Übungszettel Trigonometrie

1. Zum oberen und unteren Ende eines Gipfelkreuzes der Höhe a=5 m werden von einem Punkt P die Höhenwinkel α=54° und β=53° gemessen. Welche Höhe h hat der Berg, auf dem sich das Kreuz befindet?
   Fertige eine Skizze an! [L.: 134,5 m]

2. Ein Beobachter A steht auf einer Aussichtsplattform, die h= 68 m über einem See liegt. Er sieht einen Fesselballon B, der über den See schwebt, unter dem Höhenwinkel α=16,3° und das Spiegelbild des Ballons im Wasser unter dem Tiefenwinkel β=80,5°.
   In welcher Höhe x befindet sich der Ballon über dem See?
   Fertige eine Skizze an! [L.: 75 m]

3. Jemand besitzt einen rechteckigen Billardtisch ABCD mit den Abmessungen 200 mal 160 cm. Die weiße Kugel W liegt in der Mitte des Tisches, eine rote Kugel R liegt 40 cm von BC und 30 cm von AB entfernt. Fertige eine Skizze an!
   Unter welchem Winkel α muss die Kugel W von der Bande AB reflektiert werden, um die Kugel R zu treffen?
   Wo trifft die Kugel R die Bande AB? Wie weit ist der Treffpunkt mit der Bande AB von der Bande BC entfernt?
   [L.: x=56,36 cm; α=28,6°]

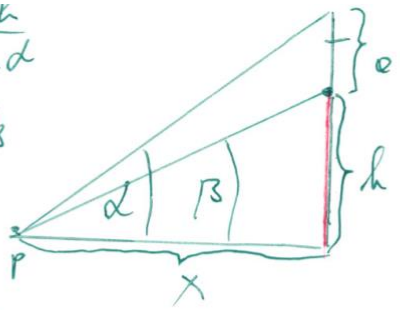
4. Zwei in derselben Horizontalebene liegende Orte A und B sollen durch eine geradlinige Bahnstrecke miteinander verbunden werden. Zwischen A und B befindet sich ein Berg, so dass die Gerade AB nicht direkt abgesteckt werden kann. Es wird daher ein Hilfspunkt P gewählt. Die Strecken AP=a=1830 m und BP=b=1245 m, sowie der Winkel APB=108,6° werden gemessen. Von P aus können Anfangspunkt C und Endpunkt D des Tunnels anvisiert werden. Man misst die Winkel APC=21,75° und Winkel DPB=24,3°.
   Berechne die Länge des Tunnels!
   [L.: CD=1077,2 m]

5. Von einem Punkt A im Inneren eines Bergwerkes laufen zwei Stollen nach den Punkten B und C. Der Stollen AB verläuft waagrecht und ist s_1=AB = 250,2 m lang, der Stollen AC steigt unter dem Winkel α=35,21° an und ist s_2=AC = 180,7m lang. Wie lange ist der Verbindungsstollen BC und unter welchem Winkel ß ist er geneigt, wenn die Vertikalebenen, in denen die Stollen AB und AC liegen, einen Horizontalwinkel ε=14,32° einschließen?
   [L.: 153,85 m; β= 42,63°]

6. Von einem horizontal verlaufenden Tal aus sieht man den Gipfel des Berges A über den des Berges B um den Winkel α=2,2° emporragen. Bewegt man sich um 2 km gegen die Berge hin, bis B gerade A deckt, so beträgt der Höhenwinkel der Gipfel β=15°. Wie hoch sind die Berge, wenn der Höhenwinkel von B ursprünglich γ=9,6° betragen hat und wie groß ist die horizontale Entfernung der Bergspitzen?
   [L.: h_1=917,3 m; h_2=1896,3 m; u=3653,7 m]

1.) $\tan\alpha = \frac{a+h}{x} \Rightarrow x = \frac{a+h}{\tan\alpha}$

$\tan\beta = \frac{h}{x} \Rightarrow x = \frac{h}{\tan\beta}$



$\frac{a+h}{\tan\alpha} = \frac{h}{\tan\beta}$

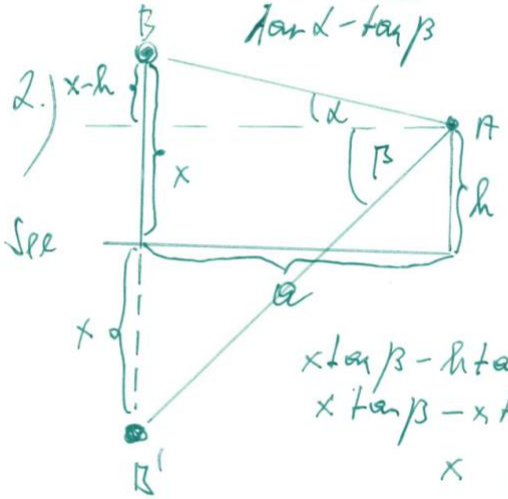
$(a+h)\cdot\tan\beta = h\cdot\tan\alpha$

$a\cdot\tan\beta + h\cdot\tan\beta = h\cdot\tan\alpha$

$a\cdot\tan\beta = h(\tan\alpha - \tan\beta)$

$\frac{a\cdot\tan\beta}{\tan\alpha - \tan\beta} = h = \frac{5\cdot\tan(53)}{\tan(54)-\tan(53)} = \underline{\underline{134{,}40\ m}}$

2.)



$\tan\alpha = \frac{x-h}{a}$

$\tan\beta = \frac{x-(x-h)+x}{a} = \frac{x+h}{a} \Rightarrow$

$a = \frac{x-h}{\tan\alpha} = \frac{x+h}{\tan\beta} \Rightarrow (x-h)\cdot\tan\beta = (x+h)\cdot\tan\alpha$

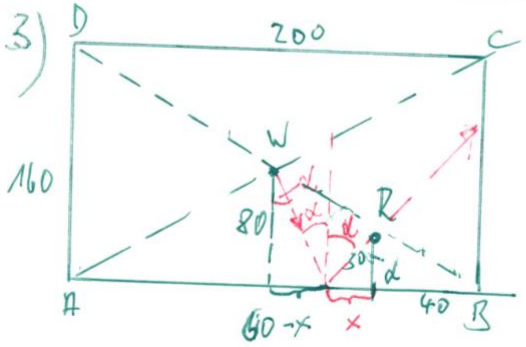
$x\tan\beta - h\tan\beta = x\tan\alpha + h\tan\alpha$

$x\tan\beta - x\tan\alpha = h\tan\alpha + h\tan\beta$

$x = \frac{h(\tan\alpha+\tan\beta)}{\tan\beta-\tan\alpha} = \frac{68\cdot(\tan(80{,}5°)-\tan(16{,}3))}{\tan(80{,}5)-\tan(16{,}3)}$

$\underline{\underline{x = 75\ m}}$

3)



$\tan\alpha = \frac{x}{30}$ $\tan\alpha = \frac{60-x}{80}$

$\frac{x}{30} = \frac{60-x}{80}$

$80x = 30(60-x)$

$8x = 180 - 3x$

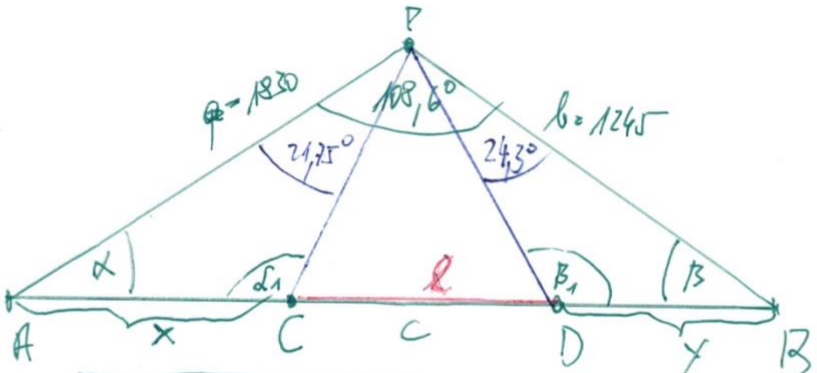
$11x = 180$

$x = \frac{180}{11} = 16{,}36\ cm$

$\tan\alpha = \frac{16{,}36}{30} \Rightarrow \underline{\alpha = 28{,}61°}$

Auftreffentfernung zu $\overline{CB}$: $x+40 = \underline{56{,}36\ cm}$

4)



$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(108{,}6°)} = 2520{,}38\ m$

$\frac{\sin\alpha}{\sin(108{,}6°)} = \frac{1245}{2520{,}38} \Rightarrow \alpha = 27{,}72°$

$\beta = 180 - 108{,}6 - 27{,}72 = 43{,}68°$

$\alpha_1 = 180 - 27{,}72 - 21{,}75° = 130{,}53°$

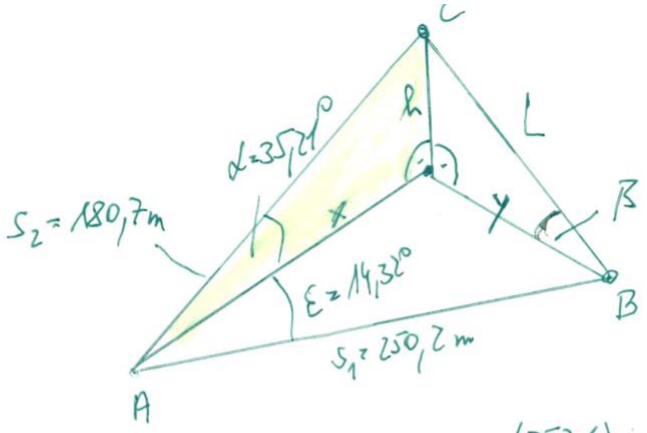
$\beta_1 = 180° - 43{,}68° - 24{,}3° = 112{,}02°$

$\frac{x}{1830} = \frac{\sin(21{,}75)}{\sin(130{,}53°)} \Rightarrow x = 888{,}54\ m$

$\frac{y}{1245} = \frac{\sin(24{,}3°)}{\sin(112{,}02°)} \Rightarrow y = 553{,}42\ m$

$l = c - x - y = 2520{,}38 - 888{,}54 - 553{,}42 = 1077{,}43\ m$

5)



$h = s_2 \cdot \sin(\alpha) = 180{,}7 \cdot \sin(35{,}21) = 104{,}19\,m$

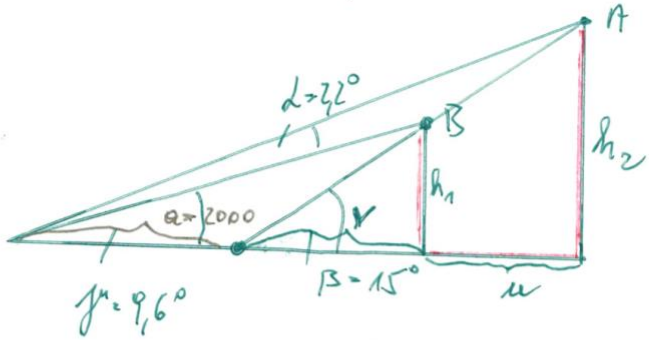
$x = s_2 \cdot \cos(\alpha) = 180{,}7 \cdot \cos(35{,}21) = 147{,}64\,m$

$y = \sqrt{x^2 + s_1^2 - 2 \cdot x \cdot s_1 \cdot \cos(\varepsilon)} = 113{,}2\,m$

$L = \sqrt{h^2 + y^2} = \sqrt{104{,}19^2 + 113{,}2^2} = 153{,}85\,m$

$\tan(\beta) = \frac{h}{y} = \frac{104{,}19}{113{,}2} \Rightarrow \beta = \operatorname{atan}\left(\frac{104{,}19}{113{,}2}\right) = 42{,}63°$

6)



gesucht: h_1, h_2, u

$\tan\gamma = \frac{h_1}{a+v} \quad \tan\beta = \frac{h_1}{v} \Rightarrow (a+v) \cdot \tan(\gamma) = v \cdot \tan\beta \Rightarrow$

$v = \frac{a \cdot \tan\gamma}{\tan\beta - \tan\gamma} = 3423{,}43\,m$

$h_1 = v \cdot \tan\beta = 917{,}3\,m$

$\tan(\beta) = \frac{h_2}{v+u}; \quad \tan(\gamma+\alpha) = \frac{h_2}{a+u+v} \Rightarrow$

$(v+u) \cdot \tan\beta = \tan(\gamma+\alpha) \cdot (a+v) + \tan(\gamma+\alpha) \cdot u \Rightarrow$

$v \cdot \tan(\beta) - (a+u)\tan(\gamma+\alpha) = u \cdot \tan(\gamma+\alpha) - u \cdot \tan\beta$

$\frac{v \cdot \tan(\beta) - (a+u)\tan(\gamma+\alpha)}{\tan(\gamma+\alpha) - \tan\beta} = u = 3653{,}71\,m \Rightarrow$

$h_2 = (v+u) \cdot \tan(\beta) = 1896{,}31\,m$