}0075$$

x … horizontale Entfernung vom Ausgangspunkt in km
$f(x)$ … Höhenunterschied zum Ausgangspunkt an der Stelle x in km

Folgende Berechnung wird durchgeführt:

$f(x) = -0{,}3x^3 + 0{,}45x^2 + 0{,}075x + 0{,}0075$
$f'(x) = -0{,}9x^2 + 0{,}9x + 0{,}075$
$f''(x) = -1{,}8x + 0{,}9$

$f''(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0{,}5$
$f'(x_1) = 0{,}3$

– Erläutern Sie die durchgeführten Rechenschritte.
– Erklären Sie, was mithilfe dieser Rechnung in Bezug auf einen bergauf fahrenden Geländewagen ermittelt wird.

Hinweis zur Aufgabe:
Antworten müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

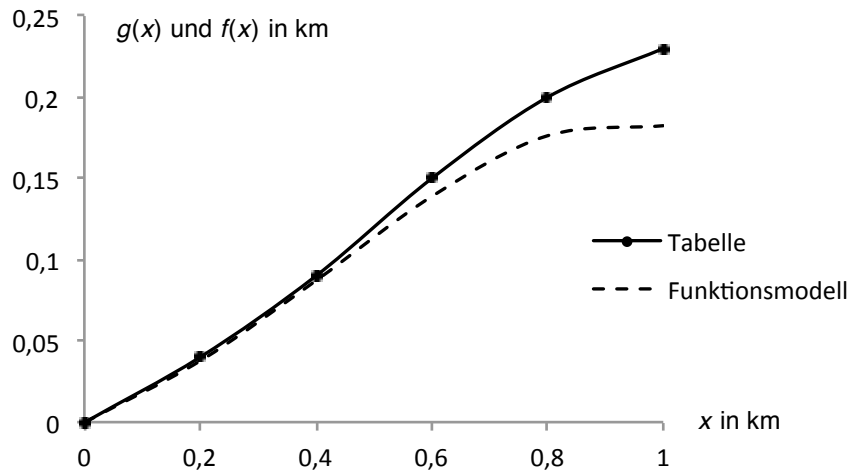
a) Aus der Tabelle werden die Steigungen der einzelnen Abschnitte ermittelt.

$k = \frac{\Delta g(x)}{\Delta x}$ mit $\Delta x = 0{,}2$ km

k_1	k_2	k_3	k_4	k_5
0,2	0,25	0,3	0,25	0,15

Der Geländewagen kommt den Berg hinauf, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:
– Die Steigung im 3. Abschnitt ist konstant.
– Die Steigung in den anderen Abschnitten ist nirgends größer als 0,3.

b)



Das Funktionsmodell beschreibt die Daten der Tabelle im Intervall [0 km; 0,5 km] ganz gut. Danach ist der Anstieg der Funktion f kleiner als bei den Daten aus der Tabelle, d. h., der nach 1 km zu überwindende Höhenunterschied wäre laut Modell zu gering.
Die Funktion f hat außerdem bei $x = 0{,}93$ km ein lokales Maximum, d. h., sie fällt anschließend, was ebenfalls nicht den Daten in der Tabelle entspricht.

c) Es wurde die Funktion f 2-mal differenziert und die 2. Ableitung null gesetzt. Man erhält jene x-Werte der Funktion f, an denen die Steigung (in diesem Fall) maximal ist.

$f'(x) = 0{,}3$

Der Wert 0,3 gibt die maximale Steigung der Funktion f an. Die maximale Steigung, die das Geländeauto zu überwinden hat, beträgt somit 30 %.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) D Argumentieren und Kommunizieren

Nebenhandlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:

a) schwer
b) mittel
c) schwer

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2
c) 2

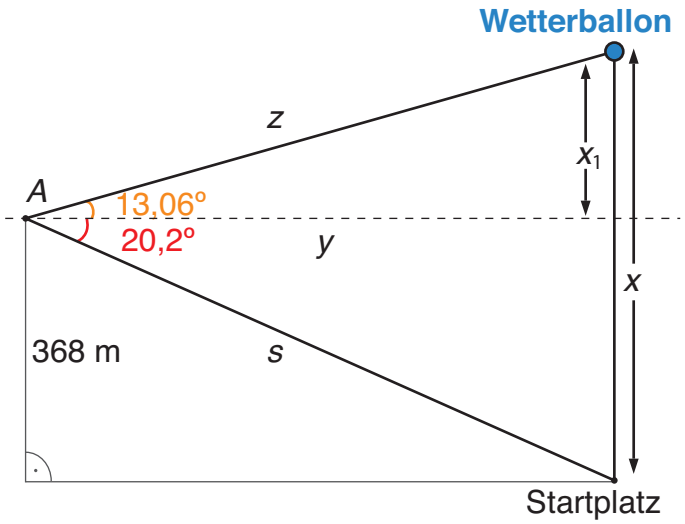
Thema: Bewegungsaufgabe

Quellen: –

Wetterballon

Aufgabennummer: A_008

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐



a) – Interpretieren Sie die Grafik und finden Sie einen passenden Angabetext, aus dem diese Skizze entwickelt werden kann.

b) – Berechnen Sie die Flughöhe *x* des Ballons in Metern (m).

c) Der Ballon steigt vom Startplatz aus mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von 2,3 Metern pro Sekunde (m/s) senkrecht nach oben.

– Stellen Sie die Funktion, die die Höhe in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt, grafisch dar.
– Lesen Sie die Höhe ab, die der Ballon nach einer halben Stunde erreicht.

Hinweis zur Aufgabe:
Antworten müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Ein Ballon schwebt über dem Erdboden. Eine Messstation befindet sich auf einem Berghang in einer Position 368 m über der Ebene, auf der der Startplatz liegt. Von dort visiert man den Mittelpunkt eines Wetterballons unter dem Höhenwinkel $\alpha = 13{,}06°$ und den Startplatz senkrecht unter dem Ballon unter dem Tiefenwinkel $\beta = 20{,}2°$ an.
Aus diesen Messwerten soll die Flughöhe des Ballons bestimmt werden.
(Die Aufgabe ist offen, es ist auch ein anderer Text möglich, der zur Skizze passt.)

b) $y = \frac{368}{\tan(20{,}2)}$

$y = 1\,000{,}20$

$x_2 = 1\,000{,}2 \cdot \tan(13{,}06)$
$x_2 = 232{,}02$

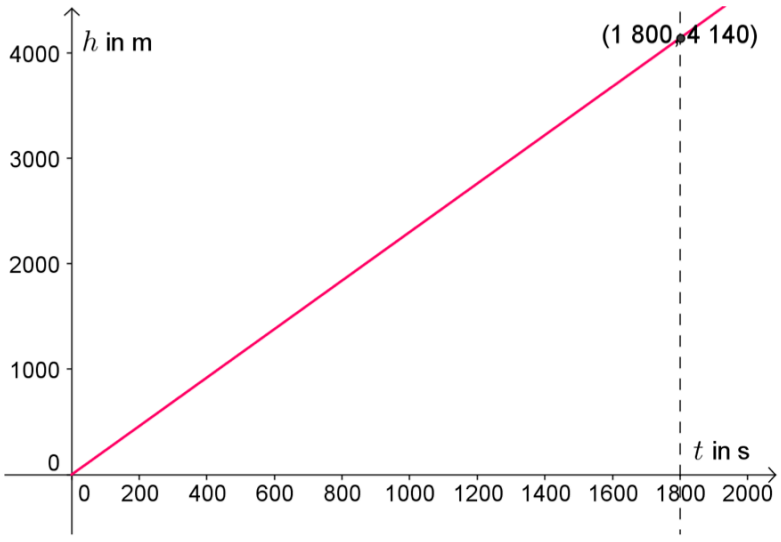
$368 + 232{,}02 \approx 600$

Die im Augenblick der Messung vorliegende Höhe h des Ballons beträgt ungefähr 600 m.

Die Aufgabe kann auf anderen Wegen, z. B. mit Sätzen des allgemeinen Dreiecks, berechnet werden, auch wenn Letztere nicht im Kompetenzkatalog für Teil A enthalten sind.

c) $s = v \cdot t = 2{,}3t$ s in m, t in s

Einschätzung der Definitionsmenge: Man braucht 30 Minuten = 1 800 s.



Ablesung: Nach einer halben Stunde hat der Ballon eine Höhe von ungefähr 4 100 m erreicht (berechneter Wert: 4 140 m).

Bei Grafikrechnern genügt eine Handskizze, daher wird der abgelesene Wert nur gerundet ermittelt sein.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) –
b) –
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) leicht
c) leicht

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2
c) 2

Thema: Luftfahrt

Quellen: –

Wasserstrahl

Aufgabennummer: A_006

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein Wasserstrahl tritt aus einem Gartenschlauch aus.

a) Der Verlauf eines Wasserstrahls kann mit der folgenden Funktion beschrieben werden:

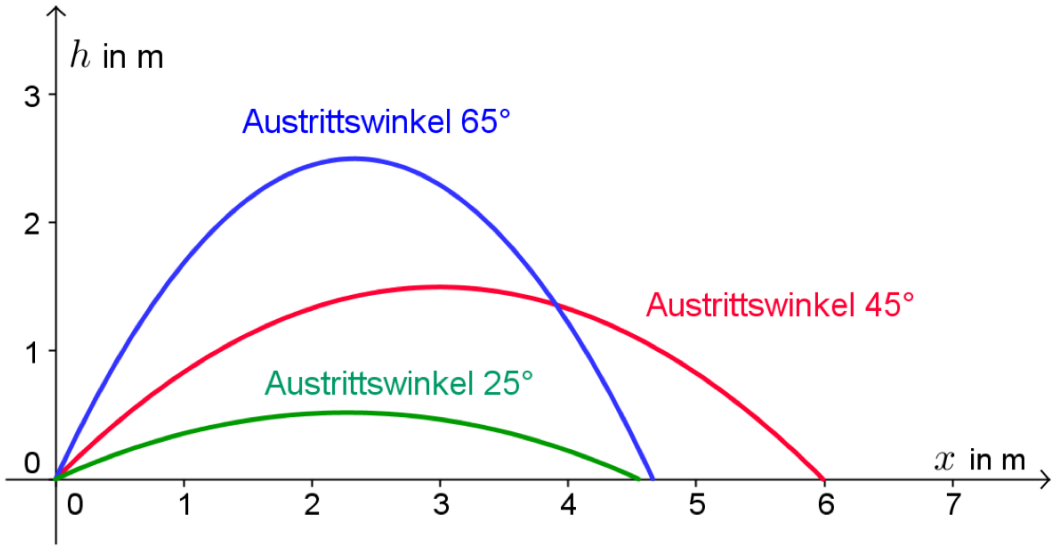
$$h(x) = -0{,}15x^2 + 0{,}9x + 0{,}6$$

$h(x)$ … Höhe des Strahls über einem Punkt am Boden in x Metern Entfernung vom Austrittsort in Metern (m)
x … horizontale Entfernung vom Austrittsort in Metern (m)

Berechnen Sie, in welcher horizontalen Entfernung x vom Austrittsort dieser Strahl auf dem Boden auftrifft. Argumentieren Sie, ob der Strahl in größerer Entfernung x auf dem Boden auftrifft, wenn man den Schlauch nur senkrecht nach oben verschiebt, ohne dabei die Strahlrichtung oder den Wasserdruck zu verändern.

b) Ein Wasserstrahl tritt in einer Höhe von 1 m aus. Nach 3 m horizontaler Entfernung vom Austrittsort erreicht der Strahl eine maximale Höhe von 2,5 m.
Ermitteln Sie jene Polynomfunktion 2. Grades, welche die Höhe h des Wasserstrahls in Abhängigkeit von der horizontalen Entfernung x vom Austrittsort des Wassers beschreibt.

c) Die untenstehende Grafik zeigt die Verläufe von 3 Wasserstrahlen, die unter gleichem Wasserdruck bei unterschiedlichen Austrittswinkeln entstehen. Lesen Sie die Reichweiten und maximalen Höhen für jede der dargestellten Kurven ungefähr ab. Interpretieren Sie außerdem, wie sich die Höhe und die Reichweite des Strahls verändern, wenn der Austrittswinkel variiert.



Hinweis zur Aufgabe:
Antworten müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $h(x) = -0{,}15x^2 + 0{,}9x + 0{,}6$

Die Weite erhält man durch Berechnen der Nullstelle: $h(x) = 0$

Technologieeinsatz: $x \approx 6{,}61$ m

Argumentieren:
Wenn man die Strahlrichtung oder den Wasserdruck (Geschwindigkeit) nicht verändert, so verschiebt sich die Parabel nach oben und es verändert sich der Schnitt mit der vertikalen Achse. Dadurch verändert sich aber auch die Reichweite x, sie wird größer.
Die Diskussion kann auch anders geführt sein. Nicht zwingend in dieser Weise!

b) $h(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$
$h'(x) = 2a \cdot x + b$

Punkte (0|1) und (3|2,5) in $h(x)$ einsetzen;
Maximum bei $x = 3$,
$h'(3) = 0$ einsetzen;
Gleichungssystem: $c = 1$
$2{,}5 = 9a + 3b + 1$
$\underline{0 = 6a + b}$

Gleichungssystem lösen (händisch oder mit Technologie):
$a = -0{,}167$, $b = 1$, $c = 1$
$h(x) = -0{,}167x^2 + x + 1$

c) Austrittswinkel 25°:
Der Strahl trifft bei ca. 4,6 m auf den Boden auf. Die Höhe beträgt maximal ca. 0,5 m. Die Bahn ist flach.
Austrittswinkel 45°:
Die Reichweite ist von den drei betrachteten Fällen am größten, sie liegt bei 6 m, die maximale Höhe beträgt ca. 1,5 m.
Austrittswinkel 65°:
Der Strahl trifft schon bei ca. 4,7 m auf den Boden auf.
Die maximale Höhe beträgt ca. 2,5 m. Die Bahn ist von den drei betrachteten Fällen am steilsten.

Zusammenfassend aus der Zeichnung erkennbar:
Bei den beiden Winkeln, die kleiner oder größer als 45° sind, wird die Reichweite geringer.
Die Höhe wird beim Vergrößern des Winkels größer, beim Verkleinern des Winkels kleiner.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 4 Analysis
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) A Modellieren und Transferieren
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) –

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) leicht

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2
c) 2

Thema: Physik

Quellen: –