

KOMBINATORIK

Sie untersucht die verschiedenen Möglichkeiten der Anordnung von Gegenständen, das können Zahlen, Buchstaben, Personen, Versuche, ... sein. Wir nennen sie Elemente und bezeichnen sie mit Kleinbuchstaben.

Die Zusammenstellungen ***aab***, ***aba***, ***baa*** gelten nur dann als verschieden, wenn ihre Anordnung berücksichtigt wird.

A) Permutationen:

Eine Zusammenstellung einer endlichen Anzahl von Elementen in irgendeiner Anordnung, in der alle Elemente verwendet werden, heißt Permutation.

Anzahl der Permutationen (von n verschiedenen Elementen):

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$1! = 1$$

$$0! = 1$$

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 1$$

$n!$ = n Fakultät , n Faktorielle

$$P(n) = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$$

Beispiele :

P1:

Aus 3 Ziffern 1,3,5 lassen sich $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ verschiedene 3-stellige Zahlen bilden :

135

153

315

351

513

531

P2:

Auf wie viele Arten kann ein Fußballtrainer die 11 Spieler seiner Mannschaft die Positionen tauschen lassen?

$$11! = \underline{\underline{39916800}}$$

Permutation mit Wiederholung :

$$\boxed{{}^m P(n) = \frac{n!}{m!}} \text{ bzw. } \boxed{{}_{m,s,r \dots} P(n) = \frac{n!}{m! \cdot s! \cdot r! \dots}}$$

P3:

Berechne die Anzahl aller 5-ziffrigen Zahlen, die sich aus den Ziffern:

a) 3,3,3,6,9

b) 2,2,2,7,7

bilden lassen .

$$\text{a) } {}^3 P(5) = \frac{5!}{3!} = \frac{120}{6} = 20$$

$$\text{b) } {}^{3,2} P(5) = \frac{5!}{3!2!} = \frac{120}{6 \cdot 2} = 10$$

P4:

Berechne die Anzahl aller 11-ziffrigen Zahlen, die sich aus den Ziffern:

1,1,1,1,2,2,3,4,5,5,5

$${}^{4,2,3} P(11) = \frac{11!}{4!2!3!} = \frac{39916800}{24 \cdot 2 \cdot 6} = \frac{39916800}{288} = 138600$$

B) Kombinationen :

Jede Zusammenstellung von k-Elementen aus n-Elementen heißt eine Kombination k-ter Ordnung (oder k-ter Klasse). Bei Kombinationen wird die Anordnung der Elemente **NICHT** berücksichtigt.

Beispiel :

Von den Elementen 1,2,3,4 sind 12,13,14,23,24,34 ... Kombinationen 2.Ordnung .

(← Anordnung nicht berücksichtigt $\Rightarrow 12 = 21$)

Man unterscheidet Kombinationen mit und ohne Wiederholung der Elemente :

a) Anzahl der Kombinationen ohne Wiederholung von n Elementen zur Ordnung k

$$C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

$\binom{n}{k}$ sprich : „n über k“ Binomialkoeffizient

Beispiele :

K1:

Von den 4 Ziffern 1,2,3,4 lassen sich folgende Kombinationen ohne Wiederholung zur 2.Ordnung angeben: 12,13,14,23,24,34

(← Kombination 21 scheint nicht auf, da 12 = 21 11,22,33,44 fehlen, da Kombination ohne Wiederholung)

$$C_4^2 = \frac{4!}{2!2!} = \frac{24}{4} = 6$$

K2:

6 Schüler und 1 Lehrer sitzen an einem Tisch und feiern das Ende des Schuljahres (Sie stoßen mit den Gläsern an). Wie oft haben die Gläser geklungen?

$$C_7^2 = \frac{7!}{2!5!} = \frac{5040}{2 \cdot 120} = 21$$

K3:

Auf wie viele Arten kann man aus 10 Personen einen 3-er Ausschuß bilden?

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{3!7!} = \frac{362800}{6 \cdot 5040} = 120$$

K4:

Tennisturnier: 16 Spieler

Wieviel mögliche Paarungen haben wir

a) in der 1.Runde

b) in der 2. Runde?

Verlierer scheidet aus!

$$a) C_{16}^2 = \frac{16!}{2!14!} = 120$$

$$b) C_8^2 = \frac{8!}{2!6!} = 28$$

K5:

An einer Party nehmen 20 Personen teil. Jeder begrüßt jeden. Wie oft kommt es zum Händeschütteln?

$$\underline{\underline{C_{20}^2 = \frac{20!}{2!18!} = 190}}$$

K6:

Auf wie viele Arten lassen sich aus 100 Personen 2 Standesvertreter wählen?

$$\underline{\underline{C_{100}^2 = \frac{100!}{2!98!} = 4950}}$$

b) Anzahl der Kombinationen mit Wiederholung, von n Elementen zur Ordnung k

$$\boxed{{}^w C_n^k = \binom{n+k-1}{k}}$$

Beispiele :**K7:**

Von den 4 Ziffern 1,2,3,4 lassen sich folgende Kombinationen mit Wiederholung zur 2.Ordnung angeben: 11,12,13,14,22,23,24,33,34,44

$$n=4 ; k=2 \quad \Rightarrow \underline{\underline{{}^w C_4^2 = \binom{4+2-1}{2} = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!} = 10}}$$

K8:

Wie viele Würfe kann man mit 2 Würfeln machen ?

$$\underline{\underline{{}^w C_6^2 = \binom{6+2-1}{2} = \binom{7}{2} = 21}}$$

c) Variationen :

Wird die Anordnung der Elemente berücksichtigt, dann nennt man die Kombinationen Variationen .

a) Anzahl der Variationen ohne Wiederholung von n Elementen zur Ordnung k

Das 1. Element kann auf n verschiedene Arten gewählt werden, das 2. Element auf (n-1), das 3. Element auf (n-2) und das k. Element auf [n-(k-1)]= (n-k+1) Arten $\Rightarrow$

$$V_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots (n-k+2) \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Beispiele :

V1:

Von den 4 Ziffern 1,2,3,4 lassen sich folgende Variationen ohne Wiederholung zur 2.Ordnung angeben: 12,13,14,21,23,24,31,32,34,41,42,43

$$n=4 ; k=2 \quad \Rightarrow V_4^2 = \frac{4!}{2!} = \frac{24}{2} = 12$$

V2:

Bei wieviel Elementen ist die Anzahl der Variationen 3.Klasse ohne Wiederholung 110 mal so groß wie die Anzahl der Elemente?

$$V_x^3 = x \cdot (x-1) \cdot (x-2) = 110x \quad \underline{\underline{x = 12}}$$

b) Anzahl der Variationen mit Wiederholung von n Elementen zur Ordnung k

Hier kann jedes Element auf n verschiedene Arten gewählt werden.

$${}^wV_n^k = n^k$$

Beispiele :

V3:

Von den 4 Ziffern 1,2,3,4 lassen sich folgende Variationen mit Wiederholung zur 2.Ordnung angeben : 11,12,13,14,21,22,23,24,31,32,33,34,41,42,43,44

$$n=4 ; k=2 \quad \Rightarrow {}^wV_4^2 = 4^2 = 16$$

V4:

Aus den 26 Buchstaben unseres Alphabetes lassen sich $26^4 = 456976$ Variationen zur 4.Ordnung mit Wiederholung bilden.

$$\underline{\underline{{}^wV_{26}^4 = 26^4 = 456976}}}$$

V5:

Bei einem Kombinationsschloß sind die einzelnen Einstellungen durch 3- bzw. 4-ziffrige Zahlen mit den Ziffern 1 bis 9 möglich. Berechne jeweils die Anzahl der Einstellungsmöglichkeiten?

$$\text{a) } \underline{\underline{{}^wV_9^3 = 9^3 = 729}}}$$

$$\text{b) } \underline{\underline{{}^wV_9^4 = 9^4 = 6561}}}$$

V6:

Beim Fußballtoto gibt es Vorhersagemöglichkeiten 1,2,x.Wieviel Möglichkeiten der Ausfüllung ergeben sich beim 12 er Toto?

$$\underline{\underline{{}^wV_3^{12} = 3^{12} = 531441}}}$$

V7:

Du kannst mit jedem Arm durch Hoch- , Tief- , Links- und Rechtsstrecken 4 Zeichen geben. Wie viele Zeichen kannst du mit beiden Armen signalisieren ?

$$\underline{\underline{{}^wV_2^4 = 2^4 = 16}}}$$

V8:

Wie viele einsilbige Wörter gibt es, die mit 2 Konsonanten und mit einen zwischen ihnen stehenden Vokal gebildet werden, wenn man 20 Konsonanten und 8 Vokale zählt ?(inklusive Umlaute)

$$\underline{\underline{{}^wV_{20}^2 = 20^2 \cdot 8 = 3200}}}$$

V9:

Morse - Zeichen werden aus Punkt und Strich gebildet. Berechne, wie viele Morsezeichen gebildet werden können, wenn ein solches aus 4 Teilen besteht ?

$$\underline{\underline{{}^wV_2^4 = 2^4 = 16}}}$$