Exponentialfunktion und Logarithmusfunktion

In der 6.Klasse haben wir die Funktion ${}^a\exp: \Re \to \Re^+,\ y = a^x,\ a \in \Re^+$ als **Exponentialfunktion mit der Basis a** bezeichnet. Neben **y = a^x** ist auch die Schreibweise **y = ^{a}exp(x)** üblich.

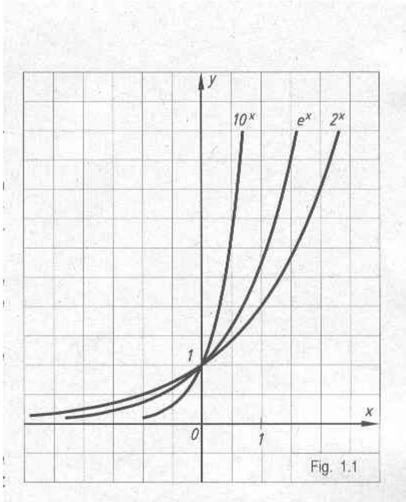

Fig. 1.1

Die am häufigsten verwendete **Basis** ist die **EULERsche Zahl e**, die durch den folgenden Grenzwert definiert ist:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2{,}718281828459045......$$

Die **Exponentialfunktion mit der Basis e** wird **natürliche Exponentialfunktion** genannt. Statt **y = ^{e}exp(x)** schreibt man meist nur **y = exp(x)** bzw. **y = e^x**.

Eigenschaften:

1)**Sämtliche Funktionswerte sind positiv**, d.h.:der Graph verläuft zur Gänze oberhalb der x-Achse.
2)Die Funktionen sind **nach oben unbeschränkt** (außer a=1).
3)Die Funktionen enthalten stets den **Punkt P(0|1).**
4)Für **a>1** ist die Funktion **streng monoton wachsend**, für **a=1 konstant**, für **0<a<1 streng monoton fallend**.
5)Die Graphen der Funktionen **y = a^x** und $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ liegen **symmetrisch bezüglich der y-Achse.**
6)Für **a>1** ist die **negative x-Achse** (die einzige) **Asymptote**, für **0<a<1** ist die **positive x-Achse** (die einzige) **Asymptote**.

Die **Umkehrfunktion der Exponentialfunktion** ist die **Logarithmusfunktion**:

$${}^a\log: \Re^+ \to \Re,\ y = {}^a\log(x),\ a \in \Re^+ \setminus \{1\}$$

Die Logarithmusfunktion mit der **Basis e** wird **natürliche Logarithmusfunktion** genannt und mit **ln(x)** abgekürzt, die mit der **Basis 10** wird **dekadische** (oder BRIGGsche) **Logarithmusfunktion** genannt und mit **lg(x)** bezeichnet. Für diese beiden Funktionen sind am TR Tasten zur Berechnung vorhanden.

Umrechnungsformel zwischen **ln(x)** und ${}^a\log(x)$: ${}^a\log(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$

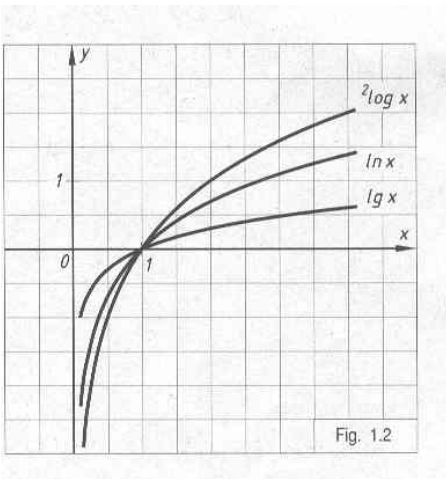

Fig. 1.2

Eigenschaften:

1)Die Funktion ist **nur für positive reelle Zahlen definiert**, d.h. der Graph verläuft rechts der y-Achse.
2)Die Funktion ist nach oben und unten unbeschränkt.
3)Die Funktionen enthalten stets den **Punkt P(1|0).**
4)Für **a>1** ist die Funktion **streng monoton wachsend**, für **0<a<1** ist die Funktion **streng monoton fallend**.
5)Die Graphen der Logarithmusfunktionen zur Basis **a** und zur Basis $\frac{1}{a}$ liegen **symmetrisch** bezüglich der **x-Achse**.
6) Für **a>1** ist die **negative y-Achse** (die einzige) **Asymptote**, für **0<a<1** ist die **positive y-Achse** (die einzige) **Asymptote.**

Ableitung der natürlichen Logarithmusfunktion:

Die Funktion **f:** $\Re^+ \to \Re, y = \ln(x)$ besitzt die **Ableitungsfunktion** $f' : \Re^+ \to \Re, y = \frac{1}{x}$.

$$\boxed{(\ln(x))' = \frac{1}{x}}$$

Ableitung der (allgemeinen) Logarithmusfunktion:

Die Funktion **f:** $\Re^+ \to \Re, y = {}^a\log(x)$ besitzt die **Ableitungsfunktion** $f' : \Re^+ \to \Re, y = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$.

$$\boxed{\left({}^a\log(x)\right)' = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}}$$

Ableitung der natürlichen Exponentialfunktion:

Die Funktion $f : \Re \to \Re^+, y = e^x$ besitzt die **Ableitungsfunktion** $f' : \Re \to \Re^+, y = e^x$.

$$\boxed{(e^x)' = e^x}$$

Ableitung der (allgemeinen) Exponentialfunktion:

Die Funktion $f : \Re \to \Re^+, y = a^x$ besitzt die **Ableitungsfunktion** $f' : \Re \to \Re^+, y = a^x \cdot \ln(a)$.

$$\boxed{(a^x)' = a^x \cdot \ln(a)}$$