

1) Die Blumengroßhandlung „Big Rose“ rechnet damit, dass **10%** der bestellten Rosen beim Transport vom Erzeuger beschädigt werden.

- a) In welchem **Bereich** liegt mit **95%iger** Wahrscheinlichkeit die Anzahl der unbeschädigten Rosen, wenn **300 Stück** bestellt werden?
- b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Lieferung mit **400 Rosen** höchstens **50** beschädigte Rosen enthält?

2) Für eine Schar von Funktionen gilt: $x \rightarrow \frac{a + b \ln(x)}{x} \quad (a, b \in \mathfrak{R})$

a) Beweise, dass $f(x) = \frac{1 + \ln(x)}{x}$ eine Termdarstellung jener Funktion ist, die den **Hochpunkt H(1/1)** hat!

b) Berechne die vom Funktionsgraph und der x-Achse eingeschlossene **Fläche in $[e^{-1}/e^2]$** !

3) Eine unendliche Zahlenfolge b_n ist gegeben durch $\left\langle \frac{2}{5}; -\frac{2}{7}; -\frac{6}{9}; -\frac{10}{11}; \dots \right\rangle$.

a) **Beweise**, dass $b_n = \frac{6 - 4n}{3 + 2n}$ die **Abbildungsgleichung** der Folge ist!

b) Untersuche das **Monotonieverhalten von b_n** (Beweis!!!)

c) Bestimme den **Grenzwert b** und jenen **Index m**, von dem ab alle Glieder der Folge in der Umgebung **U(b; 0.002)** liegen! Formuliere eine entsprechende **Antwort!**

4) Im Zerfallsgesetz $N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$ für das radioaktive Edelgas **Radon** ist $\lambda = 2097 \cdot 10^{-6}$, wenn die Zerfallszeit t in Sekunden gemessen wird.

a) Wie groß ist die **Halbwertszeit** für Radon?

b) Nach welcher Zeit sind **95%** der Anfangsmasse **zerfallen**?

c) Von wieviel g Radon ist eine **halbe Stunde** später noch **1g Radon übrig**?

5) In Klagenfurt sind nach Auskunft der **Stadtwerke-Verkehrsbetriebe** erfahrungsgemäß **6%** der Autobus-Fahrgäste Schwarzfahrer.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich in einem Gelenksbus mit **50 Fahrgästen**

a₁) **genau zwei** Schwarzfahrer,

a₂) **mindestens drei** Schwarzfahrer befinden?

b) Unter wie vielen Fahrgästen ist mit **90%iger** Wahrscheinlichkeit mindestens ein Schwarzfahrer zu erwarten?

c) Ein Kontrolleur überprüft täglich etwa **300 Fahrgäste**. Wie viele Schwarzfahrer wird er im Mittel täglich antreffen? In welchem Bereich liegt mit 90%iger Wahrscheinlichkeit die Anzahl der Schwarzfahrer, die er an einem Tag antrifft?

6) Die Punkte **ABCD**[A(11|0|9), B(14|8|4), C(5|12|5), D(2|4|10), S(10|9|13)] bilden eine **gerade quadratische Pyramide**.

a) **Weise dies nach**, fertige eine **Skizze** an und berechne die **Körperhöhe h!**

b) **Berechne das Volumen auf zwei Arten!** (2 Dez.)

c) **Berechne die Oberfläche!** (2 Dez.)

7) Polizeilichen Statistiken zufolge beträgt der Anteil der "Gurtmuffel" **15%**. Wie groß wäre der Anteil **p** der "Gurtmuffel" mindestens, wenn von **25** vorbeifahrenden Autos mit **99%**-iger Wahrscheinlichkeit mindestens eines von einem "Gurtmuffel" gelenkt würde?

Im Anschluss an eine groß angelegte Aufklärungskampagne des Kuratoriums für Verkehrssicherheit will man überprüfen, ob es gelungen ist, den Anteil der "Gurtmuffel" zu senken.

Bestimme den **Mindestumfang der Stichprobe**, die es gestattet, den neuen Anteil der "Gurtmuffel" mit **95%**iger Sicherheit auf **0.02** genau zu schätzen!

8) Berechne den **Normalabstand des Punktes** $P(4|-4|7)$ von der Ebene **E**: $3x - 2y + 6z = 13$ und die **Koordinaten des Fußpunktes** des Lotes von P auf E.

9)a) Berechne die **Schnittpunkte** und den **Schnittwinkel** zwischen der **Hyperbel(1.Hauptl.)** hyp: $5x^2 - 4y^2 = 20$ und der **Ellipse(1.Hauptl.)** ell: $7x^2 + 16y^2 = 112$!

b) Ermittle die **Gleichung der Tangente t** im Punkt $T(x_T < 0 | 3)$ der **Hyperbel(1.Hauptl.)** hyp: $4x^2 - 9y^2 = 135$ durch **implizites Differenzieren!**

c) Von einer **Hyperbel(1.Hauptl.)** sind die Gleichung der **Asymptote** $u: 3x - 5y = 0$ und ein Punkt $X(-4|2)$ gegeben. Ermittle die **Gleichung der Hyperbel!**

10) Untersuche die Funktionskurve mit der Gleichung

$$f(x) = \frac{x}{1 + \ln x} .$$

- a) Bestimme die größtmögliche **Definitionsmenge!**
- b) **Nullstellen, Extrempunkte, Art der Extrema und Wendepunkte?**
- c) **Gleichung der Wendetangente?**

11)a) **JOD 131** zerfällt mit einer **Halbwertszeit** von ungefähr **8 Tagen**. Auf wieviel Prozent ist eine gewisse Menge innerhalb von **30 Tagen** zurückgegangen?

b) **POLONIUM 210** hat die Menge von **10 Gramm** (Halbwertszeit: **139 Tage**). Berechne, wann

- ☞ nur mehr **1 Gramm** vorhanden ist,
- ☞ **30%** zerfallen ist,
- ☞ nur mehr **5% der Masse** vorhanden ist?

c) Ein Wald hatte **1970** einen Bestand von **33000 m³** (bzw. fm). Im Laufe von **20 Jahren** wurde kein Holz gefällt, sodass sich der Bestand von 1950 um **70% vermehren** konnte. Stelle für diesen Waldbestand das **Wachstumsgesetz** auf, wenn **exponentielles Wachstum** vorausgesetzt ist!

12)p: $y = ax^2 + c$

Ein **paraboloidschichtförmiges Fass** von **60 cm Höhe** und den **beiden Durchmessern** von **50 cm max.** und **30 cm min.** ist bis zu einer **Höhe von 40 cm** gefüllt. **Wie viel Liter** sind dies und **wie viel Prozent des Gesamtfassungsvermögens** macht das aus?

13) $p: y = ax^2 + c$

Ein paraboloidschichtförmiges Fass von **80 cm Höhe** und den **beiden Durchmessern** von **60 cm max.** und **40 cm min.** ist bis zu einer **Höhe von 40 cm** gefüllt. **Wie viel Liter** sind dies und **wie viel Prozent des Gesamtfassungsvermögens** macht das aus?

14) Zeige, dass die beiden Geraden $g: X = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und

$h: X = \begin{pmatrix} -11 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ einander schneiden. Ihr **Schnittpunkt S** sei die Spitze eines

Tetraeders, dessen Grundfläche durch das **Dreieck ABC** [A(2|4|3), B(4|8|2), C(1|2|9)] bestimmt ist. Berechne

- a) das **Volumen** des Tetraeders,
- b) den **Neigungswinkel der Kante AS** gegen die **Grundfläche ABC**,
- c) die Koordinaten des **Punktes S₁**, den man durch **Spiegelung** des Punktes S an der Ebene ABC erhält und
- d) die **Oberfläche des Tetraeders** (Beachte: Tetraeder muss nicht regelmäßig sein!!)

- 15) a) Was versteht man in der Mathematik unter "**unbestimmten Ausdrücken**"?
 b) Erläutere die **Regel von de l'Hospital**!
 c) Bestimme:

$$n > 0: \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = ? \qquad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) = ?$$

16) Von einem Punkt der horizontalen Ebene aus erscheint die Spitze eines ersten Berges unter einem **Höhenwinkel $\alpha = 10,2^\circ$** . Die erste Bergspitze wird von einer genau dahinterliegenden zweiten Bergspitze überragt. Der zur zweiten Spitze gemessene **Höhenwinkel** ist um **3,1° höher**. Von einem **3 km** näher beim Berg liegenden Punkt erscheinen beide Gipfel in einer Linie unter einem Winkel **$\gamma = 17,3^\circ$** . Berechne die **Höhe beider Berge**, wenn die Ebene, von der aus die Vermessung durchgeführt wurde, **357 m** über dem Meeresspiegel liegt und die **Instrumentenhöhe von 1,7 m** zu berücksichtigen ist. Wie groß ist die tatsächliche **Entfernung der Bergspitzen**? Fertige eine Skizze an!

17) A) Eine **unendliche Zahlenfolge** ist gegeben durch $b_n = \frac{7 - 4n}{4 + 2n}$.

- a) Berechne die **ersten fünf Glieder** der Folge!
- b) Untersuche das **Monotonieverhalten** von b_n (**Beweis!!!**)!
- c) Bestimmen den **Grenzwert b** und jenen **Index m**, von dem ab alle Glieder der Folge in der Umgebung **U(b; 0.002)** liegen! Formuliere eine entsprechende **Antwort**!
B) Der Absatz einer neuen Schuhcreme hängt vom Werbeaufwand ab. Man schätzt, dass zwischen dem **Werbeaufwand x** und dem **Absatz A** folgender Zusammenhang besteht:

$$A = c(1 - a^x) + b$$

Berechne x!

18)a) Ein Großhändler behauptet, dass unter den von ihm angebotenen **10000 Kugelschreibern** nur **10% fehlerhaft** sind. Ein Vertreter eines Kaufhauses nimmt **140** und lässt sie untersuchen. In welchem Bereich muss der Anteil der fehlerhaften Kugelschreiber mit **95%iger Sicherheit** liegen, damit der Großhändler recht hat?

b) Drei Virusarten X, Y, Z treten bei einer bestimmten Krankheit mit der Wahrscheinlichkeit **1/2, 1/6 und 1/3** auf. Alle drei können durch einen Test nachgewiesen werden und zwar: Virus X liefert zu **60%** einen positiven Befund, Virus Y zu **30%** und Virus Z zu **80%**. Bei einem Erkrankten ist der **Test positiv**. Mit welcher Wahrscheinlichkeit leidet er an Virus Y?

19) Eine Ellipse mit dem **Nebenscheitel B(0|6)** schneidet eine **konfokale Hyperbel** im Punkt **P(6|3)**. Ermittle die beiden **Gleichungen der Kegelschnitte!**

- Zeige, dass sie einander **rechtwinkelig** schneiden.
- Schreibe dem Ellipsoid, das durch Rotation der Ellipse um die x-Achse entsteht, den **volumsgrößen koaxialen Drehzylinder** ein.
- Das von der **Hyperbeltangente in P**, der **y-Achse** und dem **Ellipsenbogen zwischen B und P** begrenzte **Flächenstück rotiert um die y-Achse**. Berechne das **Volumen** des entstehenden Drehkörpers!

20) Wie lange darf eine (ideale) **Stange** höchstens sein, damit sie in **waagrechter Lage** um die Ecke eines Ganges getragen werden kann? Der Gang ist auf der einen Seite **3 m** auf der anderen Seite **2 m** breit. (Lösung durch **trigonometrischen Ansatz!**) Ergebnis auf **2 Dez.** genau in Meter!

21) Eine **Ellipse** in erster Hauptlage hat die **Brennweite $3\sqrt{7}$** und schneidet eine **Parabel $y = cx^2$** im Punkt **P(3|4)**.

- Ermittle die **Gleichungen der beiden Kegelschnitte** und berechne die **Größe ihres Schnittwinkels!**
- Das von der **Parabel**, der **Parabeltangente in P** und der **x-Achse** begrenzte Flächenstück **rotiert um die y-Achse**. Berechne das **Volumen des entstehenden Drehkörpers**.
- Schreibe dem **Ellipsoid**, das durch Rotation der Ellipse um die x-Achse entsteht, den **volumsgrößen Drehkegel** ein, dessen **Spitze im linken Hauptscheitel der Ellipse** liegt.

22) Zwischen zwei gleich hohen Orten A und B soll eine geradlinige Eisenbahn gebaut werden, die zwischen den Punkten M und N durch einen **Tunnel** führt. Zur Bestimmung der Tunnellänge MN wird ein in der derselben Horizontalebene liegender Punkt P festgelegt. Berechne die Tunnellänge, wenn im Gelände folgende Daten gemessen werden:

$$PA = 5750\text{m}, PB = 6410\text{m}, \alpha(APB) = 98.27^\circ, \beta(APM) = 25.03^\circ, \gamma(BPN) = 26.03^\circ.$$

Welche Geldmittel sind für den Tunnelbau vorzusehen, wenn **1km Tunnel 250 000.-** kostet und eine Kostenüberschreitung von **15%** einzukalkulieren ist?