Matrizen und Determinanten

Definition einer Matrix: Ein aus m Zeilen und n Spalten bestehendes rechteckiges Zahlenschema heißt **Matrix vom Typ (m; n)** oder **(m x n)-Matrix**.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$\mathbf{a_{ij}}$ i...Zeilenindex; j...Spaltenindex

<u>Schreibweise:</u> $\mathbf{A=[a_{ij}]}$ oder $\mathbf{(a_{ij})}$

Anwendungsgebiete für Matrizen:

1. <u>Lineare Gleichungssysteme:</u>

I. $3x - 2y + 4z = 5$
II. $4x + y - 3z = 9$
III. $x - y - z = 1$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 4 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

K...Koeffizientenmatrix; hier: (3 x 3)-Matrix

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & -3 & 9 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

E...Erweiterungsmatrix; hier: (3 x 4)-Matrix

2. <u>Beschreibung und Darstellung von Informationen:</u>

z.B. Sitzpläne, Stundenpläne, ..., verschiedenste Informationen

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 211 & 283 \\ 143 & 428 \end{pmatrix}$$

	Raucher	Nichtraucher
männlich	211	283
weiblich	143	428

Darstellung der Prüferzuordnung über Matrizen:

prüft 1
prüft nicht 0
Z...Zuordnungsmatrix

	Zaloznik	Dichtl	Kranzmayer	Pirolt	Gratzer
Meter	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**
Wrussnig	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**
Sgonc	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**
Wogrin	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**
Pippan	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

3. <u>Beziehungsstrukturen:</u>

A_1, A_2, A_3, A_4......Jugendgruppenmitglieder

0 unsympathisch
1 sympathisch

	A_1	A_2	A_3	A_4
A_1	0	1	1	0
A_2	1	0	0	1
A_3	1	0	0	0
A_4	1	1	0	0

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Typen von Matrizen:

1. <u>Quadratische Matrix:</u>

Ein Schema, in dem die Anzahl **m** der Zeilen **gleich** der Anzahl **n** der Spalten ist, heißt **quadratische Matrix**.

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{6} \\ \mathbf{10} & \mathbf{20} & \mathbf{30} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-2} & \mathbf{-3} \end{pmatrix}$$

(3 x 3)-Matrix oder quadratische Matrix 3. Ordnung

a) <u>Dreiecksmatrix:</u>

Eine quadratische Matrix, in der **alle Elemente unterhalb** bzw. **oberhalb der Hauptdiagonale Null** sind, nennt man **Dreiecksmatrix**.

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{-4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{5} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{7} \end{pmatrix}$$

obere Dreiecksmatrix

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 6 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$ untere Dreiecksmatrix

b) <u>Diagonalmatrix:</u>

Eine quadratische Matrix, in der **alle Elemente außerhalb der Hauptdiagonalen gleich Null** sind, nennt man **Diagonalmatrix**.

Haben die **Elemente der Hauptdiagonale alle den Wert 1**, dann liegt eine **Einheitsmatrix** vor.

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ Diagonalmatrix

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ Einheitsmatrix

2. <u>Nullmatrix:</u>

$$\mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. **<u>Zeilenvektor:</u> m=1** und <u>n>1</u>

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

4. <u>Spaltenvektor:</u> n=1 und <u>m>1</u>

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

5. <u>Skalar:</u> m=n=1

a_{11}...reelle Zahl

Rechnen mit Matrizen:

1. Addieren und Subtrahieren von Matrizen:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Für die Addition von Matrizen gelten folgende Aussagen:

- ⇒ Die Addition ist assoziativ: **(A+B) + C = A + (B+C)**
- ⇒ Die Addition ist kommutativ: **A+B = B+A**
- ⇒ Die Nullmatrix ist das neutrale Element: **A+0 = 0+A = A**
- ⇒ Für jede Matrix A gibt es eine Inverse -A, sodass **A+(-A) = -A+A = 0**

Mengen, die genau diese Eigenschaften aufweisen (z.B. N, Z, Q, R), nennt man *GRUPPEN*.

2. Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar:

$$(-3) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -9 \\ -12 & -15 \\ -18 & -21 \end{pmatrix}$$

3. Multiplikation von Matrizen:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 36 & 41 \\ 53 & 59 \end{pmatrix}$$

(**2** x 3) (3 x **2**) Ergebnismatrix: (**2 x 2**)

Dabei empfiehlt sich, das **Schema von "Falk"** anzuwenden:

			5	**4**
			4	**2**
			2	**5**
2	**4**	**5**	**36**	**41**
3	**6**	**7**	**53**	**59**

Regel: $\boxed{a_{ij} \cdot b_{jk} = c_{ik}}$

Berechnung von Determinanten:

Definition: Unter der **Determinante det(A)** einer quadratischen Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ der Ordnung 2 versteht man jene **reelle Zahl,** die nach der Vorschrift $\mathbf{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}}$ gebildet wird.

$$\mathbf{det(A)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

<u>in Worten</u>: Produkt der Hauptdiagonale ***minus*** Produkt der Nebendiagonale

<u>Anwendungsbeispiel</u>: Das Gleichungssystem soll nach der **„Cramerschen Regel"** gelöst werden.

I: 5x + 2y =18
<u>II: 15x – 5y =10</u>

<u>Lösung</u>: Es sei D die Determinante der Koeffizientenmatrix.

$\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 15 & -5 \end{vmatrix} = \mathbf{5 \cdot (-5) - 2 \cdot 15 = -55}$; $\mathbf{D \neq 0}$**,** das Gleichungssystem ist eindeutig lösbar.

$$\boldsymbol{D_x} = \begin{vmatrix} 18 & 2 \\ 10 & -5 \end{vmatrix} = \mathbf{18 \cdot (-5) - 2 \cdot 10 = -110}$$

$$\mathbf{D_y} = \begin{vmatrix} 5 & 18 \\ 15 & 10 \end{vmatrix} = \mathbf{5 \cdot 10 - 18 \cdot 15 = -220}$$

„<u>Cramersche Regel</u>": $\mathbf{D \neq 0}$

$$\mathbf{x = \frac{D_x}{D} \quad y = \frac{D_y}{D}}$$

x= 2; y= 4

Berechnung der Determinante einer 3x3- Matrix:

a) Regel von Sarrus:

Beispiel:

$$\left|\begin{matrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{matrix}\right|\begin{matrix}1 & 2\\ 4 & 2\\ 1 & 2\end{matrix}$$

$$= 1\cdot 2\cdot 1 + 2\cdot 1\cdot 1 + 3\cdot 4\cdot 2 - [2\cdot 4\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot 2 + 3\cdot 2\cdot 1] = 28 - 16 = 12$$

$$\det(A) = \left|\begin{matrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{matrix}\right|\begin{matrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{matrix} ==$$

$$= a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32} - (a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33} + a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32} + a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31})$$

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix}7 & 8 & 9\\ -1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

Gesucht ist die Determinante von A!

$$\det(A) = \left|\begin{matrix}7 & 8 & 9\\ -1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 0\end{matrix}\right|\begin{matrix}7 & 8\\ -1 & 2\\ 0 & 1\end{matrix} =$$

$$= 7\cdot 2\cdot 0 + 8\cdot 3\cdot 0 + 9\cdot(-1)\cdot 1 - 9\cdot 2\cdot 0 - 7\cdot 3\cdot 1 - 8\cdot(-1)\cdot 0 = -9 - 21 = -30$$

b) Entwicklung nach Zeilen oder Spalten: z.B. nach der **2. Zeile**:

$$A = \begin{pmatrix}8 & -6 & 5\\ -7 & 2 & -1\\ 3 & -4 & 4\end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix}8 & -6 & 5\\ -7 & 2 & -1\\ 3 & -9 & 4\end{vmatrix} = -(-7)\cdot\begin{vmatrix}-6 & 5\\ -9 & 4\end{vmatrix} + 2\cdot\begin{vmatrix}8 & 5\\ 3 & 4\end{vmatrix} - (-1)\cdot\begin{vmatrix}8 & -6\\ 3 & -9\end{vmatrix}$$

$$=7\ (+21)+2\ (+17)+54\ =235$$

<u>Vorzeichenregel</u>:

Die Ziffern sind „+“ bei gerader Summe der Indizes und „-“ bei ungerader Summe der Indizes!

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

<u>Auflösung nach 1 Zeile</u>: $\mathbf{a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}}$

Berechnung der Kofaktoren α_{ij}:

Wenn $\mathbf{det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$ gilt, dann heißen α_{ij} die **Kofaktoren** von $\mathbf{a_{ij}}$**.** Für α_{ij} gelten:

$\mathbf{\alpha_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$**;** $\mathbf{\alpha_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}}$**;** $\mathbf{\alpha_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}}$**;** usw.

Es gilt daher: $\mathbf{det(A) = \alpha_{11} \cdot a_{11} + \alpha_{12} \cdot a_{12} + \alpha_{13} \cdot a_{13}}$

<u>Beispiel</u>: Berechne alle Kofaktoren! $\mathbf{A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}}$

$\mathbf{\alpha_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2;\ \alpha_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2;\ \alpha_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1}$

$\mathbf{\alpha_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2;\ \alpha_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1;\ \alpha_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0}$

$\mathbf{\alpha_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5;\ \alpha_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4;\ \alpha_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1}$

<u>Beispiel</u>: Berechne det(A) durch **Entwicklung nach der zweiten Spalte**! $\mathbf{A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & -5 & 1 \end{pmatrix}}$

$\mathbf{det(A) = 0 \cdot \alpha_{12} + 0 \cdot \alpha_{22} + (-5) \cdot \alpha_{32} = (-5) \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -10}$

Beispiel: Berechne det(A)! $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ -2 & 1 & 5 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

Zweimalige Subtraktion der der zweiten Spalte von der dritten**:**

$$\mathbf{det(A)} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 8 \\ -2 & 1 & 5 \\ -3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 8-2\cdot 4 \\ -2 & 1 & 5-2\cdot 1 \\ -3 & 2 & 4-2\cdot 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 3\cdot(-1)^{2+3}\cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -42$$

Die Adjungierte einer quadratischen Matrix:

Es sei $\mathbf{A=[a_{ij}]}$ eine n-quadratische Matrix, und es sei α_{ij} der **Kofaktor** von $\mathbf{a_{ij}}$; dann ist

$$\textbf{Adjungierte}\quad \mathbf{A = adj(A)} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \ldots\ldots\alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \ldots\ldots\alpha_{n2} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{1n} & a_{2n} & \ldots\ldots\alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Man beachte sorgfältig, dass die Kofaktoren der Elemente der i-ten Zeile(Spalte) von A die Elemente der i-ten Spalte(Zeile) von adj(A) sind.

Beispiel: Berechne für die Matrix A die Adjungierte von A! $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

$$\alpha_{11} = (-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 6;\ \alpha_{12} = (-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2;\ \alpha_{13} = (-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -3$$

$$\alpha_{21} = (-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1;\ \alpha_{22} = (-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -5;\ \alpha_{23} = (-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 3$$

$$\alpha_{31} = (-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5;\ \alpha_{32} = (-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4;\ \alpha_{33} = (-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1$$

$$\mathbf{adj(A)} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -5 \\ -2 & -5 & 4 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Die Inverse einer Matrix A:

Definition: Wenn A und B **quadratische** Matrizen sind, sodass gilt $\boldsymbol{A\cdot B = B\cdot A = I}$, dann heißt **B die Inverse von A** und man schreibt $\mathbf{B = A^{-1}}$ ("*B ist gleich A invers*").

Es gilt auch: $\mathbf{A = B^{-1}}$

Beispiel:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = ?$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 + 2x_3; x_2 + 2x_4 \\ 3x_1 + 4x_3; 3x_2 + 4x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I: x_1 + 2x_3 = 1$$
$$II: 3x_1 + 4x_3 = 0$$

$$-2x_3 = -3 / : (-2)$$
$$x_3 = \frac{3}{2}$$

$$x_1 + \frac{6}{2} = 1 \mid -3$$
$$x_1 = -2$$

$$I: x_2 + 2x_4 = 0$$
$$II: 3x_2 + 4x_4 = 1$$

$$-2x_4 = 1 / : (-2)$$
$$x_4 = -\frac{1}{2}$$

$$x_2 + (-1) = 0 / +1$$
$$x_2 = 1$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Inversenbildung unter Benutzung der Adjungierten:

$$\det(\mathrm{A}) \neq 0; \; \mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathrm{A})} \cdot \operatorname{adj}(\mathrm{A})$$

Beispiel: Berechne für die Matrix A die inverse Matrix! $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{adj(A)} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -5 \\ -2 & -5 & 4 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix};$$

det(A)=-7;

$$\mathbf{A^{-1}} = \begin{pmatrix} -\frac{6}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{5}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{5}{7} & -\frac{4}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

Lösen von Gleichungssystemen mit Matrizen:

$$\mathbf{5x + 3y - 7z = 4}$$
$$\mathbf{2x - 8y + z = 6}$$
$$\mathbf{-x + 9y + 4z = 5}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -7 \\ 2 & -8 & 1 \\ -1 & 9 & 4 \end{pmatrix}; \mathbf{H} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}; \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A \cdot X = H / \cdot A^{-1}} \quad \textbf{von} \quad \textbf{links}$$
$$\mathbf{A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot H}$$
$$\mathbf{I \cdot X = A^{-1} \cdot H}$$
$$\mathbf{X = A^{-1} \cdot H}$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -7 \\ 2 & -8 & 1 \\ -1 & 9 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{879}{302} \\ \frac{53}{302} \\ \frac{239}{151} \end{pmatrix}$$

Lösung: **x = 2,91; y = 0,17; z = 1,58**

Übungsbeispiel:

Löse auf drei Arten:

I: $3x - 5y + z = 0$
II $-4x + 5y - z = -3$
III: $x + y + z = 6$

1) ***Gauß'sches Eliminationsverfahren***
2) ***Cramer´sche Regel***
3) ***mittels Matrizenrechnung***

Gauß'sches Eliminationsverfahren:

I: $3x - 5y + z = 0$
II: $-4x + 5y - z = -3$
$\underline{\underline{x = 3}}$

II: $-12 + 5y - z = -3$
III: $3 + y + z = 6$
$9 + 6y = 3$
$\underline{\underline{y = 2;\ z = 1}}$

Cramer´sche Regel:

I: $3x - 5y + z = 0$
II: $-4x + 5y - z = -3$
III: $x + y + z = 6$

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -4 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -6$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 0 & -5 & 1 \\ -3 & 5 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -18$$

$$D_Y = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -4 & -3 & -1 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -12$$

$$D_Z = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 0 \\ -4 & 5 & -3 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = -6$$

$$x = \frac{D_x}{D} \qquad y = \frac{D_y}{D} \qquad z = \frac{D_z}{D}$$

x= 3; y = 2; z = 1;

mittels Matrizenrechnung:

I: 3x - 5y +z = 0
II: -4x + 5y –z = -3
III: x + y + z = 6

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -4 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};\ \mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix};\ \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{H}$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -4 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$