

Die spezielle Relativitätstheorie

Arbeitsunterlage für Maturanten (Gedankenexperimente und Ableitungen)

Bearbeitung: Prof. Mag. Otto Dolinsek, BG/BRG Lerchenfeld

Relativitätsprinzip:

Alle Inertialsysteme sind gleichberechtigt. Die Naturgesetze werden in allen Inertialsystemen durch dieselben Gleichungen beschrieben.

Konstanz der Lichtgeschwindigkeit:

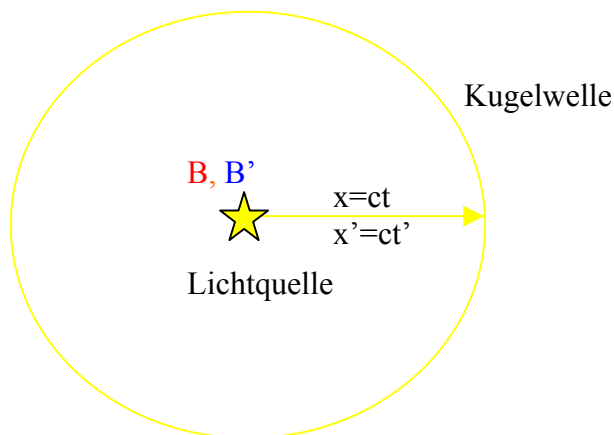
Die Lichtgeschwindigkeit ist eine absolute Konstante und beträgt im Vakuum $c=300000\text{km/s}$.

Die Lichtgeschwindigkeit ist unabhängig vom Bewegungszustand des Beobachter (B , B') und der Lichtquelle!

Anmerkung: Inertialsysteme sind Bezugssysteme in denen der Trägheitssatz gilt.

B ist ein ruhender Beobachter in einem Inertialsystem I (z.B.: Erde), B' ist ein ruhender Beobachter in einem bewegten ($v=\text{const}\neq 0$) Inertialsystem I' (z.B.: Zug).

Einsteins Forderung: B und B' bleiben stets im Zentrum der Kugelwelle, obwohl sich B' mit der Geschwindigkeit v bewegt!



Somit gilt: $x'=ct'$ (für B') und $x=ct$ (für B).

Das klassische Geschwindigkeitsadditionstheorem ($v_x=v_x'+v$) widerspricht der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit. Die Galileigleichungen ($x'=x-vt$ und $x=x'+vt'$) müssen korrigiert werden, da aus ihnen das klassische Additionstheorem folgte.

Der Ansatz zur Korrektur lautet:

$$x'=k(x-vt) \text{ und } x=k(x'+vt') \text{ (} x=ct \text{ und } x'=ct' \text{ in die Gleichungen einsetzen)}$$

$$ct'=k(ct-vt) \text{ und } ct=k(ct'+vt')$$

$$ct'ct=k^2t'(c-v)(c+v)$$

$$c^2=k^2(c^2-v^2)$$

$$k = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Für die Zeiten t und t' folgt aus $x' = k(x - vt)$ und $x = k(x' + vt')$:

$$\begin{array}{l|l}
 \frac{x'}{k} = x - vt & \frac{x}{k} = x' + vt' \\
 \frac{x'}{k} = kx' + kvt' - vt & \frac{x}{k} = kx - kvt + vt' \\
 vt = kvt' + kx' - \frac{x'}{k} & vt' = kvt - kx + \frac{x}{k} \\
 t = kt' + k \frac{x'}{v} - \frac{x'}{kv} & t' = kt - k \frac{x}{v} + \frac{x}{kv} \\
 t = kt' + k \frac{x'}{v} (1 - \frac{1}{k^2}) & t' = kt - k \frac{x}{v} (1 - \frac{1}{k^2}) \\
 t = kt' + k \frac{x'}{v} (1 - 1 + \frac{v^2}{c^2}) & t' = kt - k \frac{x}{v} (1 - 1 + \frac{v^2}{c^2}) \\
 t = kt' + k \frac{vx'}{c^2} & t' = kt - k \frac{vx}{c^2}
 \end{array}$$

Nur die **Lorentzgleichungen** erfüllen die Postulate der Relativitätstheorie.

Ein Beobachter **B** im Inertialsystem I beurteilt Ereignisse im Inertialsystem I':

$$\begin{array}{l}
 x' = k(x - vt) \\
 x' = y \\
 z' = z \\
 t' = k(t - \frac{vx}{c^2})
 \end{array}$$

Ein Beobachter **B'** im Inertialsystem I' beurteilt Ereignisse im Inertialsystem I:

$$\begin{array}{l}
 x = k(x' + vt') \\
 y = y' \\
 z = z' \\
 t = k(t' + \frac{vx'}{c^2})
 \end{array}$$

Aus den Lorentzgleichungen ergibt sich das relativistische Geschwindigkeitsadditionstheorem nach

$$v_x = \frac{x}{t} = \frac{k(x' + vt')}{k(t' + v \frac{x'}{c^2})} = \frac{x' + vt'}{t' + v \frac{x'}{c^2}} = \frac{v_x' + v}{1 + \frac{vv_x'}{c^2}}$$

Anmerkung: $v_x' = \frac{x'}{t'}$

Ein Beobachter **B im Inertialsystem I** misst die Lichtgeschwindigkeit!

Welche Geschwindigkeit ergibt sich für einen Beobachter **B' im Inertialsystem I'**?

Ansatz:

$$v_x = c$$

$$v_x' = ?$$

Einsetzen in das relativistische Additionstheorem:

$$c = \frac{v_x' + v}{1 + \frac{vv_x'}{c^2}} \Rightarrow c + \frac{vv_x'}{c} = v_x' + v \Rightarrow v_x' \left(1 - \frac{v}{c}\right) = c - v \Rightarrow v_x' = c$$

Der Beobachter **B'** misst natürlich auch die Lichtgeschwindigkeit!

Umgekehrt:

Ein Beobachter **B'** des bewegten **Inertialsystems I'** misst die Lichtgeschwindigkeit!

Welche Geschwindigkeit ergibt sich für einen Beobachter **B im Inertialsystem I**?

Ansatz:

$$v_x = c$$

$$v_x' = ?$$

Einsetzen in das relativistische Additionstheorem:

$$v_x = \frac{v + c}{1 + \frac{vc}{c^2}} \Rightarrow v_x = \frac{(v + c)}{(c + v)} c \Rightarrow v_x = c$$

Das relativistische Geschwindigkeitsadditionstheorem erfüllt also das Gesetz von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit!

Ist es möglich durch Addition der Geschwindigkeiten auf Überlichtgeschwindigkeit zu kommen?

Ein Beispiel soll die Antwort liefern!!

Eine Rakete (**Inertialsystem I'**) bewegt sich mit $v=0,9c$. In der Rakete wird ein Projektil in der Bewegungsrichtung mit $v_x'=0,9c$ abgeschossen.

Welche Geschwindigkeit v_x ergibt sich für einen **Beobachter B im Inertialsystem I**?

Ansatz:

$$v = 0,9c$$

$$v_x' = 0,9c$$

Einsetzen in das relativistische Additionstheorem:

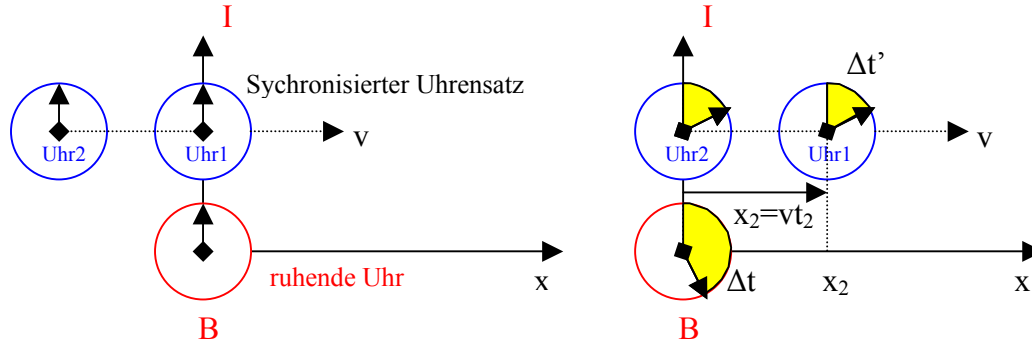
$$v_x = \frac{0,9c + 0,9c}{1 + \frac{0,9c * 0,9c}{c^2}} = \frac{1,8c}{1,81} = 0,99c$$

Unabhängig von den gewählten Geschwindigkeiten ist der Nenner stets größer als der Zähler. **Die Rechnung zeigt, dass es unmöglich ist, durch Addition der Geschwindigkeiten auf Lichtgeschwindigkeit zu kommen.**

Die Zeitdilatation

Gedankenexperiment:

Ein synchronisierter Uhrensatz bewegt sich mit der Geschwindigkeit v an einem Beobachter **B** im **Inertialsystem I** vorbei.



Zur Zeit $t=0$ koinzidiert (zusammenfallen, die gleiche x -Koordinate besitzen) die bewegte Uhr1 mit der ruhenden Uhr. Die Uhren werden zu diesem Zeitpunkt gestartet. Die Koinzidenz der Uhr2 mit der ruhenden Uhr stoppt das Uhrensatz. Der ruhende Beobachter misst an der ruhenden Uhr die Zeitspanne Δt , während der bewegte Beobachter an seinen Uhren die Zeitspanne $\Delta t'$ abliest.

Der Zusammenhang zwischen den Zeiten kann mit den Lorentzgleichungen hergestellt werden (B beurteilt das Intervall $\Delta t'$).

$$\Delta t = t_2 - t_1 = t_2 - 0 = t_2$$

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = t_2' - 0 = t_2' : x_2 = vt_2$$

$$t_2' = k(t_2 - \frac{vx_2}{c^2}) = k(t_2 - \frac{vvt_2}{c^2}) = kt_2(1 - \frac{v^2}{c^2}) = \frac{t_2(1 - \frac{v^2}{c^2})}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = t_2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$t_2 = \frac{t_2'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Also $t_2 > t_2'$!

Lehrsatz: **Bewegte Uhren gehen langsamer.**

Beispiel:

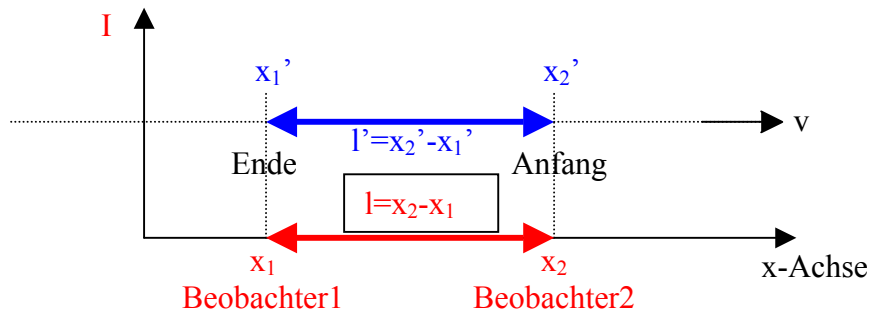
Myonen bewegen sich mit $v=0,99942c$. Ihre Lebensdauer beträgt in ihrem Ruhesystem $t'=1,52\mu s$. Welche Lebensdauer haben die Myonen für einen in einem Inertialsystem **I** ruhenden Beobachter B?

$$t = \frac{t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1,52\mu s}{\sqrt{1 - 0,99942^2}} = 29,36 * 1,52\mu s = 44,63\mu s$$

Die Längenkontraktion

Gedankenexperiment:

Entlang der x-Achse befinden sich **ruhende Beobachter** mit synchronisierten Uhren. Ein Maßstab der Länge l' und der Geschwindigkeit v bewegt sich an diesen Beobachtern vorbei. Es gibt zu jeder Zeit t **zwei Beobachter**, die gleichzeitig Anfang und Ende des Maßstabes registrieren. Der Abstand zwischen diesen Beobachtern entspricht der Länge l des Maßstabes im Inertialsystem **I**.



In dieser Zeichnung sehen die Längen gleich lang aus. Wir müssen allerdings akzeptieren, dass der Zusammenhang zwischen den Inertialsystemen mit den Lorentzgleichungen hergestellt wird. Somit ergibt sich für die Beobachter **B** im Inertialsystem **I** folgende Aussage:

$$l' = x_2' - x_1' = k \cdot (x_2 - v \cdot t) - k \cdot (x_1 - v \cdot t) = k \cdot (x_2 - x_1) = k \cdot l = \frac{l}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow$$

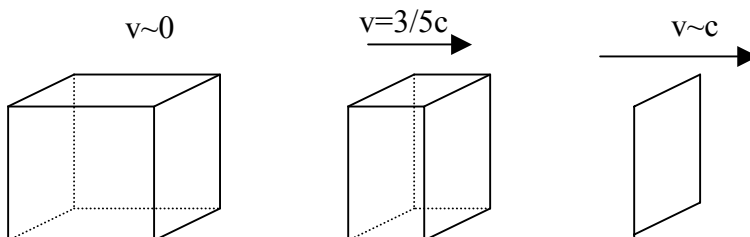
$$l = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot l'$$

$$l < l'$$

Bewegte Maßstäbe erscheinen einem ruhenden Beobachter verkürzt!

Bemerkung: Natürlich bleibt die Länge l' für mitbewegte Beobachter **B'** unverändert.

Beispiel: Ein Würfel wird beschleunigt!

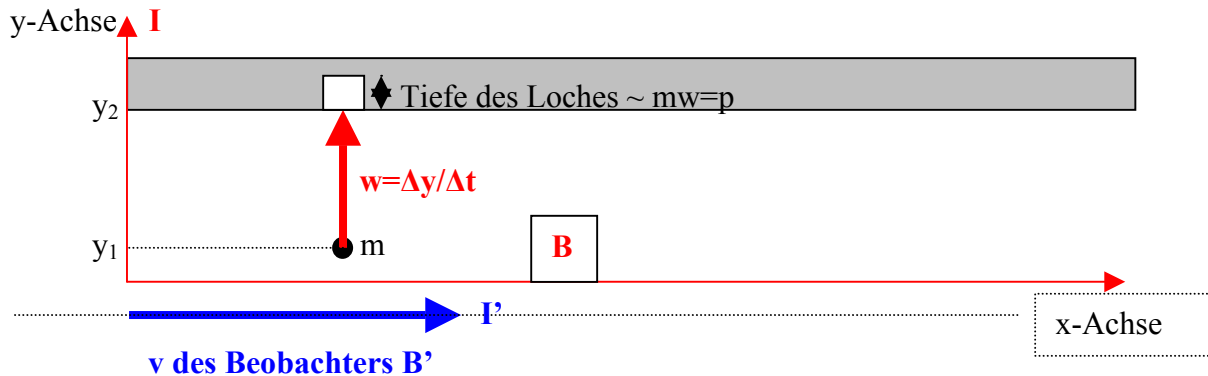


Längen in Bewegungsrichtung werden kontrahiert, Längen in senkrechten Richtungen zu v bleiben unverändert!

Die relativistische Massenzunahme

Gedankenexperiment:

Ein Objekt der Masse m bewegt sich mit der Geschwindigkeit w gegen eine feste starre Wand. Beim Aufprall entsteht ein Loch. Die Tiefe des Loches ist ein Maß für den übertragenen Impuls. Ein Beobachter B' bewegt sich parallel zur Wand mit der Geschwindigkeit v . Der Beobachter B ruht im Inertialsystem I .



B beurteilt das Ereignis: Das Objekt der Masse m bewegt sich mit der Geschwindigkeit w und überträgt auf die Wand den Impuls $p = mw$.

B' beurteilt das Ereignis: Das Objekt der Masse m' bewegt sich mit der Geschwindigkeit w' und überträgt auf die Wand den Impuls $p' = m'w'$.

$$w' = \frac{\Delta y'}{\Delta t'} = \frac{\Delta y}{\Delta t'} = \frac{\Delta y}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta t'} = \frac{\Delta y}{\Delta t} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = w \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow w' < w$$

Für B' und B gilt: $\Delta y = \Delta y'$, weil diese Längen senkrecht zur Bewegungsrichtung liegen und nicht kontrahiert werden. Genauso bleibt die Tiefe des Loches für beide Beobachter gleich, somit kann der Ansatz $p = p'$ gemacht werden. Allerdings stellt das Objekt für B' eine bewegte Uhr dar. Somit muss für B' die Zeitdilatation auftreten, die bewirkt, dass das Objekt um den Wurzelfaktor verlangsamt gegen die Wand läuft. Damit ergibt sich der Zusammenhang:

$$m'w' = m'w \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = mw$$

$$m' = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$m' = m_D$ dynamische Masse
 $m = m_0$ Ruhmasse

Nachweis: Protonen werden auf $v = 0,99999726c$ beschleunigt. Dabei steigt ihre Masse auf

$$m_D = \frac{m_0}{\sqrt{1 - 0,99999726^2}} = 427m_0$$

Um die Protonen auf ihrer Kreisbahn halten zu können, muss das Magnetfeld um den 427-fachen Wert erhöht werden.

Die relativistische kinetische Energie

Der Ausdruck $m_D = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ kann in eine Potenzreihe entwickelt werden. Der binomische

Lehrsatz zur Potenzreihenentwicklung lautet: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$. ($a=1$, $b=-v^2/c^2$, $n=-1/2$)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} &= (1+b)^{-\frac{1}{2}} = \binom{-\frac{1}{2}}{0} 1^{-\frac{1}{2}} b^0 + \binom{-\frac{1}{2}}{1} 1^{-\frac{3}{2}} b^1 + \binom{-\frac{1}{2}}{2} 1^{-\frac{5}{2}} b^2 + \dots = \\ &= 1 - \frac{1}{2}b + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{1 \cdot 2} b^2 + \dots = 1 - \frac{1}{2}b + \frac{3}{8}b^2 + \dots = 1 - \frac{1}{2}\left(-\frac{v^2}{c^2}\right) + \frac{3}{8}\left(-\frac{v^2}{c^2}\right)^2 + \dots = 1 + \frac{v^2}{2c^2} + \frac{3v^4}{8c^4} + \dots \end{aligned}$$

Die ersten zwei Terme dieser Reihenentwicklung sind von Bedeutung, der dritte Term ist klein von 4. Ordnung und ist vernachlässigbar.

$$\begin{aligned} m_D &= \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m_0 \left(1 + \frac{v^2}{2c^2} \right) \quad /* c^2 \\ m_D c^2 &= m_0 c^2 + \frac{m_0 v^2}{2} \end{aligned}$$

$$\mathbf{E_G = E_0 + E_{kin}}$$

Einstein leitet aus der Massenbeziehung den Energiesatz her!

$$\text{Für } v=0 \text{ ist } E_{kin}=0 \Rightarrow \mathbf{E_G = E_0 = m_0 c^2}$$

In der Ruhmasse m_0 ist der Energieinhalt $E_0 = m_0 c^2$ gespeichert.

Für die relativistische kinetische Energie ergibt sich:

$$E_{kin} = E_G - E_0 = (m_D - m_0)c^2 = \left(\frac{m_D}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) c^2$$